大問 1 の四番が解けないから、答えが知りたいという要望がいくつかあったので、略解を書きました。統計力学を学ぶと、箱にいれられた量子自由粒子系の温度 T における全エネルギーは、適切な分布関数 $f(E,T)$ を用いて $\int_0^\infty f(E,T)(dN(E)/dE)dE$ に比例することを学びますが、全エネルギーが体積に比例するためには、領域の形によらず固有値の漸近分布は一致するはずなので、以下のように具体的な形をふたつやるだけでは不十分です。一般にどうやって示すかを知りたい人は例えばクーラン・ヒルベルトの原書一巻、日本語版二巻の 6 章 4 節を参照して下さい。 立川、2014/4/7

大問 1 および略解

問 1. x, y, z 軸方向の幅がそれぞれ X, Y, Z の直方体の領域を考え、周期的境界条件

$$f(x,y,z) = f(x+X,y,z) = f(x,y+Y,z) = f(x,y,z+Z) \tag{1}$$

のもとで、ラプラシアン $\Delta = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$ の固有値問題

$$\Delta f(x,y,z) = -Ef(x,y,z) \tag{2}$$

を考える。一次独立な固有関数 f およびその固有値 E を全て求めよ。

解 1. 単に $\exp(2\pi i(n_x x/X + n_y y/Y + n_z z/Z))$ で、固有値は

$$E = 4\pi^2 \left[(\frac{n_x}{X})^2 + (\frac{n_y}{Y})^2 + (\frac{n_z}{Z})^2 \right]. \tag{3}$$

問 2. 1. の設定で、与えられた値 E 以下の一次独立な固有関数の数 $N_{X,Y,Z}(E)$ を求めよ。ただし、 X, Y, Z は充分大きいとして近似的に計算せよ。これが直方体領域の体積に比例することを確かめよ。

解 2. 軸の長さが $\sqrt{E}X/(2\pi)$, $\sqrt{E}Y/(2\pi)$, $\sqrt{E}Z/(2\pi)$ の楕円体の中にある格子点の数だから、E が十分大きければこれは

$$\frac{4}{3}\pi\frac{E^{3/2}}{(2\pi)^3}XYZ = \frac{E^{3/2}}{6\pi^2}(\text{領域の体積}). \tag{4}$$

問 3. 次に、原点中心半径 R の球体の領域を考え、極座標 (θ,ϕ,r) を用い、境界条件

$$f(\theta,\phi,R) = 0 \tag{5}$$

のもとで、ラプラシアンの固有値問題

$$\Delta f = -Ef \tag{6}$$

を考える。一次独立な固有関数 f およびその固有値 E をすべて求めよ。

解 3. 固有関数は [1]

$$f(\theta,\phi,r) = r^{-1/2} J_{l+1/2}(\sigma_{l,a}\frac{r}{R}) Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{7}$$

[1] これは講義でやる時間はなかったが、講義ノートの 7.3 に (多少誤植はあるが) 書いてある。持ちこみ可なのに解けなかった人が多かったのは嘆かわしい。

但し $\sigma_{l,a}$ は $J_{l+1/2}(x)$ の a 番目の零点、固有値は

$$E = (\frac{\sigma_{l,a}}{R})^2. \tag{8}$$

問 4. 3. の設定で、与えられた値 E 以下の一次独立な固有関数はの数 $N_R(E)$ を求めよ。ただし、R が充分大きいとして近似的に計算せよ。その際、ベッセル関数 $J_\nu(x)$ の正の実軸上の零点で τ と $\tau+\delta\tau$ の間にあるものの数 $n(\tau)\delta\tau$ は $\delta\tau$ が充分に大きく、ν と τ がさらに充分に大きくければ近似的に

$$n_\nu(\tau)\delta\tau = \begin{cases} \pi^{-1}\sqrt{1-(\nu/\tau)^2}\delta\tau & (\tau > \nu) \\ 0 & (\tau < \nu) \end{cases} \tag{9}$$

で与えられることを使って良い。結果が球体の体積に比例し、係数は 2. で求めたものと一致することを確認せよ。

解 4. 上の零点の分布関数から、固有関数をだいたい $J_l((\sigma/R)x)Y_{l,m}$ と書いて、存在するのは $\sigma > l$ の領域で、そこでは独立な固有関数は $\delta\sigma\delta l$ あたり

$$(2l+1)\frac{1}{\pi}\sqrt{1-(\frac{l}{\sigma})^2}\delta\sigma\delta l \tag{10}$$

だけある。$(2l+1)$ は l ごとの m の選び方。これを $\sigma < \sqrt{E}R$ の領域で積分すればよいので [2]、

$$N_R(E) \sim \int_{\sigma=0}^{\sigma=\sqrt{E}R} d\sigma \int_{l=0}^{l=\sigma} dl(2l)\frac{1}{\pi}\sqrt{1-(\frac{l}{\sigma})^2} \tag{11}$$

$$= \int_{\sigma=0}^{\sigma=\sqrt{E}R} d\sigma \frac{2\sigma^2}{3\pi} \tag{12}$$

$$= \frac{2E^{3/2}R^3}{9\pi} = \frac{E^{3/2}}{6\pi^2}(\frac{4}{3}\pi R^3). \tag{13}$$

これは確かに

$$= \frac{E^{3/2}}{6\pi^2}(\text{領域の体積}). \tag{14}$$

となって、(4) と同じである。

[2] この積分の計算は手でも出来るが、数式処理ソフトでやらせれば一瞬で出来る。テストで手計算でやらねばならないとは僕はひとことも言っていないのに注意！