

2024 年度秋学期 物理数学 I

濱口幸一

最終更新日時：2024 年 11 月 22 日 14:01

目次

| | | |
|-------|------------------------|----|
| § 0 | この講義について | 1 |
| 0.1 | 担当教員の自己紹介 | 1 |
| 0.2 | 講義についての諸連絡 | 1 |
| 0.3 | 成績 | 2 |
| 0.4 | 参考文献 | 2 |
| § 1 | 複素関数 | 3 |
| 1.1 | この章の目標 | 3 |
| 1.2 | 準備 | 5 |
| 1.2.1 | 複素数 | 5 |
| 1.2.2 | 偏微分 | 7 |
| 1.2.3 | (実変数関数の) テイラー展開 | 8 |
| 1.2.4 | オイラーの公式について | 9 |
| 1.3 | 複素関数とその微分、正則関数 | 10 |
| 1.3.1 | 複素関数 | 10 |
| 1.3.2 | 複素関数は平面から平面への写像 | 11 |
| 1.3.3 | 複素微分と正則関数 | 13 |
| 1.3.4 | 正則関数の例 | 19 |
| 1.3.5 | 言葉の定義をいくつか | 21 |
| 1.3.6 | 複素級数とその収束 | 23 |
| 1.4 | 複素積分 | 29 |
| 1.4.1 | 複素(線)積分の定義 | 29 |
| 1.4.2 | 複素積分の定義からすぐにわかるいくつかの性質 | 31 |
| 1.4.3 | 複素積分の例 | 32 |
| 1.4.4 | コーシーの積分定理 | 35 |
| 1.4.5 | コーシーの積分公式と、無限回微分可能性 | 39 |
| 1.5 | テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理 | 47 |
| 1.5.1 | テイラー展開 | 47 |
| 1.5.2 | ローラン展開と留数 | 51 |
| 1.5.3 | 留数定理 | 58 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 1.5.4 | 実数積分への応用 | 61 |
| 1.6 | 一致の定理と解析接続 | 74 |
| 1.6.1 | 一致の定理と解析接続 | 74 |
| 1.6.2 | 多価関数とリーマン面 | 78 |
| 1.7 | 発展的話題：部分分数展開、 Γ 、 B 、 ζ 、など | 87 |
| 1.7.1 | 部分分数展開（と無限積） | 87 |
| 1.7.2 | Γ (ガンマ) 関数 | 91 |
| 1.7.3 | 鞍点法（とスターリングの公式） | 94 |
| 1.7.4 | B (ベータ) 関数 | 96 |
| 1.7.5 | ζ (ゼータ) 関数 | 97 |
| § 2 | 常微分方程式 | 98 |
| 2.1 | べき級数展開による 2 階斉次微分方程式の解法 | 98 |
| 2.2 | 定義と分類 | 103 |
| 2.3 | 線形微分方程式 | 105 |
| 2.3.1 | 解の線形性 | 105 |
| 2.3.2 | 2 階斉次微分方程式 | 105 |
| 2.3.3 | 定数係数線形微分方程式とラプラス変換 | 106 |
| 2.4 | 一階微分方程式の解法の例 | 110 |
| 2.4.1 | 変数分離形 | 110 |
| 2.4.2 | 同次形 | 110 |
| 2.4.3 | 一階線形微分方程式 | 111 |
| 付録 A | レポート問題 [b] の解答例 | 113 |

§ 0 この講義について

§ 1 章「複素関数論」+ § 2 章「常微分方程式」

80~90% くらい

10~20% くらい

0.1 担当教員の自己紹介

- ▶ 濱口幸一
- ▶ 専門は素粒子論（+初期宇宙論）です。
- ▶ ウェブページは[こちら](#)。

0.2 講義についての諸連絡

- ▶ 講義のウェブページは[こちら](#)。（「濱口幸一」で検索 → 講義のページ → 物理数学 I.）
- ▶ お知らせがある場合は、基本的に UTOL でアナウンスします。もし UTOL がトラブルなどで見られないときは[講義のウェブページ](#)にアナウンスを載せます。
- ▶ 講義は 10/3~11/14 の毎週木曜 2 限 (10:25~12:10)+3 限 (13:00~14:45) です。
- ▶ 第 1 週 (10/3) はオンラインで、Goodnotes を用いた手書き板書形式で行います。せっかくオンラインなので slido（匿名で質問・チャットなどができるツール）を使ってみようと思っています。適当なデバイスで [slido](#) を開いてアクセスコードを入力すればアクセス出来ると思いますので、興味がある方は使ってみてください。アクセスコードは UTOL に掲載し、講義中にもお伝えします。またこの日は、質問などのために前後の時間も含めて 10:15~15:00 は Zoom を開きっぱなしにしておく予定です。特に質問がなくても、お昼休憩などに雑談しに来て下さるのも歓迎します。
- ▶ 第 2 週 (10/10) ~ 第 7 週 (11/14) は対面で、駒場 11 号館 1106 教室で黒板を用いて講義します。こちらも、前後の時間も含めて 10:15~15:00 は部屋にいる予定です。（昼食の時間は抜けるかも。）講義に関係ある質問、関係ない質問、雑談、など何でも大歓迎ですので是非声をかけて下さい。
- ▶ 第 7 週 11/14(木) の 3 限の時間に期末試験を行います（下記 [0.3](#) 参照）。
- ▶ UTOL の「担当教員へのメッセージ」「掲示板」も使えるようになっていると思います。ぜひ利用下さい。

