

物理数学 II 講義ノート (2024年度)

松尾 泰

2025年2月2日

目次

第1章	Fourier 級数と Fourier 変換	5
1.1	Fourier 級数	5
1.2	Fourier 変換	7
第2章	Fourier 変換・級数を用いた偏微分方程式の解法	11
2.1	この章で扱う偏微分方程式	11
2.2	Poisson 方程式	11
2.3	熱伝導方程式	13
2.4	波動方程式	15
2.5	Green 関数	18
2.5.1	Poisson 方程式に対する Green 関数	18
2.5.2	波動方程式	19
第3章	直交多項式	23
3.1	分類	23
3.2	直交多項式の存在と一意性	24
3.3	Rodrigues の公式	25
3.3.1	I 型: Legendre, Jacobi など	25
3.3.2	II 型: Laguerre, Sonine など	26
3.3.3	III 型: Hermite 多項式	27
3.4	直交多項式が満たす微分方程式	27
3.4.1	微分方程式の具体形	29

3.5	規格化因子の計算	30
3.5.1	I型:Jacobi-Legendre	31
3.5.2	Type II : Laguerre-Sonine	33
3.5.3	Type III: Hermite	33
3.6	母関数	34
3.6.1	Hermite 多項式	35
3.6.2	Laguerre 多項式	35
3.6.3	Legendre 多項式	36
3.6.4	母関数の応用	37
3.7	漸化式	38
3.7.1	Hermite 多項式	38
3.7.2	Legendre 多項式	39
3.7.3	Laguerre 多項式	40
第4章	球面調和関数：直交多項式と対称性	42
4.1	調和振動子と Hermite 多項式	42
4.2	Legendre 陪関数	44
4.2.1	m の反転公式 (4.13) の証明	45
4.2.2	漸化式 (4.14,4.15) の証明	45
4.2.3	微分方程式 (4.16) の導出	46
4.2.4	内積の公式 (4.17) の証明	46
4.3	球面調和関数と角運動代数の表現	47
4.3.1	球対称な系における偏微分方程式の解法	47
4.3.2	角運動量の代数と球面調和関数	49
第5章	Bessel 関数	52
5.1	Bessel 関数の基本的な性質	52

5.2	波動方程式と Bessel 関数	58
5.2.1	$D = 2$ の場合	58
5.2.2	$D = 3$ の場合	59
5.2.3	球 Bessel 関数の性質	60
5.3	Bessel 関数の直交性	61
5.4	Bessel 関数の積分表示と漸近展開	64
5.4.1	その他の類似関数の積分表示と漸近形	65
第 6 章	微分方程式の級数解と超幾何関数	68
6.1	微分方程式の級数解と確定特異点	68
6.1.1	正則点の周りの展開	69
6.1.2	確定特異点の周りの展開	70
6.2	超幾何関数	73
6.2.1	超幾何関数とその類似関数について	73
6.2.2	超幾何微分方程式	75
6.3	Riemann の \mathcal{P} 関数と特異点の合流	78
6.3.1	Riemann の \mathcal{P} 関数	78
6.3.2	特異点の合流	80
6.4	超幾何関数の積分表示	82
6.5	超幾何関数の接続公式	86

この講義ノートは<http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~matsuo>よりダウンロードできる。板書の内容はこのノートに近いので、板書をそのままノートに取るよりは、この講義ノートと比較しながら重要なポイントは何か、疑問点はどこかを考えることに集中し、講義を聴講することが望ましい。また、この物理数学Iで学ぶ公式などについては同じ場所に物理数学Iの講義ノートもあるのでそちらも適宜参照してほしい。

参考書など： 講義の際の解説には時間的な限界もあるので証明の厳密性よりは、各公式が持つ意味、考え方を中心に解説している。証明については定理の内容をより鮮明に説明するために有用であれば紹介している。より数学的に深く系統的な知識を得たい学生は専門書を当たるべきであろう。以下にいくつかの参考書をあげる。

- 寺澤寛一「自然科学者のための数学概論」(増訂版 1983 岩波) かなり古いが名著。偏微分方程式の詳しい解法はその続編である「自然科学者のための数学概論」(応用編)に詳しい。
- 犬井鉄郎「特殊関数」(1962) 特殊関数の取り扱いで参考になっている。
- Arfken, Weber, and Harris “Mathematical Methods for Physicists” (Academic Press, 7th edition 2011) アメリカで標準的に用いられている教科書。現代的であるが1200ページくらいあり全てを読むのは無理。ただなんでも書いてあるし、必要な部分だけ読むことも可能なので Reference として便利。
- Whittaker and Watson “A course of modern analysis” (Cambridge 1902) 古典解析学の名著。最も詳しく信頼できる記述がなされている。
- この講義ノートの中では物理数学Iの知識は既知として取り扱っている。以前の講義ノートが上記のリンクよりダウンロードできる。

第1章 Fourier級数とFourier変換

1.1 Fourier級数

Fourier級数展開とは周期関数を三角関数の和として書き表す展開。 $f(x)$ を周期 2π の周期実関数とする。すなわち x を実変数として

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

この時 $f(x)$ のFourier級数展開とは

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1.1)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad (1.2)$$

のような展開をさす。ここで $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $c_n \in \mathbb{C}$, $c_n^* = c_{-n}$ となる。2行目の展開は複素Fourier級数と呼ばれることもある。

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

に注意すると

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = -i(c_n - c_{-n})$$

となる。

ここに出てきた三角関数は全て周期 2π であり、次のような直交性条件を満たす。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pi \delta_{n,m} \quad (1.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0 \quad (1.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} \pi \delta_{n,m} & n \neq 0 \text{ または } m \neq 0 \\ 2\pi & n = m = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

または

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{imx} dx = 2\pi \delta_{n+m,0} \quad (1.7)$$

これらの条件を用いると a_n, b_n, c_n の具体形を得ることが可能となる。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (1.8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (1.9)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (1.10)$$

コメント

- Fourier 級数展開を持つためには $f(x)$ は有限の点をのぞいて連続である必要がある。(Dirichlet 条件)
- 関数 $f(x)$ が不連続な点では級数は以下の値に極限を持つ。

$$\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (f(a + \epsilon) + f(a - \epsilon))$$

- 不連続な点の周りでは Fourier 級数は収束性が悪い。Fourier 級数の無限和を有限和（例えば最初の N 項のみたしあげる）で近似した場合、不連続点の周りの $1/N$ 程度の狭い領域で最大 18% 程度の誤差が生じる (Gibbs 現象)
- 周期 2π を持つ関数全体 \mathcal{H} を考えると線型空間（ヒルベルト空間）となる ($f(x), g(x) \in \mathcal{H}$ について $af(x) + bg(x) \in \mathcal{H}$)。展開 (1.1), (1.2) の存在は $\sin(nx), \cos(nx)$ (または e^{inx}) が \mathcal{H} の完備な基底であることを示している。なおこれらの基底は Hermite 演算子 $-\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であるが、Hermite 演算子の固有ベクトルで線型空間が張られる有限次元の線形代数のアナロジーが成立している。

例

- $f(x) = \pi - |x|$, ($-\pi \leq x \leq \pi$). それ以外の領域へは周期性を用いて拡張。 $f(x)$ は連続関数である。係数を (1.8–1.9) により計算すると

$$a_0 = \pi, \quad a_n = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} & n = \text{odd} \\ 0 & n = \text{even} \end{cases}, \quad b_n = 0$$

(b_n がゼロなのは $f(x)$ が偶関数であるため) $f_k(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx))$ (最初の $k + 1$ 項のみ和をとったもの) とし、 $f(x)$ と f_1, f_7 を比較したプロットが図 1.1 である。収束性が良い (一様収束) ことがわかる。

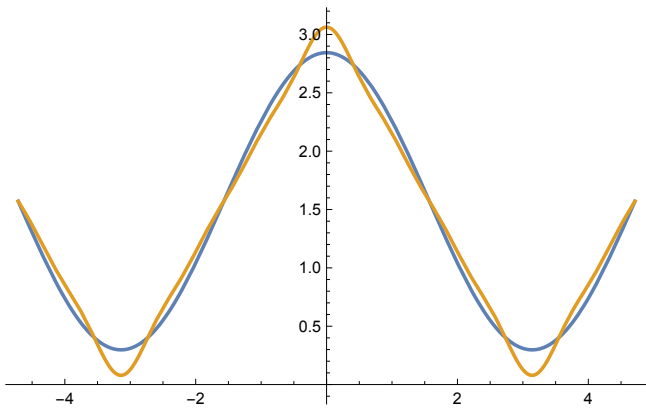


図 1.1: 三角波 : f_1 と f_7

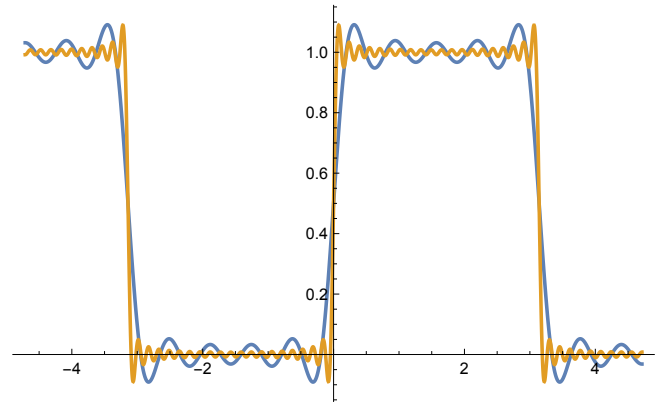


図 1.2: 矩形波 : f_{10} と f_{20}

- $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$

係数を計算すると

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

となる。よって Fourier 級数は

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin((2n-1)x)$$

この和を n までの有限和で切ったものを f_n としたとき f_{10}, f_{40} をプロットしたものの図 1.2 である。項数の割に収束性が悪く、不連続点の周りで (一様収束でない) ことがわかる。

- (2π 周期をもつ) デルタ関数 $f(x) = \delta(x - x_0)$, $-\pi < x_0 < \pi$. 式 1.10 より

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x - x_0) e^{-inx} = \frac{e^{-inx_0}}{2\pi}$$

これからデルタ関数を表す Fourier 級数は

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{in(x-x_0)} \quad (1.11)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x - x_0) \right) \quad (1.12)$$

となる。和を n までとった関数を $f_n(x)$ として f_5, f_{20} をプロットすると図 1.3 となる。

1.2 Fourier 変換

Fourier 級数における周期性の拘束を外したものが Fourier 変換である。 $(-\infty, \infty)$ で定義される絶対可積分 ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$) な任意の関数について定義される。(この拘束条件はかなり厳しく

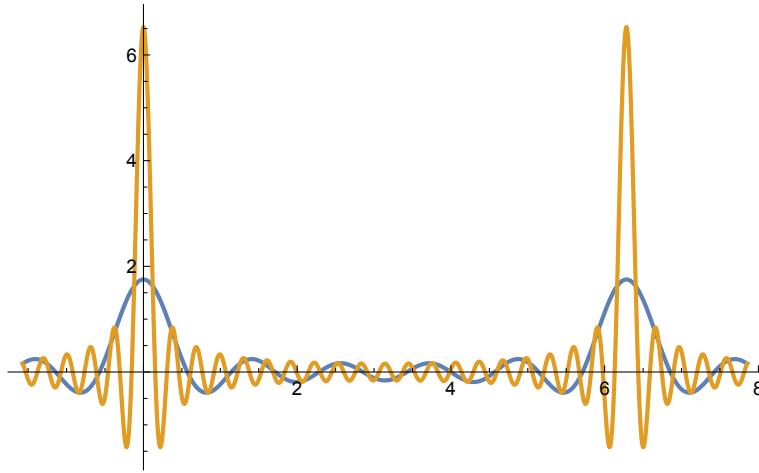


図 1.3: デルタ関数の Fourier 級数: f_5 と f_{20}

通常はもっと緩い条件で定義が行われる) この講義では以下のように Fourier 変換、逆変換を定義する。

- Fourier 変換:

$$\mathcal{F}(f)(k) = \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad (1.13)$$

- Fourier 逆変換

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx} dk \quad (1.14)$$

Fourier 級数との関係 この表式は Fourier 級数で周期 $2\pi L$ を無限にとった極限としても理解できる。簡単のため複素 Fourier 級数を周期 $2\pi L$ の関数に拡張したものを以下に書く。($x \rightarrow x/L$ という置き換えにより得られる)

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx/L} \quad (1.15)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi L}^{\pi L} e^{-inx/L} f(x) dx \quad (1.16)$$

ここで $L \rightarrow \infty$ の極限を以下のように取る。まず $k = n/L$ とすると和 $\sum_n \frac{1}{L}$ が $\int dk$ に置き換えられる。同時に $\tilde{f}(k) = 2\pi L c_n$ と書き換えると

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx/L} = L \int dk c_n e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

となる。逆変換の方は以上の定義を代入すると式 (1.16) が得られる。

デルタ関数 式 (1.15) と (1.16) を同時に使うと

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk \right) f(y) dy$$

これは

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} dk \quad (1.17)$$

であることを表している。また、

$$\mathcal{F}(\delta(x)) = 1 \quad (1.18)$$

つまりデルタ関数が定数 1 に変換されることはよく用いられる。

微分に関する性質

$$\mathcal{F} \left(\frac{df}{dx} \right) (k) = ik \mathcal{F}(f)(k) \quad \left(\frac{df}{dx} \leftrightarrow ik \tilde{f} \right) \quad (1.19)$$

つまり微分が ik の掛け算に置き換えられる。

証明：

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} e^{-ikx} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dx} (e^{-ikx}) dx \\ &= ik \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

同様にして

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{d\tilde{f}}{dk} \right) (x) = -ix \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(x) \quad \left(\frac{d\tilde{f}}{dk} \leftrightarrow -ix \tilde{f} \right)$$

- この関係式は量子力学における正準変数の関係式

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

と $p = \hbar k$ とすると同じである。つまり、量子力学における x 表示と p 表示の波動関数の対応関係は Fourier 変換で書き表せることになる。

- 後で見るように、微分が変数の掛け算で書けることは（偏）微分方程式を解く際にとっても有用である。

畳み込み (Convolution) 2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の畳み込み (Convolution) $(f \star g)(x)$ は以下のよう
に定義される。

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \quad (1.20)$$

Fourier 変換の元では以下の性質が成り立つ。(畳み込み定理)

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \quad (1.21)$$

証明：

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right) e^{-ik(y+(x-y))} dx \\ &\quad \text{\color{red} } x \text{ から } u = x - y \text{ に変数変換} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(u)e^{-ik(y+u)} dydu = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

第2章 Fourier変換・級数を用いた偏微分方程式の解法

2.1 この章で扱う偏微分方程式

この章では以下のような偏微分方程式を Fourier 変換（級数）を用いて求める。

- Poisson 方程式（時間を含まない偏微分方程式）

$$\Delta\phi(x) = -\rho(x), \quad \Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (2.1)$$

Δ はラプラシアンと呼ばれる。

- 熱伝導方程式（時間について1階の偏微分）

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta\phi \quad (2.2)$$

量子力学に出てくる Schrödinger 方程式も時間について一階微分であるが、後述するように係数に虚数単位 i があるか無いかで解の振る舞いは大きく異なる。

- 波動方程式（時間に関して2階微分）

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \Delta\phi \quad (2.3)$$

2.2 Poisson 方程式

このような問題に対しては (2.1) 式の右辺に現れる $\rho(\vec{x})$ がデルタ関数の場合に方程式を解き、その解を用いて一般の場合の解を書き表すのが便利である。以下では d 次元ベクトル量を $\vec{x} = (x^1, \dots, x^k)$ などと書くことにする。

方程式 $\Delta\phi(t, \vec{x}) = -\delta^{(d)}(\vec{x})$ の両辺を Fourier 変換する。ここでは空間次元 d を一般にしているので d 次元の Fourier 変換, 逆変換を用いる。

$$\mathcal{F}(\phi) = \tilde{\phi}(t, \vec{k}) = \int d^d x \phi(t, \vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (2.4)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{\phi}) = \phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \tilde{\phi}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (2.5)$$

また d 次元のデルタ関数は $\delta^{(d)}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^d \delta(x^i)$ を意味する。

方程式の両辺を Fourier 変換すると微分に関する性質 (1.19) とデルタ関数の Fourier 変換を用いることにより

$$\mathcal{F}(\Delta\phi) = -|\vec{k}|^2 \tilde{\phi}, \quad \mathcal{F}(\delta^{(d)}(\vec{x})) = 1, \quad |\vec{k}|^2 = \sum_{i=1}^d (k^i)^2$$

により波数空間における方程式

$$|\vec{k}|^2 \tilde{\phi}(t, \vec{k}) = 1$$

つまり代数方程式に帰着する。これを解くのは自明で解は

$$\tilde{\phi}(t, \vec{k}) = \frac{1}{|\vec{k}|^2}$$

となる。 $\phi(t, \vec{x})$ は Fourier 逆変換を用いて

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{|\vec{k}|^2} \quad (2.6)$$

と書き表される。 $d = 1, 2$ の場合はこの積分の評価は意外と難しい (後で述べる Bessel 関数の知識などが必要となる) ため、 $d = 3$ の場合の積分の評価をあからさまに述べることにする。

3次元空間で積分は回転についての対称性があるため $\vec{x} = (0, 0, r)$ のように置くことができる。 \vec{k} については極座標表示を用いて

$$k^1 = k \sin \theta \cos \varphi, \quad k^2 = k \sin \theta \sin \varphi, \quad k^3 = k \cos \theta \quad (2.7)$$

($k > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) のように書く。この時積分測度は $d^3 k = k^2 dk d(\cos \theta) d\varphi$ のようにかける。この座標系では積分は以下のように評価できる。

$$\begin{aligned} \phi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d\xi e^{ikr\xi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{kr} = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty d\eta \frac{\sin \eta}{\eta} \\ &= \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} \end{aligned}$$

ここで1行目から2行目は φ は非積分関数に含まれていないため単に因子 2π を出すことと $\cos\theta = \xi$ という変数変換を行った。2行目から3行目は ξ 積分の実行。4行目では $kr = \eta$ という変数変換を行った。

これから少し一般化した $\Delta_x \phi = -\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ の一般解は

$$\phi(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.8)$$

となる。(ここで $\Delta_x = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}$)

一旦この表式が得られると偏微分方程式(2.1)に現れる $\rho(\vec{x})$ が任意の場合の解も以下のように積分で書き表される

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3y G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) \quad (2.9)$$

証明：

$$\Delta\phi = \int d^3y \Delta(G(\vec{x}, \vec{y}))\rho(\vec{y}) = - \int d^3y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\rho(\vec{y}) = -\rho(\vec{x})$$

このように偏微分方程式の非斉次項や初期値などについてまずはデルタ関数の場合に解き、次にその積分(重ね合わせ)として一般の方程式の解を得るのは偏微分方程式の解法でよく現れる基本テクニックであり重要である。

$G(\vec{x}, \vec{y})$ のように偏微分方程式のソース項がデルタ関数の場合の解は**グリーン関数**と呼ばれる。

2.3 熱伝導方程式

熱伝導方程式(2.2)の $\phi(t, \vec{x})$ を d 次元の空間成分についてFourier変換した表式を

$$\tilde{\phi}(t, \vec{k}) = \int d^d x \phi(t, \vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

のようにおく。Poisson方程式と同様に空間方向をFourier変換した偏微分方程式は

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(t, \vec{k})}{\partial t} = -\nu |\vec{k}|^2 \tilde{\phi}(t, \vec{k}) \quad (2.10)$$

となる。ここで方程式は時刻 t についての一階常微分方程式となる。一階常微分方程式では初期値を決めるとそれ以降の時間発展は自動的に定まる。

以下では $d = 1$ の場合にデルタ関数を初期値とする熱伝導方程式を解く。つまり初期条件は $\phi(t, x)|_{t=0} = \delta(x)$, Fourier変換を行うと

$$\tilde{\phi}(t = 0, k) = 1$$

となる。この境界条件のもとで (2.10) を解くと

$$\tilde{\phi}(t, x) = e^{-\nu k^2 t} \quad (2.11)$$

となる。最後にこの表式を逆変換して答えを求める。

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{\phi}(t, x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - \nu k^2 t} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t(k - ix/(2\nu t))^2 - x^2/(4\nu t)} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\nu t}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

この変形で 3 行目から 4 行目へは指数関数の肩の因子の平方完成

$$-\nu k^2 t + ikx = -\nu t \left(k - \frac{ix}{2\nu t} \right)^2 - \frac{x^2}{4\nu t}$$

と複素平面上のガウス積分の公式

$$\int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} e^{-\alpha k^2} dk = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \text{for } \alpha > 0$$

を用いた。以上の計算は $t > 0$ という仮定のもとで計算されている。 $t < 0$ の場合には最後のガウス積分が $x = \pm\infty$ で発散する形になるため定義できないことに注意する。**つまり熱伝導方程式を $t < 0$ に対して解くことは本質的にできない。**

