

2025 年度秋学期 物理数学 I

濱口幸一

最終更新日時：2025 年 10 月 23 日 16:36

目次

§ 0	この講義について	1
0.1	担当教員の自己紹介	1
0.2	講義についての諸連絡	1
0.3	成績	2
0.4	参考文献	2
§ 1	複素関数	3
1.1	この章の目標	3
1.2	準備	5
1.2.1	複素数	5
1.2.2	偏微分	7
1.2.3	(実変数関数の) テイラー展開	8
1.2.4	オイラーの公式について	9
1.3	複素関数とその微分、正則関数	10
1.3.1	複素関数	10
1.3.2	複素関数は平面から平面への写像	11
1.3.3	複素微分と正則関数	13
1.3.4	正則関数の例	19
1.3.5	言葉の定義をいくつか	21
1.3.6	複素級数とその収束	23
1.4	複素積分	28
1.4.1	複素 (線) 積分の定義	28
1.4.2	複素積分の定義からすぐにわかるいくつかの性質	31
1.4.3	複素積分の例	32
1.4.4	コーシーの積分定理	35
1.4.5	正則関数の定義とコーシーの積分定理についてのコメント	39
1.4.6	コーシーの積分公式と、無限回微分可能性	47
1.4.7	コーシーの積分公式の応用	51
1.5	テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理	56
1.5.1	テイラー展開	56

1.5.2	ローラン展開と留数	60
1.5.3	留数定理	66
1.5.4	実数積分への応用	69
1.6	一致の定理と解析接続	82
§ 2	常微分方程式	82
付録 A	レポート問題 [b] の解答例	83

§ 0 この講義について

§ 1 章「複素関数論」+ § 2 章「常微分方程式」
80~90% くらい 10~20% くらい

0.1 担当教員の自己紹介

- ▶ 濱口幸一
- ▶ 専門は素粒子論（+初期宇宙論）です。
- ▶ ウェブページは[こちら](#)。

0.2 講義についての諸連絡

- ▶ 講義のウェブページは[こちら](#)。（「濱口幸一」で検索 → 講義のページ → 物理数学 I.）
- ▶ お知らせがある場合は、基本的に UTOL でアナウンスします。もし UTOL がトラブルなどで見られないときは[講義のウェブページ](#)にアナウンスを載せます。
- ▶ 講義は 10/2(木)~10/30(木) と 11/13(木)~11/20(木) の毎週木曜 2 限 (10:25~12:10)+3 限 (13:00~14:45) です。
- ▶ 11/6(木) は月曜の講義を行うため、この講義はありません。
- ▶ 第 1 週 (10/2) から対面で、駒場 11 号館 1106 教室で黒板を用いて講義します。昼食の時間や、3 限のあとも 15:00 くらいまでは 1106 教室にいる予定ですので、質問などあれば声をかけて下さい。（講義に関係ある質問、関係ない質問、雑談、など何でも大歓迎です。）
- ▶ 第 7 週 (11/20) はオンラインで、Goodnotes を用いた手書き板書形式で行います。近づいてきたら Zoom 情報などを UTOL で案内します。
- ▶ 11/27(木) の 3 限の時間に期末試験を行う予定です。日時や部屋は変更される可能性があるのでご注意ください。確定したら UTOL で案内します。（下記 0.3 も参照）。
- ▶ UTOL の「担当教員へのメッセージ」「掲示板」も使えるようになっていると思います。ぜひ利用下さい。

0.3 成績

成績は、レポートと 11/27(木) の 3 限の時間（予定）に行う期末試験で評価します。

詳しくは[こちらの pdf ファイル](#)を見て下さい。

出席はとりませんので、講義ノートを見てレポート提出＋期末テストだけでも結構です。

0.4 参考文献

特定の教科書・参考書はありませんが、講義ノートを作る際に参考にした文献をいくつかあげておきます。

- ▶ [2020 年度](#), [2021 年度](#), [2022 年度](#), [2024 年度](#), の同講義の講義ノート
- ▶ [松尾先生の講義ノート](#)
- ▶ 「物理数学 I」 福山秀敏・小形正男、朝倉書店
- ▶ 「物理のための数学入門 複素関数論」 有馬朗人・神部勉、共立出版
- ▶ 「自然科学者のための数学概論」 寺沢貫一、岩波書店
- ▶ 「複素関数論の基礎」 山本直樹、裳華房
- ▶ 「入門複素関数」 川平友規、裳華房
- ▶ 「解析入門 II」 杉浦光夫、東京大学出版会
- ▶ [EMAN の物理数学](#)
- ▶ [予備校のノリで学ぶ複素関数論入門 \(YouTube\)](#)

後でまた追加するかもしれません。

§ 1 複素関数

1.1 この章の目標

目標：正則関数の特別な性質たちを理解すること。

1.3 節で「複素微分可能」「正則関数」を定義する。

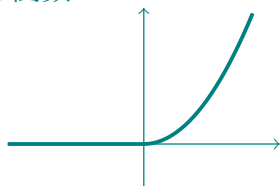
$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (z, \Delta z \text{ は複素数}). \quad (1)$$

この極限が一意に決まるとき、 $f(z)$ は点 z で「複素微分可能」といい、 $f(z)$ が領域 D 内の全ての点で複素微分可能なとき、 $f(z)$ は D 上で「正則」と言う^{*1}。このたった1つの条件「正則性」を要求しただけで、複素関数 $f(z)$ に対して多くの特別な性質が導かれる。例えば・・・

- ▶ (1 回微分可能を要求しただけなのに) 無限回微分可能。 → 1.4 節

実変数関数だと・・・例えば関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$$

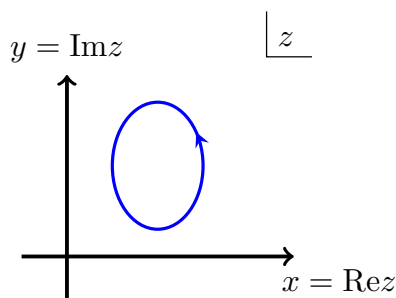


は、 $x = 0$ で $f'(x)$ は連続だけど $f''(x)$ は不連続 ($f''(x)$ が定義出来ない)。

複素関数は 1 回微分可能なら無限回微分可能。

- ▶ 複素周回積分の特殊な性質たち。

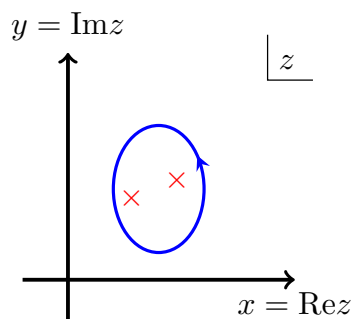
正則な領域で周回積分したら必ずゼロになる → 「コーシーの積分定理」 1.4 節



$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

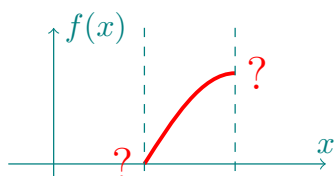
^{*1} 「複素微分可能」は1点でも定義出来るのに対して (例えば $f(z) = |z|^2$ は $z = 0$ でのみ複素微分可能)、「正則」は領域について定義します。ただし、これ以降、この講義では「1点でのみ複素微分可能」のような関数を考えることはないので両者の違いが重要になる状況はほとんどないと思います。もし講義ノートに不正確な記述を見つけたら教えてください。

正則でなくても、周回積分の値が一部の点だけで決まる → 「留数定理」 1.5 節



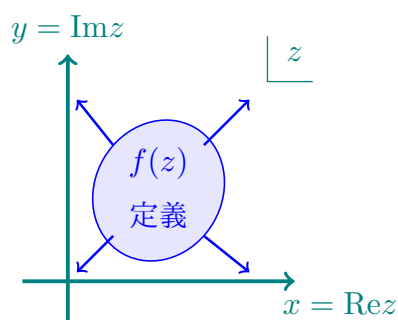
$$\oint_C f(z)dz = \sum_k R_k.$$

- 複素平面の一部で定義したら拡張が一意に決まる → 「解析接続」 1.6 節
実変数関数だと、ある領域で関数を定義して微分可能性を要求しても



領域外の関数形は決まらない。

正則関数は、複素平面の一部で定義したら



拡張が一意に決まる。

- 他にも色々あります。(一部はレポート問題で出題予定。)

[講義終了後に、正則関数のこれらの性質がだいたい頭に残ってくれば、担当教員としては目標達成です!]

1.2 準備

まずは簡単な復習から始めます。のんびり聞いていて下さい。

1.2.1 複素数

- ▶ 複素数とは、2つの実数 x, y と虚数単位 i ($i^2 = -1$) を用いて

$$z = x + iy \quad (2)$$

と表される数のことである。

- ▶ 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く。実数の集合 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ に含まれる ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)。
▶ 複素数 $z = x + iy$ に対して、以下の記号・用語を定義する。

$$z \text{ の実部 : } \operatorname{Re}(z) = x \quad (3)$$

$$z \text{ の虚部 : } \operatorname{Im}(z) = y \quad (4)$$

$$z \text{ 共役 : } \bar{z} = x - iy \quad \bar{z} \text{ を } z^* \text{ と書くこともあります。}$$

$$z \text{ の絶対値 : } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5)$$

- ▶ 複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$ と $z_2 = x_2 + iy_2$ に対して、

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 = y_2. \quad (6)$$

特に

$$z = 0 \iff x = y = 0 \iff |z| = 0. \quad (7)$$

また四則演算は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad (8)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad \text{for } z \neq 0. \quad (10)$$

- ▶ 極形式

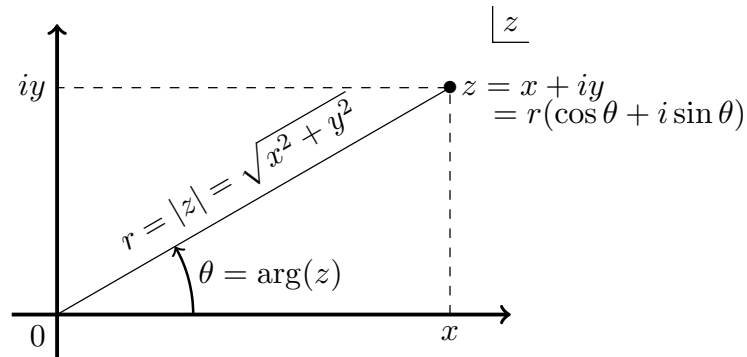
$$z = x + iy \quad (11)$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (12)$$

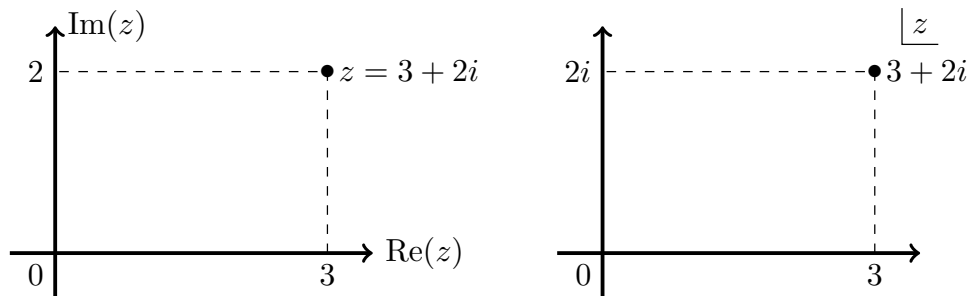
$$\text{where } r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad (13)$$

θ を複素数 z の「偏角」といい、 $\arg(z)$ と表す。(ただし $r = 0$ では θ は定まらない。)

- 複素平面 複素数は複素平面上の点で表される。



- 複素平面の表し方について



この講義ではどちらの表式も用いる。右図の右上にある $\boxed{z}$ の記号は、この複素平面の点が複素数 z の値を表していることを示している。

- さてこの辺りで、簡単なレポート問題をいくつか出しておこうと思います。

レポート問題

[b-1] 複素数 z が $|z| = 1$ をみたすとき、 z のとりうる値について複素平面上に図示せよ。

[b-2] $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、以下を示せ。

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad z\bar{z} = |z|^2. \quad (14)$$

[b-3] $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、以下を示せ。

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad |zw| = |z||w| \quad (15)$$

[b-4] $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、以下を示せ。

$$|z| + |w| \geq |z + w| \quad (16)$$

1.2.2 偏微分

複素関数は 2 変数関数なので、偏微分が出てくる。

- ▶ 実 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して、点 (x, y) で極限

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (17)$$

が (Δx の符号によらずに) 有限な一定値をとるとき、これを「 $f(x, y)$ の点 (x, y) における x に関する偏微分 (係数)」という。3 変数以上の場合も同様。

- ▶ 省略した記法 $\boxed{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y) = \partial_x f(x, y)}$ もよく使う。

- ▶ y に関する偏微分も同様。

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \partial_y f(x, y) = f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow \pm 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (18)$$

- ▶ 合成関数の偏微分：例えば 2 変数関数 $f_i = f_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots$) と f_i の多変数関数 $g = g(f_1, f_2, \dots)$ があつたとき、その偏微分は

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial f_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial f_2} + \dots \quad (19)$$

(※) 偏微分における注意：微分していない変数 (固定している変数) が何かも指定しないといけない。例えば $f(x, y) = x^2 y$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2xy, \quad (20)$$

だが、ここから例えば変数を $(x, y) \rightarrow (x, s = xy)$ と変換すると、 $y = s/x$ だから $f(x, y) = xs$ 。これを同じ記号 f を用いて $f(x, s)$ と書いてしまうと (同じ記号を用いてしまうのが混乱のもとなのですが、、、下記参照)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, s) = s = xy. \quad (21)$$

なので、 $f_x = \partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$ と書いたときに、 x 以外の変数として何を固定しているかを指定しないと、答が変わってしまう。固定した変数を明確にするために、(20) 式の左辺を $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y$ 、(21) 式の左辺を $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_s$ と書いたりもする。(講義後微修正) (熱力学とか混乱しやすいですよ。混乱を避けるには、変数変換するたびに関数の表記を $f \rightarrow \tilde{f}$ などと変更すれば良いのですが、物理では関数が物理量を表すことが多いので、あまり変更したくないという事情もあります。)

1.2.3 (実変数関数の) テイラー展開

- ▶ 実変数関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で n 回微分可能であるとき、その k 階微分 $f^{(k)}(a)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) を用いて

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x), \quad (22)$$

と表すことができる。剰余項 $R_n(x)$ は $f(x)$ と多項式関数の誤差を表し、 $x \rightarrow a$ で $(x-a)^n$ より速く 0 に近づく (テイラーの定理)^{*2}。(証明略)

- ▶ $f(x)$ が点 $x = a$ で無限回微分可能で、かつ a の近傍の任意の x に対して^{*3} $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ のとき、以下のように書ける。^{*4}

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad (23)$$

- ▶ テイラー展開の例

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (24)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (25)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (26)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (27)$$

それぞれの級数がどの範囲で収束するか (収束半径) については、複素数に拡張して 1.3.6 節で議論する。例えば最後の式は、左辺は $x \neq 1$ で定義されているけど、右辺は $|x| < 1$ でしか収束しない。

^{*2} (講義後に脚注追加) テイラーの定理の剰余項の表し方はいくつかのバージョンがあるようです。ここではベアノ剰余項と呼ばれる形を書いています。

^{*3} (講義後修正) 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a) = 0$ 」を「 a の近傍の任意の x に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 」に修正しました。

^{*4} (講義後に脚注追加): $f(x)$ が (23) 式のように書けるためには、 $x = a$ での無限回微分可能性だけでは不十分。例として

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ e^{-1/x} & (x > 0) \end{cases}$$

を考えると、この関数は $x = 0$ で無限回微分可能で、かつ $x = 0$ で全ての導関数がゼロとなる ($f^{(k)}(0) = 0$ for $k = 0, 1, 2, \dots$)。したがって (23) 式で $a = 0$ とすると右辺は恒等的にゼロとなり、左辺に一致しない。実際、 $a = 0$ のとき (22) 式の剰余項 $R_n(x)$ は $f(x)$ そのものになり、条件「 a の近傍の任意の x に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 」が成立していないことがわかる。

1.2.4 オイラーの公式について

► (24) 式で $x \rightarrow i\theta$ とすると

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \dots \quad (28)$$

$$= 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \quad (29)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots\right) \quad (30)$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta. \quad (31)$$

ほとんどの人が見たことがあると思います。

オイラーの公式は、以下の状況証拠からも、正しそう。

	左辺	右辺
n 乗	$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$	$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (ド・モアブルの公式)
微分	$(d/d\theta)e^{i\theta} = ie^{i\theta}$	$(d/d\theta)[\text{右辺}] = -\sin \theta + i \cos \theta = i[\text{右辺}]$

しかし良く考えると・・・

- 勝手に指数関数 e^x の指数を $x \rightarrow i\theta$ と拡張したけどいいのか？
- するとさらに拡張して、一般の $z \in \mathbb{C}$ に対して $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ と言えるのか？
- すると $\cos z$ とか $\sin z$ というのは何者だ？ $z \in \mathbb{C}$ でどう定義する??
- 例えば $z = 1 + i$ として、 $\cos(1 + i)$ とか $\sin(1 + i)$ とかはどのような値を取る？

これらの疑問は後で回収する。(正則関数の例 1.3.4, 解析接続 1.6.)