Schrödinger 方程式の場合 自由粒子の Schrödinger 方程式は熱伝導方程式とほぼ同じ形をしている。

$$-i\hbar \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

つまり

$$\nu \rightarrow -i \frac{\hbar}{2m}$$

と置くと同じ方程式になる。波数空間における解 (2.11) において ν が実数の場合は時間的に減衰する答えを与えていたのと対称的に時間的に振動する解となり Fourier 逆変換が t の正負に関わらず解が存在するのが大きく異なる点である。

この意味で熱伝導方程式と Schrödinger 方程式は偏微分方程式において時間微分が一階であるという点では似通っているが、物理的な内容としては全く異なる系を表していることになる。

2.4 波動方程式

以下では簡単のため空間 1 次元の場合の波動方程式を考える。

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(t, x) \quad (2.14)$$

時間方向の境界条件 これまでの例と同様に空間方向について Fourier 変換すると Fourier 成分についての方程式は

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(t, k)}{\partial t^2} = -k^2 \tilde{\phi}(t, k) \quad (2.15)$$

となる。これは各 k に対して分離した時間 t についての常微分方程式となる。解は

$$\tilde{\phi}(t, k) = C_+(k)e^{ivkt} + C_-(k)e^{-ivkt} \quad (2.16)$$

となり、積分定数 $C_{\pm}(k)$ はある時刻、例えば $t = 0$ における初期条件 $\tilde{\phi}(t, \vec{k})|_{t=0}$, $\frac{\partial \phi}{\partial t}|_{t=0}$ により一意に定まる。

空間方向の境界条件の与え方 これまでの例では空間方向は無限に広がっている場合を考えてきた。この節では空間的に限定された場合にどのように解を与えるのかも含めて考察したい。

以下では 3 つの場合分けを行う。

1. 有限の場合、例えば $x \in [0, 2\pi]$
2. 半無限大、例えば $x \in [0, \infty)$
3. 両側に無限大、 $x \in (-\infty, \infty)$

の三種類の取り方が可能である。また端点における境界条件も

- Neumann 型境界条件（開放端）： $\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x=\text{端点}} = 0$
- Dirichlet 型境界条件（固定端）： $\phi(x = \text{端点}, t) = \text{定数}$
- 周期的境界条件：例えば周期 2π の場合 $\phi(x + 2\pi, t) = \phi(x, t)$

のように 3 通りの取り方ができる。

以下ではいくつかの周期的境界条件の場合に波動方程式の解を求める。時間方向の境界条件としては簡単のため

$$\phi(x, t = 0) = \delta(x - x_0), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t = 0) = 0 \quad (2.17)$$

を考えることにする。

周期的境界条件 周期 $2\pi L$ の場合を考える。境界条件を満たす関数は複素 Fourier 級数を用いて

$$\phi(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx/L}$$

と書くことができる。この表式を (2.14) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \sum_n \left(\frac{1}{v^2} \frac{d^2 c_n}{dt^2} \right) e^{inx/L} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= - \sum_n \left(\frac{n}{L} \right)^2 c_n(t) e^{inx/L} \end{aligned}$$

$e^{inx/L}$ の係数を比較するとすると、2階の常微分方程式

$$\frac{1}{v^2} \frac{d^2 c_n}{dt^2} = - \left(\frac{n}{L} \right)^2 c_n \quad (2.18)$$

が得られる。

次に時間方向の初期値問題を考える。 $t = 0$ における初期条件を

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(0) e^{inx/L} \\ 0 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{dc_n}{dt}(0) e^{inx/L} \end{aligned}$$

とおく。ここで δ 関数の Fourier 級数展開

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi L} \sum_n e^{in(x-x_0)/L}$$

を用いると $c_n(t)$ の初期値が

$$c_n(0) = \frac{1}{2\pi L} e^{-inx_0/L}, \quad \frac{dc_n}{dt}(0) = \frac{1}{2\pi L} e^{-inx_1/L} \quad (2.19)$$

のように定まる。結局偏微分方程式は無数個の常微分方程式 (2.18) を初期値 (2.19) の下で解くことに帰着する。

(2.18) の一般解は

$$c_n(t) = p_n \cos\left(\frac{nvt}{L}\right) + q_n \sin\left(\frac{nvt}{L}\right)$$

ここで p_n, q_n は任意の定数。初期値 (2.19) と合うようにこれらの定数を選ぶと

$$p_n = \frac{1}{2\pi L} e^{-inx_0/L}, \quad q_n = 0$$

となる。以上をまとめると初期値と境界条件を満たす解は以下のようにまとまる。

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2\pi L} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{nvt}{L}\right) \cos\left(\frac{n(x-x_0)}{L}\right) \right) \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2} (\delta(x-x_0+vt) + \delta(x-x_0-vt)) = G(x, t) \quad (2.21)$$

つまりデルタ関数は左右にスプリットし速度 v で移動する。

初期条件をより一般的な

$$\phi(t=0, x) = \rho(x), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(t=0, x) = 0,$$

とした場合には対応する解は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) \rho(x) dx \\ &= \frac{1}{2} (\rho(x+vt) + \rho(x-vt)) \end{aligned}$$

開放端境界条件の場合 両端 $x=0, \pi L$ で開放端の境界条件、すなわち

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0, \pi L} = 0, \quad (2.22)$$

という境界条件の場合を考察する。この条件を満たす関数は、この境界条件を満たす三角関数 $\cos(nx/L)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) で Fourier 級数展開される。すなわち、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx/L) \quad (2.23)$$

基底 $\cos(nx/L)$ の間の直交関係式

$$\int_0^{\pi L} \cos(nx/L) \cos(mx/L) dx = \begin{cases} L & n=m=0 \text{ の場合} \\ L/2 & n=m>0 \text{ の場合} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

を用いると係数 a_n は以下のように求められる。

$$a_n = \frac{2}{\pi L} \int_0^{\pi L} \cos(nx) f(x) dx \quad (2.24)$$

さて $\phi(t, x)$ を波動方程式 (2.14) の解で、初期値として周期的境界条件のときと同じ形、(2.17)、た

だし、 $0 < x_0 < \pi L$ を取る。この時の $\phi(t, x)$ の展開、係数の方程式、初期条件は下記のようにになる。

$$\begin{aligned}\phi(t, x) &= \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos(nx/L) \\ \frac{d^2 a_n}{dt^2}(t) &= -\left(\frac{nv}{L}\right)^2 a_n(t) \\ a_n(0) &= \frac{2}{\pi L} \cos(nx_0/L) \\ \frac{da_n}{dt}(0) &= 0\end{aligned}$$

係数に対する微分方程式を解くと

$$a_n(t) = \frac{2}{\pi L} \cos(nx_0/L) \cos\left(\frac{nv}{L}t\right)$$

となるので求める解は

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\pi L} (1 + 2 \cos(nx_0/L) \cos(nvt/L) \cos(nx/L)) \quad (2.25)$$

$$= \quad (2.26)$$

2.5 Green 関数

2.5.1 Poisson 方程式に対する Green 関数

すでに述べている通り右辺がデルタ関数の場合のポアソン方程式

$$\Delta G(\vec{x}) = -\delta^{(d)}(\vec{x}) \quad (2.27)$$

に対する解をラプラス演算子に対する Green 関数と呼ぶ。 $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ における境界条件が

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} G(\vec{x}) = 0$$

となる場合の解について議論が行われた。

$d = 3$ の場合にはすでに Fourier 変換を用いて求めた (2.8)。他の次元では

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x}|^{-1} \quad d = 2 \quad (2.28)$$

$$= \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{2\pi^{d/2}} |\vec{x}|^{2-d} \quad d \geq 3 \quad (2.29)$$

などのようになる。これらの式を示すためには

- $\Delta G(\vec{x}) = 0$ for $\vec{x} \neq 0$
- $s_d \partial_r G(\vec{x})|_{r=1} = -1$ 。ここで s_d は $d-1$ 次元の超球面 $\sum_{i=1}^d (x_i)^2 = 1$ の超面積で

$$s_d = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}$$

となる。(物理数学I参照) この方程式は d 次元における発散定理

$$\int_{V_d} d^d x \Delta G(\vec{x}) = \oint_{S_{d-1}} \nabla G(\vec{x}) dS_{d-1}$$

を用いている。

この2つを示す必要がある。最初の条件はラプラシアン極座標表示により示すことができる。2番目の式は発散定理と高次元球面の表面積公式が必要となる。

2.5.2 波動方程式

以下では時間を含む Green 関数の例として波動方程式を取り上げる。詳しい解説は寺沢寛一「自然科学者のための数学概論」応用編にあるので関心がある学生はそちらを参考してほしい。

波動方程式にソース項がある場合はこれまでと同様それをデルタ関数としたものをまず求める必要がある。

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta^{(d)} \right) G(t, \vec{x}) = -\delta(t) \delta^{(d)}(x) \quad (2.30)$$

右辺に時間に依存するデルタ関数を含めることにより時間的に変動するソースに対応する場を計算することが可能となる。 $\tilde{t} = vt$ とおくと方程式は

$$\square G = v \delta(\tilde{t}) \delta^{(d)}(\vec{x}), \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} - \Delta^{(d)}(\vec{x}) \quad (2.31)$$

以下では \tilde{t} を用いて計算する。(2.31) の右辺の v は以下の計算ではしばらく落として計算し、最後に v を復活させる。ポアソン方程式の場合と同様に右辺を $-\rho(t, \vec{x})$ に置き換えた場合の解は

$$\phi(t, x) = \int ds d^{(d)}y G(t-s, \vec{x}-\vec{y}) \rho(s, \vec{y}) \quad (2.32)$$

とかけることに注意する。

Fourier 変換の変数を

$$t \rightarrow \omega, \quad \vec{x} \rightarrow \vec{k}$$

のように書くと、 $G(t, \vec{x})$ の Fourier 変換 $\tilde{G}(\omega, \vec{k})$ に対する方程式は

$$(-\omega^2 + \vec{k}^2) \tilde{G}(\omega, \vec{k}) = -1 \quad (2.33)$$

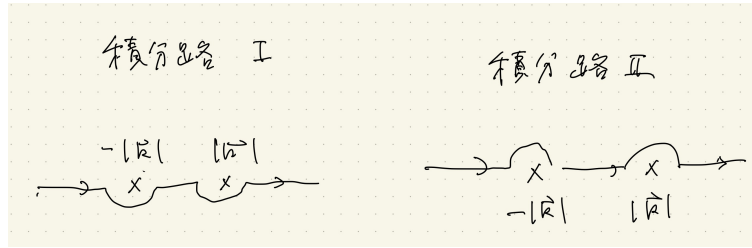


図 2.1: 積分路

すなわち、

$$\tilde{G}(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{\omega^2 - \vec{k}^2} \quad (2.34)$$

となる。Fourier 逆変換を用いるとグリーン関数は以下の積分で与えられることがわかる。

$$G(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int d\omega d^d k e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \frac{1}{\omega^2 - \vec{k}^2} \quad (2.35)$$

この積分は時間成分 ω と空間成分 \vec{k} を含んでいるので、まず時間成分についての積分を行う。

この積分で直ちに問題になることは積分路上に極が $\omega = \pm|\vec{k}|$ に存在している点である。このため何らかの工夫を行わない限り積分は意味を持たない。ここではこの問題を解決するために複素積分の方法を用いることにする。すなわち積分変数 ω を複素変数として再定義することにより特異点を上下に避けることにより発散の問題を解決することができる。(図 2.1 参照) 次に複素積分で積分の値を求めるためには留数積分の形、すなわち積分路を閉じなくてはならない。物理数学 I で学ぶように被積分関数に指数関数が含まれている場合にはそれが収束する方向に積分路を閉じることができる (Jordan の補題)。指数関数の肩に載っている表式は $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ と書くと $i\omega t = -\omega_2 + i\omega_1 t$ となるので

- $t > 0$ の場合には上半平面
- $t < 0$ の場合には下半平面

に積分の余分な寄与を与えることなく積分路を閉じることができる。(図 2.2) t の正負により積分路が変わるため拾う特異点が変わる。

- 積分路 I: $t > 0$ の場合は $\omega = \pm|\vec{k}|$ の極を拾い積分がゼロでない。逆に $t < 0$ の場合は極が無い場合になる。
- 積分路 II: $t < 0$ の場合は $\omega = \pm|\vec{k}|$ の極を拾い積分がゼロでない。逆に $t > 0$ の場合はゼロになる。

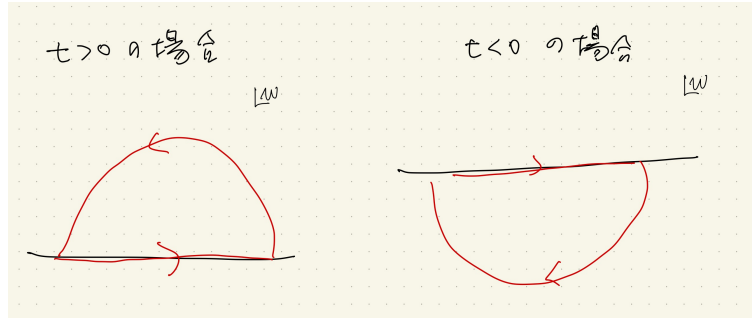


図 2.2: 積分路 (t による場合分け)

これら二つの振る舞いにより対応する物理的な状況は大きく異なる。公式 (2.32) を思い出すと

- 積分路 I を取った場合には $t - s > 0$ 、すなわち $\rho(s, \vec{y})$ のうち $s < t$ 、すなわち過去の事象のみが波動方程式の解に寄与する。
- 積分路 II を取った場合には $t - s < 0$ 、すなわち $\rho(s, \vec{y})$ のうち $s > t$ 、すなわち未来の事象のみが波動方程式の解に寄与する。

物理学における因果律を考えた場合積分路 I は物理的と言えるが積分路 II はそうでない。つまり物理的に取るべき積分路は I となる。一方数学的には方程式 (2.30) の解はどちらの積分路を用いても良い。これは方程式 (2.30) が時間の符合の入れ替えに対して不変であるため時間の方向が決まらないことに起因する。積分路 I を取った場合のグリーン関数を遅延ポテンシャル (retarded potential)、積分路 II を取った場合は先進ポテンシャル (advanced potential) と呼ばれる。

ちなみに極の避け方は左右同じ方向にする必要はない。例えば $\omega = |\vec{k}|$ (正エネルギー) については下に避け、 $\omega = -|\vec{k}|$ (負エネルギー) については上に避けるようなことも可能である。場の量子論ではこのような避け方が必然的に導かれるが、この場合のグリーン関数は Feynman propagator (ファインマン伝搬関数) と呼ばれる。

以上のようにさまざまな選択肢があるが以下では遅延ポテンシャルの場合について計算を進める。以下簡単のため $d = 3$ ととる。留数積分で $t > 0$ の場合の評価を行うと $t > 0$ に対して

$$G(t, \vec{x}) = \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int d^3k \frac{e^{i|\vec{k}|t} - e^{-i|\vec{k}|t}}{2|\vec{k}|} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (2.36)$$

$t < 0$ に対しては $G(t, \vec{x}) = 0$ となる。回転対称性を用い $\vec{x} = (0, 0, r)$ ($r = |\vec{x}|$) と書く。 \vec{k} については

極座標表示 (2.7) をとり積分を実行する。

$$\begin{aligned}
G(t, \vec{x}) &= \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{2\pi d\varphi} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{k} e^{ikr\xi} \quad (\xi = \cos \theta) \\
&= \frac{i}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 d\xi \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{k} e^{ikr\xi} \\
&= \frac{1}{2r(2\pi)^2} \int_0^\infty dk (e^{ikt} - e^{-ikt})(e^{ikr} - e^{-ikr}) \\
&= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{ik(t+r)} - e^{-ik(t-r)}) \\
&= \frac{2\pi}{8\pi^2 r} (\delta(t+r) - \delta(t-r)) \\
&= -\frac{1}{4\pi r} \delta(t-r)
\end{aligned}$$

v を復活させると $t \rightarrow tv$, $G \rightarrow vG$ と書き換え最終的な表式を得る。

$$G(t, \vec{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{v}\right) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

より一般的な方程式

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi(t, \vec{x}) = -\rho(t, \vec{x}) \quad (2.38)$$

の解は

$$\phi(t, \vec{x}) = - \int_{-\infty}^t ds \int d^3y \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \delta\left(t - s - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{v}\right) \rho(s, \vec{y}) \quad (2.39)$$

$$= - \int d^3y \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \rho\left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{v}, \vec{y}\right) \quad (2.40)$$

この式の解釈は $\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}$ が \vec{y} にある単位電荷が \vec{x} に引き起こす Coulomb ポテンシャルで, ρ の中の時刻がずれているのは波が \vec{y} から \vec{x} に到達するための時間と解釈される。

第3章 直交多項式

この章では直交多項式についてある程度統一した取り扱いを行う。詳しい解説は犬井鉄郎「特殊関数」にあるのでより詳しく知りたい学生はそちらを勉強してほしい。

3.1 分類

直交多項式とはその名前が示す通り、「特定の積分で決められた関数の関数の内積について互いに直交する多項式」を意味している。ここで「積分で定義される内積」とは多項式全体の空間 $\mathbb{C}[x]$ に含まれる任意の元 $u(x), v(x)$ について

$$(u, v) = \int_I \rho(x)u(x)v(x)dx \quad (3.1)$$

のように定義される。ここで I は積分領域を表し、 $\rho(x)$ は積分の重みを表す関数である。直交多項式 $P_n(x)$ は n 次の多項式 ($n = 0, 1, 2, \dots$) で

$$(P_n, P_m) = 0, \quad n \neq m \quad (3.2)$$

を満たすものとして定義される。これらは Fourier 級数展開における基底関数 $\cos(nx), \sin(nx)$ のように、Hermite 演算子の固有関数で一般の関数を書き表すための基底として用いられる。

積分区間の取り方により直交多項式は3種類に分類される。(表 3.1) 各積分区間について最も一般的なものはそれぞれ Jacobi 多項式、Sonine 多項式、Hermite 多項式でありそのほかの直交多項式はその特殊化により得られる。例えば Legendre 多項式は Jacobi 多項式から $\alpha = \beta = 0$ とすることにより得られる。

これらの直交多項式のうち物理で出てくるのは Legendre 多項式 (角運動量の量子化)、Laguerre 多項式・陪関数 (水素原子の量子化)、Hermite 多項式 (調和振動子) である。より一般的なものについてはあとで触れる超幾何関数や合流型超幾何関数といった特殊関数全体の根源とも言える関数との関連で導入している。

以下の節ではこれら3つのタイプの直交多項式を I 型 ($[-1, 1]$ の積分で定義されるもの)、II 型 ($[0, \infty)$ の積分で定義されるもの)、III 型 ($(-\infty, \infty)$ で定義されるもの) とまとめて呼ぶことにする。

積分区間 I	重み関数 $\rho(x)$	多項式名称
$[-1, 1]$	1 $(1 - x^2)^{-1/2}$ $(1 - x^2)^\alpha, \alpha > -1$ $(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, \alpha, \beta > -1$	Legendre 多項式 Tschebyscheff 多項式 Gegenbauer 多項式 Jacobi 多項式
$[0, \infty)$	e^{-x} $x^k e^{-x}$ (k は自然数) $x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1$	Laguerre 多項式 Laguerre 陪関数 Sonine 多項式
$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	Hermite 多項式

表 3.1: 直交多項式の分類

なおこの呼び方は本講義に限定されるものであり、一般的に用いられている用語でないことを注意しよう。

Tschebyscheff 関数は Fourier 級数に関係している。つまり $x = \cos \theta$ と置くと $dx = -\sin \theta d\theta = -(1 - x^2)^{1/2} d\theta$ となるので任意の多項式 $f(x)$ に対して

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-1/2} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta) d\theta \quad (3.3)$$

この内積に対応する直交多項式は $\cos \theta$ の多項式で互いに直交するもの、すなわち $\cos(n\theta)$ を $\cos \theta$ を用いて書き換えたものとなる。

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta) \quad (3.4)$$

例えば $\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1$ と書けるので $T_n(x) = 2x^2 - 1$ となる。

3.2 直交多項式の存在と一意性

この説では (3.2) で定義される直交多項式が存在し、規格化因子を除いてユニークに定まることを示す。ここでは低次のものから出発して高次のものを順番に決めていく Gram-Schmit の対角化の手法を用いる。前節で定義された内積に対しては任意の多項式 u, v についての (u, v) は有限であることに注意する。(積分に発散が現れない)

まず $P_0(x)$ はゼロ次の多項式、すなわち定数であるので規格化を除くとユニークであることは明らか。この節では規格化を決めるため x の最高冪の係数を 1 と置くことにすると $P_0 = 1$ となる。次に $P_1(x)$ は $x + a$ と置くと未定定数 a は条件 $(P_1, P_0) = 0$ により一意に定まる。以下、同様にしてい

くと P_n には n の未定係数が含まれるが、条件の方も $(P_n, P_0) = \dots = (P_n, P_{n-1}) = 0$ のように n 個あり全ての未定係数が一意に定まる。

以上の分析により任意の n に対する直交多項式は必ず存在していて、各 n について規格化因子を除いて一意に定まることがわかる。

3.3 Rodrigues の公式

Gram-Schmidt の方法で直交多項式の存在や一意性については示すことができたが、いちいち低次の方から計算する必要があり、閉じた形になっていないので実際的には使えない。一方で解析的な閉じた形を与えるのが Rodrigues の公式である。

Rodrigues の公式では重み関数 $\rho(x)$ 以外に 2 次以下の多項式 $Q(x)$ が用いられる。 $Q(x)$ の具体的な表式は I 型, II 型, III 型で異なる。Rodrigues の公式は以下のように与えられる。

$$P_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\rho(x)Q(x)^n). \quad (3.5)$$

以下ではこの形で与えられた表式が

- n 次の多項式を定義していること。
- 互いに直交していること、つまり互いに異なる自然数 n, m に対して $(P_n, P_m) = 0$

であることを示す。前の節で示したように P_n は比例係数を除いて一意なのでこれらの性質が確かめられれば、 P_n が求める多項式であることになる。

3.3.1 I 型: Legendre, Jacobi など

この場合 $Q(x) = 1 - x^2$ とする。Rodrigues の公式は、 α, β に制限がない一般の場合には以下のように書ける。

$$P_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}) \quad (3.6)$$

n 次の多項式であること 高階微分についての以下の公式を用いる。

$$\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{d^\ell}{dx^\ell} f(x) \frac{d^{n-\ell}}{dx^{n-\ell}} g(x) \quad (3.7)$$

$\frac{d^\ell}{dx^\ell}(1-x)^{\alpha+n} \propto (1-x)^{n+\alpha-\ell}$ などに気をつけると (3.6) は以下のように書き換えられる。

$$P_n = \sum_{\ell=0}^n (\text{係数})(1-x)^{n-\ell}(1+x)^\ell \quad (3.8)$$

ここで (係数) は x を含まぬ定数である。この表式が n 次の多項式を表していることは明らかである。

直交性 $q(x)$ を任意の $n-1$ 次以下の多項式とすると

$$(P_n, q) = \int_{-1}^1 \rho(x) \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\rho(x)Q(x)^n) q(x) dx \quad (3.9)$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n} \right) q(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n} \right) \frac{d}{dx} q(x) dx \quad (3.10)$$

1 行目では積分の重み因子 $\rho(x)$ と Rodrigues 公式の冒頭の因子 ρ^{-1} が相殺していることに注意。2 行目にいく際は部分積分を用いているが境界項は $\alpha, \beta > -1$ という条件によりゼロになる。以下同様に n 回部分積分を行うと

$$(P_n, q) = (-1)^n \int_{-1}^1 \left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n} \right) \frac{d^n}{dx^n} q(x) dx = 0 \quad (3.11)$$

となる。 P_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) は全て $n-1$ 次以下の多項式であるため $(P_n, P_m) = 0$ ($n > m$) が示された。内積は二つの関数の入れ替えに対して対称なので求める直交性が得られたことになる。

3.3.2 II 型: Laguerre、Sonine など

この場合 $Q(x) = x$ と置く。Rodrigues の公式は最も一般的な場合は

$$P_n(x) = x^{-\alpha} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}) \quad (3.12)$$

となる。

n 次の多項式であること I 型と同じく微分についての 2 項定理 (3.7) を用いると

$$P_n(x) = \sum_{\ell=0}^n (\text{定数}) x^{n-\ell}$$

という式を示すことができる。これは P_n が n 次の多項式であることを示している。

直交性 I型の場合の証明と同様に $q(x)$ を $n - 1$ 次以下の多項式とし (P_n, q) を計算する。全く同じように部分積分を繰り返すことにより証明することができる。

3.3.3 III 型：Hermite 多項式

この場合は $Q(x) = 1$ と置く。Rodrigues の公式は以下のようなになる。

$$P_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (3.13)$$

この表式が n 次の多項式を与えることと直交性はこれまでの議論と全く並行に行うことができる。

3.4 直交多項式が満たす微分方程式

この節では Rodrigues の式 (3.5) で書き表される直交多項式 $P_n(x)$ 以下のような 2 階の微分方程式を満たすことを示す。

$$\mathcal{H} P_n = \lambda_n P_n, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} \left(\rho(x) Q(x) \frac{d}{dx} \right) = Q(x) \frac{d^2}{dx^2} + P_1(x) \frac{d}{dx} \quad (3.15)$$

$$\lambda_n = n \left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{n-1}{2} \frac{d^2Q}{dx^2} \right) \quad (3.16)$$

この節では以下の 4 つのステップで証明を行う。

ステップ 1 \mathcal{H} を n 次の多項式に作用させると、 n 次の多項式が与えられる。

証明： $\mathcal{H} = Q(x) \frac{d^2}{dx^2} + P_1(x) \frac{d}{dx}$ という表式を用いる。 n 次の多項式に作用すると第 1 項はまず 2 階微分で多項式の次数を 2 つ下げたのち 2 次以下の多項式を書けるので n 次以下の多項式を出す。第 2 項についても同じ議論。

ステップ 2 \mathcal{H} は関数の内積について Hermite, すなわち $(u, \mathcal{H}v) = (\mathcal{H}u, v)$ という関係式が成り立つ。

証明：具体的に計算すると部分積分を用いることにより

$$\begin{aligned}
 (u, \mathcal{H}v) &= \int_I u(x) \frac{1}{\rho} \frac{d}{dx} \left(\rho Q \frac{dv}{dx} \right) \rho(x) dx \\
 &= u(x) \rho Q \frac{dv}{dx} \Big|_{\partial I} - \int_I \frac{du}{dx} \rho Q \frac{dv}{dx} dx \\
 &= - \frac{du}{dx} \rho Q v \Big|_{\partial I} + \int_I \frac{d}{dx} \left(\rho Q \frac{du}{dx} \right) v(x) dx \\
 &= (\mathcal{H}u, v)
 \end{aligned}$$

ここで ∂I は積分領域 I の境界を表す。これらの境界からの寄与は $\rho(x)Q(x)$ が境界でゼロになるためゼロになる。

ステップ 3 P_n は \mathcal{H} の固有関数である。

証明：帰納法を用いる。 $n = 0$ の場合はステップ 1 より明らかである。 n について $n = 0, 1, \dots, m-1$ まで仮定が成立したとする。つまり $\mathcal{H}P_n = \lambda_n P_n$ ($n = 0, 1, \dots, m-1$)

この時ステップ 1 より

$$\mathcal{H}P_m = \sum_{\ell=0}^m c_\ell P_\ell$$

のように書けるはず。この時 $\ell = 0, 1, \dots, m-1$ について

$$(P_\ell, \mathcal{H}P_m) = \sum_{j=0}^m c_j (P_\ell, P_j) = c_\ell (P_\ell, P_\ell)$$

一方ステップ 2 で示した \mathcal{H} のエルミート性により

$$(P_\ell, \mathcal{H}P_m) = (\mathcal{H}P_\ell, P_m) = \lambda_\ell (P_\ell, P_m) = 0$$

この二つの計算により $\ell = 0, \dots, m-1$ について $c_\ell = 0$ が示された。結局 ℓ の和で $\ell = m$ だけが残り

$$\mathcal{H}P_m = c_m P_m$$

これは P_m が \mathcal{H} の固有関数であることを示している。

ステップ 4 固有値が (3.16) で与えられる。

証明： x のべきが最高次の係数を比較する。 $P_n = d_n x^n + \dots$, $Q(x) = ax^2 + \dots$, $P_1(x) = bx + \dots$

と置く。この時

$$\begin{aligned}\mathcal{H}P_n &= \left[(ax^2 + \dots) \frac{d}{dx^2} + (bx + \dots) \frac{d}{dx} \right] (d_n x^n + \dots) \\ &= d_n (an(n-1) + bn)x^b + \dots \\ &= \lambda_n (d_n x^n + \dots)\end{aligned}$$

x^n の係数を比較すると求める式が得られる。

3.4.1 微分方程式の具体形

I 型 最も一般的な Jacobi については $P_1(x) = \beta - \alpha - x(\alpha + \beta + 2)$ 、 $\lambda_n = -n(\alpha + \beta + 1 + n)$ となるので微分方程式は

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} + ((\beta - \alpha) - x(\alpha + \beta + 2)) \frac{du}{dx} + n(n + \alpha + \beta + 1)u = 0 \quad (3.17)$$

角運動量の量子化で出てくる Legendre 多項式に対しては $\alpha = \beta = 0$ と置くと

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + n(n+1)u = 0 \quad (3.18)$$

となる。(Legendre の微分方程式)

Tschebyscheff の場合は $\alpha = \beta = -1/2$ であり

$$\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} u + n^2 u = 0 \quad (3.19)$$

$x = \cos \theta$ と置くと $\frac{d}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}$ となるので微分方程式は

$$\frac{d^2}{d\theta^2} u + n^2 u = 0 \quad (3.20)$$

となる。

Jacobi 多項式は超幾何関数

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n, \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$$

が多項式に帰着する場合を与えている。

$$P_n \propto {}_2F_1(-n, n+1+\alpha+\beta; 1+\alpha; \frac{1-x}{2}) \quad (3.21)$$

II型 $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $Q = x$ を代入すると $P_1 = -x + (\alpha + 1)$ となるため、最も一般的な Sonine については微分方程式は以下ようになる。

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{du}{dx} + nu = 0 \quad (3.22)$$

この方程式で $\alpha = 0$ と置くと Laguerre の場合が得られる。

Sonine 多項式は合流型超幾何関数

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} z^n \quad (3.23)$$

により

$$P_n(x) = {}_1F_1(-n; \alpha + 1; x) \quad (3.24)$$

のように書き表される。つまり合流型超幾何関数が多項式になる特殊な場合として解釈可能である。

III型：Hermite $\rho(x) = e^{-x^2}$, $Q = 1$ であるため微分方程式は

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + 2nu = 0 \quad (3.25)$$

となる。(Hermite の微分方程式)

3.5 規格化因子の計算

この章では Rodrigues の表式 (3.5) で与えられた多項式の規格化因子を計算する。

$$N_n = (P_n, P_n) = \int_I P_n(x)^2 \rho(x) dx \quad (3.26)$$

以前直交性を示す際に用いた計算 (3.9) と同様な方針で二つある P_n の一方だけに Rodrigues の公式を代入し部分積分を繰り返し行う。

$$\begin{aligned} (P_n, P_n) &= \int_I \rho(x) P_n(x) \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\rho(x) Q(x)^n) dx \\ &= (\text{部分積分繰り返し}) \\ &= (-1)^n \int \frac{d^n P_n}{dx^n} \rho(x) Q(x)^n dx \end{aligned}$$

部分積分の際の境界項が消えるのは直交性の証明の時と同じ根拠。最後の表式で P_n が n 次の多項式であることより

$$P_n(x) = k_n x^n + (\text{低次}), \quad k_n \text{ は定数} \quad (3.27)$$

のように書けるので $d^n P_n / dx^n = k_n n!$ は定数である。これから

$$N_n = (-1)^n k_n n! \int_I \rho(x) Q(x)^n dx \quad (3.28)$$

つまり k_n と積分 $\int_I \rho Q^n dx$ を求めれば N_n が決まる。

以下各型の直交多項式について規格化因子の具体的な計算を行う。なお、Legendre 多項式 P_n , Laguerre 多項式 $L_n(x)$, Hermite 多項式 $H_n(x)$ は Rogrigues 公式で与えられる多項式 P_n とは規格化因子だけ異なる定義が行われる。これらの直交多項式の具体系も以下の節で与える。

3.5.1 I型:Jacobi-Legendre

k_n の導出 k_n は x について最も高いべきの係数だから P_n の表式中で $x \rightarrow \infty$ での振る舞いを評価すると得られる。最も一般的な Jacobi の場合について評価すると

$$P_n = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}) \quad (3.29)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow \infty} (-1)^{-\alpha} x^{-\alpha-\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((-1)^{n+\alpha} x^{2n+\alpha+\beta}) \quad (3.30)$$

$$= (-1)^n (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)\cdots(2n+\alpha+\beta-n+1)x^n \quad (3.31)$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \quad (3.32)$$

となる。ここでガンマ関数の公式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ を用いて数因子を書き換えた。つまり

$$k_n = (-1)^n \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \quad (3.33)$$

積分の実行 求める積分はベータ関数の定義と変数変換 $\zeta = \frac{1+x}{2}$ を行うと一致する。

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n} dx \\ &= \int_0^1 2^{\alpha+\beta+2n} \zeta^{\beta+n} (1-\zeta)^{\alpha+n} 2d\zeta \\ &= 2^{\alpha+\beta+2n+1} B(\alpha+n+1, \beta+n+1) \\ &= 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)} \end{aligned}$$

ここではベータ関数の定義式とそのガンマ関数による書き換えを用いた。(物理数学I参照)

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (3.34)$$

以上の計算をまとめると

$$\begin{aligned} N_n &= (-1)^n n! (-1)^n \frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} 2^{\alpha + \beta + 2n + 1} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)} \\ &= n! 2^{\alpha + \beta + 2n + 1} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Legendre 多項式 Jacobi 多項式で $\alpha = \beta = 0$ と置き規格化因子も含めて以下のような定義がなされる。

Legendre 多項式

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \mathbb{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.36)$$

Jacobi に対する内積公式で $\alpha = \beta = 0$ とおき $\Gamma(n + 1) = n!$ などを用いると Legendre 多項式に対する内積公式が得られる。

$$(P_n, P_m) = \frac{2}{2n + 1} \delta_{n,m} \quad (3.37)$$

Tschebycheff 多項式 $\alpha = \beta = 1/2$ と置くと

$$\begin{aligned} N_n &= 2^{2n} n! \frac{\Gamma(n + 1/2)}{2n \Gamma(n)} = 2^{2n-1} \Gamma(n + 1/2)^2 \\ &= \frac{\pi}{2} ((2n - 1)!!)^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

ここでは $\Gamma(n + 1/2) = (n - 1/2)(n - 3/2) \cdots (1/2) \Gamma(1/2)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を用いた。 $(2n - 1)!! = (2n - 1)(2n - 3) \cdots 1$ である。

規格化因子も含めた Tschebycheff 多項式は

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n - 1)!!} \mathbb{P}_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n - 1)!!} (1 - x^2)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n-1/2} \quad (3.39)$$

この規格化では

$$(T_n, T_m) = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} \quad (3.40)$$

となる。Tschebycheff 多項式は三角多項式とも呼ばれ

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta) \quad (3.41)$$

が成立している。内積の公式

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx \\ &= \int_0^\pi T_n(\cos \theta) T_m(\cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} \end{aligned}$$

と矛盾がない。

3.5.2 Type II : Laguerre-Sonine

最も一般的な Sonine 多項式についての Rodrigues の公式 (3.12) で x のべきが最も高い項は高階微分 $\frac{d^n}{dx^n}$ が全て e^{-x} にかかった場合であり

$$P_n(x) \sim (-1)^n x^n + \text{低次の項} \quad (3.42)$$

すなわち $k_n = (-1)^n$ となる。一方積分の方は

$$\int_0^\infty x^{\alpha+n} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha + n + 1) \quad (3.43)$$

となる。したがって

$$N_n = (-1)^n n! (-1)^n \Gamma(n + \alpha + 1) = n! \Gamma(n + \alpha + 1) \quad (3.44)$$

となる。

Laguerre 陪関数と多項式 Laguerre 陪関数は $\alpha = k$ と置き規格化因子込みで

Laguerre 陪関数

$$L_n^k(x) = \frac{1}{n!} P_n(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-k} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) \quad (3.45)$$

と置く。特に Laguerre 多項式は

$$L_n(x) = L_n^k(x)|_{k=0} \quad (3.46)$$

とする。Laguerre 陪関数の内積は

$$(L_n^k, L_m^k) = \frac{n! \Gamma(n + k + 1)}{(n!)^2} \delta_{n,m} = \frac{(n + k)!}{n!} \delta_{n,m} \quad (3.47)$$

となる。Laguerre 関数では $k = 0$ なので

$$(L_n, L_m) = \delta_{n,m} \quad (3.48)$$

となる。

3.5.3 Type III: Hermite

Hermite 多項式については

$$P_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \sim (-2x)^n + \text{低次の項} \quad (3.49)$$

となるので

$$k_n = (-2)^n \quad (3.50)$$

一方積分の方はガウス積分となる

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (3.51)$$

これから P_n の内積は

$$(P_n, P_n) = (-1)^n n! (-1)^n 2^n \sqrt{\pi} = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (3.52)$$

Hermite 多項式は Rodrigues の公式を用いて

Hermite 多項式

$$H_n(x) = (-1)^n P_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (3.53)$$

と定義され、その内積は次のようになる。

$$(H_n, H_m) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m} \quad (3.54)$$

3.6 母関数

複素積分を用いると高階微分は Cauchy-Goursat の公式により求められる。

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_x} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{n+1}} \quad (3.55)$$

これを用いると Rodrigues の公式を以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\rho(x) Q(x)^n) \\ &= \frac{n!}{2\pi i \rho(x)} \oint_{C_x} d\zeta \frac{\rho(\zeta) Q(\zeta)^n}{(\zeta - x)^n} \end{aligned} \quad (3.56)$$

直交多項式の母関数とは補助変数 y についての Taylor 展開の係数が直交多項式になる関数であり

$$R(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{y^n}{n!} \quad (3.57)$$

のように定義される。上記の公式を用いると以下のような書き換えにより無限和を消すことができる。

$$R(x, y) = \frac{1}{2\pi i \rho(x)} \oint_{C_x} d\zeta \rho(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yQ(\zeta))^n}{(\zeta - x)^{n+1}} \quad (3.58)$$

$$= \frac{1}{2\pi i \rho(x)} \oint_{C_x} d\zeta \rho(\zeta) \frac{1}{\zeta - x - yQ(\zeta)} \quad (3.59)$$

ここで1行目から2行目に行く時に Taylor 展開の公式

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{x^{n+1}} \quad (3.60)$$

を用いた。この公式を用いるためには収束条件 $|y| < |x|$ が必要, つまり上の計算の場合は

$$|\zeta - x| > |yQ(\zeta)| \quad (3.61)$$

となるように積分経路 C_x を選ぶ必要がある。後に述べるように $Q(x)$ が定数でない場合は (3.59) の評価に注意が必要となる。

3.6.1 Hermite 多項式

$\rho(x) = e^{-x^2}$, $Q(x) = 1$ であり、Hermite 多項式の定義式 (3.53) を思い出すと母関数の定義は

$$R(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} H_n(x) \quad (3.62)$$

となる。一方で積分 (3.59) は

$$R(x, y) = \frac{1}{2\pi i} e^{x^2} \oint_{C_x} d\zeta e^{-\zeta^2} \frac{1}{\zeta - x - y} = e^{x^2} e^{-(x+y)^2} = e^{-2xy - y^2} \quad (3.63)$$

ここで和の収束性の条件 (3.61) は $|\zeta - x| > |y|$ となる。これは、極である $\zeta_0 = x + y$ が積分路の内側になるように積分路を選ぶ必要があることを意味している。これから上の積分の左辺の複素積分は $\zeta = x + y$ の留数を拾い右辺を与えている。Hermite 関数の母関数は上で与えられた公式において $y \rightarrow -y$ と書き換えたものが用いられる。

Hermite 関数の母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} H_n(x) = e^{-y^2 + 2xy} \quad (3.64)$$

3.6.2 Laguerre 多項式

$\rho(x) = e^{-x}$, $Q(x) = x$ であり Laguerre 関数の定義は (3.46) なので

$$R(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n L_n(x) \quad (3.65)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} e^x \oint_{C_x} d\zeta e^{-\zeta} \frac{1}{\zeta - x - y\zeta} \quad (3.66)$$

この場合収束条件 (3.61) はやや複雑になる。

$$|\zeta - x| > |y\zeta|$$

分母の極の位置は $\zeta = \zeta_0 = \frac{x}{1-y}$ 。 ζ_0 は積分路 C_x の内側にあることを見る。

まず $\tau = \frac{\zeta-x}{\zeta}$ とおくと積分路は収束条件により $|\tau| > |y|$ となる。一方極の位置に対応する $\tau_0 = \frac{\zeta_0-x}{\zeta_0} = y$ となるので積分路の内側にあることがわかる。

従って (3.66) は $\zeta = \zeta_0$ における留数を評価して

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} e^x \oint_{C_x} d\zeta e^{-\zeta} \frac{1}{(1-y)(\zeta - \zeta_0)} \\ &= e^{x - \frac{x}{1-y}} \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-y} e^{\frac{xy}{y-1}} \end{aligned}$$

以上より

Laguerre 多項式の母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n L_n(x) = \frac{1}{1-y} e^{\frac{xy}{y-1}} \quad (3.67)$$

3.6.3 Legendre 多項式

$\rho = 1$, $Q(x) = 1 - x^2$ であり Legendre 多項式の定義は (3.36) で与えられている。符号因子 $(-1)^n$ を吸収するため $Q(x) = x^2 - 1$ としておく。この時