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.1 複素関数

- ▶ 例えば実変数関数 $f(x) = x^2$ というものがある。これを素直に複素数に拡張すると、

$$f(z) = z^2. \quad (32)$$

これに $z = x + iy$ を代入すると

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (33)$$

したがって $f(z)$ は、複素数から複素数への写像となる。

$$\text{例} : z = 1 + 2i \rightarrow f(z) = z^2 = -3 + 4i. \quad (34)$$

- ▶ 一般に複素関数 $f(z)$ の実部と虚部を u, v と書くと、

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (35)$$

と書ける。上の $f(z) = z^2$ の例では、 $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$ 。

- ▶ いくつか例を挙げてみる。

$f(z)$	$\text{Re} f = u(x, y),$	$\text{Im} f = v(x, y)$
z^2	$x^2 - y^2$	$2xy$
z^3	$x^3 - 3xy^2$	$3x^2y - y^3$
iz	$-y$	x
$2z + i\bar{z}$	$2x + y$	$x + 2y$
$(z + \bar{z})/2$	x	0
$ z ^2$	$x^2 + y^2$	0

(36)

下の3つの例では、 $f(z)$ が z だけでなく $\bar{z}$ にも独立に依存していると仮定している。 $f(z, \bar{z})$ と書いてもよい。

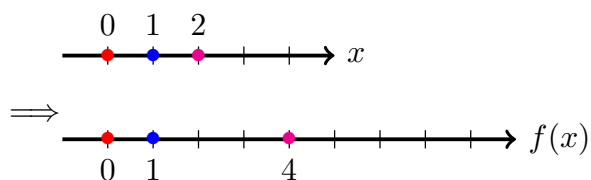
- ▶ 一般に $z = x + iy$ と $\bar{z} = x - iy$ を用いれば、任意の実2変数関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ を実部と虚部にもつような複素関数が作れる。

$$f(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (37)$$

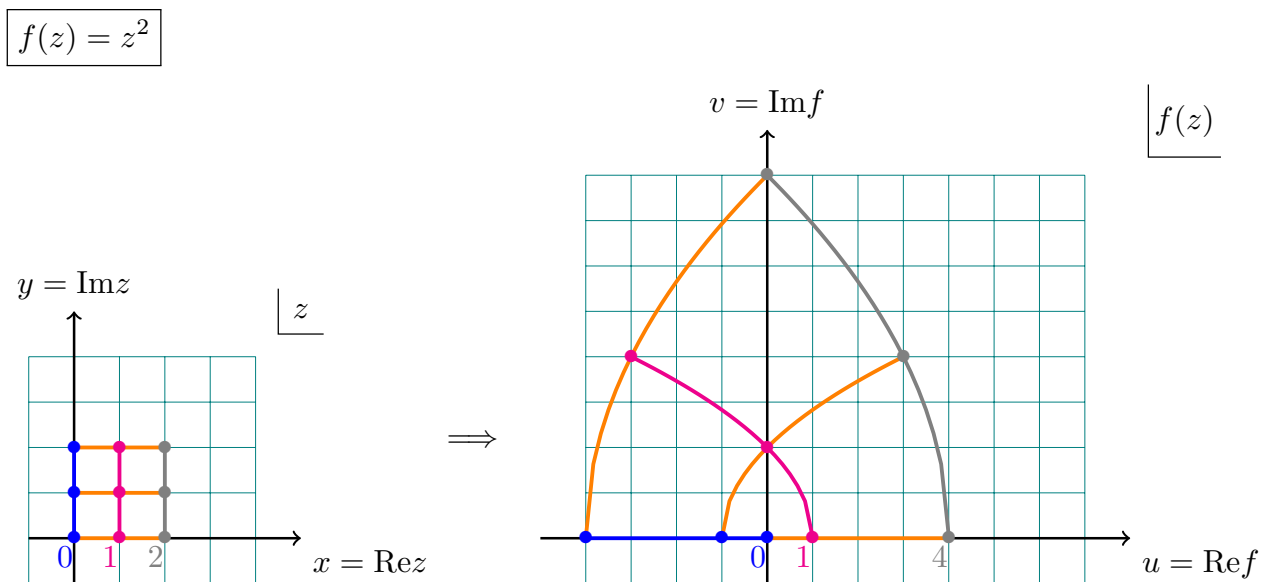
$$= u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right). \quad (38)$$

1.3.2 複素関数は平面から平面への写像

- ▶ 再び実変数関数 $f(x) = x^2$ を考える。これは実数から実数への写像。



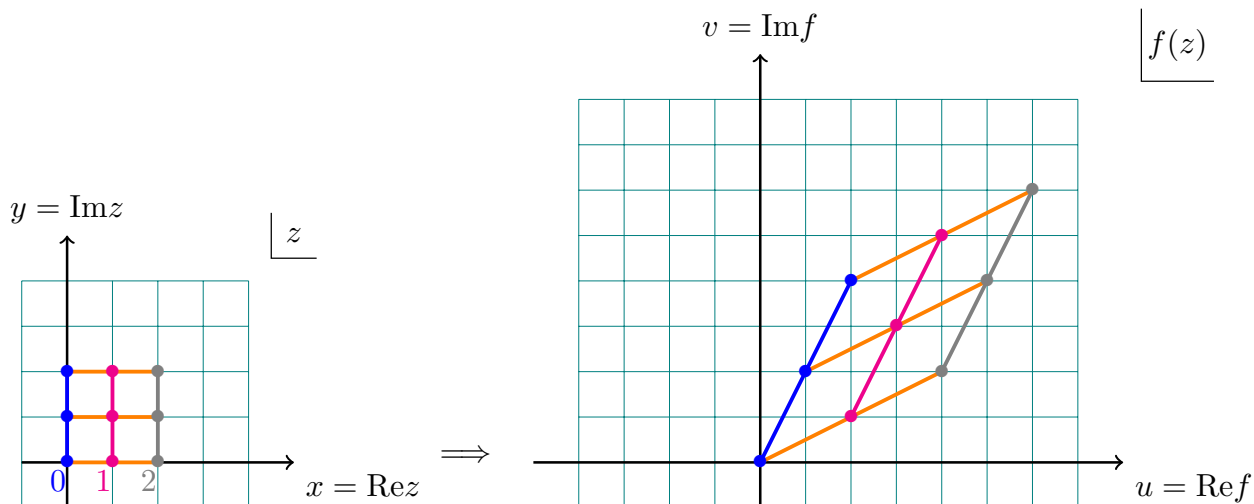
- ▶ これを複素数に拡張した $f(z) = z^2$ は複素数から複素数への写像なので、「平面から平面への写像」になっている。これを見てみよう。



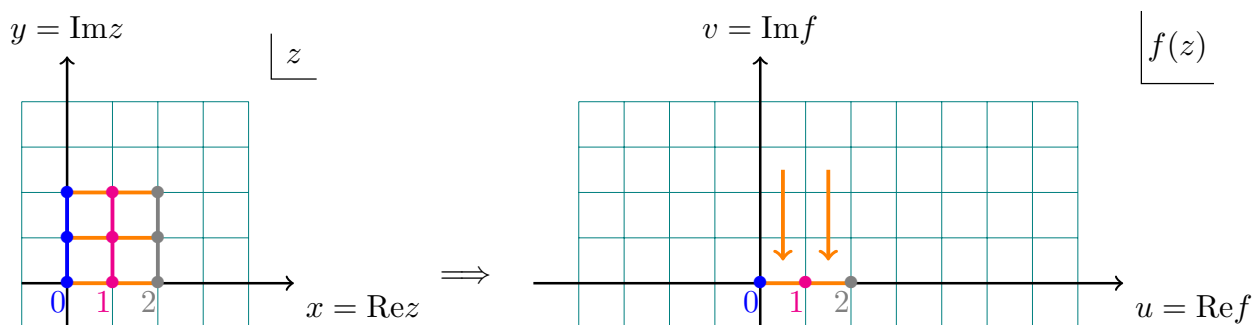
この例では、実は x - y 平面での格子が u - v 平面でも直交していることが分かる。

► $f(z, \bar{z})$ が $\bar{z}$ に依存する例でも見てみよう。

$$f(z) = 2z + i\bar{z} = (2x + y) + i(x + 2y)$$



$$f(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = x + i0$$



実軸上につぶれてしまう。

レポート問題

- [c-1] 上の $f(z) = z^2$ の例にならって、1つの具体的な正則関数 ($\bar{z}$ を含まない z だけの関数。次節参照) について複素平面から複素平面への写像を図示せよ。手描きでも良いし、数値計算を用いても良い。
- [c-2] 一般に、正則関数は $f'(z) \neq 0$ の点で複素平面上の角度を変えない「等角写像」になっていることを示せ。

1.3.3 複素微分と正則関数

- 実変数関数 $f(x)$ の微分は極限值

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (39)$$

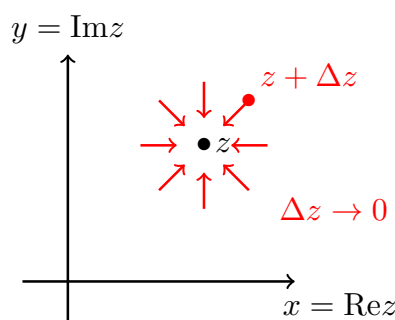
で与えられていた。このとき、極限值が Δx の符号によらないことを要求していた。(図を描いて説明。)

- これを素直に複素関数に拡張すると、、、極限值

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (40)$$

が存在すれば、それを複素関数の微分とすれば良さそうだ。

しかし、ここで Δz は複素数なので、 $\Delta z \rightarrow 0$ と言っても、複素平面上で色んな角度から $\Delta z \rightarrow 0$ とできる。



どのような近づき方で $\Delta z \rightarrow 0$ としても極限值

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が一意に定まるとき、「複素関数 $f(z)$ は点 z で複素微分可能である」と言い、その極限値を $f'(z)$, $\frac{df(z)}{dz}$ などで表す。

- 複素微分の例。 $f(z) = z^n$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}.$$

実数の場合と同じ。

- ▶ 複素微分できない例： $f(z) = \bar{z}$ 。 $\Delta z \rightarrow 0$ の向きを θ とし、 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \Delta r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta r(\cos \theta - i \sin \theta)}{\Delta r(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta}. \end{aligned}$$

θ の値によって値が一意に決まらないので、複素微分不可能。

- ▶ さて、いよいよこの講義前半の主役である正則関数を定義する。

正則関数の定義

複素関数 $f(z)$ が複素平面のある領域 D の全ての点において複素微分可能であるとき、「 $f(z)$ は D において正則である」といい、そのような関数を正則関数という。

この「正則関数」が、この講義の主役となる。次節以降でその性質を見る前に「複素微分可能」を他の条件に言い換えられる事を見る。

- ▶ 次の (i), (ii) は同値である。

(i) $f(z)$ が点 $z = x + iy$ で複素微分可能である。

$\iff$

(ii) $f(z)$ の実部 $u = \operatorname{Re} f$ と虚部 $v = \operatorname{Im} f$ がそれぞれ x, y の2変数関数として全微分可能であり、かつコーシー・リーマンの関係式

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ v_x + u_y = 0 \end{cases} \quad (41)$$

を満たす。(偏微分の省略記号 $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ を用いた。).

「複素微分可能」 $\iff$ 「コーシー・リーマン」ではなく、

「複素微分可能」 $\iff$ 「 u, v の全微分可能」かつ「コーシー・リーマン」であることに注意。(この節の最後に「コーシー・リーマンの関係式を満たすが、複素微分不可能な例」をあげておきます。興味のある人は見てみてください。)

► コーシー・リーマンの関係式 (41) はまとめて以下のようにも表せる。

$$(41) \iff \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_y + i \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_x = 0 \quad \text{あるいは} \quad f_x + if_y = 0 \quad (42)$$

(証明) $f_x + if_y = (u_x + iv_x) + i(u_y + iv_y) = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y)$ より、
 $f_x + if_y = 0 \iff u_x - v_y = v_x + u_y = 0 \iff (41)$.

► (i) $\iff$ (ii) の証明はレポート問題とする。

レポート問題

[c-3] (i) $\iff$ (ii) を示せ。ただし全微分可能性の条件に注意すること^a。

^a ヒント : (ii) において $u(x, y)$ が全微分可能であるとは、実数 A, B が存在して

$$\left| \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \xrightarrow{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0} 0, \quad (43)$$

が成り立つことをいう。このとき $A = u_x, B = u_y$ となる。 $v(x, y)$ についても同様である。また (i) における $f(z)$ の複素微分可能性は、ある複素数 $w = p + iq$ が存在して

$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - w \right| \xrightarrow{|\Delta z| \rightarrow 0} 0, \quad (44)$$

である、と言い換えることが出来る。

(i) $\iff$ (ii) の証明のうち、(i) $\implies$ コーシー・リーマン関係式、は簡単なのでここで示しておこう。(i) の複素微分可能性を仮定する。極限値が $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ の向きによらず一意に決まることから、特に $\Delta z = \Delta x$ (実軸方向) の場合と $\Delta z = i\Delta y$ (虚軸方向) の場合に極限値が存在してそれらが等しい。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z + i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y}. \\ \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{i\Delta y}. \\ \therefore f_x &= \frac{1}{i} f_y = -if_y \end{aligned}$$

よってコーシー・リーマンの関係式 (42) を得る。■

► また、コーシー・リーマンの関係式は、

$$(41) \iff (42) \iff \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_z = 0, \quad (45)$$

とも書ける。

► コーシー・リーマン関係式 $\iff (45)$ の証明をする前に、 $\partial f / \partial \bar{z}|_z$ を定義しよう。

複素数 z の関数 f があったとする。複素微分可能かどうかは問わない。このとき $z = x + iy$ を用いて関数 f を x, y の2変数関数として $f = f(x, y)$ と表すことも出来る。ここで

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (46)$$

を用いると、

$$f = f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right), \quad (47)$$

とも書ける。こう書いておいて、最右辺で定義された関数において、いったん z と $\bar{z}$ を独立な変数とみなす（互いの複素共役である、ということも要求しない）とすると、 $(x, y) \leftrightarrow (z, \bar{z})$ の変数変換より

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\bar{z}} = \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{\bar{z}} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y + \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{\bar{z}} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x = \frac{1}{2}f_x - \frac{i}{2}f_y, \quad (48)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_z = \left. \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right|_z \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y + \left. \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \right|_z \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x = \frac{1}{2}f_x + \frac{i}{2}f_y, \quad (49)$$

と書ける。そこで、

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\bar{z}} = \frac{1}{2}f_x - \frac{i}{2}f_y, \quad (50)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_z = \frac{1}{2}f_x + \frac{i}{2}f_y, \quad (51)$$

で複素偏微分 $\partial f / \partial z, \partial f / \partial \bar{z}$ を定義する。式 (50)(51) は「 z と $\bar{z}$ を独立変数とみなす」という操作を用いずに定義できていることに注意しよう。上の議論の「いったん z と $\bar{z}$ を独立な変数とみなす」が気持ち悪いという人は、式 (50)(51) の定義だけで十分。

▶ $\partial f / \partial \bar{z}|_z$ の定義 (51) を用いると、

$$(45): \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_z = 0 \iff \frac{1}{2}f_x + \frac{i}{2}f_y = 0 \quad (\because 51) \quad (52)$$

$$\iff \text{コーシー・リーマンの関係式 (42).} \blacksquare \quad (53)$$

▶ (45) 式は便利な判定法で、 $f(z)$ を $z, \bar{z}$ を独立変数とする 2 変数関数としてみたときに、 $f(z)$ が正則関数であれば $\bar{z}$ に依存しない。

例えば 1.3.1 節, 1.3.2 節で出てきた例

$$f(z) = 2z + i\bar{z}, \quad (54)$$

$$f(z) = (z + \bar{z})/2, \quad (55)$$

$$f(z) = |z|^2, \quad (56)$$

などは、 $\bar{z}$ を含むので、すべて複素微分可能でない（正則でない）とわかる。

レポート問題

[c-4] ある領域で $f(z)$ が正則で、かつ $|f(z)|$ が一定ならば、 $f(z)$ 自身が定数であることを示せ。 ($|f(z)| = C \rightarrow f(z) = \pm C$ ではないことに注意。)

レポート問題

実 2 変数関数 $f(x, y)$ が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = 0 \quad (57)$$

を満たすとき、 $f(x, y)$ を (2 次元) 調和関数という。

[b-5] 正則関数の実部 u 、虚部 v がそれぞれ (2 次元) 調和関数になっていることを示せ。ただしここでは、 u と v が 2 回偏微分可能であることや偏微分が交換すること ($u_{xy} = u_{yx}$, $v_{xy} = v_{yx}$) は示さずに用いて良い。

逆に調和関数 $u(x, y)$ が与えられた時、それを実部とするような正則関数 $f(z)$ を構成することも出来る。

[b-6] $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + 3y$ は調和関数である。この $u(x, y)$ に対してコーシー・リーマン関係式を満たす $v(x, y)$ を一つ示せ。

[b-7] [b-6] の $u(x, y)$, $v(x, y)$ を実部と虚部に持つ複素関数 $f(z)$ を求めよ。

- この節の最後に「特異点」についてコメントしておく。関数 $f(z) = 1/z$ における点 $z = 0$ などのように、微分できない点（正則でない点）を「特異点」という。特異点も正則関数において重要な役割を果たす。これについては 1.5 でまた改めて取り上げる。

補足（講義では説明しないかも）

「 z だけの関数であって、コーシー・リーマンの関係式を満たすが、複素微分不可能な例」をあげておきます。

$$f(z) \text{ を } f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases} \text{ で定義する。}(e^z \text{ の定義は 1.3.4 で。})$$

$$\text{この関数は実軸上で } f(x, y=0) = \begin{cases} \exp(-1/x^4) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \text{ となり、}$$

$$\text{虚軸上で } f(x=0, y) = \begin{cases} \exp(-1/y^4) & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases} \text{ となるので、}$$

原点で x, y でそれぞれ偏微分可能で、 $f_x(0) = f_y(0) = 0$ であり、コーシー・リーマンの関係式を満たす。しかし一方で、 z を偏角 45 度の方向から原点に近づけると、 $z = re^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}r$ として $f(z) = \exp(+1/r^4) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$ となるので、原点で複素微分できない。

$u(x, y)$ と $v(x, y)$ の全微分可能性について確認してみると

$$u(x, y) = \exp\left(-\frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^4}\right) \cos\left(\frac{4xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4}\right) \quad (58)$$

$$v(x, y) = \exp\left(-\frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^4}\right) \sin\left(\frac{4xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4}\right) \quad (59)$$

となるので、例えば上の z の偏角 45 度に対応して

$$x = 0 + \Delta t \quad (60)$$

$$y = 0 + \Delta t \quad (61)$$

とすると

$$u(0 + \Delta t, 0 + \Delta t) - u(0, 0) = \exp\left(\frac{1}{4\Delta t^4}\right) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \infty \quad (62)$$

となるため、全微分可能ではない。（連続でもない。）

1.3.4 正則関数の例

▶ 多項式：

$$f(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k \quad (n < \infty, c_k \in \mathbb{C}), \quad (63)$$

は $|z| < \infty$ で正則。(例： $f(z) = z^2$, $f(z) = 1 + 2iz + (3 + 4i)z^2$ 。)

▶ 有理関数：多項式 $p(z)$, $q(z)$ を用いて

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad (64)$$

は $q(z) = 0$ となる点（特異点）を除いて正則。（特異点の数は $q(z)$ の次数以下。）

▶ 指数関数と三角関数は以下の式で定義する。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad (65)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \quad (66)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots. \quad (67)$$

これらの定義は以下の性質を満たす。

(i) 実軸上で、実数の場合の指数関数、三角関数に一致する（1.2.3 節参照）。

(ii) $\mathbb{C}$ 全域で正則。

(iii) 収束半径が無限大。

(i) を満たすだけなら、他にも色んな複素関数があり得る、例えば $f(z, \bar{z}) = \sin x + y^{100} = \sin((z + \bar{z})/2) + ((z - \bar{z})/2i)^{100}$ は実軸上では $f(z) = \sin x$ となる。しかし、(i)(ii) を同時に満たす関数は、唯一上の定義式のものだけとなる。（→ 解析接続 1.6 で示す。）

(iii) の収束半径については次節 1.3.6 で見る。

▶ 上の定義によって 1.2 節で出てきた疑問は解決できた。 $\cos z$, $\sin z$ は $z \in \mathbb{C}$ で定義されたし、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ およびその一般化

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (68)$$

は上の定義式から示せる。

レポート問題

[b-8] $z, w \in \mathbb{C}$ に対し、以下を示せ。(ここでは解析接続を用いずに示して下さい。無限和の順番は気にしないで良いです。)

- (i) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
- (ii) $e^{z+w} = e^z e^w$.
- (iii) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

ではもっと複雑な式、例えば $\cos 4z = 8 \cos^4 z - 8 \cos^2 z + 1$ などは? ... 一つ一つ定義に戻れば確認出来るが、それも面倒だ。実はこれも 1.6 節の「解析接続」で解決する。

▶ 対数関数について : 実数では $\ln x$ は e^x の逆関数として定義できた。

$$f(x) = \ln x \iff x = e^{f(x)}. \quad (69)$$

これを素直に複素数に拡張すると

$$f(z) = \ln z \iff z = e^{f(z)}. \quad (70)$$

一方、極形式を用いて

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \\ &= r e^{i\theta} \\ &= e^{\ln r} e^{i\theta} \\ &= e^{\ln r + i\theta} \end{aligned} \quad (71)$$

なので、

$$f(z) = \ln z = \ln r + i\theta \quad (72)$$

と言えそうだ。ところが、 $z = e^{f(z)}$ を満たす $f(z)$ はこれだけではない。

$$e^{2n\pi i} = 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (73)$$

なので、

$$z = e^{\ln r + i\theta} e^{2n\pi i} = e^{\ln r + i\theta + 2n\pi i}. \quad (74)$$

よって

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln z \\ &= \ln r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (75)$$

したがって対数関数は多価関数となる。(1.6 節でまた戻って議論する。)

———— 10/2、ここまで ————

10/2に出題したレポートは [b-1]~[b-8]、[c-1]~[c-4] でした。

———— 10/9、ここから ————

先週のあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標

1.2 準備

1.2.1 複素数 1.2.2 偏微分 1.2.3 テイラー展開

1.2.4 オイラーの公式について

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.1 複素関数

1.3.2 複素関数は平面から平面への写像

1.3.3 複素微分と正則関数

1.3.4 正則関数の例

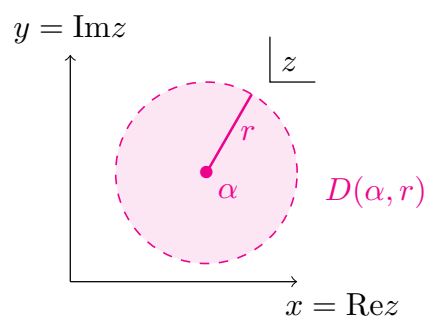
1.3.5 言葉の定義をいくつか ⇐ 前回最後に慌てて話したので、今日改めてここから

1.3.6 複素級数とその収束

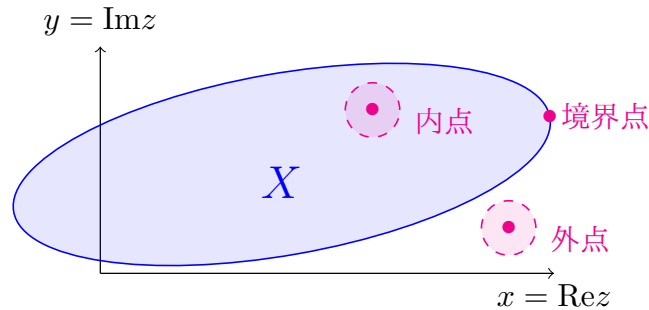
1.3.5 言葉の定義をいくつか

複素平面上の集合に関して、いくつか言葉を定義しておく。

► 円板 $D(\alpha, r)$: 点 α を中心とした半径 r の円の内部、つまり $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\}$ 。



▶ 集合 X と点 α に対して、

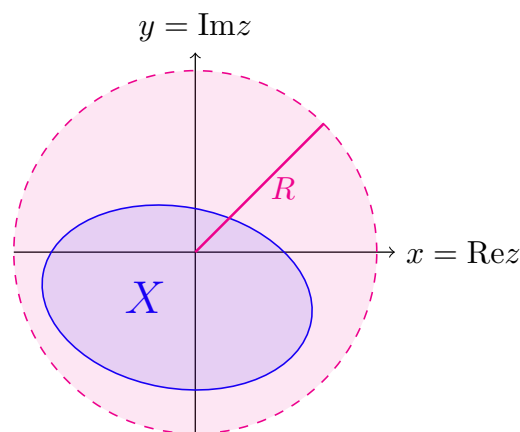


- α が X の内点である $\longleftrightarrow$ 十分小さな $\epsilon > 0$ に対して円板 $D(\alpha, \epsilon)$ 全体が X に含まれる。
- α が X の外点である $\longleftrightarrow \alpha$ が X の補集合 $\mathbb{C} - X$ の内点であることをいう。
- α が X の境界点である $\longleftrightarrow \alpha$ が X の内点でも外点でもない。
- 境界点全体の集合を「境界」という

- ▶ 集合 X が開集合 $\longleftrightarrow X$ に含まれる全ての点が X の内点。 (境界を含まない集合)
- ▶ 集合 X が閉集合 $\longleftrightarrow$ 補集合 $\mathbb{C} - X$ が開集合。 (境界を全て含む集合)
- ▶ 集合 X が連結 $\longleftrightarrow X$ 内の任意の2点が X 内の折れ線で結べる。 (まあ要するに2つ以上に分かれていないということ。)
- ▶ 連結な開集合を、とくに「領域」という。文字 D をよく使う。 ← これが定義したかった!

以下はほとんど使わないけど、1.3.6.C/Dなどで少し使うので、一応定義。

- ▶ 集合 X が有界とは、ある $R > 0$ が存在して、 X 全体が円板 $D(0, R)$ に含まれることをいう。 (例えば実軸全体は有界ではない。)
- ▶ 有界な閉集合をコンパクト集合という。



1.3.6 複素級数とその収束

複素級数とその収束についてまとめておく。

1.3.6.A 複素数列

► 複素数列の収束：複素数の数列 $\{z_n\}$

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (76)$$

に対して、「数列 $\{z_n\}$ は α に収束する」とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し、

$$n \geq N \implies |z_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つことをいう。これを

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } n \geq N \implies |z_n - \alpha| < \epsilon$$

のようにも書く。「数列 $\{z_n\}$ は α に収束する」ことを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha \quad \text{あるいは} \quad n \rightarrow \infty \text{ で } z_n \rightarrow \alpha. \quad (77)$$

のようにも書く。上記のような α が存在しないとき「数列 $\{z_n\}$ は収束しない（発散する）。」という。

► $n \rightarrow \infty$ で $z_n \rightarrow a, w_n \rightarrow b$ なら、

$$z_n \pm w_n \rightarrow a \pm b, \quad z_n w_n \rightarrow ab, \quad \frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{a}{b} \text{ for } w_n \neq 0, b \neq 0. \quad (78)$$

► コーシー列：数列 $\{z_n\}$ がコーシー列であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し、

$$n, m \geq N \implies |z_n - z_m| < \epsilon$$

であることをいう。（ $\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } n, m \geq N \implies |z_n - z_m| < \epsilon.$ ）

レポート問題

[c-5] 複素数列 $\{z_n\}$ が収束することと $\{z_n\}$ がコーシー列であることが同値であることを示せ。ただし、実数列の場合の同値性は既知として良い。

実数列の場合も証明したことがなければ是非調べてみましょう。

1.3.6.B 級数

- ▶ 数列の和 $w_n = \sum_{k=1}^n z_k$ を級数という。

さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ が存在するとき、それを $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ と書き、無限級数という。 ($n \rightarrow \infty$

の極限が存在しないときも同じ記号を用いてしまって「 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ が収束しない」などと言う。)

- ▶ 各項の絶対値をとった級数 $s_n = \sum_{k=1}^n |z_k|$ は、単調増加な実数列となる。したがって上に有界なら収束する。(証明略)

- ▶ 絶対収束と条件収束

- $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は「絶対収束する」という。

レポート問題

[c-6] 絶対収束する複素級数は収束することを示せ。

- 絶対収束する複素級数は、足し算の順序を変えても和は変わらない。(証明略)
- 収束するが絶対収束しない級数は「条件収束する」という。

$$\text{複素級数 } \sum_{k=1}^{\infty} z_k \begin{cases} \text{収束する.} \\ \text{収束しない (発散する).} \end{cases} \begin{cases} \text{絶対収束する.} \\ \text{条件収束する.} \end{cases} \quad (79)$$

$$\text{条件収束の例: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \infty.$$

- ▶ 級数の収束の判定法の例:

レポート問題

[c-7] (ダランベールの判定法)

$$\exists N, \exists q < 1 \text{ s.t. } n \geq N \implies \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \leq q$$

ならば、 $\sum z_n$ は絶対収束することを示せ。

特に $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = q$ が存在するとき $\begin{cases} q < 1 \implies \text{絶対収束,} \\ q > 1 \implies \text{収束しない. (証明略)} \end{cases}$

1.3.6.C 関数級数

- ▶ 関数の極限と連続性: これまで特に断りなく使ってきたが、関数 $f(z)$ に対して、

$$\exists f_0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall z, 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f_0| < \epsilon.$$

であるとき f_0 を $z \rightarrow z_0$ での $f(z)$ の極限值といい、 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f_0$ と書く。 $f(z_0)$ が定義されていて $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ のとき「 $f(z)$ は $z = z_0$ で連続」という。

- ▶ 関数列の収束:

領域 D で定義された関数列 $f_1(z), f_2(z), \dots$ に対して

- $f_n(z)$ が $f(z)$ に 各点収束 する、とは

$$\exists f(z), \forall \epsilon > 0, \forall z \in D, \exists N, \text{ s.t. } n \geq N \implies |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

であることをいう。(N が z に依存して良いことに注意。)

- $f_n(z)$ が $f(z)$ に 一様収束 する、とは

$$\exists f(z), \forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } n \geq N, z \in D \implies |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

であることをいう。(N が z に依存せずに決まる。)

- * 各点収束するけど一様収束しない例。 $0 < x < 1$ で実関数列 $f_n(x) = x^n$ を考える。これは各点で $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0$ と収束する。しかし任意の $0 < x < 1$

に対して $|f_n(x) - f(x)| = x^n < \epsilon$ とするには $n > \frac{|\ln \epsilon|}{|\ln x|}$ とする必要があり、

$|\ln x| \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ なので N は x に無関係に選べない。

- $f_n(z)$ が領域 D 上で 広義一様収束 する、とは、 $f_n(z)$ が D の任意のコンパクト集合上で一様収束することをいう。

- * 上の関数列 $f_n(x) = x^n$ ($0 < x < 1$) は広義一様収束するが一様収束しない例になっている。

- * 3 つの収束の関係は、一様収束 $\subset$ 広義一様収束 $\subset$ 各点収束、となっており、一様収束 $\rightarrow$ 広義一様収束、広義一様収束 $\rightarrow$ 各点収束、が示せる。

- ▶ 正則関数列の無限級数: 領域 D で定義された正則関数の関数列 $f_1(z), f_2(z), \dots$ の

和 $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ を考える。 $\{S_n(z)\}$ が D 上で広義一様収束するとき、

- 無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ も正則。
- $\int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z) dz$ (項別積分可能)

$$\bullet \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z) \quad (\text{項別微分可能})$$

証明略。複素 (線) 積分については 1.4 節参照。

この講義で出てくる級数のほとんどは (広義) 一様収束するので、項別微分、項別積分が可能、つまり無限和と微分・積分の順番を気にせず交換して良い。(← これが言いたかった。)

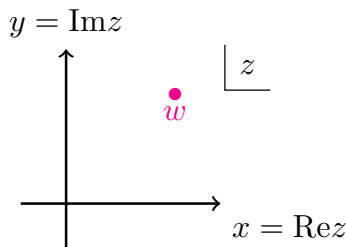
1.3.6.D べき級数と収束半径

▶ 複素数列 $\{c_n\}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \quad (80)$$

をべき級数と呼ぶ。

▶ 任意のべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対して、ある点 $z = w$ を考えよう。



このとき以下が示せる。

- (i) $f(z)$ が $z = w$ で収束 $\implies |z| < |w|$ なる全ての z に対して $f(z)$ は絶対収束。
- (ii) $f(z)$ が $z = w$ で収束しない $\implies |z| > |w|$ なる全ての z に対して $f(z)$ は収束しない。

証明

(i) 数列 $s_n = \sum_{k=0}^n c_k w^k$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は収束し、コーシー列になるので、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } n, m \geq N \implies |s_n - s_m| < \epsilon.$$

$m = n + 1$, $\epsilon = 1$ として

$$\exists N, \text{ s.t. } n \geq N \implies |c_{n+1} w^{n+1}| < 1$$

したがって $B = \max\{|c_0|, |c_1 w^1|, \dots, |c_N w^N|, 1\}$ とすると

$$\{|c_n w^n|\} = \underbrace{|c_0|, |c_1 w^1|, \dots, |c_N w^N|}_{\leq B}, \underbrace{|c_{N+1} w^{N+1}|, \dots}_{< 1 \leq B}.$$

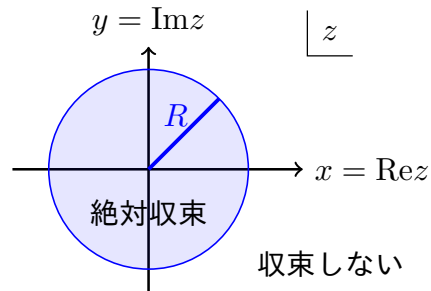
$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n w^n| \left| \frac{z}{w} \right|^n \leq B \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{w} \right|^n = B \frac{1}{1 - |z/w|} \text{ for } |z| < |w|.$$

したがって $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ は単調増加で上に有界なので収束する。■

(ii) 背理法。ある点 $z = z_0$ ($|z_0| > |w|$) での収束を仮定すると、(i) より $z = w$ でも収束となり、仮定に反する。■

▶ したがって、任意のべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対してある長さ R (収束半径) が存在して

$\begin{cases} |z| < R \text{ で } f(z) \text{ は絶対収束し,} \\ |z| > R \text{ で } f(z) \text{ は収束しない.} \end{cases}$



(ただしここでの R は $R = 0$ と $R = \infty$ を含む。)

- さらに $|z| < R$ で $f(z)$ は広義一様絶対収束する。(証明略、1.3.6.C 参照)
- したがって $|z| < R$ で $f(z)$ は項別微分、項別積分が可能。(1.3.6.C 参照)

レポート問題

[b-9] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ が存在するとき、 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ がべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径となることを示せ。(ダランベールの判定法を既知としてよい。)

▶ 前節 1.3.4 で定義した指数関数と三角関数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (81)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (82)$$

の右辺の収束半径は $R = \infty$ である*5。また

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \quad (83)$$

の右辺の級数の収束半径は $R = 1$ である。(この式自体は $(1-z) \sum_{k=0}^n z^k = 1 - z^{n+1}$ から示せる。)

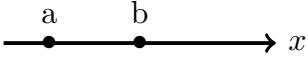
*5 $\cos z$ と $\sin z$ は $z^2 = w$ として w のべき級数として書き直せばダランベールの判定法が使えます。

1.4 複素積分

1.4.1 複素 (線) 積分の定義

- ▶ ここでもまずは実数関数の場合を思い出す。

関数 $f(x)$ に対して、例えば $x = a$ から $x = b$ までの積分

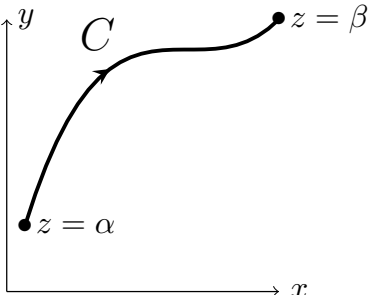
$$\int_a^b f(x) dx$$


を考えることができた。

- ▶ これを素直に複素関数 $f(z)$ に拡張すると、例えば点 $z = \alpha$ から $z = \beta$ までの積分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz$$

が考えられそうだ。しかし z は複素数なので、 $z = \alpha$ から $z = \beta$ までいろんな経路が取りうる、そこで経路 C を指定して

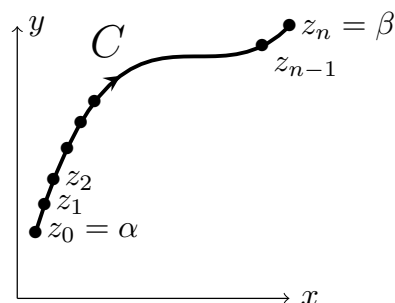
$$\int_C f(z) dz$$


と書くことにする。

- ▶ より正確には実数のときと同様に、無限小区間の和の極限として定義できる。

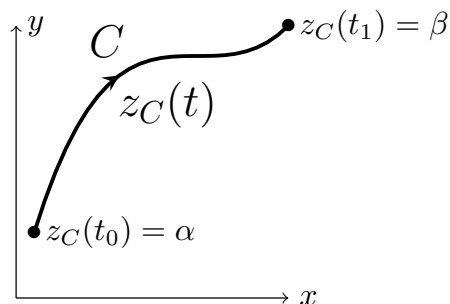
$$\int_C f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k,$$

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$



- あるいは、実数 t を用いて経路 C を $z_C(t) : \begin{array}{c|c} t & t_0 \rightarrow t_1 \\ \hline z & \alpha \rightarrow \beta \end{array}$ とパラメータ表示して、

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z_C(t)) \frac{dz_C(t)}{dt} dt$$



のように定義することも出来る。

- (この部分、講義中にお話した内容を講義後に追記しました。) 上の定義が無小小区間の定義に帰着することを見ておこう。 t の区間 $[t_0, t_1]$ を n 等分して、

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{t_1 - t_0}{n} \\ z_C(t_0) &= \alpha = z_0, \\ z_C(t_0 + \Delta t) &= z_1, \\ z_C(t_0 + 2\Delta t) &= z_2, \dots \\ z_C(t_0 + n\Delta t) &= z_C(t_1) = \beta = z_n \end{aligned}$$

とおくと、実数積分の無限小区分の和の形を用いて

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} f(z_C(t)) \frac{dz_C(t)}{dt} dt &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(z_C(t)) \frac{dz_C(t)}{dt} \right]_{t=t_0+k\Delta t} \Delta t \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \underbrace{\frac{dz_C(t)}{dt} \Big|_{z=z_k} \Delta t}_{\rightarrow z_{k+1} - z_k = \Delta z_k} \end{aligned}$$

となり、たしかに両者は一致する。(追記ここまで)

► パラメータ表示による定義は（経路が同じなら）パラメータの取り方によらない。

実際 t の代わりに $t'(t) : \frac{t}{t'} \bigg| \frac{t_0}{t'_0} \rightarrow \frac{t_1}{t'_1}$ を用いても、変数変換によって

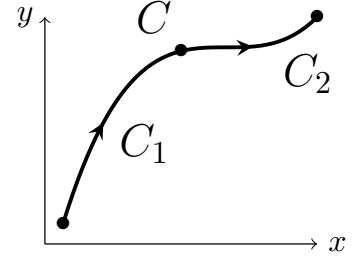
$$\begin{aligned} \int_{t'_0}^{t'_1} f(z_C(t')) \frac{dz_C(t')}{dt'} dt' &= \int_{t_0}^{t_1} f(z_C(t')) \frac{dz_C(t')}{dt'} \bigg|_{t'=t'(t)} \frac{dt'(t)}{dt} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(z_C(t)) \frac{dz_C(t)}{dt} dt \end{aligned} \quad (84)$$

となり、元の表式と一致する。（最後の式では $z_C(t'(t))$ を $z_C(t)$ と書いている。）

1.4.2 複素積分の定義からすぐにわかるいくつかの性質

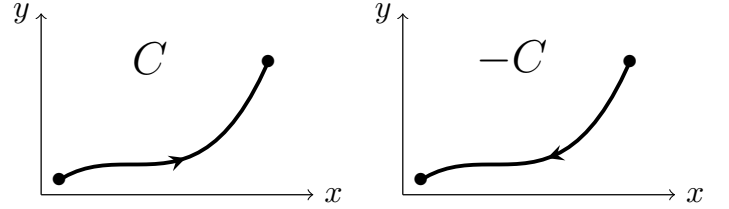
► 経路は足し算できる。

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C=C_1+C_2} f(z)dz.$$



► 逆向きの経路 ($-C$ と書く) は引き算になる。

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz.$$



► 積分の絶対値の上限について

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \left(\begin{array}{c} \text{経路 } C \text{ 上での} \\ |f(z)| \text{ の最大値} \end{array} \right) \times (\text{経路 } C \text{ の長さ}) \quad (85)$$

が成り立つ。ただし経路 C の長さは、経路を $z_C(t) = x_C(t) + iy_C(t)$ ($t = t_1 \rightarrow t_2$) とパラメータ表示したときに以下の式で定義される。

$$(\text{経路 } C \text{ の長さ}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx_C(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_C(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \left| \int_C f(z)dz \right| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(z_C(t)) \cdot \frac{dz_C(t)}{dt} dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(z_C(t))| \cdot \left| \frac{dz_C(t)}{dt} \right| dt \\ &\leq (|f(z_C(t))| \text{ の最大値}) \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{dx_C(t)}{dt} + i \frac{dy_C(t)}{dt} \right| dt \\ &= (|f(z_C(t))| \text{ の最大値}) \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx_C(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_C(t)}{dt}\right)^2} dt \\ &= (|f(z_C(t))| \text{ の最大値}) \times (\text{経路 } C \text{ の長さ}) \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (87)$$

不等式 (85) はこれから何度か用いる。

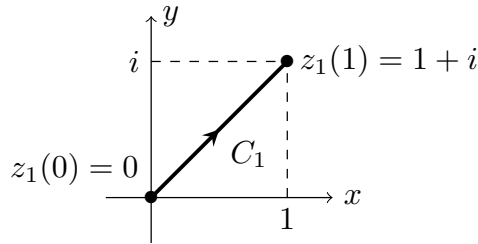
1.4.3 複素積分の例

例 1 具体的な計算の例として、

$$f(z) = a + bz \quad (88)$$

を考え、 $z = 0$ から $z = 1 + i$ まで、いくつかの経路で積分してみよう。

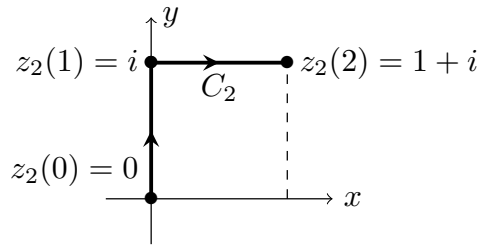
経路 1



$$\begin{cases} z_1(t) = (1+i)t & (0 \leq t \leq 1) \\ f(z_1(t)) = a + b(1+i)t \\ \frac{dz_1(t)}{dt} = 1+i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_0^1 f(z_1(t)) \frac{dz_1(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 (a + b(1+i)t) \cdot (1+i) \cdot dt \\ &= \int_0^1 ((1+i)a + 2ibt) dt \\ &= (1+i)a + ib. \end{aligned} \quad (89)$$