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2y)^n P_n(x) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_x} d\zeta \frac{1}{\zeta - x - y(\zeta^2 - 1)} \\ &= \frac{-1}{2\pi i y} \oint_{C_x} d\zeta \frac{1}{(\zeta - \zeta_+)(\zeta - \zeta_-)} \end{aligned}$$

ここで

$$\zeta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4xy + 4y^2}}{2y}$$

被積分関数の極は $\zeta = \zeta_{\pm}$ の 2 点であるが母関数のパラメータ $|y| \rightarrow 0$ の極限では

$$\zeta_+ \sim \frac{1}{y} \rightarrow \infty, \quad \zeta_- \sim x$$

となり C_x の内側にある極は ζ_- のみである。これから留数積分を評価できて

$$R(x, y) = -\frac{1}{y} \frac{1}{\zeta_- - \zeta_+} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4xy + 4y^2}}$$

Legendre 多項式の母関数として通常用いられる表式は $2y \rightarrow y$ と書き換えて

Legendre 多項式の母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)y^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}} \quad (3.68)$$

3.6.4 母関数の応用

以前 Poisson 方程式の解がグリーン関数 (2.8) を用いて (2.9) のように書かれると解説したが、3次元のグリーン関数は上で導いた Legendre 多項式の母関数と直接関係づけられる。すなわち二つの3次元ベクトル \vec{x} と \vec{y} に対して、 $|\vec{x}| = r$, $|\vec{y}| = s$, \vec{x} と \vec{y} がなす角度を θ (内積で書くと $\vec{x} \cdot \vec{y} = rs \cos \theta$) とする。この時

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y})} = \sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y}^2} = \sqrt{r^2 - 2rs \cos \theta + s^2} \quad (3.69)$$

となるのでグリーン関数は以下のように書き換えられる。

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{r^2 - 2rs \cos \theta + s^2}} = \frac{1}{4\pi r_+} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_-}{r_+} \cos \theta + (r_-/r_+)^2}} \quad (3.70)$$

ここで $r_+ = \text{Max}(r, s)$, $r_- = \text{Min}(r, s)$ である。最後の表式の2番目の因子は $x = \cos \theta$, $y = r_-/r_+$ と置くと (3.68) と一致しているので Green 関数は以下のような展開が可能であることがわかる。

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_-^n}{r_+^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (3.71)$$

原点の周りの電荷の分布 $\rho(\vec{y})$ から生成されるポテンシャルは $r > s$ となる点においては (2.9) のように書けるので $\vec{x} = (0, 0, r)$ ととり \vec{y} を極座標で s, θ, ϕ で書き表すと

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{r^{n+1}}, \quad q_n = \int s^2 ds \int d(\cos \theta) \int d\phi \rho(r, \theta, \phi) s^n P_n(\cos \theta) \quad (3.72)$$

この展開で最も低次 $n = 0$ の項 q_0 は $P_0 = 1$ を用いると原点周りにある全電荷と等しい。高次の項は多重極モーメントに対応する。このように Legendre 関数は電荷などの角度分布の詳細を書き表す際に重要となる関数である。

3.7 漸化式

最後に直交多項式の漸化式について解説する。漸化式は次の章で述べるように量子力学に現れる対称性を記述する上で非常に重要である。漸化式を示す方法としては

1. 直交性と係数比較を用いる
2. 母関数を用いる

1の方法は間接的ではあるが分かりやすい。一方2の方は微分演算と展開だけで証明できるのがメリットである。

直交多項式の漸化式は基本的に2つ、 x の掛け算で次数が一つ上の多項式と関連づけるものと、微分で次数を下げる方に動くもののペアで与えられる。

3.7.1 Hermite 多項式

ここでは Hermite 多項式の漸化式を

- 展開式： $H_n = 2^n x^n + \dots$
- 直交性： $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (H_n, H_m) = N_n \delta_{n,m}$, $N_n = 2^n n! \sqrt{\pi}$
- 偶奇性： $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

という性質のみを用いて示す。導くべき式は

Hermite 多項式の漸化式

$$xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x) \quad (3.73)$$

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (3.74)$$

証明 (3.73) を示すために、まず偶奇性を用いると

$$xH_n(x) = C_0H_{n+1}(x) + C_1H_{n-1}(x) + C_2H_{n-3}(x) + \dots$$

のように1つおきに並ぶことに注意する。(たとえば $xH(x)$ と H_n は偶奇性が反対になる) この式で x^{n+1} の係数を用いると

$$2^n = C_0 2^{n+1}$$

従って $C_0 = \frac{1}{2}$ を得る。次に C_2 以降がゼロになることを見るためには上記の内積の定義式よりたとえば

$$C_2 N_{n-3} = (H_{n-3}, xH_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-3} x H_n(x) dx = (xH_{n-3}, H_n) = 0$$

最後に C_1 の係数も同様にして

$$C_1 N_{n-1} = (H_{n-1}, xH_n) = (xH_{n-1}, H_n) = \left(\frac{1}{2}H_n + \dots, H_n\right) = \frac{1}{2}N_n$$

これから

$$C_1 = \frac{N_n}{2N_{n-1}} = n$$

以上で (3.73) が示された。

次に (3.74) を示すためには $\frac{dH_n}{dx}$ が $n-1$ 次の多項式であることと偶奇性を用いて

$$\frac{dH_n}{dx} = D_0 H_{n-1} + D_1 H_{n-3} + \dots$$

と置く。最初の係数 D_0 は両辺の x^{n-1} の係数を比較して

$$2^n n = 2^{n-1} D_0$$

となることから得られる。 D_1 以降がゼロであることは内積の性質

$$\left(f, \frac{dg}{dx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) \frac{dg}{dx} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{-x^2} f(x)) g(x) dx = \left(-\frac{df}{dx} + 2xf, g\right) \quad (3.75)$$

より (3.73) の証明と同様にして得られる。

3.7.2 Legendre 多項式

Legendre 多項式の場合は

- 展開式: $P_n = k_n x^n + \dots, k_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n$
- 直交性: $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = (P_n, P_m) = N_n \delta_{n,m}, N_n = \frac{2}{2n+1}$
- 偶奇性: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

対応する漸化式は

Legendre 多項式の漸化式

$$xP_n(x) = \frac{1}{2n+1} ((n+1)P_n + nP_{n-1}) \quad (3.76)$$

$$(x^2-1)\frac{dP_n}{dx} = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1} - P_{n-1}) \quad (3.77)$$

最初の公式 (3.76) の証明は Hermite 多項式の場合と同様なので省略する。2 番目の公式では (x^2-1) という余分な因子が入っているが (3.75) に対応する公式で

$$\begin{aligned} \left(P_\ell, (x^2-1)\frac{dP_n}{dx} \right) &= \int_{-1}^1 P_\ell(x)(x^2-1)\frac{dP_n}{dx} dx \\ &= (x^2-1)P_\ell(x)P_n(x)\Big|_{-1}^1 - \left(\frac{d}{dx} ((x^2-1)P_\ell), P_n \right) \\ &= - \left(P_\ell, (x^2-1)\frac{dP_n}{dx} + 2xP_n \right) \end{aligned}$$

$P_n(\pm 1) \neq 0$ に注意すると右辺の第 1 項を消すために x^2-1 が必要となっている。偶奇性と多項式の次数の比較により

$$(x^2-1)\frac{dP_n}{dx} = D_0P_{n+1} + D_1P_{n-1} + D_2P_{n-3} + \dots$$

のように展開できるはず。 D_0 を計算するためには x^{n+1} の係数を比較すればよく

$$nk_n = D_0k_{n-1} \quad \rightarrow \quad D_0 = \frac{n(n+1)}{2n+1}$$

また D_1 の計算のためには

$$\begin{aligned} \left(P_{n-1}, (x^2-1)\frac{dP_n}{dx} \right) &= (P_{n-1}, D_1P_{n-1} + \dots) = D_1N_{n-1} \\ &= - \left(\frac{d}{dx} ((x^2-1)P_{n-1}), P_n \right) \\ &= \dots = \frac{k_{n-1}}{k_n}(n+1)N_n \end{aligned}$$

これから

$$D_1 = -\frac{n(n+1)}{2n+1}$$

3.7.3 Laguerre 多項式

Laguerre 多項式の場合、偶奇性がないので直交性を用いて漸化式を導くのはやや煩雑となる。ここでは母関数を用いた証明を紹介する。

$$xL_n(x) = -(n+1)L_{n+1} + (2n+1)L_n - nL_{n-1} \quad (3.78)$$

$$x \frac{d}{dx} L_n(x) = n(L_n - L_{n-1}) \quad (3.79)$$

Laguerre 関数の母関数 (3.67) について以下の等式が成立する。

$$xR(x, y) = (1-y)R(x, y) - (1-y)^2 \frac{\partial}{\partial y} R(x, y) \quad (3.80)$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} R(x, y) = y(1-y) \frac{\partial R}{\partial y} - yR(x, y) \quad (3.81)$$

これらの等式は直接計算により確かめることができる。左辺は (3.78, 3.79) の左辺の微分であり、右辺は母関数 $R(x, y)$ について y の掛け算と y の微分で書かれていることに注意する。

これらの等式は漸化式と同値である。たとえば、最初の等式についてみると

$$xR(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)y^n \quad (3.82)$$

$$(1-y)R(x, y) - (1-y)^2 \frac{\partial}{\partial y} R(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-nL_{n-1} + (1+2n)L_n - (n+1)L_{n+1})y^n \quad (3.83)$$

となるので両辺で y^n の係数を等しいとおくと (3.78) が導かれる。

第4章 球面調和関数：直交多項式と対称性

前の章で解説した直交多項式は量子力学系で用いられており、対称性と深い関係がある。この章ではその例として Hermite 多項式と Heisenberg 代数、Legendre 多項式と空間回転を表す代数（回転群）との対応について解説する。後者の場合は Legendre 多項式を少し拡張して Legendre 陪関数を用いる必要がある。この章では Legendre 陪関数の詳しい性質を導くと同時にそれを用いて定義される球面調和関数についてその基本的な性質を述べる。

4.1 調和振動子と Hermite 多項式

調和振動子の量子系は以下のハミルトニアンと演算子により定義される。この講義では代数的な側面のフォーカスするため簡単のため粒子の質量 m 、振動数 ω 、プランク定数 \hbar などは全て1と置いている。

- 生成消滅演算子: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p})$, $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})$
- 数演算子: $\hat{N} = a^\dagger a$.
- Hamiltonian: 数演算子を用いて $\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2}$ と定義される。

生成消滅演算子と数演算子は下記の基本的な代数を満たしている。

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{4.1}$$

$$[\hat{N}, a] = -a, \quad [\hat{N}, a^\dagger] = a^\dagger \tag{4.2}$$

通常の波動関数表示のためには $\hat{p} = -i\frac{d}{dx}$ のように微分演算子で置き換えられる。この表示では

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right) \tag{4.3}$$

基底状態は以下のように定義される。

$$a\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi_0(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \psi_0 = \frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-x^2/2} \tag{4.4}$$

ここで規格化因子は

$$(\psi_0, \psi_0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1$$

となるように定めてある。励起状態は

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \psi_0 \quad (4.5)$$

のように定義される。具体的に計算すると

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2} &= e^{x^2/2} \left(e^{-x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) e^{x^2/2}\right)^n e^{-x^2} \\ &= e^{x^2/2} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \\ &= H_n(x) e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

となるので Hermite 多項式が現れる。規格化因子も含めると

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{n!} 2^{n/2}} H_n(x) e^{-x^2/2} \quad (4.6)$$

となる。これらの励起状態が互いに直交することは (3.54) を用いて確認することができる。

$$(\psi_n, \psi_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{n!m!} 2^{(n+m)/2}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \delta_{n,m} \quad (4.7)$$

真空の波動関数の部分が Hermite 多項式に対する積分の重み $\rho(x)$ を与えていることに注意する。 ψ_n は数演算子に対して次の関係式を満たしている。

$$\hat{N}\psi_n = n\psi_n \quad (4.8)$$

この式を指数関数の部分を外して Hermite 多項式について書き換えると微分方程式 (3.25) と一致する。

また、励起状態は漸化式

$$a\psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1}, \quad (4.9)$$

$$a^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1} \quad (4.10)$$

を満たすが、これらは Hermite 多項式の漸化式 (3.73, 3.74) から導くことができる。これらの関係式はよりアブストラクトな交換関係式だけから導くことも可能である (量子力学 I の講義参照)。

4.2 Legendre 陪関数

この節では回転群を記述する球面調和関数を定義するときに用いられる Legendre 陪関数を導入する。

Legendre 陪関数

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (4.12)$$

ここで2つの添字 n, m は $n = 0, 1, 2, \dots, -n \leq m \leq n$ という範囲に値をとる。 $m > n$ となるときには (4.12) はゼロになり、 $m < -n$ の場合には微分の階数が負になるので定義が意味がなくなることには注意。

Legendre 陪関数の主要な性質

(1) m の反転

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \quad (4.13)$$

(2) 漸化式

$$(1-x^2)^{1/2} \frac{dP_n^m}{dx} + mx(1-x^2)^{-1/2} P_n^m = P_n^{m+1} \quad (4.14)$$

$$(1-x^2)^{1/2} \frac{dP_n^m}{dx} - mx(1-x^2)^{-1/2} P_n^m = -(n+m)(n-m+1) P_n^{m-1} \quad (4.15)$$

(3) 微分方程式

$$\left((1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \right) P_n^m(x) = 0 \quad (4.16)$$

(4) 直交性

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,\ell} \quad (4.17)$$

この節では以下これらの性質の証明を行う。

4.2.1 m の反転公式 (4.13) の証明

(4.13) 式は次の式と等価である。

$$(x^2 - 1)^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2 - 1)^n \quad (4.18)$$

以下左辺から右辺を導く。用いる公式は高階微分に関するもの

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) &= \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} f^{(n-\ell)}(x)g^{(\ell)}(x) \\ \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x-a)^n &= n(n-1)\cdots(n-\ell+1)(x-a)^{n-\ell} = \frac{n!}{(n-\ell)!} (x-a)^{n-\ell} \end{aligned}$$

これらを用いると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (x^2 - 1)^m \sum_{r=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{r!(n+m-r)!} \frac{d^{n+m-r}}{dx^{n-m-r}} (x-1)^n \frac{d^r}{dx^r} (x+1)^n \\ &\quad r < m \text{ または } r > n \text{ の場合微分がゼロになる} \\ &= (x^2 - 1)^m \sum_{r=m}^n \frac{(n+m)!}{r!(n+m-r)!} \frac{n!}{(r-m)!} (x-1)^{r-m} \frac{n!}{(n-r)!} (x+1)^{n-r} \\ &\quad r' = n - r \text{ と置いて書き換え\&ファクターの入れ替え} \\ &= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \sum_{r'=0}^{n-m} \frac{(n-m)!}{r'!(n-m-r')!} \frac{n!}{(n-r')!} (x-1)^{n-r'} \frac{n!}{(m+r')!} (x+1)^{m+r'} \\ &\quad \text{微分に書き換え} \\ &= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \sum_{r'=0}^{n-m} \frac{(n-m)!}{r'!(n-m-r')!} \frac{d^{r'}}{dx^{r'}} (x-1)^n \frac{d^{n-m-r'}}{dx^{n-m-r'}} (x+1)^n \\ &= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2 - 1)^n = \text{右辺} \end{aligned}$$

4.2.2 漸化式 (4.14,4.15) の証明

式 (4.14) については定義に代入して実直に微分を行えば良い。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} P_n^m &= \frac{1}{2^n n!} \left((1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+m+1}}{dx^{n+m+1}} (x^2-1)^n - mx(1-x^2)^{m/2-1} \frac{d^{m+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \right) \\ &= (1-x^2)^{-1/2} P_n^{m+1} - \frac{mx}{1-x^2} P_n^m \end{aligned}$$

両辺に $(1-x^2)^{1/2}$ をかけて移行すれば求める式が得られる。

式 (4.15) を示すには (4.14) で $m \rightarrow -m$ とおいた式から始める。

$$(1-x^2)^{1/2} \frac{dP_n^{-m}}{dx} - mx(1-x^2)^{-1/2} P_n^{-m} = P_n^{-m+1}$$

この P_n^{-m} などを反転公式 (4.13) を用いて書き換えると

$$(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left((1-x^2)^{1/2} \frac{dP_n^m}{dx} - mx(1-x^2)^{-1/2} P_n^m \right) = (-1)^{m-1} \frac{(n-m+1)!}{(n+m-1)!} P_n^{m-1}$$

左辺の係数で全体を割ると (4.15) が得られる。

4.2.3 微分方程式 (4.16) の導出

漸化式 (4.14, 4.15) を順番に作用させると

$$\begin{aligned} & \left((1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} - (m+1)x(1-x^2)^{-1/2} \right) \left((1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} + mx(1-x^2)^{-1/2} \right) P_n^m \\ & = -(n-m)(n+m+1) P_n^m \end{aligned}$$

という式が得られるが、左辺の P_n^m に作用する微分演算子を書き換えると、代数計算ののち

$$\text{左辺} = \left((1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2 \frac{d}{dx} + m(m+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_n^m$$

が得られる。右辺と組み合わせて定数の部分をまとめると (4.16) となる。

4.2.4 内積の公式 (4.17) の証明

反転公式 (4.13) と部分積分を繰り返すことにより証明できる。

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_\ell^m(x) dx = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_{-1}^1 P_n^{-m}(x) P_\ell^m(x) dx$$

$P^{\pm m}$ の表式代入。冒頭因子の $(1-x^2)^{\pm m/2}$ は互いにキャンセルするのに注意

$$= (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{1}{2^{n+\ell} n! \ell!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2-1)^n \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell dx$$

部分積分を繰り返して第二項の微分を第一項の微分書き換え

$$= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{1}{2^{n+\ell} n! \ell!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1) \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^\ell$$

非積分関数は $P_n P_\ell$ になっている。Legendre 多項式の直交性を代入

$$= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1} \delta_{n,\ell}$$

4.3 球面調和関数と角運動代数の表現

4.3.1 球対称な系における偏微分方程式の解法

球対称な系における Schrödinger 方程式や Maxwell 方程式は次の形になる。

$$(\Delta + f(r))\psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (4.19)$$

ここで r, θ, φ はこれまでも度々出てきた極座標である。極座標で書いた Laplacian は以下のように書かれる。

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \hat{\Omega} \quad (4.20)$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (4.21)$$

ここで $\hat{\Omega}$ は球面上の Laplacian と呼ばれている量である。

このように変数 r, θ, φ の偏微分が分離した形で現れる偏微分方程式を解く代表的な手法として**変数分離法**がある。基本的な考え方としては $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ のように factorize された形に解を想定しできるだけ一般的に解を求め、一般解はそれを線型結合をとったものとして得られると考える。

一見不自然に思われるかもしれないが、3次元の Fourier 級数の場合も factorize された解 $e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ の線型結合として一般解を与えるのでそれと同じと思えば良い。

$\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ を方程式に代入し全体を $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ で割ると以下のような方程式になる。

$$\frac{1}{rR(r)} \frac{\partial^2(rR(r))}{\partial r^2} + f(r) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0 \quad (4.22)$$

まず一番最後の項 $\partial^2 \Phi / \partial \varphi^2$ に注目する。方程式全体を見渡すとこの項以外に φ に依存する項はない。つまり r と θ のみの方程式になっている。仮に $\partial^2 \Phi / \partial \varphi^2$ が φ に依存してしまつたとすると残りの項でそれをキャンセルすることはできない。つまり分離した形で解が得られるためには $\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$ が定数、すなわち

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\beta^2 \Phi(\varphi) \quad (4.23)$$

が成立していなくてははいけない。この方程式は定数係数常微分方程式なので直ちに解くことができ、解は

$$\Phi(\varphi) = C_+ e^{i\beta\varphi} + C_- e^{-i\beta\varphi}$$

となる。ここで φ の役割を思い出すと、 φ について Φ は周期的である、すなわち

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad (4.24)$$

であることがわかる。パラメータ β はこの制約条件のため整数値に量子化される。

$$\beta = m \in \mathbb{Z} \quad (4.25)$$

ことがわかる。このとき

Φ についての方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Phi(\varphi) \quad (4.26)$$

となる。

再び (4.22) に戻り Φ の方程式を用いると

$$\frac{1}{rR(r)} \frac{\partial^2 (rR(r))}{\partial r^2} + f(r) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) = 0 \quad (4.27)$$

ここで後半の大括弧の中の表式は θ の関数であるがそれ以外の部分は r のみに依存していることに注意すると括弧内は定数 (たとえば $-\alpha$) である、すなわち

$$\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -\alpha$$

または

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta = -\alpha \Theta \quad (4.28)$$

という微分方程式が得られるが、 $\cos \theta = \mu$ と変数変換すると $\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} = -\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu}$ などにより方程式は

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial \Theta}{\partial \mu} \right) + \left(\alpha - \frac{m^2}{1-\mu^2} \right) \Theta = 0 \quad (4.29)$$