経路 2



	$0 \leq t \leq 1$	$1 \leq t \leq 2$
$z_2(t)$	it	$t - 1 + i$
$f(z_2(t))$	$a + ibt$	$a + b(t - 1 + i)$
$\frac{dz_2(t)}{dt}$	i	1

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) dz &= \int_0^2 f(z_2(t)) \frac{dz_2(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 (a + ibt) \cdot i \cdot dt + \int_1^2 [a + b(t - 1 + i)] \cdot 1 \cdot dt \\ &= (ia - \frac{1}{2}b) + (a + \frac{3}{2}b + (-1+i)b) \\ &= (1+i)a + ib. \quad (\text{経路 1 と同じ!}) \end{aligned} \quad (90)$$

► 積分が経路によらない！

・・・実はこれも正則関数の一般的性質の1つ。(→ 次の 1.4.4 節)

レポート問題

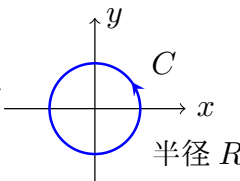
[b-10] 同じ $f(z) = a + bz$ に対して、上の2つ以外の経路を1つ自分で考え、積分を計算せよ。(端点は上と同じ $z = 0 \rightarrow 1 + i$ とする。)

► 正則でない関数の場合、積分の値は経路に依存してしまう。

レポート問題

[b-11] $f(z) = \bar{z}$ に対して、上の2つの経路で積分を計算せよ。

例 2 次の例として、原点を中心とした半径 R の円を反時計回りに1周する経路 C を考えて、次の複素積分を考えよう。

$$\oint_C z^n dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad \text{半径 } R \quad (91)$$


(周積分のことを $\oint$ で表す。)

$z = z(\theta) = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とパラメータ表示すると

$$\oint_C z^n dz = \int_0^{2\pi} f(z(\theta)) \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (92)$$

$$= \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n \cdot iRe^{i\theta} d\theta \quad (93)$$

$$= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \quad (94)$$

$$= \begin{cases} (\text{for } n \neq -1) & = iR^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0, \\ (\text{for } n = -1) & = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \end{cases} \quad (95)$$

つまり

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i & (n = -1) \end{cases} . \quad \text{半径 } R \quad (96)$$

これは

- 答えが半径 R によらない。
- $n = -1$ のときだけ特別で、 $2\pi i$ となる。

これらの意味は、次の 1.4.4 節、および 1.5 節の留数定理でより明らかになる。

以下の例 3 は 2025 年の講義では省略しました。

例 3 上の $n = -1$ の場合に着目して

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad (97)$$

に対して、 $z = 1$ から $z = -1$ まで2つの経路で積分してみる。



$$I_1 = \int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{z(\theta)} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (z(\theta) = e^{i\theta})$$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \pi i. \quad (98)$$



$$I_2 = \int_{C_2} \frac{1}{z} dz = \int_0^{-\pi} \frac{1}{z(\theta)} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (z(\theta) = e^{i\theta})$$

$$= \int_0^{-\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = -\pi i. \quad (99)$$

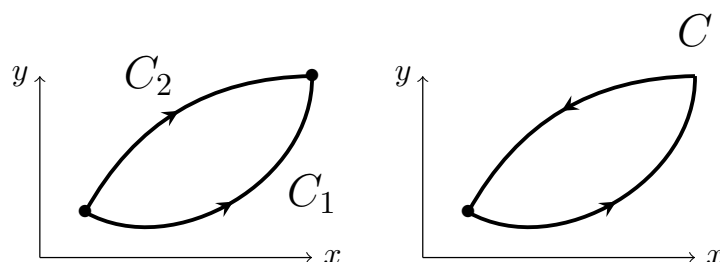
この場合は例 1 と違って、経路によって積分値が異なる。

1.4.4 コーシーの積分定理

- ▶ 前節の例 1 で「複素積分が経路によらない」場合を見た。これが一般の正則関数で成立することを示したい。

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

$$\Rightarrow \oint_{C=C_1-C_2} f(z) dz = 0$$



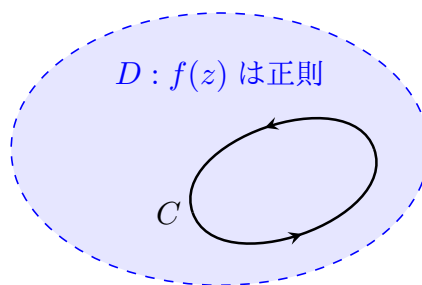
なので、「経路によらない」は「周積分がゼロ」と言い換えられる。



—— コーシーの積分定理 ——

領域 D 内の単純閉曲線 C を考え、
 C の内部が D に含まれるとする。
 $f(z)$ が領域 D 上で正則であれば

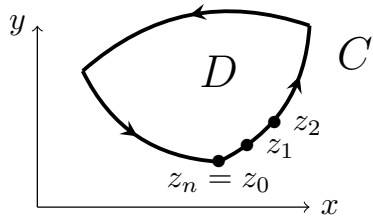
$$\oint_C f(z) dz = 0.$$



ただし閉曲線とは始点と終点が一致する曲線で、単純閉曲線（単一閉曲線）とは始点 = 終点以外に重複する点を持たない曲線である。（ C の内部が D に含まれない例（穴が空いているような状況）は次節以降で考える。）

- コーシーの積分定理の証明: (グリーンの定理による)

無限小区間による定義を思い出して



$$\oint_C f(z)dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_k^{n-1} f(z_k) \Delta z_k \quad (\Delta z_k = z_{k+1} - z_k)$$

$$= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k, \Delta y_k \rightarrow 0}} \sum_k^{n-1} f(z_k) (\Delta x_k + i \Delta y_k)$$

$$= \oint_C (f(z)dx + i f(z)dy) \quad \text{—————} (*)$$

ここで、グリーンの定理を使う。

——— グリーンの定理

(x, y) 平面上の領域 D 内の単純閉曲線 C (正の向き) を考え、 C の内部が D に含まれるとする。 (コーシーの積分定理の仮定と同じ状況.) $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ を D 上で定義された偏微分可能かつ偏微分が連続な関数 (C^1 級関数) とし、 D' を C とその内部の和集合 (C を境界にもつ閉集合) とするとき、以下が成り立つ。

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \int_{D'} (\partial_x Q - \partial_y P) dxdy. \quad (100)$$

よって (*) より

$$\oint_C f(z)dz = \int_{D'} (i\partial_x f - \partial_y f) dxdy. \quad (101)$$

$f(z)$ が領域 D 内で正則であればコーシー・リーマン関係式より $i\partial_x f - \partial_y f = 0$.

したがって $\oint_C f(z)dz = 0$. ■

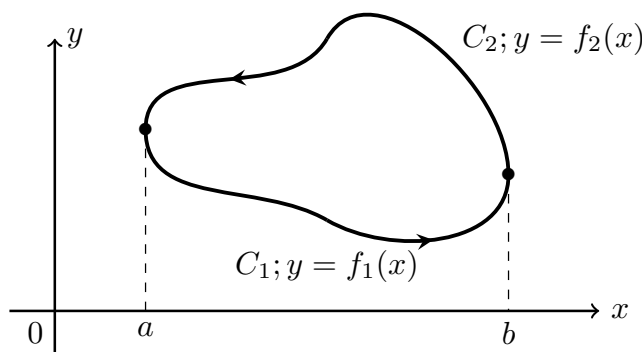
▶ (ここから先の内容は講義までにノートが間に合わなかったもので、10/9 講義後に PDF を更新しました。)

▶ グリーンの定理の証明：以下の 2 つの式をそれぞれ示せば良い。

$$(A) \quad \oint P(x, y) dx = - \int_{D'} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy \quad (102)$$

$$(B) \quad \oint Q(x, y) dy = \int_{D'} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy \quad (103)$$

まず (A) を示そう。まずは簡単な下図のように、経路 C が下半分の経路 C_1 と上半分の経路 C_2 に分けられる場合を考える。



すると

$$\oint_C P(x, y) dx = \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx \quad (104)$$

$$= \int_a^b P(x, f_1(x)) dx + \int_b^a P(x, f_2(x)) dx \quad (105)$$

$$= \int_a^b P(x, f_1(x)) dx - \int_a^b P(x, f_2(x)) dx \quad (106)$$

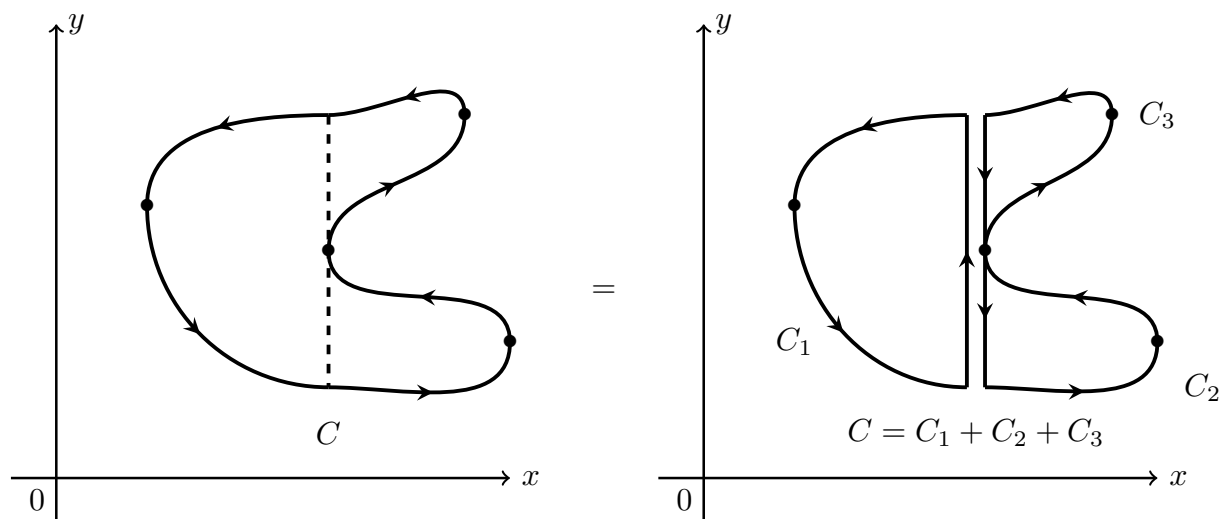
$$= - \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] dx \quad (107)$$

$$= - \int_a^b \left[P(x, y) \right]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} dx \quad (108)$$

$$= - \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right) dx \quad (109)$$

$$= - \int_{D'} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy \quad \blacksquare \quad (110)$$

上のように分けられない場合も、経路を分ければ示せる。



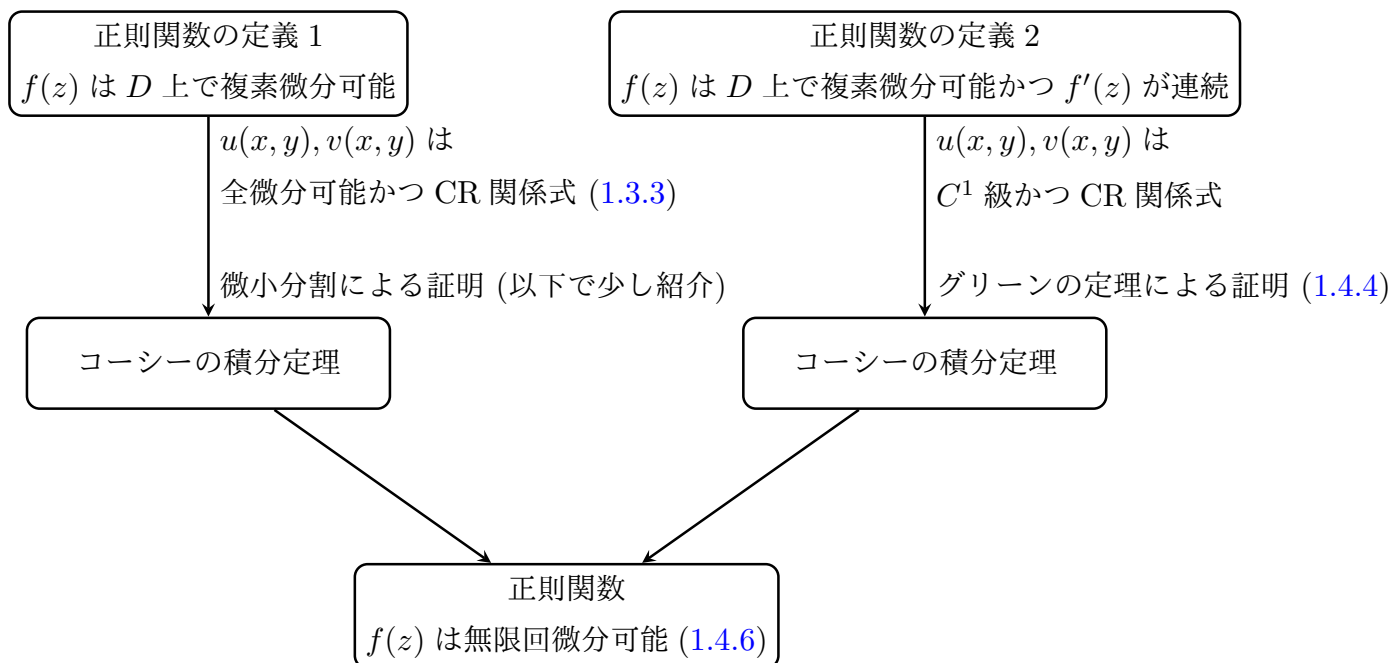
レポート問題

[b-12] 同様にして、 $Q(x, y)$ についての式 (103) を示せ。

1.4.5 正則関数の定義とコーシーの積分定理についてのコメント

この節はちょっと寄り道、というか、節全体がコメント的な内容です。

- ▶ 前節のコーシーの積分定理の証明は、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が C^1 級（偏微分が連続）であること仮定して示した。「 $f(z)$ が正則」→「 $f(z)$ が複素微分可能」→「 $u(x, y), v(x, y)$ が全微分可能」は言えるが（1.3.3 節）、「 $u(x, y), v(x, y)$ が全微分可能」→「 $u(x, y), v(x, y)$ が C^1 級」は一般には成立しないので、このグリーンの定理を用いた証明は不完全と言える。
- ▶ 最初から正則関数の定義に「 $f'(z)$ が連続である」という条件を足しておけば、「 $f'(z)$ が連続」→「 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が C^1 級」が言えるので、そうすればグリーンの定理を用いた証明で問題ない。
- ▶ では、正則関数の定義に「 $f'(z)$ が連続である」という条件を含めなければ、コーシーの積分定理の証明はできないのか？実は、複素微分可能性だけを仮定した正則関数の定義から出発しても、コーシーの積分定理は示せる。しかしこれを一般の場合に示すのは（この講義では）難しいので、少しだけ紹介することにする。
- ▶ いずれにせよ、いったんコーシーの積分定理が示せれば、後で見るように $f'(z)$ の連続性（正則性）が言えるので、「 $f'(z)$ が連続である」という条件を含める定義と含めない定義で、得られる $f(z)$ の性質は全く同じになる。
- ▶ 以上のことを模式的に書くと以下ようになる。



→ よって $f'(z)$ は連続... 結局どちらの定義でも同じ結論に至る！

- (コメントのコメント) 2つの定義の違いはあるの? $f(z)$ が D 上で微分可能なら $f'(z)$ は連続なのでは? と思うかもしれませんが。

実数ではそうとは限らず、 $f(x)$ が微分できるけど $f'(x)$ が連続じゃない、という

例が作れます。例えば $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ という関数は、 $x = 0$ を含む

全ての点で微分できて、 $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ となります。とこ

ろが $f'(x)$ の $x \rightarrow 0$ での極限值は $(\cos \frac{1}{x}$ のせいで) 存在しません。したがって、 $f'(x)$ は $x = 0$ で不連続となります。

- では複素関数ではどうか? と言うと、こういうことは起こり得ず、 D 上で $f(z)$ が複素微分可能なら、必ず D 上で $f'(z)$ は連続 (それどころか、 $f(z)$ は無限回微分可能)、..、となっている、というわけです。

————— 10/9、ここまで —————

10/9 に出題したレポートは [b-9]~[b-12]、[c-5]~[c-7] でした。

————— 10/16、ここから —————

先週までのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標

1.2 準備

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.3 複素微分と正則関数 (コーシー・リーマン関係式、など)

1.4 複素積分

1.4.1 定義

1.4.2 (すぐわかる) 性質

1.4.3 複素積分の例

1.4.4 コーシーの積分定理

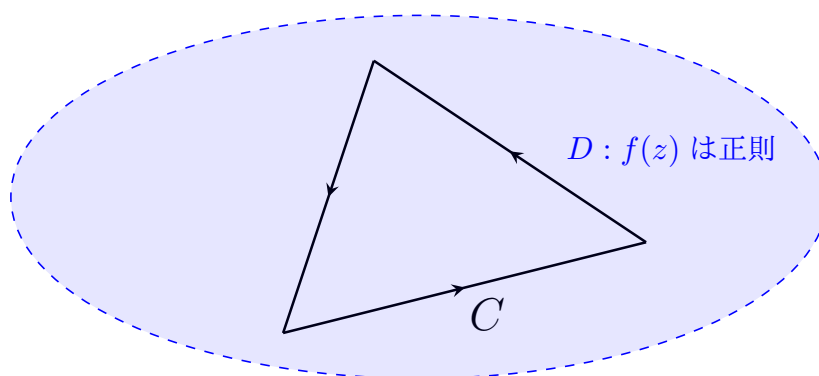
1.4.5 正則関数の定義とコーシーの積分定理についてのコメント

この中で微小分割によるコーシーの積分定理の証明の途中

(116) 式あたりまで説明しました。少し思い出しながら再開します。

コーシーの積分定理の微小分割による証明（経路が三角形の場合）

- ▶ ここでは、コーシーの積分定理の微小分割による証明 (1.4.5 節の冒頭の図の左のルート) について、経路が三角形の場合についてのみ紹介する。
- ▶ 複素平面上の三角形の経路 C を考える。 C とその内部を含む領域 D で複素関数 $f(z)$ は正則であるとする。



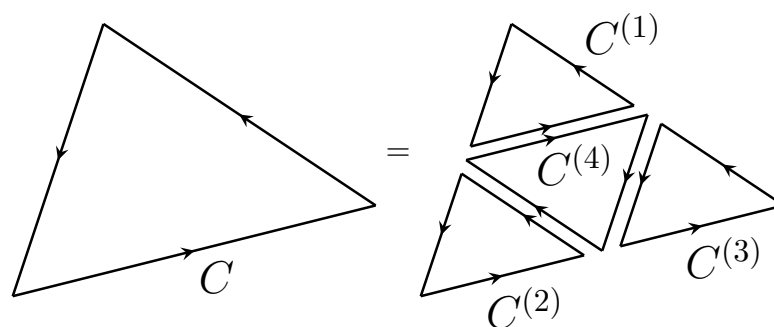
この三角形経路について

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (111)$$

が成り立つことを (i)~(iv) の step に分けて示す。

(i) 微小分割

- ▶ 経路を 4 つに分割する。



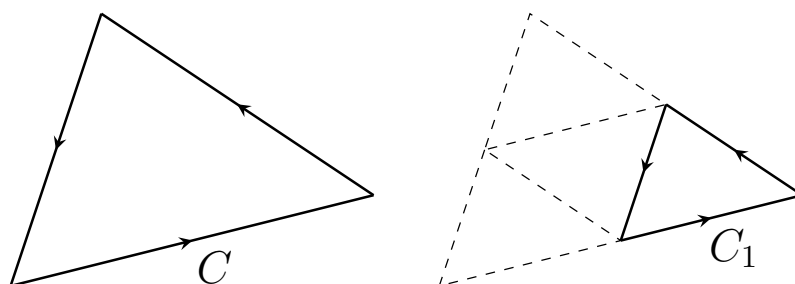
すると

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \oint_{C^{(k)}} f(z) dz. \quad (112)$$