に帰着する。この方程式で $\alpha = n(n+1)$ と置くと Legendre 陪関数の微分方程式 (4.16) と一致し、

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta) \quad (4.30)$$

が θ 方向の解を与えることがわかる。 α は一般の値を取ったとしても n についての方程式は解くことが可能で n を一般の値とした Legendre 陪関数 (4.12) が方程式の解を与える。しかし n が $0, 1, 2, \dots$ とした量子化した値以外をとると $x = \pm 1$ 、つまり $\theta = 0, \pi$ (北極と南極) で一般には発散した解の形になる。これにより任意パラメータであった α は量子化され

$$\alpha = \ell(\ell+1), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

(一般的な記法と一致させるため $n \rightarrow \ell$ とする) という値に制約を受けることがわかる。また、 m については元々は整数であればなんでも良かったが

$$-\ell \leq m \leq \ell \quad (4.32)$$

という値の間でしか P_ℓ^m はゼロでないため、この制約を受けることになる。

以上をまとめると、角度 θ, φ 方向の解は

$$\Theta = P_\ell^m(\cos \theta), \quad \Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$$

という形に書かれることになる。これらをまとめて書き正規化因子も含めて定義したものが

球面調和関数

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (4.33)$$

ただし $\ell = 0, 1, 2, \dots, -\ell \leq m \leq \ell$ となる。球面調和関数は球面上の Laplacian の固有関数

$$\hat{\Omega} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = -\ell(\ell+1) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (4.34)$$

であり、直交性

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell',m'}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'} \quad (4.35)$$

を満たす。

規格化の証明のためには

$$\int_0^{2\pi} (e^{im\varphi})^* e^{in\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{n,m}$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta) = \int_{-1}^1 d\mu P_\ell^m(\mu) P_{\ell'}^m(\mu) = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}$$

というこれまで導いてきた式を用いる直ちに証明される。

以上で角度方向は解けたので残りは動径 r 方向のみとなる。求めるべき方程式は

動径方向の方程式

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR(r)) + f(r)R - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R = 0 \quad (4.36)$$

特殊な $f(r)$, 例えばクーロンポテンシャルの系 $f(r) \sim \frac{1}{r}$ などでは厳密に $R(r)$ を求めることができる。 $f(r)$ が定数の場合は次の章で解を求める。(Bessel 関数など)

4.3.2 角運動量の代数と球面調和関数

角運動量は \vec{x} と \vec{p} を用いて

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \quad (4.37)$$

と書き表される。量子力学では ($\hbar = 1$ とすると)

$$\vec{L} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla} \quad (4.38)$$

角運動量は微分演算子となり

角運動量の代数

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \quad (4.39)$$

という交換関係を満たす。ここで調和振動子における生成・消滅演算子に対応する昇降演算子を以下のように定義する。

$$L_{\pm} = L_1 \pm iL_2 \quad (4.40)$$

このような書き換えで L_1, L_2 の代わりに L_{\pm} を用いると角運動量の代数は以下のように書き換えられる。

$$[L_3, L_{\pm}] = \pm L_{\pm} \quad (4.41)$$

$$[L_+, L_-] = 2L_3 \quad (4.42)$$

最初の代数は調和振動子における \hat{N} と a, a^\dagger の代数に対応するもので L_{\pm} が L_3 の固有値を ± 1 だけ変化させることを意味する。

調和振動子ではなかった演算子としては、全角運動量 L^2 ,

$$L^2 = \sum_{i=1}^3 L_i^2 \quad (4.43)$$

全角運動量は任意の L_i と交換し同時固有値を持ちうる。

これらの演算子を球面調和関数と関係づけるには、これらの演算子を極座標で書き換えることが必要となる。ここでは導出は行わず重要なものだけ結果を書く

$$L^2 = -\hat{\Omega} \quad (4.44)$$

$$L_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad (4.45)$$

$$L_+ = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \quad (4.46)$$

$$L_- = e^{-i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \quad (4.47)$$

これらの公式は球面調和関数についての以下の関係式と関係付けられる。

$$L^2 Y_{\ell,m} = -\hat{\Omega} Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell,m} \quad (4.48)$$

$$L_3 Y_{\ell,m} = mY_{\ell,m} \quad (4.49)$$

$$L_- Y_{\ell,m} = \sqrt{((\ell+m)(\ell-m+1))} Y_{\ell,m-1} \quad (4.50)$$

$$L_+ Y_{\ell,m} = \sqrt{((\ell-m)(\ell+m-1))} Y_{\ell,m+1} \quad (4.51)$$

これらの式の中で (4.48) は証明済みである。また (4.49) は自明である。残った式の中で (4.50) は以下のように示される。

$$\begin{aligned} L_+ (P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}) &= e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi} - m \cot(\theta) P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \right) \\ &= e^{i(m+1)\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - m \cot\theta \right) P_\ell^m(\cos\theta) \\ &= e^{i(m+1)\varphi} \left(-\sqrt{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial\mu} - m \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \right) P_\ell^m \\ &= -e^{i(m+1)\varphi} P_\ell^{m+1}(r) \end{aligned}$$

規格化定数も含めて $Y_{\ell,m}$ に対する方程式に書き換えると (4.50) が得られる。

式 (4.51) についても同様な計算で証明される。

第5章 Bessel関数

Bessel関数は別名円筒関数とも呼ばれ、2次元平面の動径方向に進む波を記述するために用いられる。また、同種の関数として球 Bessel 関数があるがそちらは3次元空間で動径方向に進む波を記述される。波を記述するという意味では1次元の波を記述する三角関数 (sin, cos) などと類似の性質を持つ。

また、三角関数が二種類あることに対応して同一の微分方程式を満たす関数として Neumann 関数がある。指数関数と三角関数の対応関係に関連して Hankel 関数、sinh, cosh に対応して変形 Bessel 関数がある。これらについても時々用いられるので簡単に触れる。

5.1 Bessel関数の基本的な性質

Bessel関数の母関数から始める。Bessel関数は $J_n(z)$ のように書かれる。ここで $n \in \mathbb{Z}$, z は複素変数である。

Bessel関数の母関数

$$e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \quad (5.1)$$

左辺に現れる $e^{\frac{zt}{2}}$, $e^{-\frac{z}{2t}}$ はそれぞれ $|t| < \infty$, $|t| > 0$ で収束する Taylor(Laurent) 展開が可能なので (5.1) の右辺は原点と無限遠点を除いた領域で正則な Laurent 展開となる。

この展開に留数定理を適用すると Bessel 関数の積分表示が得られる。

Bessel 関数の積分表示

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint t^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} \quad (5.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} e^{iz \sin \theta} \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(n\theta - z \sin \theta) \quad (5.4)$$

これらの式のうち (5.2) は留数定理を用いた表式、(5.3) は z の積分路を半径 1 の円にした上で変数変換 $t = e^{i\theta}$ を行った表式である。また、(5.4) は (5.3) の積分を $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ に分け後者の積分について変数変換 $\theta' = \pi - \theta$ を行う。その際 2 番目の積分は

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta' e^{in\theta'} e^{-iz \sin \theta'}$$

となる。この二つの積分を公式 $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x)$ を用いて書き直したものが (5.4) である。

母関数の解釈 Bessel 関数の母関数 (5.1) は 2 次元平面における平面波と関連づけられる。2 次元平面の極座標

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (5.5)$$

を用いると

$$e^{iy} = e^{ir \sin \theta} = e^{r(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(r) \quad (5.6)$$

つまり y 方向の平面波 e^{iy} を角度方向と動径方向に分離したものが Bessel 関数と解釈できる。より一般的な 2 次元平面波については

$$e^{i(k_x x + k_y y)} = e^{ikr \sin(\theta + \theta_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta + \theta_0)} J_n(kr) \quad (5.7)$$

のように同様の表式が得られる。ここで

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad \theta_0 = \arctan\left(\frac{k_x}{k_y}\right) \quad (5.8)$$

あとで述べる Helmholtz 方程式の直交座標を用いた解が (5.7) の左辺の平面波であり、それを極座標を用いた解で書き換えたものが右辺である。

展開公式 (5.1) を愚直に展開

$$e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^\ell t^\ell}{2^\ell \ell!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-z)^m}{m! (2t)^m}$$

右辺で t^n ($n \geq 0$) の係数を取り出すとその係数が $J_n(z)$ を与える。 $\ell - m = n$ となるように ℓ, m を選びその係数の和を取る。 $(\ell, m) = (n, 0), (n+1, 1), \dots$ 、すなわち一般には $(\ell, m) = (n+s, s)$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) となることに気をつけると

$$J_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s} \quad (5.9)$$

となる。 $n < 0$ の場合には $(\ell, m) = (0, |n|), (1, |n|+1), \dots$ 、一般には $(\ell, m) = (s, |n|+s)$, ($s = 0, 1, 2, \dots$) となるので

$$J_{-n}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{|n|+s}}{(|n|+s)!s!} \left(\frac{z}{2}\right)^{|n|+2s} = (-1)^n J_n(z) \quad (5.10)$$

J_n と J_{-n} が係数を除いて等しいという性質は Legendre 陪関数の等式 (4.13) と似ている。

この表式で n を一般の複素数として解析接続する。 (5.9) で階乗をガンマ関数に置き換える。以前数の場合と区別するため $n \rightarrow \nu$ のように添字を書き換えると

$$J_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2^{\nu+2s} s! \Gamma(\nu+s+1)} z^{\nu+2s} \quad (5.11)$$

となる。この表式は以下でも時々用いられる。なお (5.10) はこの公式で $\nu \rightarrow -n$ とすると導くことができる。 ($\Gamma(-n) = \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$ に注意)

その他の基本的性質 Bessel 関数のその他の基本的な性質をまとめると

Bessel 関数の基本的性質

(1) n の反転公式: $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$

(2) 加法定理

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(x) J_m(y) \quad (5.12)$$

(3) 漸化式

$$\frac{d}{dz}(z^{-n} J_n(z)) = -z^{-n} J_{n+1}(z) \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z) \quad (5.14)$$

(4) 微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) \right) J_n(z) = 0 \quad (5.15)$$

証明 (1) についてはすでに (5.10) で示した。

(2) の加法定理の証明は母関数を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x+y) &= e^{\frac{1}{2}(x+y)(t-1/t)} = e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)} e^{\frac{1}{2}y(t-1/t)} \\ &= \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t^\ell J_\ell(x) \right) \cdot \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(y) \right) \end{aligned}$$

この式の両辺で t^n の係数を等しいとおくと (5.12) が得られる。

(3) の漸化式の証明は積分による定義 (5.2) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (z^{-n} J_n(z)) &= \frac{d}{dz} \left(z^{-n} \oint \frac{dt}{2\pi i} t^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} \right) \\ &\quad \zeta = tz \text{ の変数変換} \\ &= \frac{d}{dz} \left(\oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{-n-1} e^{\frac{1}{2}(\zeta-z^2/\zeta)} \right) \\ &\quad z \text{ 微分を実行} \\ &= -z \oint \frac{d\zeta}{2\pi i} \zeta^{-n-2} e^{\frac{1}{2}(\zeta-z^2/\zeta)} \\ &\quad t = \zeta/z \text{ のように変数を戻す} \\ &= -z^{-n} \oint \frac{dt}{2\pi i} t^{-n-2} e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} = -z^{-n} J_{n+1}(z) \end{aligned}$$

(5.14) の証明は (5.13) で $n \rightarrow -n$ とした表式に対して n の反転公式 (5.10) を当てはめると良い。

最後に (4) の微分方程式 (5.15) については漸化式 (5.13, 5.14) を用いて添え字の上げ下げを行った式

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{n+1}{z} \right) \left(\frac{d}{dz} - \frac{n}{z} \right) J_n(z) = -J_n(z)$$

この式で左辺の微分演算子をまとめると (5.15) となる。

Bessel 関数の微分方程式で $z = kx$ のように変数変換し方程式を書き換えると

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2} \right) J_n(kx) = -k^2 J_n(kx) \quad (5.16)$$

となる。この式はあとで用いられる。

Bessel 関数のファミリー Bessel 関数が満たす微分方程式 (5.15) は 2 階なので Bessel 関数以外の別の解が存在するはずである。

詳しい計算は次の章で行うが、一般の添え字 ν に対する $J_\nu(x)$ の表式 (5.11) は (5.15) において $n \rightarrow \nu$ とした微分方程式を満たす。この方程式は $\nu \rightarrow -\nu$ としても同じ形になるので $J_{-\nu}(z)$ が 2 階の微分方程式のもう一つの解となることがわかる。

ただし ν が整数の場合には (5.10) のため $J_{-n}(z)$ は $J_n(z)$ と線型独立でないため 2 番目の方程式の解を得るためには工夫が必要となる。

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (5.17)$$

と置くと $J_{\pm\nu}$ が微分方程式 (5.15) で $n \rightarrow \nu$ と置き換えた方程式の解であることより (5.15) を満たし、同時に分母分子が共に 0 になる極限操作を行うため $J_n(z)$ とは一次独立となることが示される。これにより $Y_n(z)$ は微分方程式の第二の解を与えることになる。 $Y_n(z)$ は Neumann 関数 (あるいは $J_n(x)$ を第 1 種 Bessel 関数と呼ぶ場合は第 2 種 Bessel 関数) と呼ばれ $z = 0$ に $\log(z)$ を含む特異性を持つ関数であることが知られている。

Bessel 関数 $J_\nu(x)$ の引数を純虚数に書き換えたものも時々現れる。微分方程式 (5.15) において $x \rightarrow ix$ (それと同時に $n \rightarrow \nu$) という書き換えを行うと微分方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) \right) I_\nu(z) = 0 \quad (5.18)$$

ここで $I_\nu(x)$ は以下のような級数で与えられる。

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad (5.19)$$

Bessel 関数が三角関数に近い性質を持っていることに対応して $I_\nu(x)$ は指数関数のような性質を持つ。 $I_\nu(x)$ は (第 1 種) 変形 Bessel 関数と呼ばれる。

最後に ν が整数 n の場合は $I_{\pm\nu}$ は互いに一次独立でないため Neumann 関数に相当する関数を導入する必要がある。(5.17) に対応する式として

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\pi}{2 \sin(\nu\pi)} (I_{-\nu}(x) + I_\nu(x)) \quad (5.20)$$

が 2 番目の方程式の解となる。 $K_n(x)$ は第 2 種変形 Bessel 関数と呼ばれる。

最後に Bessel 関数とそのファミリーのグラフを示す。まず Bessel 関数自体のグラフが図 5.1 であり原点付近で $J_n(x) \sim x^n$ であり x の値が大きいとほぼ三角関数のように振る舞っていることが理解できる。

次に Neumann 関数 (第 2 種 Bessel 関数) のグラフが図 5.2 であり原点に特異点を持ち、 x の値が大きいとほぼ三角関数のように振る舞っていることが理解できる。

最後に変形 Bessel 関数のグラフが図 5.3, 図 5.4 で $I_n(x)$ が原点で正則で x が大きいところで e^x のように増大する関数、 K_n は原点で発散し x が大きいところで e^{-x} のように減少する関数である。

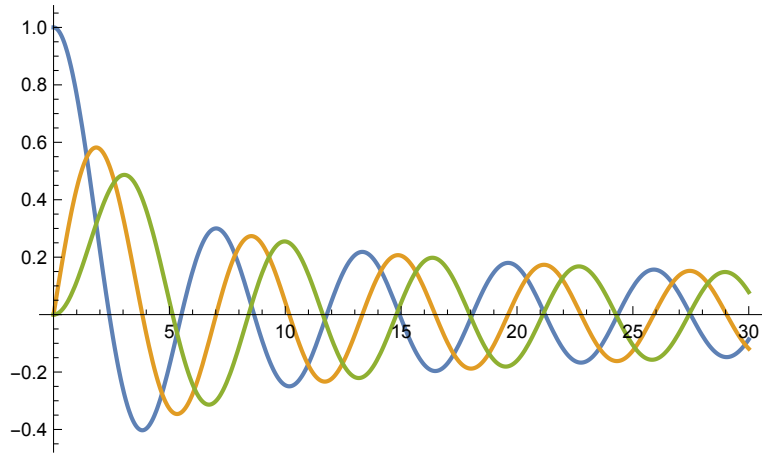


図 5.1: Bessel 関数のプロット： J_0 青, J_1 黄, J_2 緑

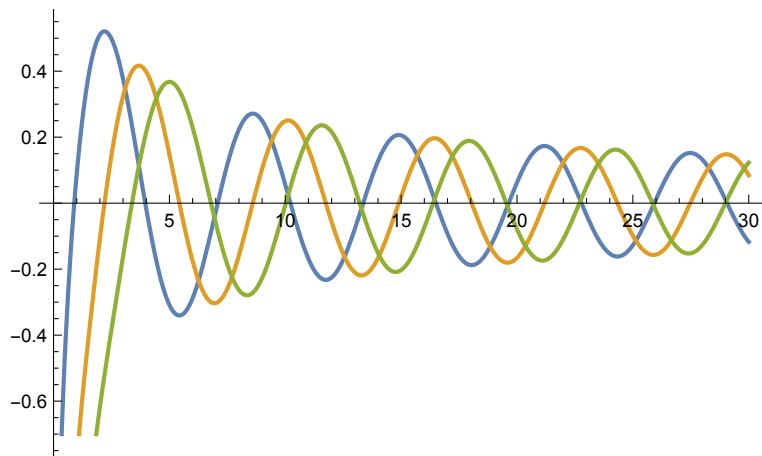


図 5.2: Neumann 関数のプロット： Y_0 青, Y_1 黄, Y_2 緑

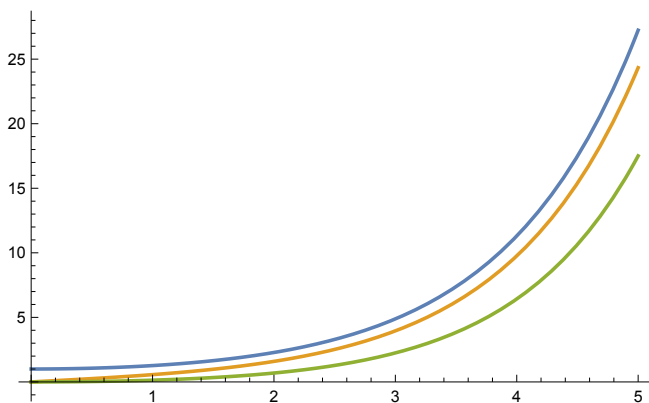


図 5.3: 第 1 種変形 Bessel 関数： I_0 青, I_1 黄, I_2 緑

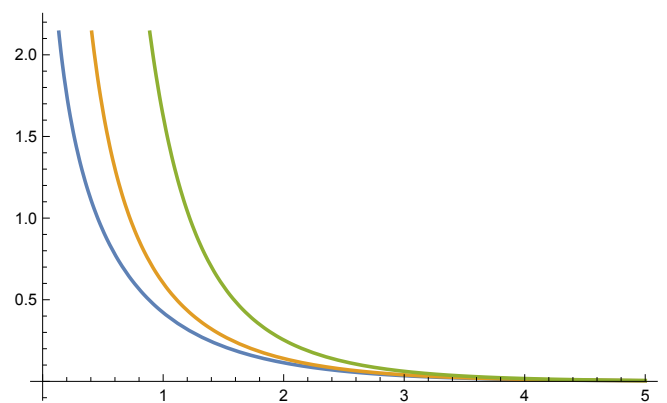


図 5.4: 第 2 種変形 Bessel 関数： K_0 青, K_1 黄, K_2 緑

5.2 波動方程式と Bessel 関数

Bessel 関数がどのような物理系に現れるか見るため、 $D + 1$ 次元（空間 D 次元 + 時間）の波動方程式を考える。

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_D \right) \psi(t, \vec{x}) = 0, \quad \Delta_D = \sum_{i=1}^D \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (5.21)$$

この方程式で時間方向に Fourier 変換を行う。

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{\psi}_\omega(\vec{x}) d\omega \quad (5.22)$$

$\tilde{\psi}_\omega(\vec{x})$ に対する偏微分方程式は以下の形でかける。

$$(\Delta_D + k^2) \tilde{\psi}_\omega(\vec{x}) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (5.23)$$

この方程式は D 次元の Helmholtz 方程式と呼ばれる。以下 $D = 2, 3$ の場合に極座標を用いた解を求める。

5.2.1 $D = 2$ の場合

2次元の Laplacian は極座標で書き換えると

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (5.24)$$

のように書かれる。 $\tilde{\psi}_\omega(x) = R(r)\Theta(\theta)$ のように変数分離形におき偏微分方程式 (5.23) に代入。式を整理すると

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 R \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.25)$$

第1項は r のみの関数、第2項は θ のみの関数なのでそれぞれ定数となる必要がある。このため偏微分方程式は以下の2つの式に分離する。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{\alpha^2}{r^2} R = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \Theta = -\alpha^2 \Theta \quad (5.27)$$

ここで α は定数である。(5.27) を解くと $\Theta(\theta) = e^{i\alpha\theta}$ となるが波動関数は θ について周期 2π の関数でなくてはならないので

$$\alpha = m \in \mathbb{Z}$$

のように整数値を取る必要がある。(これは3次元の場合の変数 φ と同様) (5.26) に代入し微分方程式を整理すると

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (5.28)$$

となる。さらに変数変換 $\zeta = kr$ を行うと微分方程式は

$$\frac{d^2 R}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dR}{d\zeta} + \left(1 - \frac{m^2}{\zeta^2} \right) R = 0 \quad (5.29)$$

これは Bessel 関数の微分方程式に他ならない。特に $r = 0$ で有限の値を取ることを要請すると解は

$$R(r) = J_n(\zeta) = J_n(kr) \quad (5.30)$$

になる。($r = 0$ で発散しても良い場合は $Y_n(kr)$ も解である。) 以上をまとめると Helmholtz 方程式 (5.23) の (特異点を持たない) 一般解は

$$\tilde{\psi}_\omega(\vec{x}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m J_m(kr) e^{im\theta}, \quad a_m \text{ は定数, } k = \frac{\omega}{c} \quad (5.31)$$

となる。(5.7) で見たように $a_n = e^{in\theta_0}$ の場合は平面波を極座標で書き換えた表式を与える。平面波は Helmholtz 方程式の直交座標による解であり、(5.7) はその二つの関係を与えている。

5.2.2 $D = 3$ の場合

$D = 3$ の場合の Laplacian は (4.20, 4.21) のように極座標で書かれている。そこで解説したように角度方向 (4.21) の解は球面調和関数で与えられる。

$$\hat{\Omega} Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell, m} \quad (5.32)$$

r 方向の方程式は

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} + k^2 \right) R(r) = 0 \quad (5.33)$$

$\zeta = kr$ と書き換えると方程式は

$$\left(\frac{1}{\zeta} \frac{d^2}{d\zeta^2} \zeta - \frac{\ell(\ell + 1)}{\zeta^2} + 1 \right) R = 0 \quad (5.34)$$

となりさらに $R = \zeta^{-1/2} \mathcal{R}(\zeta)$ と置くと $\mathcal{R}(\zeta)$ に対する方程式は

$$\frac{d^2 \mathcal{R}}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\mathcal{R}}{d\zeta} + \left(1 - \frac{(\ell + 1/2)^2}{\zeta^2} \right) \mathcal{R}(\zeta) = 0 \quad (5.35)$$

これは $\nu = \ell + \frac{1}{2}$ に対する Bessel 方程式に他ならない。これから $r = 0$ で正則な解は

$$R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr) = j_{\ell}(kr) \quad (5.36)$$

ここで球 Bessel 関数 $j_{\ell}(x)$ を

$$j_{\ell}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) \quad (5.37)$$

と定義した。

5.2.3 球 Bessel 関数の性質

展開公式 (5.11) において $\nu = \ell + \frac{1}{2}$ と置くと

$$\begin{aligned} \Gamma(n + s + \frac{3}{2}) &= (n + s + \frac{1}{2})(n + s - \frac{1}{2}) \cdots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{(2n + 2s + 1)!}{2^{2n+2s+1}(s+n)!} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

を用いて球 Bessel 関数の展開公式

$$j_{\ell}(x) = 2^{\ell} x^{\ell} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+\ell)! (-1)^s}{s! (2\ell + 2s + 1)!} x^{2s} \quad (5.38)$$

が得られる。

j_0 と y_0 特に $\ell = 0$ の場合は三角関数で書くことができる。

$$j_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} x^{2s} = \frac{\sin(x)}{x} \quad (5.39)$$

このことは (5.33) において $\ell = 0$ と置くと

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) + rR = 0$$

すなわち $rR(r)$ が三角関数の方程式の方程式を帰着することからも理解できる。また、原点で発散するもう一つの解は (球 Neumann 関数)

$$y_0(x) = \frac{\cos(x)}{x} \quad (5.40)$$

となることも理解できる。

漸化式 球 Bessel (Neumann) 関数 (j_ℓ と y_ℓ を総称して f_ℓ と書く) は漸化式

$$\frac{d}{dx} (x^{-\ell} f_\ell) = -x^{-\ell} f_{\ell+1} \quad (5.41)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{\ell+1} f_\ell) = x^{\ell+1} f_{\ell-1} \quad (5.42)$$

を満たす。

漸化式の証明：

$$\mathcal{L}^{(n)} = x^n \frac{d}{dx} x^{-n} = \frac{d}{dx} - \frac{n}{x}$$

と置くと球 Bessel の微分方程式は 2通りの書き方が可能である。

$$\Delta^{(n)} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n(n+1)}{x^2} \quad (5.43)$$

$$= \mathcal{L}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(-n-1)} = \mathcal{L}^{(-n-2)} \mathcal{L}^{(n)} \quad (5.44)$$

$$\Delta^{(n)} j_n = -j_n \quad (5.45)$$

$\mathcal{L}^{(n)} j_n = f$ と置くと

$$\Delta^{(n+1)} f = \mathcal{L}^{(n)} \mathcal{L}^{(-n-2)} \mathcal{L}^{(n)} j_n = \mathcal{L}^{(n)} \Delta^{(n)} j_n = -\mathcal{L}^{(n)} j_n = -f \quad (5.46)$$

したがって $f \propto j_{n+1}$ を表している。また $\mathcal{L}^{(-n-1)} j_n = g$ と置くと同様にして $\Delta^{(n-1)} g = -g$ が示せるため $g \propto j_{n-1}$ が示される。最後に初項の係数を比較すると漸化式が示される。

漸化式の応用として、(5.41) を繰り返し用いると

$$f_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n f_0 \quad (5.47)$$

が導かれる。これは以下のような変形で証明できる。

$$\begin{aligned} f_n(x) &= -x^{n-1} \frac{d}{dx} x^{-n+1} f_{n-1} \\ &= (-1)^n x^{n-1} \frac{d}{dx} x^{-n+1} x^{n-2} \frac{d}{dx} x^{-n+2} x^{n-3} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} f_0 \end{aligned}$$

これから球 Bessel (Neumann) は初等関数と微分でかけることが理解できる。

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right), \quad y_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\cos x}{x} \right) \quad (5.48)$$

5.3 Bessel 関数の直交性

Bessel 関数は図 5.1 にあるように $x \sim 0$ と $x \rightarrow \infty$ でそれぞれ

$$J_n(x) \sim \frac{1}{2^n n!} x^n + O(x^{n+2}) \quad \text{as } x \rightarrow 0 \quad (5.49)$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (5.50)$$

(2番目の漸近展開は次の章で示す) のように振る舞う。後の表式から J_n は3角関数のように振る舞いその位相は n が一つ大きくなると $\pi/2$ だけ右にずれることがわかる。

Bessel 関数がゼロになる点は r 方向の振動の節を記述している。以下のような定理が知られている。

Bessel 関数のゼロ点の分布

$J_n(x)$ の隣り合うゼロ点の間に $J_{n+1}(x)$ は一つだけゼロ点を持つ。

この定理は以下の Roll の補題をを Bessel 関数の漸化式 (5.13, 5.14) に適用することにより導かれる。

Roll の補題: $f(x) = \frac{dg}{dx}$ と置くと $g(x)$ の隣り合うゼロ点の間に $f(x)$ は一つ (以上) のゼロ点を持つ。(証明: 隣り合うゼロ点では $\frac{dg}{dx}$ の符号は異なっているため $f(x)$ はその間で必ずゼロにならなくてはならない。)

Bessel 関数のゼロ点を用いると Bessel 関数の直交性を表現することができる。

Bessel 関数の直交性

$\alpha_{nm} > 0$ を $J_n(x)$ の左から数えて m 番目のゼロ点とする。この時 Bessel 関数の間に下記のような直交性が成立する。

$$\int_0^1 J_n(\alpha_{nm}x) J_n(\alpha_{nl}x) x dx = \frac{1}{2} (J_{n+1}(\alpha_{n,m}))^2 \delta_{m,l} \quad (5.51)$$

証明: Bessel の微分方程式に対応する Hamiltonian を以下のように定義する。

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \frac{n^2}{x^2} \quad (5.52)$$

直交性に現れる Bessel 関数はこの演算子について固有状態になっている。

$$\mathcal{H} J_n(\alpha_{nm}x) = \alpha_{nm}^2 J_n(\alpha_{nm}x) \quad (5.53)$$

これは (5.16) より明らか。

次にこの演算子は以下で定義される $f(1) = g(1) = 0$ を満たす関数の間に定義される内積について Hermite である。

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) x dx \quad (5.54)$$

$$(f, \mathcal{H}g) = (\mathcal{H}f, g) \quad (5.55)$$

このうち (5.55) は部分積分により証明できる。なお境界項が消えるために $f(1) = g(1) = 0$ という条件が必要になる。 $J_n(\alpha_{nm}x)$ などはこの条件を満たしていることに注意する。

以上の注意のもとに $f(x) = J_n(\alpha_{nm}x)$, $g(x) = J_n(\alpha_{n\ell}x)$ と置くと

$$\alpha_{n\ell}^2(f, g) = (f, \mathcal{H}g) = (\mathcal{H}f, g) = \alpha_{nm}^2(f, g)$$

つまり $(\alpha_{nm}^2 - \alpha_{n\ell}^2)(f, g) = 0$ が導かれる。 $m \neq \ell$ の場合は $\alpha_{nm} \neq \alpha_{n\ell}$ なので $(f, g) = 0$ 、すなわち $m \neq \ell$ の場合の (5.51) が導かれた。

$m = \ell$ の場合は $f(x) = J_n(\alpha_{nm}x)$, $g(x) = J_n(\beta x)$ (ただし β は α_{nm} 近傍の任意の値) とする。この場合は $g(1) \neq 0$ となるので \mathcal{H} の Hermite 性が崩れる。

$$\begin{aligned} & (J_n(\alpha_{nm}x), \mathcal{H}J_n(\beta x)) - (\mathcal{H}J_n(\alpha_{nm}x), J_n(\beta x)) \\ &= (\alpha_{nm}^2 - \beta^2)(J_n(\alpha_{nm}x), J_n(\beta x)) \\ &= J_n(\beta x)xJ_n'(\alpha_{nm}x)\Big|_0^1 \end{aligned}$$

ここで $J_n'(x) = \frac{dJ_n(x)}{dx}$ 。この式の3行目は部分積分の際にゼロにならない項を示している。これから

$$(J_n(\alpha_{nm}x), J_n(\alpha_{nm}x)) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha_{nm}} \frac{1}{\beta^2 - \alpha_{nm}^2} J_n(\beta x)xJ_n(\alpha_{nm}x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} (J_n'(\alpha_{nm}))^2 \quad (5.56)$$

一方漸化式 (5.13) より $J_n'(\alpha_{nm}) = J_{n+1}(\alpha_{nm})$ となる。これを左辺に代入すると (5.51) の $m = \ell$ の場合が証明される。

Bessel 関数の直交性は三角関数の直交性 (1.3, 1.4, 1.5) の類似の関係式であり任意関数の Bessel 関数を用いた展開が可能であることを示している。

Fourier-Bessel 変換

$f(x)$ を $f(1) = 0$, $f(x) \sim x^n$ ($x \rightarrow 0$) を満たす任意の関数とする。この時 $f(x)$ を Bessel 関数を用いて展開することができる。

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n(\alpha_{nm}x) \quad (5.57)$$

$$c_m = \frac{2}{J_{n+1}(\alpha_{nm})^2} \int_0^1 f(x) J_n(\alpha_{nm}x) x dx \quad (5.58)$$

応用：太鼓の膜の運動 円形の太鼓の膜の運動を考える。膜の振動を表す関数 $u(t, x, y)$ は波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_2 \right) u(t, \vec{x}) = 0$$

を満たし太鼓の膜の境界 ($x^2 + y^2 = R^2$) でゼロになるものとする。

極座標を用いて解を $u = u_n(r)e^{in\theta+i\omega t}$ の形に仮定する。 u_n に対する微分方程式は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right)u_n(r) = 0 \quad (5.59)$$

太鼓の膜は $r = 0$ で正則なので解は Bessel 関数で書ける。

$$u_n(r) = J_n(kr), \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (5.60)$$

膜の端点で $u(R) = 0$ である必要があるので

$$J_n(kR) = 0, \quad kR = \alpha_{nm}$$

である必要がある。つまり太鼓の振動数は

$$\omega_{nm} = \frac{c\alpha_{nm}}{R}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.61)$$

のように量子化される。つまり太鼓の音として我々が認識しているのは $c\alpha_{nm}/R$ であることがわかる。

5.4 Bessel 関数の積分表示と漸近展開

Bessel の微分方程式 (5.15) の解は一般的に以下のような積分表示を持つことを示す。

Bessel 方程式の解の積分表示

$$u(x) = x^n \int_C (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta \quad (5.62)$$

ここで積分路 C は境界 ∂C で以下の条件が満たされるように選ばれる。

$$(1 + \zeta^2)^{\frac{2n+1}{2}} e^{x\zeta} \Big|_{\partial C} = 0 \quad (5.63)$$

あとで見るように積分路 C の選択により Bessel 関数のファミリー (Neumann 関数、Hankel 関数などを含む) が得られる。

証明 $u(x) = x^n v(x)$ と置いて $v(x)$ に対する微分方程式に書き換える。

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2n+1}{x}\frac{d}{dx} + 1\right)v(x) = 0$$

ここで $v(x) = \int_C (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta$ と置いて微分演算子を作用させる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1\right)v(x) &= \int_C (1 + \zeta^2)^{\frac{2n+1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{x} \int_C (1 + \zeta^2)^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} e^{x\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{x} (1 + \zeta^2)^{\frac{2n+1}{2}} e^{x\zeta} \Big|_{\partial C} - \frac{2n+1}{x} \int_C (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} \zeta e^{x\zeta} d\zeta \\ &= -\frac{2n+1}{x} \frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

特に Bessel 関数は $C = [-i, i]$ とした表式で得られる。これが (5.63) を満たすことは明らかである。

$$J_n(x) = \frac{x^n}{i\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})2^n} \int_{-i}^i (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta \quad (5.64)$$

証明

$$\int_{-i}^i (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta$$

指数関数を展開

$$= \int_{-i}^i (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x\zeta)^m}{m!} d\zeta$$

m が奇数の場合はゼロ。偶数の場合は積分領域を半分にして 2 倍する

$$= 2 \sum_{m=0}^{\infty} z^{2m} (2m)! \int_0^i (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} \zeta^{2m} d\zeta$$

$\zeta^2 = -t$ と変数変換

$$= i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^m}{(2m)!} \int_0^1 (1-t)^{\frac{2n-1}{2}} t^{m-\frac{1}{2}} dt$$

Beta 関数の積分公式を使用

$$= i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^m}{(2m)!} B\left(n + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\right) = i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^m}{(2m)!} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + m + 1)}$$

あとは Γ 関数の表式を代入し、Bessel 関数の展開公式 (5.9) と比較して求める式が得られる。

5.4.1 その他の類似関数の積分表式と漸近形

一般には複素積分の積分路は

$$I(-\infty + i, i]$$

II $[-i, -\infty - i)$

の組み合わせでかける。 $\zeta = \pm i, \zeta = \pm i - \infty$ で条件 (5.63) が満たされることは簡単に確認できる。

$$A = \frac{x^n}{i\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})2^n}$$

と置くと

$$J_n(x) = A \int_{I+II} (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta \quad (5.65)$$

$$Y_n(x) = -iA \int_{I-II} (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta \quad (5.66)$$

$$H_n^{(1)}(x) = 2A \int_I (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta \quad (5.67)$$

$$H_n^{(2)}(x) = 2A \int_{II} (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta \quad (5.68)$$

$H^{(1)}, H^{(2)}$ はそれぞれ第1種 (第2種) Hankel 関数と呼ばれる。 Y_n は Neumann 関数 (5.17) である。

これらの積分表示より Bessel 関数とそのファミリーの漸近形 ($x \rightarrow \infty$ での表式) が以下のように得られる。

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (5.69)$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (5.70)$$

$$H_n^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(i\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\right) \quad (5.71)$$

$$H_n^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(-i\left(x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)\right) \quad (5.72)$$

証明： I 上の積分については $\zeta = i - \frac{t}{x}$ のように ζ から t に変数変換を行う。その時

$$1 + \zeta^2 = -2i\frac{t}{x} + \frac{t^2}{x^2}$$

となるが第2項は $x \rightarrow \infty$ で無視できる。したがって

$$\begin{aligned} \int_I (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta &\sim \int_{\infty}^0 \left(-\frac{dt}{x}\right) \left(-2i\frac{t}{x}\right)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x(i-t/x)} \\ &= (-2i)^{\frac{2n-1}{2}} \frac{e^{ix}}{x^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{n-1/2} = (-2i)^{\frac{2n-1}{2}} \frac{e^{ix}}{x^{n+\frac{1}{2}}} \Gamma(n + 1/2) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & A \int_I (1 + \zeta^2)^{\frac{2n-1}{2}} e^{x\zeta} d\zeta \\ &= \frac{(-2i)^{n-1/2} x^n e^{ix}}{i\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)2^n} \frac{1}{x^{n+1/2}} \Gamma(n+1/2) (1 + O(1/x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{i(x-\frac{\pi}{2}(n+1/2))} (1 + O(1/x)) \end{aligned}$$

II の積分も同様に評価できる。

第6章 微分方程式の級数解と超幾何関数

6.1 微分方程式の級数解と確定特異点

これまで様々な二階の微分方程式が現れてきた。それらは次の形で書かれる。

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u(z) = 0 \quad (6.1)$$

この方程式は二階の線型方程式なので

$$u(z) = C_1u_1(z) + C_2u_2(z) \quad (6.2)$$

のような形で一般解が書き表される。ここで C_1, C_2 は積分定数であり $u_i(z)$ ($i = 1, 2$) はそれぞれ微分方程式 (6.1) の解である。この章では $p(z)$ と $q(z)$ が級数展開の形で書き表された時、微分方程式の解である $u(z)$ を級数展開の形で求める。

ある一点 $z = z_0$ に注目して、その点の周りの微分方程式の解の振る舞いを考察する。考えられる可能性として

1. $z = z_0$ が微分方程式の係数 $p(z), q(z)$ の正則な点となる場合。この場合は、 $z = z_0$ は (6.1) の正則点であるとする。
2. $z = z_0$ において $p(z)$ は高々 1 次の極、 $q(z)$ は高々 2 次の極を持つ場合。この場合は、 $z = z_0$ を (6.1) の**確定特異点** (regular singularity) と呼ぶ。
3. それ以外の場合。この場合、方程式の解は $z = z_0$ において極以外の特異点、つまり真性特異点を持ちうる。

以下では 1 と 2 の場合について微分方程式の級数解がどのように与えられるかについて考察する。

6.1.1 正則点の周りの展開

$p(z), q(z)$ が $z = z_0$ の周りで正則な場合、つまり

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z - z_0)^n, \quad q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z - z_0)^n,$$

のように展開可能な場合を考える。

$u(z)$ は以下のように正則な関数の Taylor 展開としてかけることが予想される。以下、具体的に方程式に代入することにより確認する。

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z - z_0)^n \tag{6.3}$$

微分方程式 (6.1) に代入し、 $z - z_0$ の冪について揃えると、

$$\begin{aligned} & \frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)u_n(z - z_0)^{n-2} + \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} p_\ell(z - z_0)^\ell \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} mu_m(z - z_0)^{m-1} \right) \\ & \quad + \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} q_\ell(z - z_0)^\ell \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} u_m(z - z_0)^m \right) \\ &= 2u_2 + p_0u_1 + q_0u_0 \\ & \quad + (6u_3 + 2p_0u_2 + q_0u_1 + p_1u_1 + q_1u_0)(z - z_0) \\ & \quad \dots \\ & \quad + \left((n+1)(n+2)u_{n+2} + \sum_{\ell=0}^{n+1} p_\ell(n+1-\ell)u_{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^n q_\ell u_{n-\ell} \right) (z - z_0)^n \\ & \quad + \dots \end{aligned}$$

まず $(z - z_0)^0$ の係数をゼロとおくと u_2 が u_0, u_1 により定まる。

$$u_2 = -\frac{p_0u_1 + q_0u_0}{2}$$

以下 $n = 1, 2, 3, \dots$ について $(z - z_0)^n$ の係数をゼロとおいた式より u_{n+2} が u_0, \dots, u_{n+1} により定まるが、それらは u_0, u_1 を与えたときに一意に決まる。以上をまとめると、正則点の周りの展開は展開の最初の二項の係数 u_0, u_1 を任意定数として

$$u(z) = u_0f_0(z) + u_1f_1(z), \quad f_0(z) = 1 - \frac{1}{2}q_0(z - z_0)^2 + \dots, \quad f_1(z) = (z - z_0) \left(1 - \frac{1}{2}p_0(z - z_0) + \dots \right)$$

のように $z = z_0$ で正則な関数 $f_0(z), f_1(z)$ の線型結合でかけることがわかる。以上の解析より (6.3) の形で全ての解が尽くされることが示された。