よって

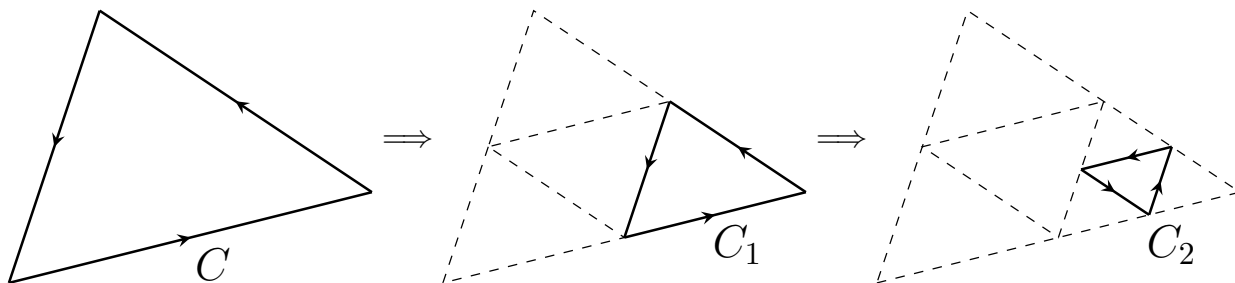
$$\left| \oint_C f(z) dz \right| = \left| \sum_{k=1}^4 \oint_{C^{(k)}} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \oint_{C^{(k)}} f(z) dz \right|. \quad (113)$$

► ここで、 $\left| \oint_{C^{(k)}} f(z) dz \right|$ のうち最大のものを与える $C^{(k)}$ を C_1 とすると



$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \oint_{C^{(k)}} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{C_1} f(z) dz \right|. \quad (114)$$

► さらに C_1 を 4 分割して、その中で積分値の絶対値が最大のものを C_2 とおくと、



$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{C_1} f(z) dz \right| \leq 4^2 \left| \oint_{C_2} f(z) dz \right|. \quad (115)$$

► これを次々と繰り返し、経路 $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ を作っていくと

$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \oint_{C_n} f(z) dz \right|. \quad (116)$$

► (10/9 の講義では、この辺りまでお話をしました。)

► $n \rightarrow \infty$ で三角形経路 $C_1, C_2, \dots, C_n$ ($n \rightarrow \infty$) はどんどん小さくなるので、全ての経路の内部に含まれる 1 点 z_0 が存在する。この点 z_0 に注目する。



(ii) 点 z_0 まわりで線形近似

- z_0 は領域 D 上にあるので $f(z)$ はこの点で微分可能で、 $f'(z_0)$ が存在する。そこで $f(z)$ を z_0 のまわりで線形近似して、その剰余項を $\phi(z)$ とおく

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{\text{線形近似}} + \underbrace{\phi(z)}_{\text{剰余項}}. \quad (117)$$

すると、

$$\oint_{C_n} f(z) dz = \underbrace{\oint_{C_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz}_{\text{線形部分は}0} + \oint_{C_n} \phi(z) dz \quad (118)$$

$$= \oint_{C_n} \phi(z) dz. \quad (119)$$

が言える。

一次式の周積分はゼロであることの証明：

$$\oint_C (a + bz) dz = a \oint_C dz + b \oint_C z dz. \quad (120)$$

第一項は

$$\oint_C dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = z_n - z_0 = 0. \quad (121)$$

第二項は被積分項に中点の値を用いると (← 間のどの点を取ってもよいので)

$$\begin{aligned} \oint_C z dz &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{z_{k+1} + z_k}{2}\right) \Delta z_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z_{k+1} + z_k}{2}\right) (z_{k+1} - z_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (z_n^2 - z_0^2) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (122)$$

したがって、step (i) の (116) 式より

$$\left| \oint_C f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \oint_{C_n} f(z) dz \right| = 4^n \left| \oint_{C_n} \phi(z) dz \right|. \quad (123)$$

(iii) $\left| \oint_{C_n} \phi(z) dz \right|$ の評価

► $f'(z_0)$ の定義から

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0), \quad (124)$$

つまり

$$\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対し、ある } \delta > 0 \text{ が存在して} \\ 0 < |z - z_0| < \delta \longrightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon. \quad (125)$$

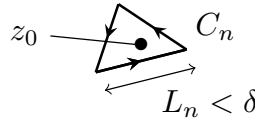
これに $\phi(z)$ の式 (117) を代入すると、

$$\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対し、ある } \delta > 0 \text{ が存在して} \\ 0 < |z - z_0| < \delta \longrightarrow |\phi(z)| < \epsilon |z - z_0|. \quad (126)$$

► 一方、もとの三角形 C の最大辺の長さを L 、三角形 C_n の最大辺の長さを L_n とすると、

$$L_n = \frac{L}{2^n}. \quad (127)$$

したがって、任意の $\delta > 0$ に対して、分割の回数 n を十分大きくすると、いつでも $L_n < \delta$ とできる。



このとき経路 C_n 上の点 z は $|z - z_0| < L_n < \delta$ を満たす。

► したがって、 $\epsilon \rightarrow \delta \rightarrow n$ の順に決めていくと、結局、

$$\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対し、ある } n \text{ が存在して、} \\ C_n \text{ 上の全ての } z \text{ に対して } \longrightarrow |\phi(z)| < \epsilon |z - z_0| < \epsilon L_n. \quad (128)$$

よってそのような n に対して

$$\left| \oint_{C_n} \phi(z) dz \right| < \left(C_n \text{ 上の } |\phi(z)| \text{ の最大値} \right) \times \left(C_n \text{ の長さ} \right) \quad (\because 1.4.2 \text{ 節の (85) 式}) \\ < \epsilon L_n \times 3L_n = 3\epsilon \left(\frac{L}{2^n} \right)^2. \quad (129)$$

$$(iv) \left| \oint_C f(z) dz \right| \rightarrow 0$$

- (ii) の (123) 式と (iii) の (129) 式より、任意の $\epsilon > 0$ に対して十分大きな n が存在して、

$$\begin{aligned} \left| \oint_C f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \oint_{C_n} \phi(z) dz \right| \\ &< 4^n \times 3\epsilon \left(\frac{L}{2^n} \right)^2 \\ &= 3\epsilon L^2. \end{aligned} \tag{130}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対して成立するので、 $\epsilon \rightarrow 0$ として $\left| \oint_C f(z) dz \right| = 0$. よって

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad \blacksquare \tag{131}$$

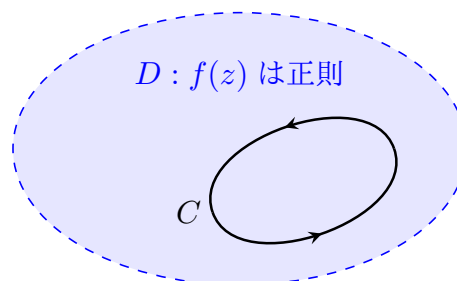
- (思ったよりページ数を割いてしまいました、、、。グリーンの定理を用いた証明よりちょっと面倒ですが、こうやって微小分割して極限をとって示せるのは、ちょっと楽しい気がします。)
- では三角形ではなく一般の閉曲線経路では？ → 数学の教科書を見てください。キーワードは「星型領域」「原始関数の存在」「単連結性」「ホモトピー」などです。

- ▶ あらためて、コーシーの積分定理を書いておくと

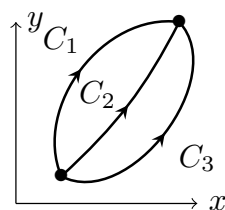
コーシーの積分定理

$f(z)$ を領域 D 上の正則関数とし
単純閉曲線 C とその内部が
 D に含まれるとする。このとき

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

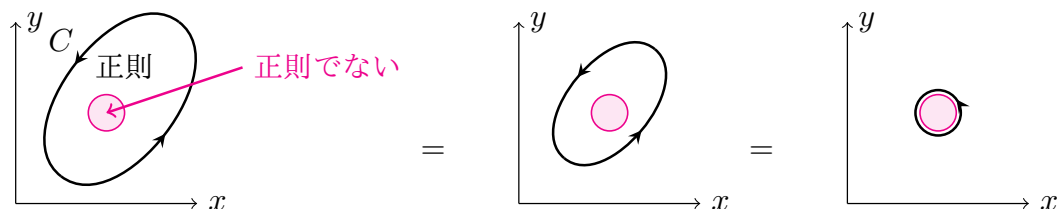


- ▶ コーシーの積分定理があるため、正則な領域では経路を好きなように曲げて良い！



$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_3} f(z) dz \quad (132)$$

- ▶ C の内部に正則でない場所があったら？ $\oint_C f(z) dz$ はどうなる??



周積分は、正則でないところの局所的な情報だけで決まりそうだ。

→ 次節 1.4.6 や 1.5 節の留数定理で見ていく。

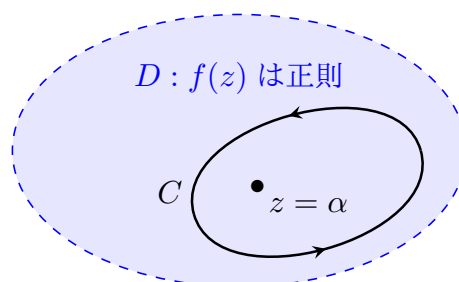
1.4.6 コーシーの積分公式と、無限回微分可能性

(コーシー、コーシーとコーシーだらけなのに、前節の「コーシーの積分定理」とこの節の「コーシーの積分公式」があるからさらにややこしい…。さらに読み上げると「コーシキ」だし…。)

► まずは

コーシーの積分公式

$f(z)$ を領域 D 上の正則関数とし、
経路 C (正の向き = 反時計回り
の単純閉曲線) とその内部が D に
含まれるとする。



このとき C の内部の点 $z = \alpha$ に対して

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = 2\pi i f(\alpha) \quad (133)$$

証明 : $\frac{f(z)}{z - \alpha}$ は D 内では $z = \alpha$ を除いて正則なので、経路を $z = \alpha$ を中心とした半径 r の円 (経路 $C' \subset D$) に変形する。 C' は

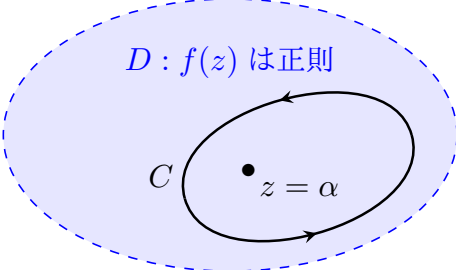
$$z(\theta) = \alpha + re^{i\theta}, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \begin{array}{c} C' \\ \text{半径 } r \\ \bullet \\ z = \alpha \end{array} \quad (134)$$

とパラメータ表示できるので

$$\begin{aligned} \oint_{C'} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z(\theta))}{z(\theta) - \alpha} \cdot \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta}) i d\theta \xrightarrow{r \rightarrow 0} 2\pi i f(\alpha). \blacksquare \end{aligned} \quad (135)$$

(より正確には、 $f(z)$ の正則性 $\rightarrow$ 連続性から $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|z - \alpha| < \delta \implies |f(z) - f(\alpha)| < \epsilon$ なので、 $0 < r < \delta$ とすれば $f(\alpha + re^{i\theta}) = f(\alpha) + \phi(\theta)$ s.t. $|\phi(\theta)| < \epsilon$ 、を代入して示せる。)

- ▶ コーシーの積分公式 (133) 式は 1.5 節でやる「留数定理」の特別な例になっている。
- ▶ コーシーの積分公式 (133) 式は以下のようにも書ける。



$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \quad (136)$$

(経路 C は点 α から離れているのに、積分すると $z = \alpha$ の値が得られる！)

- ▶ さらに (136) から次のことが言える。

$f(z)$ を領域 D 上の正則関数とする。このとき $f(z)$ は D 上で何回でも複素微分可能であり、 $z = \alpha$ での n 階微分係数は、 D 上の適当な経路 C ($z = \alpha$ を内部に含む、正の向き = 反時計回りの単純閉曲線) を用いて

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz, \quad (137)$$

で与えられる。

- ▶ (証明の前に) いくつかコメント
 - (i) 何回でも微分可能なので、 $f'(z), f''(z), \dots$ も全て正則関数となる。
 - (ii) 式 (137) の $n = 0$ の場合は上のコーシーの積分公式になっており、式 (137) は「コーシーの積分公式の一般形」あるいは単にこの式も「コーシーの積分公式」などと呼ばれる。
- ▶ 証明:
先ほど示したコーシーの積分公式 (136) $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$ の両辺を α の関数と見て微分する。

方法 1 : 微分と積分の交換を気にしない。

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{f(z)}{z - \alpha} \right) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^2} dz.
 \end{aligned} \tag{138}$$

次々と微分して

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz. \blacksquare \tag{139}$$

方法 2 : ちゃんと気にする。 $f(z)$ の微分の定義より

$$f'(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + \Delta\alpha) - f(\alpha)}{\Delta\alpha} \tag{140}$$

これにコーシーの積分公式 (136) $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$ を代入すると

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \oint_C \left[\frac{f(z)}{z - (\alpha + \Delta\alpha)} - \frac{f(z)}{z - \alpha} \right] dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha - \Delta\alpha)(z - \alpha)} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^2} dz + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \Delta\alpha \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha - \Delta\alpha)(z - \alpha)^2} dz}_{(A)}
 \end{aligned} \tag{141}$$

第二項は、経路 C 上で $f(z)$ が正則なので $|f(z)| < \infty$ 、かつ $|\Delta\alpha|$ が十分小さければ $|z - \alpha| > 0$ かつ $|z - \alpha - \Delta\alpha| > 0$ 。したがって $\Delta\alpha \rightarrow 0$ で $|(A)| < \infty$ ($|A|$ は有界)。(← 講義後微修正) したがって第二項 $\xrightarrow{\Delta\alpha \rightarrow 0} 0$ 。よって

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^2} dz. \tag{142}$$

さらに同様にして

$$f''(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{f'(\alpha + \Delta\alpha) - f'(\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^3} dz. \tag{143}$$

この最右辺は $\Delta\alpha \rightarrow 0$ のとり方によらず決まるので、 $f''(\alpha)$ が存在する。(つまり $f(z)$ は 2 回微分可能。) 以下これを繰り返して

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz. \quad \blacksquare \quad (144)$$

レポート問題

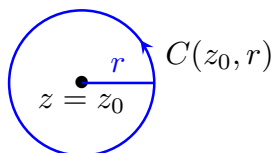
[c-8] 上の「以下これを繰り返して」の部分を ($n = 2$ の場合も含めて) 数学的帰納法で示せ。

- D 上の任意の点 $z = \alpha$ に対して、それを内部に含む D 上の経路 C が取れるので、結局「 D 上の任意の点で $f(z)$ は何回でも複素微分可能である」ことがわかる。(1.1 で予告した「正則関数のすごい性質」の 1 つが示せた!) さらに、その微分係数 $f^{(n)}(\alpha)$ が ($z = \alpha$ を囲む D 上の適当な経路 C を用いて) (144) 式で与えられることもわかった。

1.4.7 コーシーの積分公式の応用

► コーシーの積分公式を用いた計算の具体例を見てみよう。

記号の定義



以下「 $z = z_0$ を中心とした半径 r の円を
正の向きに一周する経路」を $C(z_0, r)$ と表す。

例 1: $\oint_{C(0,2)} \frac{\cos z}{z-1} dz$

$z = 1$ は $C(0, 2)$ の内部にあるので、 $f(z) = \cos z$ として

$$\oint_{C(0,2)} \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \cos 1. \quad (145)$$

例 2: $\oint_{C(0,1)} \frac{1}{z^n} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$

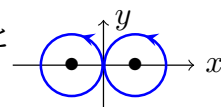
$f(z) = 1$ として、

$$\oint_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) = \begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n=2, 3, \dots) \end{cases} \quad (146)$$

前節の結果が再現できた。

例 3: $\oint_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2-1} dz$

経路を変形して $C(-1, 1)$ と $C(1, 1)$ に分割すると

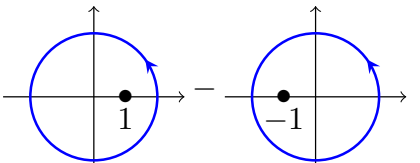


$$\begin{aligned} \oint_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2-1} dz &= \oint_{C(-1,1)} \frac{e^z}{z^2-1} dz + \oint_{C(1,1)} \frac{e^z}{z^2-1} dz \\ &= \oint_{C(-1,1)} \underbrace{\frac{1}{z+1}}_{f(z)} \left(\underbrace{\frac{e^z}{z-1}}_{g(z)} \right) dz + \oint_{C(1,1)} \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{g(z)} \left(\underbrace{\frac{e^z}{z+1}}_{f(z)} \right) dz. \end{aligned}$$

コーシーの積分公式を用いて

$$(\text{右辺}) = 2\pi i(f(-1) + g(1)) = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{-2} + \frac{e}{2} \right). \quad (147)$$

あるいは被積分関数を変形して

$$\oint_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz = \oint_{C(0,2)} \frac{1}{2} \left(\frac{e^z}{z-1} - \frac{e^z}{z+1} \right) dz$$


$$= \pi i (e^1 - e^{-1}). \quad (148)$$

レポート問題

[b-13] 以下の積分を計算せよ。

$$\oint_{C(0,2)} \frac{e^{2iz}}{z^2 + 1} dz. \quad (149)$$

$$\oint_{C(0,2)} \frac{z^4}{(z-1)^3} dz. \quad (150)$$

$$\oint_{C(3,1)} \frac{z^{10}}{(z-1)(z-3)^2} dz. \quad (151)$$

レポート問題

[c-9] 次の実数積分を、 $z = e^{i\theta}$ として複素積分を用いて計算せよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \beta \cos \theta} d\theta \quad (0 < \beta < 1). \quad (152)$$

レポート問題

[b-14] $f(z)$ が領域 D で正則であり、 $C(\alpha, r)$ とその内部が D に含まれるとき、次の式を示せ。

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta}) d\theta. \quad (153)$$

(適当な半径 r の円周上で周積分して「平均」を取れば、中心での値が分かる！)

► 最大値の定理

コーシーの積分公式 (136) $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$ を用いて、次のも示せる。

最大値の定理

- 複素関数 $f(z)$ が領域 D で正則であり、定数関数でないとする。このとき、 $|f(z)|$ は D 上で最大値をとらない。(注：領域 D は境界を含まない)
- 複素関数 $f(z)$ が有界領域 D およびその境界を含む閉集合 $\overline{D}$ 上で正則であるとする。このとき、 $|f(z)|$ の最大値は $\overline{D}$ の境界上でとられる。(注： $\overline{D}$ は境界を含む.)

この定理は結構すごいことを言っていて、 $|f(z)|$ 境界以外では最大値をとらない、、例えば円錐みたいな形には絶対にならない、、ということを言っています。(図を描いて説明しよう。)

(証明)

1. $|f(z)|$ の最大値が、 D 上の点 $z = \alpha$ で与えられると仮定する。

$$|f(z)| \leq |f(\alpha)| \quad \text{for } \forall z \in D \quad (154)$$

$z = \alpha$ は境界にはないので、 α を中心とした半径 r ($r > 0$) の円 $C(\alpha, r)$ を D 内に取ることができる (図を描こう)。

するとコーシーの積分公式 (136) $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$ を用いて

$$|f(\alpha)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \right| \quad \because (136) \quad (155)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \times \left[C(\alpha, r) \text{ 上の } \left| \frac{f(z)}{z - \alpha} \right| \text{ の最大値} \right] \times [C(\alpha, r) \text{ の経路長}] \quad (156)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \times \frac{|f(\alpha)|}{r} \times 2\pi r \quad \because C(\alpha, r) \text{ 上で } |z - \alpha| = r \text{ かつ } (154) \quad (157)$$

$$= |f(\alpha)|. \quad (158)$$

結局全ての不等号は等号となり、成立するためには

$$\text{円 } C(\alpha, r) \text{ 上で } |f(z)| = |f(\alpha)|. \quad (159)$$

2. 円の半径はいくらでも小さく取れるので、円 $C(\alpha, r)$ の内部で $|f(z)|$ は定数。

3. 領域 D 上の全ての点は内点だけを通る折れ線で α につながられるので、領域内の小さな円を重ねて点 α までつながられる (図を描こう)。よって結局 D 内全域で $|f(z)|$ は定数。
4. よって [c-4] ($|f(z)|$ が定数 $\rightarrow f(z)$ が定数) より D 内で $f(z)$ は定数。これは仮定に反するので、背理法により $|f(z)|$ は D 内に最大値を持たない。(前半の証明終わり)
5. (後半) $\overline{D}$ は閉集合かつ有界 (コンパクト集合) なので、 $|f(z)|$ は $\overline{D}$ 上で最大値をもつ。(「極値定理」、証明略) $f(z)$ が定数関数なら $|f(z)|$ は一定なので、最大値は境界で与えられる。 $f(z)$ が定数関数でないなら、前半の内容より、最大値は $\overline{D}$ の内部 ($= D$) では与えられない。したがって $|f(z)|$ の最大値は $\overline{D}$ の境界上で与えられる。(証明終わり)

レポート問題

[b-15] 複素関数 $f(z)$ が有界領域 D およびその境界を含む閉集合 $\overline{D}$ 上で正則であり、かつ $\overline{D}$ 上で $f(z) \neq 0$ とする。このとき $|f(z)|$ の最小値も $\overline{D}$ の境界で与えられることを示せ。

► リウビルの定理

さらにコーシーの積分公式の微分バージョン (137) $f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$ を用いて次の定理も示しておこう。

リウビルの定理

$f(z)$ を複素平面全体で正則な複素関数とする。

$|f(z)|$ が複素平面全体で有界なら $f(z)$ は定数関数である。

($|f(z)|$ が複素平面全体で有界 $\longleftrightarrow \exists M > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M$.)