6.1.2 確定特異点の周りの展開

確定特異点 $z = z_0$ の近傍では

$$p(z) = \frac{1}{z - z_0} P(z), \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z - z_0)^n \quad (6.4)$$

$$q(z) = \frac{1}{(z - z_0)^2} Q(z), \quad Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_0)^n \quad (6.5)$$

のように展開可能である。この時 (6.1) は以下のようにかける。

$$(z - z_0)^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + (z - z_0) P(z) \frac{du}{dz} + Q(z) u(z) = 0 \quad (6.6)$$

画定特異点の周りの級数解

(6.6) は $z = z_0$ の周りで以下の形の級数解をもつ。

$$u(z) = (z - z_0)^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) \quad (6.7)$$

ただし α は以下の2次方程式 (決定方程式) の根。

$$F(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + p_0 \alpha + q_0 = 0 \quad (6.8)$$

ただし級数解が存在するためには以下の条件が必要となる。

$$F(\alpha + n) \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.9)$$

証明： 簡単のため以下では $z_0 = 0$ と置く。(6.7) を (6.6) に代入し z のべきを揃えると、

$$\begin{aligned} & (z - z_0)^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + (z - z_0) P(z) \frac{du}{dz} + Q(z) u(z) \\ &= (\alpha(\alpha - 1) + p_0 \alpha + q_0) z^\alpha \\ &+ \dots \\ &+ \left(F(\alpha + n) a_n + \left(\sum_{m=1}^{n-1} ((\alpha + n - m) p_m + q_m a_{n-m}) \right) + \alpha p_n + q_n \right) z^{\alpha+n} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

まず z^α の係数がゼロにならなくてはならないが、これは決定方程式 (6.8) が満たされることを示している。 $z^{\alpha+n}$ の係数がゼロになることを要求すると

$$a_n = \frac{1}{F(\alpha + n)} (a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \text{の式})$$

a_n が決まるためには $F(\alpha + n) \neq 0$ が必要であることがわかる (6.9)。逆にそれが満たされると a_n は n が小さい順に決定され、級数解が得られる。

決定方程式 (6.8) は二次方程式であるので一般には ρ_1, ρ_2 という二つの根をもつ。(重根の場合は $\rho_1 = \rho_2$ と書くことにする) ここで以下の場合分けが可能であることがわかる。

解の場合分け

(A) $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$ の場合: それぞれの ρ_i について (6.9) が満たされるため、(6.7) の形の解が 2 つ存在することになる。

(B) $\rho_1 = \rho_2 + n$ ($n = 1, 2, \dots$) の場合: ρ_1 については (6.9) が満たされるため級数解が存在する。 ρ_2 については条件 (6.9) が破れ、級数解は存在しない。 $\rho_1 = \rho_2$ (重根) の場合は級数の方法では 2 番目の独立な解を作れない。これらの場合については級数解は 1 つだけ得られることになる。

log を含む解の構成について (B) の場合は第 2 の解はより複雑であるが、ここではその一つの構成法を述べる。 $u_1(z), u_2(z)$ を微分方程式 (6.1) の二つの解とする。この時、 $u_1(z)$ が既知とすると $u_2(z)$ は以下の積分で求めることができる。(Frobenius の公式)

$$u_2(z) = u_1(z) \int^z \frac{d\xi}{u_1(\xi)^2} e^{-\int^\xi p(\zeta) d\zeta} \quad (6.10)$$

この公式の証明は後で述べるとして、級数の方法で得られる一番目の解からこの方法でどのような解が得られるのか考えてみる。

今、二つの解を $\rho, \rho - n$ ($n \geq 0$) とする。決定方程式より

$$F(\alpha) = (\alpha - \rho)(\alpha - \rho - n) = \alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0$$

これから

$$p_0 = -2\rho - n + 1$$

また $u_1(z)$ は指数 ρ に対応する解なので $u_1(z) = z^\rho$ (正則な関数) のような形をしている。この時

$$-\int^\xi p(\zeta) d\zeta = -\int^\xi \left(\frac{p_0}{\zeta} + p_1 + \dots\right) = -p_0 \log(\zeta) + \text{正則な関数}$$

つまり

$$u_1(z)^{-2} \exp\left(-\int^z p(\zeta) d\zeta\right) = z^{-2\rho} z^{-p_0} (\text{正則な関数}) = z^{-n-1} (\text{正則な関数})$$

最後に現れた $z^{-n-1} \times (\text{正則な関数})$ を展開すると $z^{-n-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^\ell$ となる。この展開を (6.10) に代入すると

$$u_2(z) = u_1(z) \left(c_n \log(z) + \sum_{\ell=0, \ell \neq n}^{\infty} \frac{c_\ell}{\ell - n} z^{\ell-n} \right) \quad (6.11)$$

つまり規格化因子を調整すると以下の形になる。

$$u_2(z) = u_1(z) \log(z) + z^{\rho-n} (\text{正則な関数}) \quad (6.12)$$

この内、第二項は確定特異点の周りの展開から予測されていた指数 $\rho - n$ に対応する級数解である。一方、第1項は $\log(z)$ を含む項であり級数解の解析には出てこなかった新たな項であり、この二つを組み合わせることにより求める第二の解が得られることがわかる。

Frobenius の公式 (6.10) の証明 最後に Frobenius の公式の証明を与える。証明の際に重要になるのは以下の関係式である。

解の Wronskian と係数の関係

$$p(z) = -\frac{d}{dz} \log(W(z)), \quad W(z) = u_1(z) \frac{d}{dz} u_2(z) - u_2(z) \frac{d}{dz} u_1(z) \quad (6.13)$$

証明：

$$\frac{dW}{dz} = u_1(z) \frac{d^2}{dz^2} u_2(z) - u_2(z) \frac{d^2}{dz^2} u_1(z)$$

微分方程式を代入

$$= -p(z) \left(u_1(z) \frac{d}{dz} u_2(z) - u_2(z) \frac{d}{dz} u_1(z) \right) = -p(z) W(z)$$

全体を $W(z)$ で割り、 $W^{-1} \frac{dW}{dz} = \frac{d}{dz} \log(W)$ を用いると (6.13) が得られる。

(6.13) の両辺を積分すると $\log(W(z)) = -\int^z d\zeta p(\zeta)$ 、これから $W(z) = \exp\left(-\int^z d\zeta p(\zeta)\right)$ が得られる。Wronskian の表式より

$$u_1(z) \frac{d}{dz} u_2(z) - u_2(z) \frac{d}{dz} u_1(z) = \exp\left(-\int^z d\zeta p(\zeta)\right)$$

これから u_2 に対する非斉次1階微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dz} u_2 - \left(\frac{d}{dz} \log(u_1) \right) u_2 = \frac{1}{u_1} \exp\left(-\int^z d\zeta p(\zeta)\right)$$

斉次方程式 (右辺をゼロとした時の方程式) を解くと $u_2(z) = C u_1(z)$ となるので定数変化法で $C \rightarrow C(z)$ とし、 $C(z)$ に対する方程式を求めると $\frac{dC}{dz} = u_1(z)^{-2} \exp\left(-\int^z d\zeta p(\zeta)\right)$ となる。この方程式は積分すると (6.10) が得られる。

モノドロミー 微分方程式 (6.1) の確定特異点 $z = z_0$ の周りの一次独立な解を $u_1(z), u_2(z)$ とする。この二つの解を $z = z_0$ の周りで一周解析接続する、つまり $z - z_0 \rightarrow e^{2\pi i}(z - z_0)$ 。このとき得られた

関数も微分方程式の解になっているはずなので $u_1(z), u_2(z)$ の線型結合でかけるはずである。つまり

$$\begin{pmatrix} u_1(z') \\ u_2(z') \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}, \quad z' - z_0 = e^{2\pi i}(z - z_0) \quad (6.14)$$

ここで M は 2×2 の定数行列であり、**モノドロミー行列**と呼ばれる。確定特異点の周りの解は決定方程式の根の間の関係で二つに分類されていた。まず (A) の場合 ($\rho_1 - \rho_2 \neq \text{整数}$) の場合は解の形から

$$M = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \rho_1} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \rho_2} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

となる。次に (B) の場合は $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \rho - n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とし、解として (6.12) の形をとると

$$M = e^{2\pi i \rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

のように非対角な形になる。

無限遠点の取り扱い 複素関数論で行ったように複素数で微分方程式を取り扱う場合には無限遠点 $z = \infty$ を一点として取り扱うのが便利である。その場合変数変換 $w = \frac{1}{z}$ を用いて $z = \infty$ を $w = 0$ という点として取り扱う。変数 w についての微分方程式は

$$\frac{d}{dz} = \frac{dw}{dz} \frac{d}{dw} = -w^2 \frac{d}{dw}, \quad \frac{d^2}{dz^2} = w^4 \frac{d^2}{dw^2} + 2w^3 \frac{d}{dw}$$

などを用いて (6.1) を以下のように書き換える。

$$\frac{d^2 u}{dw^2} + \tilde{p}(w) \frac{du}{dw} + \tilde{q}(w) u = 0, \quad \tilde{p}(w) = \frac{2}{w} - \frac{p(1/w)}{w^2}, \quad \tilde{q}(w) = \frac{q(1/w)}{w^4} \quad (6.17)$$

微分方程式 (6.1) が $z = \infty$ において確定特異点を持つということは、 w についての微分方程式 (6.17) が $w = 0$ において確定特異点を持つことである、と言い換える。つまり条件としては $\tilde{p}(w)$ が $w = 0$ において高々1位の極、 $\tilde{q}(w)$ が高々2位の極を持つということになる。

6.2 超幾何関数

6.2.1 超幾何関数とその類似関数について

ガウスの超幾何関数とは以下のような無限和で定義される関数のことを指す。

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \quad (6.18)$$

ここで a, b, c は複素パラメータ、 $(a)_n$ は Pochhammer 記号

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (6.19)$$

である。この関数の性質としては

- (A) 無限和は領域 $|z| < 1$ で絶対かつ一様に収束する。
- (B) a または b が負の整数 $(-n)$ である場合 n 次の多項式となる。
- (C) I 型の直交多項式 (Jacobi 多項式のファミリー) , Legendre 陪関数などは超幾何関数の特殊例
- (D) 後で述べる超幾何微分方程式の解。一般に 3 点に確定特異点を有する関数は超幾何関数を用いて表現できる。

このうち (A) については物理数学 I で学んだ。(B) は Pochhammer 記号の性質 $(-n)_{n+1} = 0$ から導くことができる。

(C) については (3.21) 式で Jacobi 多項式について対応関係を述べた。 $a = -n$ となっているので多項式を与えることに注意。パラメーターが 3 個 α, β, n あることから超幾何関数が多項式となる場合の一般形が Jacobi 多項式であることがわかる。特に $\alpha = \beta = 0$ とすると Legendre 多項式、 $\alpha = \beta = -1/2$ とすると Tschebycheff 多項式を与える。

$$P_n \propto {}_2F_1(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}) \quad (6.20)$$

$$T_n \propto {}_2F_1(-n, n; 1/2; \frac{1-z}{2}) \quad (6.21)$$

Kummer の合流型超幾何関数 超幾何関数に類する関数の例として Kummer の合流型超幾何関数が挙げられる。

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n \quad (6.22)$$

この関数の性質としては

- (A) 無限和は無有限遠点を除く複素平面全体 $|z| < \infty$ で絶対かつ一様に収束する。
- (B) a が負の整数 $(-n)$ である場合 n 次の多項式となる。
- (C) Sonine 多項式のファミリーは超幾何関数の特殊例
- (D) 後で述べる合流型超幾何微分方程式の解。一般に 1 点に確定特異点、もう一点に確定特異点の合流を用いて得られる真性特異点を有する関数は合流型超幾何関数を用いて表現できる。

このうち (A)(B) については超幾何関数と同様に示せる。(C) については Laguerre 関数、およびそれを一般化した Sonine 関数が (3.24) のように合流型超幾何関数で表現される。例えば、Laguerre 陪関数の場合でいうと

$$L_n^{(k)} = \frac{(k+1)_n}{n!} {}_1F_1(-n; k+1; x) \quad (6.23)$$

一般化超幾何関数 (6.18) や (6.22) をさらに一般化した超幾何関数のファミリーを以下のように定義する。(一般化超幾何関数と呼ばれる。)

$${}_nF_m(a_1, \dots, a_n; c_1, \dots, c_m; z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(a_1)_\ell \cdots (a_n)_\ell}{(c_1)_\ell \cdots (c_m)_\ell} \frac{z^\ell}{\ell!} \quad (6.24)$$

容易にわかるように $m = n - 1$ の場合は $|z| < 1$ で収束、 $m > n - 1$ の場合は $|z| < \infty$ で収束、 $m < n - 1$ の場合は $z \neq 0$ 以外で収束しないため漸近展開である。

一般化超幾何関数の形でかける関数も多い。例えば、指数関数や Bessel 関数は以下のように書ける。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = {}_0F_0(; ; z) \quad (6.25)$$

$$J_\nu(x) = (x/2)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} {}_0F_1(; \nu + 1; -\frac{x^2}{4}) \quad (6.26)$$

6.2.2 超幾何微分方程式

次に超幾何関数を解と持つような微分方程式について考察する。この方程式は 3 点 $(0, 1, \infty)$ に確定特異点を持つもので、**超幾何微分方程式**と呼ばれる。

超幾何微分方程式

$$z(1-z) \frac{d^2 u}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{du}{dz} - abu(z) = 0 \quad (6.27)$$

この方程式は 3 個の複素パラメータ a, b, c に依存する。

まずこの方程式が 3 点に確定特異点を持つことを確認する。この方程式は (6.1) において

$$p(z) = \frac{c - (a+b+1)z}{z(1-z)}, \quad q(z) = -\frac{ab}{z(1-z)}$$

とおいたものであり、 $z = 0, 1$ において確定特異点を持つことは容易に理解できる。各点における指数 (決定方程式の解) を求めると、

$z = 0$: $z \sim 0$ において $p \sim \frac{c}{z}$, $q \sim O(1/z)$ となるので $p_0 = c$, $q_0 = 0$ 。決定方程式と指数は以下のようなになる。

$$\alpha(\alpha - 1) + c\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0, 1 - c \quad (6.28)$$

$z = 1$: $z \sim 1$ で $p \sim \frac{a+b+1-c}{z-1}$, $q \sim O(\frac{1}{z-1})$ と振る舞うので $p_0 = a + b + 1 - c$, $q_0 = 0$ である。したがって決定方程式と指数は以下のように定まる。

$$\alpha(\alpha - 1) + (a + b + 1 - c)\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0, c - a - b \quad (6.29)$$

$z = \infty$: 無限遠点での取り扱い (6.6) から導くことができ

$$\begin{aligned} \tilde{p}(w) &= \frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}p(1/2) = \frac{2}{w} - \frac{c - (a + b + 1)/w}{w - 1} \sim \frac{1 - a - b}{w} + O(1) \\ \tilde{q}(w) &= \frac{1}{w^4}q(1/w) = \frac{ab}{w^2(1 - w)} \sim \frac{ab}{w^2} + O(1/w) \end{aligned}$$

つまり $p_0 = 1 - a - b$, $q_0 = ab$ となる。これを決定方程式に代入して根を求めると

$$\alpha(\alpha - 1) + (1 - a - b)\alpha + ab = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = a, b \quad (6.30)$$

級数解の構成 $z = 0, 1, \infty$ の周りでそれぞれ 2 種類ずつの級数解が得られるはずである。まず、 $z = 0$ の周りの展開から求める。

$$u(z) = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k \quad (6.31)$$

を (6.27) に代入し、整理すると以下のような形になる。

$$\begin{aligned} 0 &= z(1 - z) \sum_{k=0}^{\infty} (k + \rho)(k + \rho - 1) z^{k+\rho-1} \\ &\quad - (c - (1 + a + b)z) \sum_{k=0}^{\infty} (k + \rho) u_k z^{k+\rho-1} - ab \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{k+\rho} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} G(k + \rho) u_k z^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} F(k + \rho) u_k z^{k+\rho-1} \\ &= F(\rho) z^{\rho-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k F(k + \rho) - u_{k-1} G(k + \rho - 1)) z^{k+\rho-1} \end{aligned}$$

ここで

$$G(\rho) = (\rho + a)(\rho + b) \quad (6.32)$$

$$F(\rho) = \rho(\rho + c - 1) \quad (6.33)$$

最後の表式より方程式が成立するためには以下の条件が得られる。

$$F(\rho) = 0, \quad u_k F(k + \rho) = u_{k-1} G(k + \rho - 1) \quad (6.34)$$

このうち最初の方程式は決定方程式であり、 $\rho = 0, 1 - c$ が得られる。特に c が整数でない場合にはそれぞれに対して級数解が得られるはずである。特に $u_0 = 1$ とすると

$$u_k = \frac{G(k + \rho - 1)}{F(k + \rho)} u_{k-1} = \cdots = \frac{G(k + \rho - 1) \cdots G(\rho)}{F(k + \rho) \cdots F(\rho + 1)} = \frac{(\rho + a)_k (\rho + b)_k}{(\rho + 1)_k (\rho + c)_k} \quad (6.35)$$

のような表式が得られる。

ここで決定方程式の解 $\rho = 0$ に対しては $u_k = \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k}$ となるので

$${}_2F_1(a, b; c; z) \quad (6.36)$$

が解を与えることがわかる。これで超幾何関数 (6.18) が超幾何微分方程式 (6.27) の解であることが証明された。

もう一つの解は $u_k = \frac{(1-c+a)_k (1-c+b)_k}{k! (2-c)_k}$ となるので、パラメータを読み替えた超幾何関数で書かれることがわかる

$$z^{1-c} {}_2F_1(1 - c + a, 1 - c + b; 2 - c; z) \quad (6.37)$$

以下同様に $z = 1$ の周りの級数解は

$${}_2F_1(a, b; a + b - c + 1; 1 - z) \quad (6.38)$$

$$(1 - z)^{c-a-b} {}_2F_1(c - b, c - a; 1 - a - b + c; 1 - z) \quad (6.39)$$

$$(6.40)$$

$z = \infty$ の周りの級数解は

$$z^{-a} {}_2F_1(a, 1 - c + a; 1 - b + a; 1/z) \quad (6.41)$$

$$z^{-b} {}_2F_1(b, 1 - c + b; 1 - a + b; 1/z) \quad (6.42)$$

結局 (6.27) の解として 6 種類 (6.36–6.42) の解が得られ、それぞれ超幾何関数 (6.18) を用いて書くことができた。ただし、この中で 1 次独立なものは 2 つのみであり、残りの関数はその 2 つの関数を用いてかけるはずであることを注意しておく。解の間の関係式 (接続公式) はあとで導く。

6.3 Riemann の \mathcal{P} 関数と特異点の合流

6.3.1 Riemann の \mathcal{P} 関数

前の節で示したように超幾何微分方程式の解は超幾何関数を用いて書き下すことができることを理解した。ここでは一般に3点に確定特異点を持つ関数は全て超幾何関数を用いて記述可能であることについて説明する。

3点に確定特異点を持つ最も一般的な微分方程式を紹介する。今、確定特異点の座標を z_1, z_2, z_3 とし、 z_i ($i = 1, 2, 3$) における指数を α_i, β_i とする。対応する微分方程式は (6.1) で係数が以下の形で書かれることがわかっている。

$$p(z) = \sum_{i=1}^3 \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - z_i} \quad (6.43)$$

$$q(z) = \frac{1}{\prod_{i=1}^3 (z - z_i)} \left\{ \frac{\alpha_1 \beta_1 (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}{z - z_1} + \frac{\alpha_2 \beta_2 (z_2 - z_1)(z_2 - z_3)}{z - z_2} + \frac{\alpha_3 \beta_3 (z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}{z - z_3} \right\} \quad (6.44)$$

この微分方程式で $z = \infty$ が特異点でないという条件をおくと指数についての条件

$$\sum_{i=1}^3 (\alpha_i + \beta_i) = 1 \quad (6.45)$$

という条件が得られる。Riemann の \mathcal{P} 関数とはこの方程式の解全般を指し

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} , z \right\} \quad (6.46)$$

と書かれる。超幾何関数の場合に同じ方程式に6通りの解 (6.36–6.42) があったことを思い出すと、 \mathcal{P} 関数 (6.46) は特定の関数を表すというよりは対応する方程式を表すと考えるべきであろう。超幾何微分方程式 (6.27) は (6.46) の記法では

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1 - c & c - a - b & b \end{array} , z \right\} \quad (6.47)$$

Riemann の \mathcal{P} の性質として以下の2点が挙げられる。

(a) 指数の変更

$$\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)^k \left(\frac{z-z_3}{z-z_2}\right)^\ell \mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} , z \right\} = \mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1+k & \alpha_2-k-\ell & \alpha_3+\ell \\ \beta_1+k & \beta_2-k-\ell & \beta_3+\ell \end{matrix} , z \right\} \quad (6.48)$$