(“Liouville”をどうカタカナにするかは色々な流儀があるようです。)

(この定理も結構すごいことを言っていて「複素平面全体で正則な関数は、定数関数でない限り、必ず $|z| \rightarrow \infty$ で $|f(z)| \rightarrow \infty$ になる方向がある。」ということを示しています。実数だと、 $f(x) = \sin x$ のように $|f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty$ とはならない関数はいくらでもありますね。正則関数ではそういうことはあり得ない、というわけです。)

証明

任意の複素数 α に対して、円経路 $C(\alpha, r)$ を考えて

$$|f'(\alpha)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz \right| \quad \because \text{コーシーの積分公式の微分バージョン (137)}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \times \left[C(\alpha, r) \text{ 上の } \left| \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} \right| \text{ の最大値} \right] \times [C(\alpha, r) \text{ の経路長}] \quad (160)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \times \frac{M}{r^2} \times 2\pi r \quad \because C(\alpha, r) \text{ 上で } |z-\alpha| = r \text{ かつ } |f(z)| \leq M \quad (161)$$

$$= \frac{M}{r}. \quad (162)$$

$r > 0$ は任意にとれるので $r \rightarrow \infty$ として $f'(\alpha) = 0$ 。 α は任意なので、複素平面全体で $f'(z) = 0$ 、よって $f(z)$ は定数関数。■

レポート問題

[c-10] $f(z)$ を複素平面全体で正則な複素関数とする。 $|z| \leq r$ (原点中心で半径 r の円とその内部) における $|f(z)|$ の最大値を $M(r)$ とおく。

$$\frac{M(r)}{r^{n+1}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (163)$$

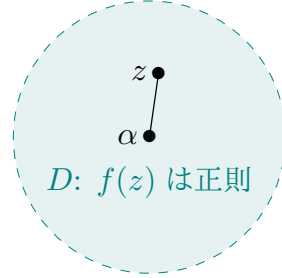
が成り立つとき、 $f(z)$ は n 次以下の多項式 $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ となることを示せ。

1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

1.5.1 テイラー展開

テイラー展開

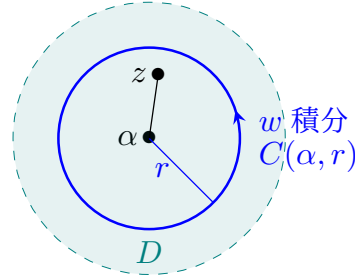
関数 $f(z)$ が点 $z = \alpha$ を中心とした円板領域 D 内で正則であるとき、 $f(z)$ はこの領域内で常に次の形のべき級数で展開できる（テイラー展開）。



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n. \quad (164)$$

(証明) : 任意の D 上の点 z に対して、コーシーの積分公式 (136) より、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (165)$$



と書ける。ただし右辺は z ではなく複素数 w による積分であり、円周経路 $C(\alpha, r)$ の半径 r は $|z - \alpha|$ より大きくとる。この経路上で $|w - \alpha| = r > |z - \alpha|$ なので

$$\begin{aligned} \frac{f(w)}{w - z} &= \frac{f(w)}{(w - \alpha) - (z - \alpha)} \\ &= \frac{f(w)}{w - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right)} = \frac{f(w)}{w - \alpha} \left[1 + \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right) + \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right)^2 + \cdots \right] \\ &= \frac{f(w)}{w - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right)^n \quad \left(\text{for } \left| \frac{z - \alpha}{w - \alpha} \right| < 1. \quad \because (83) \right). \end{aligned} \quad (166)$$

これを (165) に代入すると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \left[\frac{f(w)}{w - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right)^n \right] dw. \quad (167)$$

w の経路 $C(\alpha, r)$ ($|w - \alpha| = r > |z - \alpha|$) の上でこの級数は一様収束するので積分と無限和を交換できて

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C(\alpha, r)} \left[\frac{f(w)}{w - \alpha} \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha} \right)^n \right] dw \quad (168)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw \right) (z - \alpha)^n \quad (169)$$

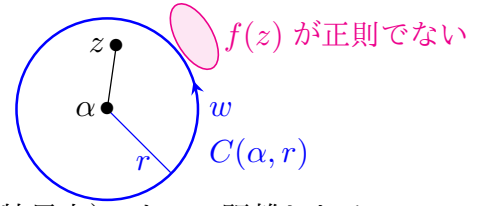
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \quad \because \text{コーシーの積分公式 (微分バージョン)} \quad (137) \quad \blacksquare$$

(170)

► テイラー展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw \right) (z - \alpha)^n,$$

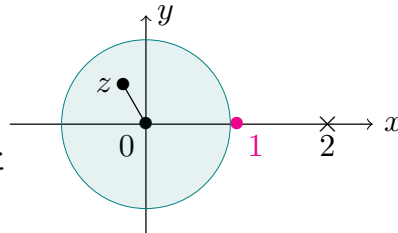
は、 w の経路 $C(\alpha, r)$ が正則な範囲で取れる限り可能。



収束半径は α と「 α から最も近い $f(z)$ が正則でない点 (特異点)」までの距離となる。

► 例として、 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ をいくつかの点の周りでテイラー展開してみよう。

まず $z = 0$ のまわりで展開すると

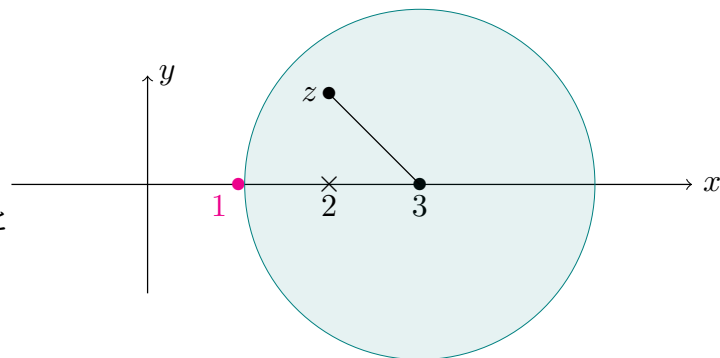


$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1). \quad \text{——(i)}$$

収束半径は 1 ($z = 0$ から最寄りの特異点の $z = 1$ までの距離)。

- 収束半径の中の点、例えば $z = 1/2$ を代入すると、左辺は $\frac{1}{1-1/2} = 2$ となつて、右辺も $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 2$ と収束して一致する。
- 収束半径の外側の点、例えば $z = 2$ を代入すると、左辺は $\frac{1}{1-2} = -1$ だけど、右辺は $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$ となって発散してしまう。

▶ 同じ $\frac{1}{1-z}$ を $z=3$ のまわりで展開すると



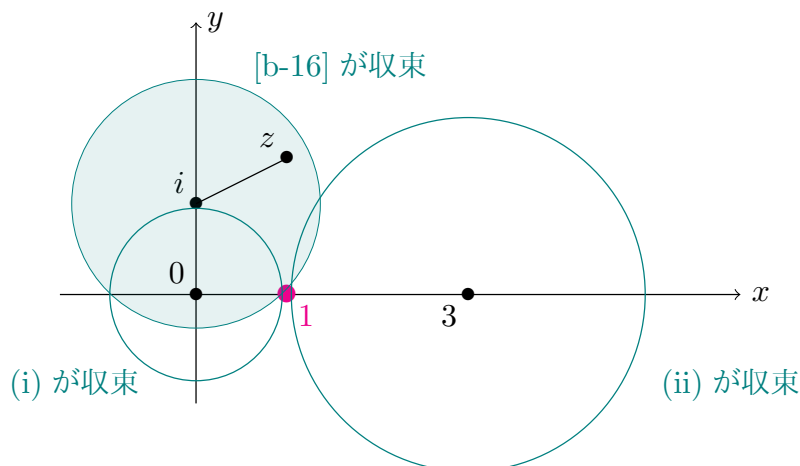
$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{-2-(z-3)} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-3}{-2}\right)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-3}{-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-3)^n \quad (|z-3| < 2). \quad \text{---(ii)}\end{aligned}$$

収束半径は 2。今度は $z=2$ は収束半径の中に入っていて、右辺に代入すると、 $(-1/2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n = -1$ に収束して、左辺と一致する。

▶ もう 1 つ $z=i$ まわりも。

レポート問題

[b-16] $f(z) = \frac{1}{1-z}$ を $z=i$ のまわりで展開し、収束半径が $\sqrt{2}$ であることを示せ。[b-9] の結果を用いてもよい。



[b-16] が収束する範囲は (i) や (ii) が収束する範囲と重なりがある。

(例えば $z=i/2$ では、(i) のテイラー展開と [b-16] のテイラー展開がどちらも収束する。)

重なっているところでは 2 つの異なるテイラー展開が同じ関数を表している。

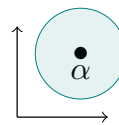
→ この「テイラー展開の重なり」は 1.6 節で再び見る。

► またテイラー展開から次のことも言える。

ゼロ点の孤立

複素関数 $f(z)$ が点 $z = \alpha$ を中心とした円板領域 D で正則かつ $f(\alpha) = 0$ とする。このとき $f(z)$ が恒等的にゼロでない限り $z = \alpha$ は「孤立したゼロ点」である。

($\exists \delta > 0$ s.t. $0 < |z - \alpha| < \delta \implies f(z) \neq 0$.)



(証明): 仮定より $f(z)$ は $z = \alpha$ の周りで

$$f(z) = c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \cdots \quad (171)$$

とテイラー展開できる。 $f(\alpha) = 0$ より $c_0 = 0$ 。さらに「 $f(z)$ が恒等的にゼロでない」と仮定すると、ある $c_m \neq 0$ ($m \geq 1$) が存在して

$$f(z) = c_m(z - \alpha)^m + c_{m+1}(z - \alpha)^{m+1} + c_{m+2}(z - \alpha)^{m+2} + \cdots \quad (172)$$

$$= (z - \alpha)^m \underbrace{(c_m + c_{m+1}(z - \alpha) + c_{m+2}(z - \alpha)^2 + \cdots)}_{f_m(z)} \quad (173)$$

$f_m(z)$ の連続性 (証明略) と $f_m(\alpha) = c_m \neq 0$ から、 $\exists \delta > 0$ s.t. $0 < |z - \alpha| < \delta \implies f_m(z) \neq 0$ 。よって同じ δ に対して $0 < |z - \alpha| < \delta \implies f(z) \neq 0$. ■

コメント

(i) 正則関数でなければ必ずしも「ゼロ点の孤立」は成り立たない。

(例: $f(z) = z + \bar{z}$ は虚軸上 ($z = iy$) で連続的に $f(z) = 0$ 。)

(ii) $f(z) = (z - 1)(z - 2)$ のように、離れたゼロ点があることはある。

(iii) 上の「ゼロ点の孤立」は 1.6 節の解析接続で用いる。

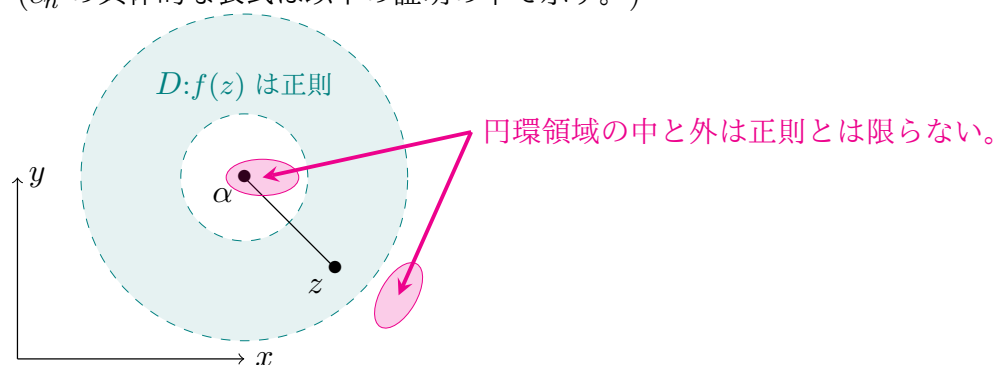
1.5.2 ローラン展開と留数

ローラン展開

関数 $f(z)$ が点 $z = \alpha$ を中心とした円環領域 D ($0 < r_1 < |z - \alpha| < r_2$) 内で正則であるとき、 $f(z)$ はこの領域内で常に次の形で展開できる。(ローラン展開)

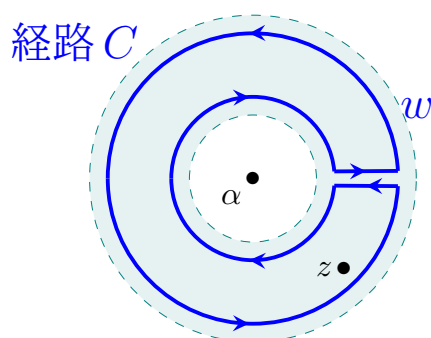
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n = c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + \frac{c_{-2}}{(z - \alpha)^2} + \frac{c_{-3}}{(z - \alpha)^3} + \cdots \quad (174)$$

(c_n の具体的な表式は以下の証明の中で示す。)



(証明)

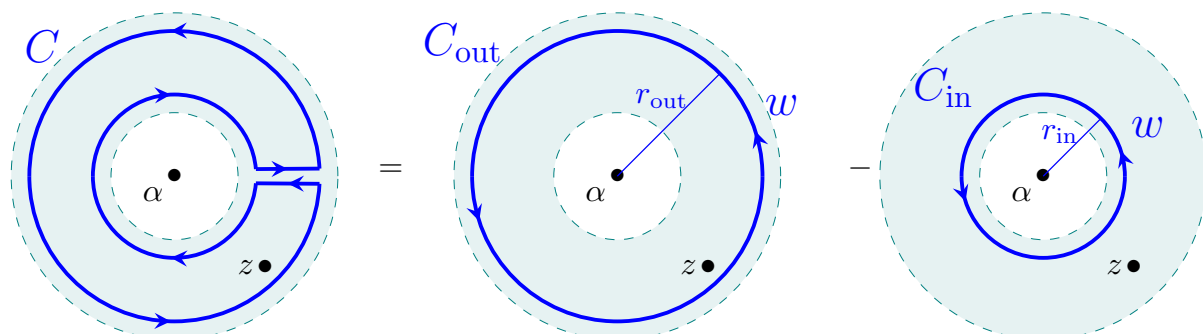
図のような経路 C を考える。 C 内で $f(z)$ は正則なので、コーシーの積分公式より



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (175)$$

経路 C は $C_{\text{out}} = C(\alpha, r_{\text{out}})$ と $C_{\text{in}} = C(\alpha, r_{\text{in}})$ を用いて $C = C_{\text{out}} - C_{\text{in}}$ と分け

られるので



$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{out}}} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{f_{\text{out}}(z)} + \underbrace{\frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{f_{\text{in}}(z)}. \quad (176)$$

($C_{\text{out/in}}$ は内部が正則でない (正則とは限らない) ので、ここから先それぞれの項 $f_{\text{out/in}}(z)$ でコーシーの積分定理や積分公式が使えないことに注意。)

まず $f_{\text{out}}(z)$ の中の $\frac{1}{w-z}$ は、積分変数 w が経路 C_{out} 上で $|w-\alpha| = r_{\text{out}} > |z-\alpha|$ を満たすので

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-\alpha) - (z-\alpha)} = \frac{1}{w-\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{w-\alpha}} = \frac{1}{w-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right)^n, \quad (177)$$

と展開できる。級数は C_{out} 上で一様収束するので

$$\begin{aligned} f_{\text{out}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{out}}} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{out}}} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \quad \because (177) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{out}}} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \right)}_{c_n \ (n \geq 0)} (z-\alpha)^n \quad \because \text{一様収束} \end{aligned} \quad (178)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n. \quad (179)$$

10/16、ここまで

10/16 に出題したレポートは [b-13]~[b-16]、[c-8]~[c-10] でした。

講義後、付録 A に [b-1]~[b-8] の解答例を追加しました。

先週までのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標

1.2 準備

1.3.3 複素微分と正則関数（コーシー・リーマン関係式、など）

1.4 複素積分（コーシーの積分定理、コーシーの積分公式）

1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

1.5.1 テイラー展開

1.5.2 ローラン展開と留数 $\Leftarrow$ いまココ

次に $f_{\text{in}}(z)$ の中の $\frac{1}{w-z}$ は、経路 C_{in} 上で $|w-\alpha|=r_{\text{in}} < |z-\alpha|$ なので

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-\alpha)-(z-\alpha)} = \frac{-1}{z-\alpha} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-\alpha}{z-\alpha}} = \frac{-1}{z-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha} \right)^n, \quad (180)$$

と展開できる。級数は C_{in} 上で一様収束するので

$$\begin{aligned} f_{\text{in}}(z) &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(w-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}} dw \quad \because (180) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} f(w)(w-\alpha)^n dw \right)}_{c_{-n-1} \ (n \geq 0)} \frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}} \quad \because \text{一様収束} \quad (181) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-\alpha)^{-n}. \quad (182)$$

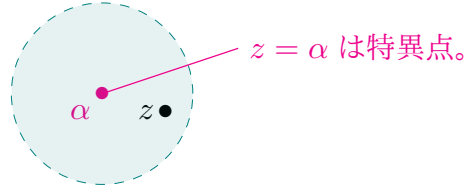
以上より

$$f(z) = f_{\text{out}}(z) + f_{\text{in}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n. \quad \blacksquare \quad (183)$$

- ▶ ローラン展開はテイラー展開を含む。もし円環領域の内側で $f(z)$ が正則なら、 $f_{\text{in}}(z) = 0$ であり*6、 $c_{-1} = c_{-2} = \cdots = 0$ となるので、ローラン展開はテイラー展開に帰着する。
- ▶ 特に「孤立特異点のまわりのローラン展開」が重要である。

$f(z)$ が $z = \alpha$ を中心とした円板領域 D 内で

$z = \alpha$ を除いて正則なとき、



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n = c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + \frac{c_{-2}}{(z - \alpha)^2} + \frac{c_{-3}}{(z - \alpha)^3} + \cdots \quad (184)$$

と展開できる。係数は円周経路 $C(\alpha, r) \subset D$ を用いて

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \quad (185)$$

で与えられる。

*6 $f_{\text{in}}(z)$ の定義

$$f_{\text{in}}(z) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

において、 w 積分の被積分関数を $g(w) = f(w)/(w - z)$ とおくと、積分は

$$\oint_{C_{\text{in}}} g(w) dw,$$

と書いて、 $g(w)$ は w の関数としてみたときに、 C_{in} およびその内部で正則です。したがって、「コーシーの積分定理」(1.4.4) より、

$$\oint_{C_{\text{in}}} g(w) dw = 0,$$

よって $f_{\text{in}}(z) = 0$ 、となる。あるいは、式(181)の w 積分でコーシーの積分定理を用いて $c_{-1} = c_{-2} = \cdots = 0$ としても同じ結論が得られる。

言葉をいくつか定義する。

- α が $f(z)$ の孤立特異点である。
 $\iff z = \alpha$ が特異点、かつ $\exists r > 0$, s.t. $0 < |z - \alpha| < r \rightarrow f(z)$ が正則。
- 負べきの次数に最大値 m があるとき α を $f(z)$ の m 位の極という。
- 負べきの次数に上限がなく無限に続くとき、 α を $f(z)$ の真性特異点という。
- 孤立特異点のまわりのローラン展開の -1 次の係数 c_{-1} を留数という。

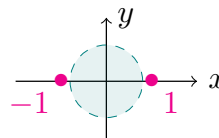
留数: $\text{Res}(f, \alpha) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} f(z) dz.$

 $\rightarrow$ 次節 1.5.3 の主役。

► (留数定理に行く前に) ローラン展開の具体例をいくつか見ておこう。例として

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}. \quad (186)$$

を考える。まず $z = 0$ のまわりで $|z| < 1$ の範囲で展開すると、



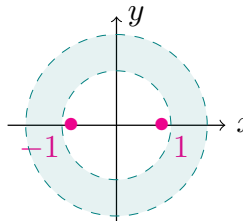
$$f(z) = (-z) \frac{1}{1 - z^2} = (-z) \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n$$

$$= -z - z^3 - z^5 - \dots \quad (|z| < 1).$$

(187)

これはただのテイラー展開。

► 次に同じ $z = 0$ のまわりで、今度は $|z| > 1$ で展開すると



$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{z}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - 1/z^2} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \dots \quad (|z| > 1).$$

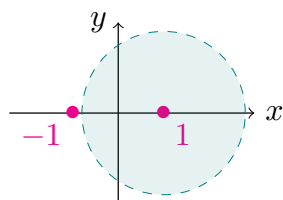
(188)

このときローラン展開の -1 次の係数は $c_{-1} = 1$ だが、これは留数とは呼ばない。
 (孤立特異点のまわりの展開ではないため。)

同じ $f(z)$ なのに (187) と (188) で全然展開式が違うのは、収束する範囲が違うから。

► 今度は孤立特異点 $z = 1$ のまわりで、 $0 < |z - 1| < 2$ の範囲でローラン展開して

みよう。



$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right) \quad (189)$$

であり、第二項は

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2} \right)^n \quad (|z-1| < 2), \quad (190)$$

と展開できるので、結局

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+2} (z-1)^n \quad (0 < |z-1| < 2), \quad (191)$$

となる。したがって $z=1$ における留数は $\text{Res}(f, 1) = 1/2$ となる。

レポート問題

[b-17] 上の例 $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$ について以下の問いに答えよ。

1. $f(z)$ を $z = -1$ のまわりで $0 < |z+1| < 2$ の範囲で $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z+1)^n$ とローラン展開し、係数 c_n を求めよ。 $(z = -1$ での留数 $c_{-1} = \text{Res}(f, -1)$ はいくつになるか?)
2. $f(z)$ を $z = -1$ のまわりで、 $|z+1| > 2$ の範囲で $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z+1)^n$ とローラン展開し、係数 c_n を求めよ。

レポート問題

[b-18] $f(z) = z \cos(1/z)$ について以下の問いに答えよ。ただし三角関数のテイラー展開は既知として良い。

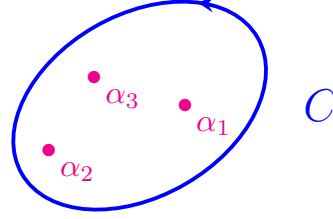
1. $f(z)$ を $z = 0$ のまわりでローラン展開せよ。
2. $f(z)$ の $z = 0$ における留数を求めよ。
3. $z = 0$ が $f(z)$ の真性特異点になっていることを確認せよ。

1.5.3 留数定理

留数定理

経路 C （正の向きの単純閉曲線）とその内部を含む領域を考える。関数 $f(z)$ がこの領域で C の内部の N 個の孤立特異点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ を除いて正則であるとき

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(f, \alpha_k). \quad (192)$$



周積分の値は、内部の留数の和だけで決まる。

(証明): ここまでやってきたことを組み合わせるだけ。

1. まず経路を分割。(コーシーの積分定理)

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^N \oint_{C_k} f(z)dz.$$

2. 次に各経路でローラン展開。

$$\oint_{C_k} f(z)dz = \oint_{C_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} (z - \alpha_k)^n dz = \oint_{C_k} \left[\dots + \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - \alpha_k} + c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(z - \alpha_k) + \dots \right] dz \quad (193)$$

3. それぞれの経路で $z(\theta) = \alpha_k + re^{i\theta}$ として円周積分すると、

$$\oint_{C_k} (z - \alpha_k)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases} \quad (1.4.3 \text{ 節参照}) \quad (194)$$

$$\therefore \oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i c_{-1}^{(k)} = 2\pi i \text{Res}(f, \alpha_k). \quad (195)$$

4. 足して $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(f, \alpha_k).$ ■

留数の求め方

定義によれば、それぞれの孤立特異点のまわりでローラン展開して

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}^{(k)}}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - \alpha_k} + c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(z - \alpha_k) + c_2^{(k)}(z - \alpha_k)^2 + \cdots, \quad (196)$$

この $c_{-1}^{(k)}$ が留数となる。しかし、もし極の位がわかっている場合にはいちいち展開しなくても留数を求められる便利な方法がある。

▶ まず $z = \alpha$ が 1 位の極である場合は、そのまわりで

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \cdots, \quad (197)$$

と展開できるので、

$$\text{Res}(f, \alpha) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z), \quad (198)$$

とすれば留数が求まる。

▶ 一般に $z = \alpha$ が m 位の極である場合は、そのまわりで

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - \alpha)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z - \alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + c_0 + c_1(z - \alpha) + \cdots, \quad (199)$$

と展開できるので、

$$\boxed{\text{Res}(f, \alpha) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - \alpha)^m f(z) \right)}, \quad (200)$$

とすれば留数が求まる。

▶ 例： $f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)^3}$ ($\alpha \neq \beta$) は $z = \alpha$ に 1 位の極、 $z = \beta$ に 3 位の極を持つ。それぞれの留数は

$$\text{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z) = \frac{1}{(\alpha - \beta)^3}, \quad (201)$$

$$\text{Res}(f, \beta) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - \beta)^3 f(z) \right) = \frac{1}{(\beta - \alpha)^3}. \quad (202)$$

► コメント：極の位数について

上の例では極の位数が 1 位、3 位と見た目で分かるが、より一般には？

$z = \alpha$ が $f(z)$ の孤立特異点であるとき、ある自然数 n と $\beta \neq 0$ が存在して

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)^n f(z) = \beta (\neq 0), \quad (203)$$

であれば、 $z = \alpha$ は $f(z)$ の n 位の極である。

と言える。これは、 $z = \alpha$ が $f(z)$ の m 位の極のとき、(199) のようにローラン展開できるので

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)^n f(z) = \begin{cases} \text{発散} & (n < m) \\ c_{-m} \neq 0 & (n = m) \\ 0 & (n > m) \end{cases}, \quad (204)$$

となることから分かる。

特に、 $f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^n} g(z)$ のようにきれいに因数分解された形をしていて、 $\lim_{z \rightarrow \alpha} g(z) = \beta$ が存在して $\beta \neq 0$ であるときは、見た目ですぐに n 位の極、と分かる。((201)、(202) の例はこのパターン。)

レポート問題

[b-19] $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ の全ての極とそこでの留数を求めよ。

[b-20] $\oint_{C(0,1)} z^2 \sin(1/z) dz$ を求めよ。

レポート問題

[b-21] $g(z), h(z)$ を正則関数とする。

複素関数 $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ が $z = \alpha$ に 1 位の極を持つことが分かっていて、かつ $g(\alpha) \neq 0$ のとき、留数が

$$\text{Res}(f, \alpha) = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}. \quad (205)$$

で与えられることを示せ。

1.5.4 実数積分への応用

留数定理を使うと、様々な実数積分が (簡単に) 計算できる!

1.5.4.A 三角関数の 1 周積分

► 実数積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta. \quad (206)$$

を留数積分を用いて求めてみよう。これは、

- (i) 経路 $C(0,1)$: $z(\theta) = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を考え、
- (ii) $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ を代入し
- (iii) $d\theta = \frac{dz}{iz}$ とした複素周積分

$$\oint_{C(0,1)} \frac{1}{5 + 3 \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)} \frac{dz}{iz}, \quad (207)$$

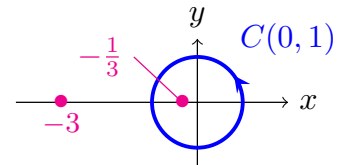
に帰着する。実際、パラメータ表示での複素積分の定義を代入すると

$$\begin{aligned} \text{(上式)} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \left(\frac{z(\theta) + z(\theta)^{-1}}{2} \right)} \underbrace{\frac{1}{iz(\theta)} \frac{dz(\theta)}{d\theta}}_{=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta = I. \end{aligned} \quad (208)$$

となって元の実数積分に帰着する。複素積分は留数定理で簡単に求められて

$$I = \oint_{C(0,1)} \frac{1}{5 + 3 \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)} \frac{dz}{iz} = \oint_{C(0,1)} \frac{-2i}{10z + 3z^2 + 3} dz \quad (209)$$

$$= \oint_{C(0,1)} \underbrace{\frac{-2i}{3(z + 1/3)(z + 3)}}_{f(z)} dz. \quad (210)$$



ここで $C(0,1)$ 内に特異点は $z = -1/3$ だけなので、

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1/3) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1/3} (z + 1/3)f(z) = \frac{\pi}{2}. \quad (211)$$

と答が求まる。

► 一般に、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の関数の 1 周積分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad (212)$$

は上の例と同様にして

- (i) 経路 $C(0, 1)$: $z(\theta) = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を考え
- (ii) $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ を代入し
- (iii) $d\theta = \frac{dz}{iz}$ とすれば

複素周積分に帰着できて

$$I = \oint_{C(0,1)} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (213)$$

で与えられる。特に、 $R(\cos \theta, \sin \theta)$ が有理関数

$$R(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)} \quad (P, Q \text{ は } \cos \theta, \sin \theta \text{ の多項式}) \quad (214)$$

のときは（経路上で Q がゼロになる場合を除いて）留数積分で計算できる。

レポート問題

[b-22]

1. 上の例のように、 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ の形の実数積分が留数定理によって計算できる例を 1 つ自分で考え、留数定理を用いて積分値を求めよ。ただし $R(\cos \theta, \sin \theta)^{-1} \neq 0$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする。
2. 1. の実数積分を（複素積分以外の）何らかの方法で計算し、結果を検算せよ。（解析的に計算出来ればそれでも良いですし、自分で数値計算で確認しても良いです。あるいは Wolfram Alpha などのツールで計算した結果の画像を添付する、とかでも良いです。）

1.5.4.B 無限遠の積分路の追加

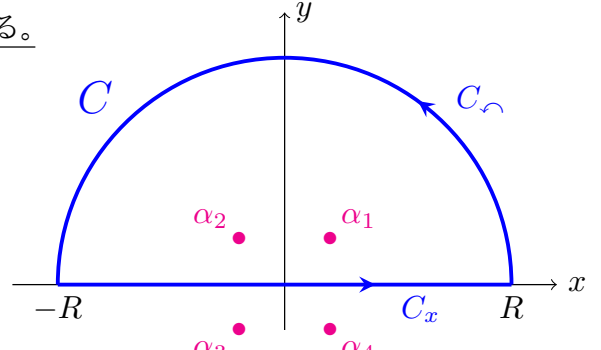
- 以下のような、 $\pm\infty$ の範囲の実数積分を考えよう。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx. \quad (215)$$

- これは複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ の実軸上の経路 C_x に沿った複素線積分だと考えることが出来る。(分かりにくければ、 $z(x) = x$ とパラメータ表示を考えよう。)

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_x} f(z) dz. \quad \text{---} \quad \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ \text{---} \quad -R \quad \quad \quad R \quad \rightarrow x \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad C_x \end{array} \quad (216)$$

- 関数 $f(z)$ は複素平面上に孤立特異点を持っている。そこで留数定理を用いるために半径 R の半円経路 C_∞ を追加した周積分を考える。

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_x} f(z) dz + \int_{C_\infty} f(z) dz. \quad \begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ \text{---} \quad -R \quad \quad \quad R \quad \rightarrow x \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad C_x \end{array}$$


$$\therefore \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_x} f(z) dz}_{\text{求めたい量 } I} = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_\infty} f(z) dz. \quad (217)$$

以下、右辺の第一項と第二項を計算する。

- まず第一項（周積分）を留数定理で求める。 $f(z)$ は 4 つの孤立特異点 $\alpha_1 = e^{\pi i/4}$, $\alpha_2 = e^{3\pi i/4}$, $\alpha_3 = -\alpha_1$, $\alpha_4 = -\alpha_2$ を持つが、このうち経路 C の中にあるのは α_1 , α_2 の 2 つである。それぞれの留数は $f(z) = \frac{1}{(z^2 - \alpha_1^2)(z^2 - \alpha_2^2)}$ を用いて

$$\text{Res}(f, \alpha_1) = \lim_{z \rightarrow \alpha_1} (z - \alpha_1) f(z) = \frac{1}{2\alpha_1(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} = \frac{1}{4i\alpha_1}, \quad (218)$$

$$\text{Res}(f, \alpha_2) = \lim_{z \rightarrow \alpha_2} (z - \alpha_2) f(z) = \frac{1}{2\alpha_2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} = \frac{1}{-4i\alpha_2}, \quad (219)$$

と計算できるので、結局

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1,2} \text{Res}(f, \alpha_k) = 2\pi i \left(\frac{1}{4i\alpha_1} - \frac{1}{4i\alpha_2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad (220)$$

- 次に第二項（追加した半円の経路積分）がゼロになることを示す。1.4.2 でやった「複素積分の絶対値の上限」を用いて

$$\left| \int_{C_\infty} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in C_\infty} |f(z)| \cdot (C_\infty \text{の経路長}) \quad \because (85) \quad (221)$$

$$= \max_{z \in C_\infty} \left| \frac{1}{z^4 + 1} \right| \cdot (C_\infty \text{の経路長}) \quad (222)$$

$$= \frac{1}{|R^4 - 1|} \cdot \pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (223)$$

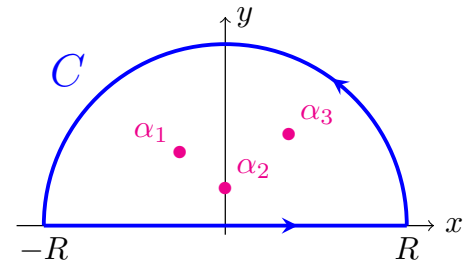
- したがって、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad (224)$$

$$= \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz}_{\text{留数積分}} - \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_\infty} f(z) dz}_{=0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \text{計算できた!} \quad (225)$$

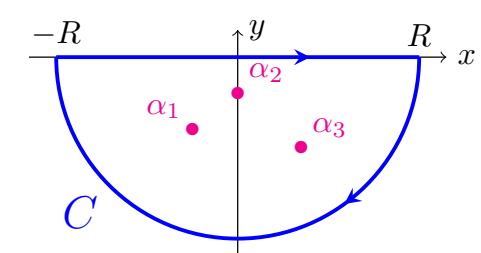
- 一般に $f(z)$ が

1. 実軸上に特異点を持たない。
 2. 上半面 ($\text{Im} z > 0$) に有限個の極をもつ。
 3. 上半面の半円経路の積分 $\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ 。 $\left(\lim_{R \rightarrow \infty} |Rf(Re^{i\theta})| = 0 \text{ for } 0 \leq \theta \leq \pi \right)$
- の条件をみたすとき、上の例と同様にして計算できて

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } \alpha_k > 0} \text{Res}(f, \alpha_k).$$


のように $\pm\infty$ の範囲の実数積分が留数計算に帰着できる。

- 下半面の半円経路の積分がゼロになる場合 $\left(\lim_{R \rightarrow \infty} |Rf(Re^{i\theta})| = 0 \text{ for } -\pi \leq \theta \leq 0 \right)$ も同様で、経路を下半面で閉じて

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } \alpha_k < 0} \text{Res}(f, \alpha_k).$$


レポート問題

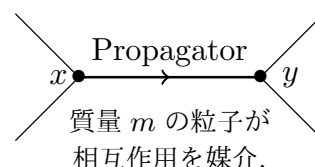
[b-23]

1. 上の例のように、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の形の実数積分が「無限遠の積分路の追加」と留数定理によって計算できる例を1つ自分で考え、留数定理を用いて積分値を求めよ。
2. 1. の実数積分を（複素積分以外の）何らかの方法で計算し、結果を検算せよ。（解析的に計算出来ればそれでも良いですし、自分で数値計算で確認しても良いです。あるいは Wolfram Alpha などのツールで計算した結果の画像を添付する、とかでも良いです。）

レポート問題

[c-11] 「場の量子論」において、以下のような“Feynman Propagator”という量が重要な役割を果たす。

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$$



$$\text{where } \begin{cases} p = (p^0, \vec{p}), & p^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2, \\ x = (x^0, \vec{x}), & p \cdot (x-y) = p^0(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}). \end{cases}$$

$$\int d^4 p = \int d^3 \vec{p} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0.$$

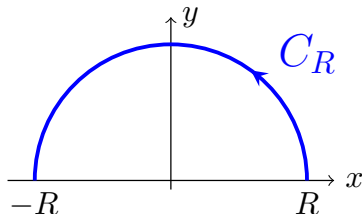
留数定理を用いて p^0 積分を実行し、以下の式を示せ。

$$D_F(x-y) \xrightarrow{\epsilon > 0, \epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \times \begin{cases} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p} & (\text{for } x^0 > y^0) \\ e^{-ip \cdot (y-x)} \Big|_{p^0=E_p} & (\text{for } y^0 > x^0) \end{cases}$$

$$\text{where } E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$$

1.5.4.C ジョルダンの補助定理を使う例

▶ ジョルダンの補助定理:



上半面の半円経路 C_R ($z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$) と $a > 0$ に対して、

$$f(z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \text{ for } \forall z \in C_R \implies \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (226)$$

レポート問題

[b-24] 以下の手順でジョルダンの補助定理を示せ。

- (i) $\max_{z \in C_R} |f(z)| = M(R)$ とするとき、
 $\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq M(R) R \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta$ を示せ。
- (ii) $\int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta$ を示せ。
- (iii) $\sin \theta \geq (2/\pi)\theta$ for $0 \leq \theta \leq \pi/2$ を示せ。
- (iv) (iii) の結果を用いて $R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2a}$ を示せ。
- (v) 以上を組み合わせてジョルダンの補助定理を示せ。

▶ ジョルダンの補助定理を使う例:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx. \quad (227)$$

まず式変形して

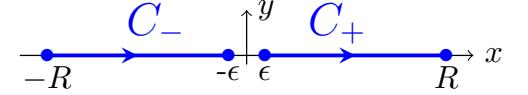
$$I = \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \int_\epsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx \quad (228)$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \int_\epsilon^R \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x} \right) dx. \quad (229)$$

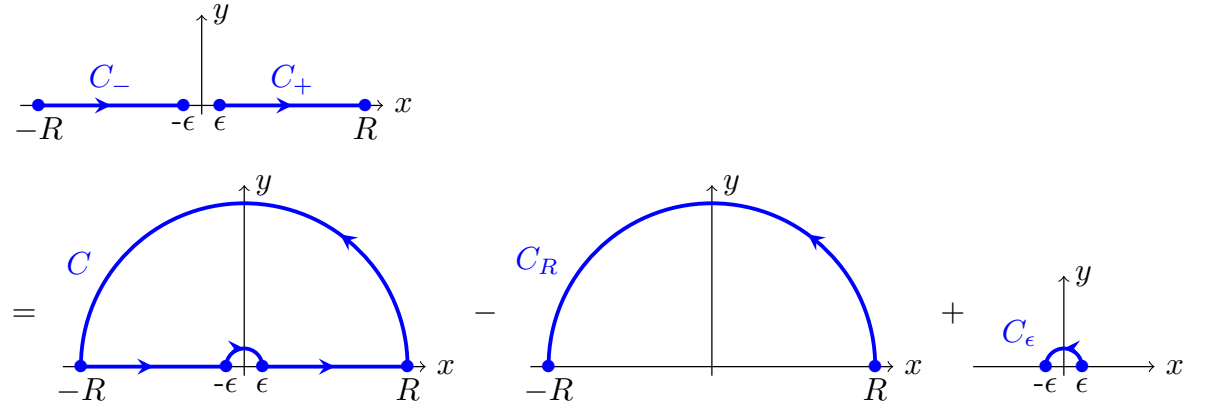
ただし $\epsilon \rightarrow +0$ は $\epsilon > 0, \epsilon \rightarrow 0$ の意味である。第二項は $x \rightarrow -x$ と変数変換して

$$- \int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{x} dx = - \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{ix}}{-x} (-dx) = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx. \quad (230)$$

よって

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2i} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \int_{C_+ + C_-} f(z) dz. \quad \left(f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \right)
 \end{aligned} \tag{231}$$


ここで半径 ϵ と R の半円を加えて

$$\begin{aligned}
 &= \int_C f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_\epsilon} f(z) dz \\
 2iI &= \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \int_{C_- + C_+} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \left(\oint_C - \int_{C_R} + \int_{C_\epsilon} \right) f(z) dz
 \end{aligned} \tag{232}$$


まず、 C の内部に $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ の特異点はないので $\oint_C f(z) dz = 0$.