この方程式は「左辺で示されるような指数を持つ微分方程式の解に左辺のファクターをかけた関数が満たすべき微分方程式は右辺の指数で記述されているものである」と解釈される。それぞれの級数解に左辺のファクターをかけると指数が変化することは容易に理解できる。また、左辺のファクターは無限遠点での指数を変えないようなものに限定されることに注意。

(b) 一次分数変換の元での不変性：

一次分数変換

$$z \rightarrow z' = \frac{Az+B}{Cz+D}, \quad z_i \rightarrow z'_i = \frac{Az_i+B}{Cz_i+D}, \quad (i=1,2,3) \quad (6.49)$$

に対して

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} , z \right\} = \mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} z'_1 & z'_2 & z'_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} , z' \right\} \quad (6.50)$$

この方程式は、(6.1, 6.43, 6.44) で指定される微分方程式は一次分数変換の元でその形を変えない、ということを表している。

(c) $a_i \leftrightarrow b_i$ の元で \mathcal{P} 関数は変化しない。これはこれらの変換のもとで微分方程式が変わらないことから明らかである。

(d) \mathcal{P} 関数は引数の3つの列の入れ替えのもとで不変。これは各点における指数が列全体を入れ替えると不変であることから明らか。

これらの性質を用いると

1. \mathcal{P} 関数は5つ (6つのパラメータ α_i, β_i -1つの制約条件 (6.45) で自由度が5個になる)、一方超幾何関数のパラメータは3個であるが (a) の自由度によりパラメータのうち2つは調整可能で独立なパラメータ数は両方で等しい。

2. 一次分数変換

$$z' = \frac{(z_2-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_1)(z-z_3)} \quad (6.51)$$

の元で z_1, z_2, z_3 は $0, 1, \infty$ に写像される。

これから超幾何関数 ${}_2F_1$ は \mathcal{P} 関数と比べると少ないパラメータで記述されるが、一般の \mathcal{P} を超幾何関数から出発してこれらの変換を用いて書き表すことができることを示している。

また、これらの性質より超幾何微分方程式 (6.27) が (6.36-6.42) のような6通りの解が存在することも容易に理解できる。例えば (6.36) と (6.37) が同じ方程式の解であることは (6.47) の対応を用いて

$$\begin{aligned} z^{1-c} {}_2F_1(1-c+a, 1-c+b; 2-c; z) &\sim z^{1-c} \mathcal{P} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1-c+a \\ c-1 & c-a-b & 1-c+b \end{array} , z \right\} \\ &= \mathcal{P} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 1-c & 0 & a \\ 0 & c-a-b & b \end{array} , z \right\} \end{aligned}$$

のように示すことができる。また (6.38) が同じ微分方程式を満たすことは

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; z) &\sim \mathcal{P} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ c-a-b & 1-c & b \end{array} , 1-z \right\} \\ &= \mathcal{P} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} , z \right\} \end{aligned}$$

となることから理解できる。他の3つの組み合わせについても同様に議論できるので確認してほしい。

6.3.2 特異点の合流

この節では合流型超幾何関数 (6.22) が超幾何関数 (6.18) より特異点の合流というプロセスで得られることを解説する。これは (6.22) の名前の由来を表すと同時に、特異点の合流により真性特異点がどのように現れるのかを理解するのに必要である。

まず、超幾何関数に行く前に一般に確定特異点の合流で何が生じるかを理解したいと思う。簡単のため2点に確定特異点がある方程式の解として

$$u(z) = \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^\alpha \tag{6.52}$$

について考察する。この関数において $z = a, b$ が確定特異点の座標である。まず、ナイーブにこの二つの特異点が一致する極限 $b \rightarrow a$ を考える。この時

$$u(z) \rightarrow 1$$

となり、自明な関数を得られる、すなわち確定特異点を単に合流すると単に確定特異点を得られるだけであり新しい状況は生じない。一方で $b = a + \epsilon$ で $\epsilon \rightarrow 0$ のように動かすと同時に $\alpha = k/\epsilon$ のように指数を無限大にすると

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{z-a}{z-a-\epsilon} \right)^{\frac{k}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\epsilon}{z-a} \right)^{k/\epsilon} = e^{\frac{k}{z-a}} \quad (6.53)$$

となり、 $z = a$ に真性特異点が出現する。

超幾何関数 (6.18) から合流型超幾何関数 (6.22) を得るときは同様な極限をとる。つまり、

$${}_1F_1(a; c; z) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b + c; c; \frac{z}{c}) \quad (6.54)$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \mathcal{P} \left\{ \begin{matrix} 0 & b & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & -a-b & c+b \end{matrix} , z \right\} \quad (6.55)$$

つまり 2 番目の特異点である $z = b$ を無限遠に近づけると同時に対応する指数を無限大にしている (指数が b を含んでいることに注意。)

この極限操作を微分方程式のレベルで行うと、超幾何微分方程式で対応する変数変換を行なったもの

$$z(1-z/b) \frac{d^2 u}{dz^2} + \left\{ c - (a+b+c+1) \frac{z}{b} \right\} \frac{du}{dz} - a \left(1 + \frac{c}{b} \right) u = 0$$

で $b \rightarrow \infty$ の極限を取ることにより合流型超幾何関数に対する微分方程式が得られる

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (c-z) \frac{du}{dz} - au = 0 \quad (6.56)$$

特異点の合流により得られることから (6.56) の解は一般には $z = \infty$ で真性特異点を持つことが予想できる。実際 $w = 1/z$ の変数変換を行うと w に対する微分方程式は

$$\frac{d^2 u}{dw^2} + \left(\frac{2-c}{w} + \frac{1}{w^2} \right) \frac{du}{dw} - \frac{a}{w^2} u = 0 \quad (6.57)$$

のように書き換えられるが $w = 0$ が確定特異点にならないことが $\tilde{p}(w)$ に 2 次の極があることにより確認できる。

この方程式は形式的な級数展開の解も持っており $u = w^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ とおいて w の各幂の係数をゼロと置くことにより

$$u_1(z) \sim z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (a-c+1)_n}{n!} (-1/z)^n = z^{-a} {}_2F_0(a, a-c+1; ; -1/z) \quad (6.58)$$

のような一般化された超幾何関数の形の解が得られる。この和は収束領域がないため漸近展開となることに注意する。一方で2番目の解は

$$u_2(z) \sim z^{a-c} e^z {}_2F_0(1-a, c-a; ; 1/z) \quad (6.59)$$

という形の解を持つ。これを証明するには $u = e^z v$, $z = -\zeta$ といて微分方程式を書き換えると

$$\zeta \frac{d^2 v}{d\zeta^2} + (c - \zeta) \frac{dv}{d\zeta} + (a - c)v = 0 \quad (6.60)$$

のように書き換えられるが、これは (6.22) において $c \rightarrow c$, $a \rightarrow c - a$ と書き換えたものに対応することから示すことができる。 u_2 は明らかに $z = \infty$ に真性特異点を有しており、特異点の合流からの予想が示されている。

6.4 超幾何関数の積分表示

超幾何微分方程式 (6.27) を以下の形に書く。

$$L_z[u] = 0, \quad L_z = z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\} \frac{d}{dz} - ab \quad (6.61)$$

以下では次のような積分形で微分方程式 (6.61) の解を求める。

$$u(z) = \int_C (z - \zeta)^\lambda v(\zeta) d\zeta \quad (6.62)$$

ここで $v(\zeta)$, λ , 積分路 C については上の形で書いた $u(z)$ が (6.61) の解になるように選ぶ。(6.62) は一種の積分変換であり Euler 変換と呼ばれる。積分内で z に依存するのは $(z - \zeta)^\lambda$ の部分だけなので L_z の作用を以下のように評価する。

$$\begin{aligned} L_z[u] &= \int_C L_z[(z - \zeta)^\lambda] v(\zeta) d\zeta \\ L_z[(z - \zeta)^\lambda] &= \lambda(\lambda - 1)z(1-z)(z - \zeta)^\lambda \\ &\quad + \{c - (a+b+1)z\} \lambda(z - \zeta)^{\lambda-1} - ab(z - \zeta)^\lambda \\ &= -(\lambda + a)(\lambda + b)(z - \zeta)^\lambda \\ &\quad + \lambda(\lambda - 1 + c - \zeta(a + b + 2\lambda - 1))(z - \zeta)^{\lambda-1} + \lambda(\lambda - 1)\zeta(1 - \zeta)(z - \zeta)^{\lambda-2} \\ &= \left\{ -(\lambda + a)(\lambda + b) - (\lambda - 1 + c - \zeta(a + b + 2\lambda - 1)) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \zeta(1 - \zeta) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right\} (z - \zeta)^\lambda \end{aligned}$$

ここで

$$\lambda = -b \quad (6.63)$$

と置くと最後の行、括弧内の第1項が消え

$$= \left\{ -(c-b-1-\zeta(a-b-1))\frac{\partial}{\partial\zeta} + \zeta(1-\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} \right\} (z-\zeta)^{-b} = (\bullet)$$

となる。 $L_z[u]$ の評価に戻り

$$L_z[u] = \int_C (\bullet)v(\zeta)d\zeta$$

第二項を1回部分積分

$$\begin{aligned} &= \zeta(1-\zeta)v(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}(z-\zeta)^{-b} \Big|_{\partial C} \quad (\star) \\ &\quad - \int_C \left[(c-b-1-\zeta(a-b+1))v(\zeta) + \frac{\partial}{\partial\zeta}(\zeta(1-\zeta)v(\zeta)) \right] \\ &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial\zeta}(z-\zeta)^{-b}d\zeta \quad (\star\star) \end{aligned}$$

まず $(\star\star)$ を消すように $v(\zeta)$ を選ぶ。つまり以下の微分方程式を要求する。

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} \{ \zeta(1-\zeta)v(\zeta) \} + (c-b-1-\zeta(a-b-1))v(\zeta) = 0$$

ここで $\zeta(1-\zeta)v(\zeta) = f(\zeta)$ と置くと f に対する微分方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial\zeta} = -\frac{c-b-1-\zeta(a-b-1)}{\zeta(1-\zeta)}f = -\left(\frac{c-b-1}{\zeta} + \frac{c-a}{1-\zeta} \right) f$$

これは求積法で解が得られ、

$$f = \zeta^{-c+b+1}(1-\zeta)^{c-a}$$

すなわち

$$v(\zeta) = \zeta^{b-c}(1-\zeta)^{c-a-1} \quad (6.64)$$

のように $v(\zeta)$ が定まった。

最後に部分積分の境界項 (\star) をゼロにするためには

$$\zeta^{-c+b+1}(1-\zeta)^{c-a}(z-\zeta)^{-b-1} \Big|_{\partial C} = 0 \quad (6.65)$$

となるように C を選べば良いことになる。

以上をまとめると超幾何微分方程式(6.61)の解は以下の形になることが理解された。

超幾何微分方程式の解の積分形

積分変数の取り方により2通りの積分形が得られる。

$$u(z) = \int_C \zeta^{b-c}(1-\zeta)^{c-a-1}(z-\zeta)^{-b}d\zeta \quad (6.66)$$

$$\propto \int_{C'} \eta^{a-1}(1-\eta)^{c-a-1}(1-\eta z)^{-b}d\eta \quad (6.67)$$

2行目の表示は積分変数を ζ から $\eta = \frac{1}{\zeta}$ に変更し

$$u(z) = \int_{C'} \zeta^{c-b} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^{c-a-1} \left(z - \frac{1}{\zeta}\right)^{-b} \left(-\frac{d\zeta}{\zeta^2}\right) \quad (6.68)$$

この表式を整理して得られた。2番目の表示での境界条件は以下ようになる。

$$\eta^a (1 - \eta)^{c-a} (1 - \eta z)^{-b-1} \Big|_{\partial C} = 0 \quad (6.69)$$

級数解との対応 2番目の表示で $C' = [0, 1]$ とし、境界条件を満たすために $\text{Re}(a) > 0$, $\text{Re}(c-a) > 0$ を要請する。

$$u(z) = \int_0^1 \eta^{a-1} (1 - \eta)^{c-a-1} (1 - \eta z)^{-b} d\eta \quad (6.70)$$

被積分関数は η の多価関数になっているのに注意。ここでは実軸上の $\eta \in [0, 1]$ に対して $\arg(\eta) = \arg(1 - \eta) = 0$ となるようにして、多価関数の位相を固定する。Taylor 展開

$$(1 - \eta z)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)(-b-1)\cdots(-b-n+1)}{n!} (-\eta z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} (\eta z)^n \quad (6.71)$$

を用いて被積分関数を展開する。

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_0^1 \eta^{a-1} (1 - \eta)^{c-a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} z^n \eta^n d\eta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} z^n \int_0^1 \eta^{a+n-1} (1 - \eta)^{c-a-1} d\eta \end{aligned}$$

積分はベータ関数 $B(a+n, c-a)$ を与える。ガンマ関数で書き換える

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} z^n \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; z) \end{aligned}$$

これから以下の公式が得られた。

超幾何関数の積分表示

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \eta^{a-1} (1 - \eta)^{c-a-1} (1 - \eta z)^{-b} d\eta \quad (6.72)$$

超幾何関数の特殊値 積分公式 (6.72) で $z = 1$ と置くことにより超幾何関数の特殊値が得られる。

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (6.73)$$

証明)

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; 1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \eta^{a-1}(1-\eta)^{c-a-b-1} d\eta \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} B(a, c-b-a) \end{aligned}$$

ベータ関数をガンマ関数で書き換えると求める式が得られる。

${}_2F_1(a, b; c; 1)$ のような無限和は積分形を用いて初めて値の評価が可能となることに注意する。積分公式の利点の一つはこのような無限和の評価を可能にする点にある。

合流型超幾何関数の積分表示 積分公式 (6.72) で特異点の合流極限を取ると合流型超幾何関数の積分表示が得られる。

$${}_1F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \eta^{a-1}(1-\eta)^{c-a-1} e^{\eta z} d\eta \quad (6.74)$$

証明)

$$\lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b+c; c; z/b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \eta^{a-1}(1-\eta)^{c-a-1} (1-\eta z/b)^{-b-c} d\eta$$

この表式で以下の極限を取る。

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\eta z}{b}\right)^{-b-c} = e^{\eta z}$$

Legendre 多項式への応用：第二種 Legendre 関数について 積分公式のもう一つの利点は Bessel 関数のところでも示したように積分路を別のものに取り替えることにより一時独立な第二の解を導くことができる点である。このことを示すため Legendre 関数を例に取り解説する。

Legendre 多項式と超幾何関数との関係は (6.20) で与えた。これらから Legendre 関数の積分公式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} P_n(x) &\sim \int_C \zeta^n (1-\zeta)^n \left(\frac{1-z}{2} - \zeta\right) d\zeta \\ &\quad \zeta = \frac{1-\xi}{2} \text{ と積分変数を変更} \\ &= \int_{C'} (1-\xi^2)^n (z-\xi)^{-n-1} d\xi \end{aligned}$$

この表式で $C' = C_z$ と置くと母関数表示の際に用いた (3.56) で $\rho = 1$, $Q = 1 - x^2$ とおいた表式と一致する。規格化因子も含めると

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i} \oint_{C_x} \frac{(\zeta^2 - 1)^2}{(\zeta - x)^{n+1}} d\zeta \quad (6.75)$$

積分表示では積分路を変えると 1 次独立な別の解の定義を与えることが可能となる。そのような例として**第二種 Legendre 関数**を取り上げる。定義は

第二種 Legendre 関数

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^1 (1 - \zeta^2)^n (z - \zeta)^{-n-1} d\zeta \quad (6.76)$$

この関数は Legendre の微分方程式 (3.18) を満たすもう一つの解を与える。

$n = 0, 1$ などについては Q_n の具体的な表式を求めることができる。

$$Q_0 = \frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1}, \quad Q_1 = \frac{z}{2} \log \frac{z+1}{z-1}, \dots \quad (6.77)$$

第二種 Legendre 関数の Taylor 展開は超幾何関数を用いて記述可能である。

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \frac{1}{2^{n+1} z^{n+1}} \int_{-1}^1 (1 - \zeta^2)^n \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-n-1} d\zeta \\ &\quad \text{第二項を Taylor 展開。各項がベータ関数積分になる} \\ &= \frac{\pi^{1/2} \Gamma(n+1)}{2^{n+1} \Gamma(n+3/2)} \frac{1}{z^{n+1}} {}_2F_1 \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2} + 1; n + \frac{3}{2}; z^{-2} \right) \end{aligned}$$

6.5 超幾何関数の接続公式

すでに述べたように超幾何微分方程式 (6.27) の 6 種類の解 (6.36-6.42) のうち独立なものは 2 つまでで残りの表式はその二つを用いてかけるはずである。多くの関係式が存在するが、ここでは基本的な関係式とその照明を与える。

$z = 0$ 周りの解と $z = 1$ 周りの解の関係

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; 1-z) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-b, c-a; 1+c-a-b; 1-z) \end{aligned} \quad (6.78)$$

$z = 0$ 周りの解と $z = \infty$ 周りの解の関係

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} (-z)^{-a} {}_2F_1(a, 1+a-c; 1+a-b; 1/z) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1(b, 1+b-c; 1+b-a; 1/z) \end{aligned} \quad (6.79)$$

(6.78) の証明 まず $z = 1$ の周りで定義された 2 つの関数が常微分方程式 (6.27) の独立な 2 つの解を与えていることから

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= A {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; 1-z) \\ &\quad + B (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-b, c-a; 1+c-a-b; 1-z) \end{aligned}$$

ここで $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ として $z = 1$ と置くと

$$A = F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

が得られる。次に $\operatorname{Re}(1-c) > 0$ を仮定して両辺で $z \rightarrow 0$ の極限を取ると

$$1 = A \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(a-c+1)} + B \frac{\Gamma(1+c-a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}$$

上で求めた A を代入。ガンマ関数の公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

を用いると

$$\begin{aligned} B &= \frac{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-c)\Gamma(1+c-a-b)} \left\{ 1 - \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1-c+a+b)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(a-c+1)} \right\} \\ &= \frac{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-c)\Gamma(1+c-a-b)} \left\{ 1 - \frac{\sin \pi(c-a)\sin \pi(c-b)}{\sin \pi c \sin \pi(c-a-b)} \right\} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left\{ 1 - \frac{\sin \pi(c-a)\sin \pi(c-b)}{\sin \pi c \sin \pi(c-a-b)} \right\} \frac{\sin \pi c \sin \pi(a+b-c)}{\sin \pi a \sin \pi b} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \end{aligned}$$

が導かれる。ここで 3 行目から 4 行目の変換は第二項と第三項の組み合わせが加法定理 $\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$ により

$$\frac{\sin \pi c \sin \pi(a+b-c)}{\sin \pi a \sin \pi b} + \frac{\sin \pi(c-b)\sin \pi(c-a)}{\sin \pi a \sin \pi b} = 1$$

となることにより得られる。

(6.79) の証明 接続公式の証明によく用いられる手法として以下の Barnes の積分を用いる方法がある。以下に簡単に説明する。(詳しい証明は Whittaker-Watson の教科書 14.5 節にあるので興味がある学生は参考にしてください)

Barnes の積分

$$I_B = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-z)^s ds \quad (6.80)$$

を考える。まず被積分関数の極の位置を確認すると

- $\Gamma(a+s)$: $s = -a - n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)
- $\Gamma(b+s)$: $s = -b - n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)
- $\Gamma(-s)$: $s = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

この状況のもとで積分路は上端・下端はそれぞれ $\pm\infty i$ とするが途中の経路を適宜変形して $s = -a - n, -b - n$ の極は全て積分路の左側、 $s = n$ の極は積分路の右側に来るように定義する。

(i) まず積分路の右側に ∞i から $-\infty i$ に向かい適当な円周積分を補完して (6.80) を評価する。積分路の保管をうまくやると円周積分が無視できることなどは上記教科書を参照すること。積分は竜数積分となるが極は無限個、 $s = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) にあり、ガンマ関数の振る舞い $\Gamma(-s) \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{1}{s-n}$ を用いると

$$I_B = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; z)$$

という評価ができる。

(ii) 同様の議論により積分路を左側に閉じさせることも可能でその場合 $s = -a - n, s = -b - n$ の極の留数を拾うことになる。つまり、

$$\begin{aligned} I_B &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-a-n)}{n!\Gamma(c-a-n)} (-z)^{-a-n} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(a-b-n)}{n!\Gamma(c-b-n)} (-z)^{-b-n} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} {}_2F_1(a, 1-c+a; 1-b+a; z^{-1}) \\ &\quad + \frac{\Gamma(b)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1(b, 1-c+b; 1-a+b; z^{-1}) \end{aligned}$$

I_B の表式二つを比較すると (6.79) が得られる。なお、1行目から2行目に行く際には

$$\begin{aligned}\Gamma(b-a-n) &= \frac{\pi}{\Gamma(1+a+n-b) \sin \pi(b-a-n)} \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{\sin \pi(b-a) \Gamma(1+a-b) (a-b+1)_n} \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(b-a)}{(a-b+1)_n}\end{aligned}$$

などの変形を用いた。