次に、ジョルダンの補助定理より^{*7}、 $\int_{C_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$.

最後に、経路 C_ϵ は $z(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とパラメータ表示できるので

$$\int_{C_\epsilon} f(z) dz = \int_0^\pi f(\epsilon e^{i\theta}) \frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{d\theta} d\theta \tag{233}$$

$$= \int_0^\pi \frac{\exp(i\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \tag{234}$$

$$= i \int_0^\pi (1 + i\epsilon e^{i\theta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \pi i. \tag{235}$$

以上を (232) に代入して $2iI = \pi i$ 。よって

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{236}$$

^{*7} (226) 式で $a = 1$ 、 $f(z) = 1/z$ とすれば良い。(226) 式の $f(z)$ とココでの $f(z) = e^{iz}/z$ は違うものなので注意。

1.5.4.D 主値積分

- ▶ 前節 1.5.4.C の途中計算で $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\epsilon}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$ という形が出てきた。
 一般に、実関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 内に $x = c$ に特異点を持つとき、特異点をはさんで
 微小距離 $\pm\epsilon$ 離れたところまでの積分を実行し、足してから $\epsilon \rightarrow 0$ とする、という

$$\text{主値積分: } P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right). \quad (237)$$

が定義できる。 (他にも「 $P.V. \int(\dots)$ 」という書き方など、色々な表記があるようです。)

- ▶ 例:

$$\begin{aligned} P \int_0^3 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{x-1} dx + \int_{1+\epsilon}^3 \frac{1}{x-1} dx \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left([\ln|x-1|]_0^{1-\epsilon} + [\ln(x-1)]_{1+\epsilon}^3 \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\ln \epsilon - 0 + \ln 2 - \ln \epsilon) = \ln 2. \end{aligned}$$

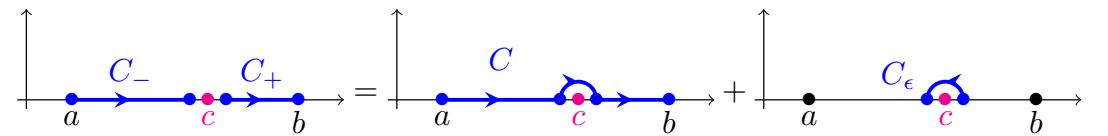
両サイドの微小区間 (ϵ) が異なると、一般には値が異なってしまったり発散してしまったりするので注意。

- ▶ 複素積分との関係

主値積分

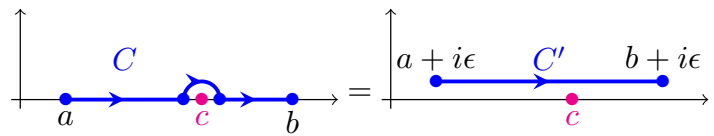
$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\epsilon} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\epsilon}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right), \quad (238)$$

を求めたいとする。ただし $f(x)$ を複素数に拡張した $f(z)$ は実軸上 $[a, b]$ の近くで正則であるとする。前節 1.5.4.C のように半径 ϵ の半円を足した経路 C を考えて



$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{C_- + C_+} \frac{f(z)}{z-c} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_C \frac{f(z)}{z-c} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-c} dz \right). \quad (239)$$

経路 C は、少しだけずらすと



$$\int_C \frac{f(z)}{z-c} dz = \int_{C'} \frac{f(z)}{z-c} dz = \int_a^b \frac{f(x)}{x+i\epsilon-c} dx. \quad (240)$$

ただし端点でのずらしから来る寄与が $\epsilon \rightarrow 0$ でゼロになることを用いた。

$z = b \rightarrow z = b + i\epsilon$ の経路を $C_{b \rightarrow b+i\epsilon}$ と書くと、

$$\left| \int_{C_{b \rightarrow b+i\epsilon}} \frac{f(z)}{z-c} dz \right| \leq \underbrace{\max_{z \in C_{b \rightarrow b+i\epsilon}} \left| \frac{f(z)}{z-c} \right|}_{< \infty} \times \underbrace{(\text{経路 } C_{b \rightarrow b+i\epsilon} \text{ の長さ})}_{=\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

となるので、 $f(z)$ が $z = b$ の近くで正則である限りは、確かにゼロとなる。
 $z = a$ の方も同様。さらに $f(x)$ と $f(x + i\epsilon)$ の差が $\epsilon \rightarrow 0$ でゼロに行くこと
(証明略) も用いています。

一方、経路 C_ϵ の積分は $z(\theta) = c + \epsilon e^{i\theta}$ とパラメータ表示して

$$\int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-c} dz = \int_0^\pi \frac{f(z(\theta))}{z(\theta)-c} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_0^\pi f(c + \epsilon e^{i\theta}) i d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \pi i f(c). \quad (241)$$

以上より

$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x+i\epsilon-c} dx + \pi i f(c). \quad (242)$$

が得られる。

————— **10/23、ここまで** —————

10/23 に出題したレポートは [b-17]~[b-24]、[c-11] でした。

(注意：[b-25] 以降と [c-12] 以降のレポートは、今週の提出先ではなく、次週以降の提出先に提出してください)

講義後、付録 A に [b-9]~[b-12] の解答例を追加しました。

————— **10/30、ここから** —————

同様に、下半面 $\text{Im} z < 0$ の半円の経路を考えて、

$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x-i\epsilon-c} dx - \pi i f(c). \quad (243)$$

これらの式は（正則関数と共に積分されることを前提に）形式的に

$$\boxed{\begin{aligned} P \frac{1}{x-c} &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x-c+i\epsilon} + \pi i \delta(x-c) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x-c-i\epsilon} - \pi i \delta(x-c). \end{aligned}} \quad (244)$$

と書ける。

(ただし $\delta(x)$ はデルタ関数 : $\delta(x) = 0$ for $x \neq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-c)dx = f(c)$.)

さらに上の式から次の式も得られる。

$$\boxed{\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x-c-i\epsilon} - \frac{1}{x-c+i\epsilon} \right) = 2\pi i \delta(x-c)}. \quad (245)$$

1.5.4.E 分散関係式

► 1.5.4.D の結果より、以下が示せる。

分散関係式／クラマース・クロニツヒの関係式

複素平面の上半面で正則かつ $|f(z)| \xrightarrow{\text{Im} z \geq 0, |z| \rightarrow \infty} 0$ を満たす関数 $f(z)$ に対して

$$\begin{cases} \text{Re} f(a) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im} f(x)}{x-a} dx. \\ \text{Im} f(a) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re} f(x)}{x-a} dx. \end{cases} \quad (a \text{ は実数}) \quad (246)$$

これらは関数 $f(z)$ の実部（虚部）を虚部（実部）の積分を用いて表した式で、線形応答理論など様々な場面で登場する。

►（証明）1.5.4.D の結果より、 $f(z)$ が実軸上 $(-\infty, \infty)$ で特異点を持たない場合は

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x+i\epsilon-a} dx + \pi i f(a). \quad (247)$$

ここで、 $f(z)$ が複素平面の上半面で正則かつ $|f(Re^{i\theta})| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を満たすとき、右辺第一項の積分を半径 $R \rightarrow \infty$ の上半面半円で閉じてゼロになる。

関数 $g(z) = \frac{f(z)}{z+i\epsilon-a}$ を考えると、この関数は複素平面の上半面で正則（分母から来る極 $z = a - i\epsilon$ は下半面）なので、コーシーの積分定理より

$$0 = \oint_{\text{上半面で閉じた経路}} g(z) dz = \underbrace{\int_{\text{実軸}} g(z) dz}_{(247) \text{ 右辺第一項}} + \int_{\text{上半面半円}} g(z) dz. \quad (248)$$

一方、

$$\begin{aligned} \left| \int_{\text{上半面半円}} g(z) dz \right| &\leq \max_{\text{上半面半円}} |g(z)| \times (\text{半円の長さ}) \\ &\leq \frac{\max_{0 \leq \theta \leq \pi} |f(Re^{i\theta})|}{R - |a|} \cdot \pi R \xrightarrow{|z|=R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (249)$$

よって (247) 右辺第一項 = 0.

よって

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \pi i f(a). \quad (250)$$

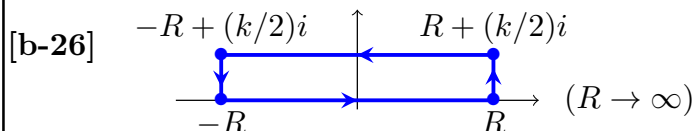
両辺の実部と虚部をとると (246) が示せる。

レポート問題

[b-25] 条件を満たす具体的な関数 $f(z)$ を一つ代入してクラマース・クロニッヒの関係式の両辺を計算し、一致することを確認せよ。

1.5.4.F (虚軸方向にずらした) ガウス積分

レポート問題



図のような経路を考えることによって実数積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - ikx} dx \quad (251)$$

を求めよ。別の経路を考えても構いません。

コメント

1. この形の積分も様々な場面で登場する。
(例: 熱伝導方程式 $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ のフーリエ変換での解法。)
2. $k = 0$ の場合のガウス積分については以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2} \quad (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta) \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2} = \left[-\pi e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi. \end{aligned} \quad (252)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \quad (253)$$

1.5.4.G 直交多項式への応用 (物理数学 2 の予習)

レポート問題

ロドリゲスの公式

$$P_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)Q(x)^n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (254)$$

に以下の表の式を代入すると、様々な直交多項式が得られる。^{a b}

c_n	$w(x)$	$Q(x)$	名前
$(-1)^n/(2^n n!)$	1	$1 - x^2$	ルジャンドル多項式
1	e^{-x}	x	ラゲール多項式
$(-1)^n$	e^{-x^2}	1	エルミート多項式

(255)

[b-27] $n = 0, 1, 2$ の場合について 3 つの多項式の具体的な形を求めよ。

[c-12] ロドリゲスの公式は、コーシーの積分公式を用いて

$$P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} c_n \frac{1}{w(x)} \oint_C \frac{w(z)Q(z)^n}{(z-x)^{n+1}} dz, \quad (256)$$

と書きかえられる。(C は x を中心とした周経路。) この式と、適当な経路と留数定理を用いることによって、上の 3 つの多項式がそれぞれ母関数

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n \quad \text{または} \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{y^n}{n!} \quad (257)$$

の形にまとめられることを示し、母関数の具体的な形を導出せよ。^c

[b-28] 各多項式の直交性について調べて、簡潔に説明せよ。

[b-29] 各多項式の満たす微分方程式について調べて、簡潔に説明せよ。

[b-30] 各多項式の満たす漸化式について調べて、簡潔に説明せよ。

^a 規格化因子 c_n は慣習によって異なる定義の場合もあります。

^b この他にも、ヤコビ多項式、ゲージンバウア多項式、チェビシェフ多項式などが同じ表式から得られます。

^c 母関数を用いて直交多項式を定義することも出来ます。ここではそうせずに、ロドリゲスの公式から出発して母関数を導いてください、という問題です。

1.6 一致の定理と解析接続

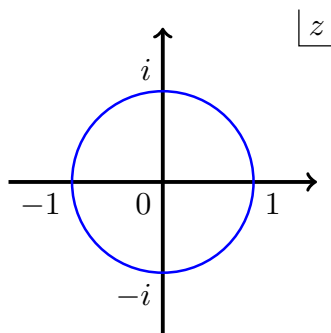
§ 2 常微分方程式

付録 A レポート問題 [b] の解答例

レポート問題 [b] のうち締め切りを過ぎたものの解答例を載せていきます。

10/2 出題分

[b-1] 原点中心、半径 1 の円となる。



[b-2] 解答例 $z = x + iy, w = u + iv$ としてとして

$$\operatorname{Re}(z) = x = \frac{(x + iy) + (x - iy)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2}. \quad (258)$$

$$\operatorname{Im}(z) = y = \frac{(x + iy) - (x - iy)}{2i} = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (259)$$

$$z\bar{z} = |z|^2 = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (260)$$

[b-3] 解答例 $z = x + iy, w = u + iv$ としてとして

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{(x + iy) + (u + iv)} = \overline{(x + u) + i(y + v)} \\ &= (x + u) - i(y + v) = (x - iy) + (u - iv) = \bar{z} + \bar{w}. \end{aligned} \quad (261)$$

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(x + iy)(u + iv)} = \overline{(xu - yv) + i(xv + yu)} \\ &= (xu - yv) - i(xv + yu) = (x - iy)(u - iv) = \bar{z} \bar{w}. \end{aligned} \quad (262)$$

$$\begin{aligned} |zw| &= |(x + iy)(u + iv)| = |(xu - yv) + i(xv + yu)| \\ &= \sqrt{(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2)(u^2 + v^2)} = \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{u^2 + v^2} = |z||w|. \end{aligned} \quad (263)$$

[b-4] 解答例

$$\begin{aligned}(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 &= (|z| + |w|)^2 - (z + w)\overline{(z + w)} \\&= (|z| + |w|)^2 - (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| - (|z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + w\bar{z}) \\&= 2|z||\bar{w}| - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) \\&= 2|z\bar{w}| - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \\&= 2\left(\sqrt{\{\operatorname{Re}(z\bar{w})\}^2 + \{\operatorname{Im}(z\bar{w})\}^2} - \operatorname{Re}(z\bar{w})\right) \geq 0. \quad (264)\end{aligned}$$

等号成立は $\operatorname{Im}(z\bar{w}) = 0$ のとき。(z と w の偏角が揃っているとき。)

[b-5] 解答例 コーシー・リーマン関係式 (42) より

$$f_x = -if_y. \quad (265)$$

両辺をさらに x で偏微分して

$$f_{xx} = -i(f_y)_x \quad (266)$$

$$= -i(f_x)_y \quad (267)$$

$$= -i(-if_y)_y \quad \because (42) \quad (268)$$

$$= -f_{yy}. \quad (269)$$

よって両辺の実部と虚部をとって

$$u_{xx} = -u_{yy}, \quad (270)$$

$$v_{xx} = -v_{yy}. \quad \blacksquare \quad (271)$$

[b-6] 解答例 コーシー・リーマン関係式 (41) より

$$v_x = -u_y = 2y - 3, \quad \therefore v = 2xy - 3x + C_1(y), \quad (272)$$

$$v_y = u_x = 2x + 2, \quad \therefore v = 2xy + 2y + C_2(x). \quad (273)$$

これらを同時に満たす v は

$$v(x, y) = 2xy - 3x + 2y + C. \quad (274)$$

ただし C は任意の実数定数。($C = 0$ としても良い。)

[b-7] 解答例

$$f = u + iv \quad (275)$$

$$= (x^2 - y^2 + 2x + 3y) + i(2xy - 3x + 2y + C) \quad (276)$$

$$= z^2 + (2 - 3i)z + iC. \quad (277)$$

[b-8] 解答例

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \cos z + i \sin z.
 \end{aligned} \tag{278}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \delta_{n,\ell+k} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{n,\ell+k} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,\ell+k}}_{=1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} \\
 &= e^z e^w.
 \end{aligned} \tag{279}$$

(iii) 定義より $\sin(-z) = -\sin z$. したがって (i) より

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}). \tag{280}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \cos(z+w) &= \frac{1}{2} (e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) \\
 &= \frac{1}{2} (e^{iz} e^{iw} + e^{-iz} e^{-iw}) \quad \because \text{(ii)} \\
 &= \frac{1}{2} ((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) + (\cos z - i \sin z)(\cos w - i \sin w)) \\
 &\quad \because \text{(i)} \\
 &= \cos z \cos w - \sin z \sin w.
 \end{aligned} \tag{281}$$

10/9 出題分

[b-9] 解答例 $w_n = c_n z^n$ とすると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n. \quad (282)$$

このとき

$$\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \frac{|c_{n+1} z^{n+1}|}{|c_n z^n|} = \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{R}. \quad (283)$$

よってダランベールの判定法により $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ は $|z| < R$ で絶対収束し、 $|z| > R$ では収束しない。つまり収束半径は R である。

[b-10] 解答例省略。端点と同じならどんな経路でも $\int_C f(z) dx = (1+i)a + ib$ になるはず。

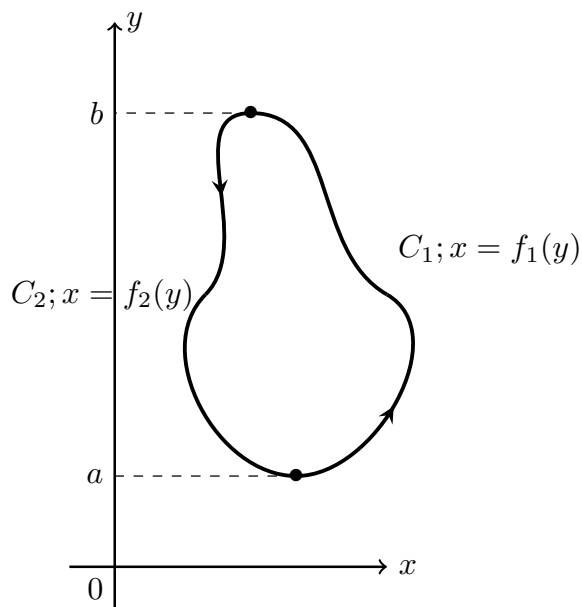
[b-11] 解答例 経路 1 では $\int_{C_1} \bar{z} dx = 1$ 、経路 2 では $\int_{C_2} \bar{z} dx = 1 - i$ となる。

$$\begin{aligned} \text{計算例: } \int_{C_1} \bar{z} dz &= \int_0^1 \overline{z_1(t)} \frac{dz_1(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 (1-i)t \cdot (1+i) \cdot dt \\ &= \int_0^1 2t dt = 1. \end{aligned} \quad (284)$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \bar{z} dz &= \int_0^2 \overline{z_2(t)} \frac{dz_2(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 (-it) \cdot i \cdot dt + \int_1^2 (t-1-i) \cdot 1 \cdot dt \\ &= 1 - i. \end{aligned} \quad (285)$$

[b-12] 解答例 まず下図のように、経路 C が右半分の経路 C_1 と左半分の経路 C_2 に分け

られる場合を考える。



すると

$$\oint_C Q(x, y) dy = \int_{C_1} Q(x, y) dy + \int_{C_2} Q(x, y) dy \quad (286)$$

$$= \int_a^b Q(f_1(y), y) dy + \int_b^a Q(f_2(y), y) dy \quad (287)$$

$$= \int_a^b Q(f_1(y), y) dy - \int_a^b Q(f_2(y), y) dy \quad (288)$$

$$= \int_a^b [Q(f_1(y), y) - Q(f_2(y), y)] dy \quad (289)$$

$$= \int_a^b \left[Q(x, y) \right]_{x=f_2(y)}^{x=f_1(y)} dy \quad (290)$$

$$= \int_a^b \left(\int_{f_2(y)}^{f_1(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx \right) dy \quad (291)$$

$$= \int_{D'} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy \quad \blacksquare \quad (292)$$

上のように分けられない場合も、経路を分ければ示せる。（図は省略、 $P(x, y)$ の積分の場合を参照。）