0.3 成績

成績は、レポートと 11/14(木) の 3 限の時間に行う期末試験で評価します。

詳しくは[こちらの pdf ファイル](#)を見て下さい。

[pdf を画面共有して説明する。]

出席はとりませんので、講義ノートを見てレポート提出+期末テストだけでも結構です。

0.4 参考文献

特定の教科書・参考書はありませんが、講義ノートを作る際に参考にした文献をいくつかあげておきます。

- ▶ [2020 年度, 2021 年度, 2022 年度](#), の同講義の講義ノート
- ▶ [松尾先生の講義ノート](#)
- ▶ 「物理数学 I」 福山秀敏・小形正男、朝倉書店
- ▶ 「物理のための数学入門 複素関数論」 有馬朗人・神部勉、共立出版
- ▶ 「自然科学者のための数学概論」 寺沢貫一、岩波書店
- ▶ 「複素関数論の基礎」 山本直樹、裳華房
- ▶ 「入門複素関数」 川平友規、裳華房
- ▶ [EMAN の物理数学](#)
- ▶ [予備校のノリで学ぶ複素関数論入門 \(YouTube\)](#)

後でまた追加するかもしれません。

[ここでいったん質問を受付 (マイクオン or チャット or 手を挙げて or slido) 1 分くらい待つ。]

§ 1 複素関数

1.1 この章の目標

目標：正則関数の特別な性質たちを理解すること。

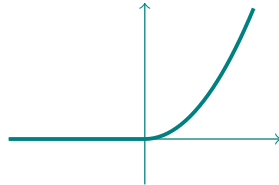
1.3 節で「複素微分可能」「正則関数」を定義する。

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (z, \Delta z \text{ は複素数}). \quad (1)$$

この極限が一意に決まるとき、 $f(z)$ は点 z で「複素微分可能」といい、 $f(z)$ が領域 D 内の全ての点で複素微分可能なとき、 $f(z)$ は D 上で「正則」と言う*1。このたった1つの条件「正則性」を要求しただけで、複素関数 $f(z)$ に対して多くの特別な性質が導かれる。例えば・・・

- ▶ (1回微分可能を要求しただけなのに) 無限回微分可能。 → 1.4 節
実変数関数だと・・・例えば関数

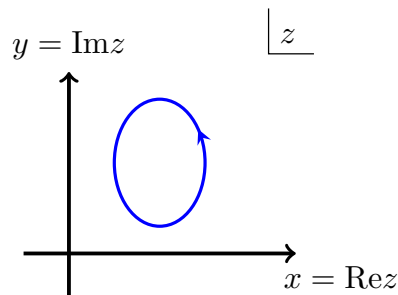
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$$



は、 $x = 0$ で $f'(x)$ は連続だけど $f''(x)$ は不連続 ($f''(x)$ が定義出来ない)。
複素関数は1回微分可能なら無限回微分可能。

- ▶ 複素周回積分の特殊な性質たち。

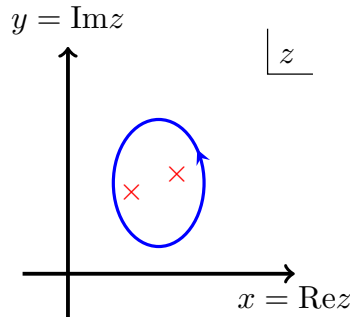
正則な領域で周回積分したら必ずゼロになる → 「コーシーの積分定理」 1.4 節



$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

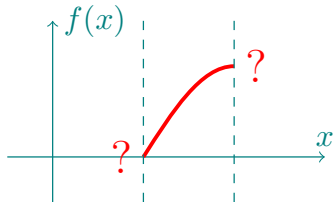
*1 「複素微分可能」は1点でも定義出来るのに対して (例えば $f(z) = |z|^2$ は $z = 0$ でのみ複素微分可能)、「正則」は領域について定義します。ただし、これ以降、この講義では「1点でのみ複素微分可能」のような関数を考えることはないので両者の違いが重要になる状況はほとんどないと思います。もし講義ノートに不正確な記述を見つけたら教えてください。

正則でなくても、周回積分の値が一部の点だけで決まる → 「留数定理」 1.5 節



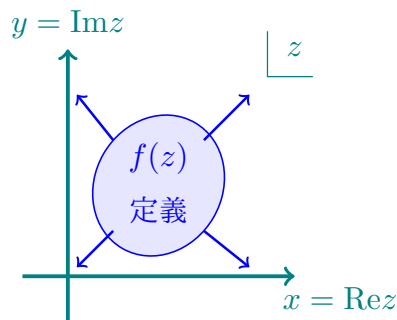
$$\oint_C f(z) dz = \sum_k R_k.$$

- ▶ 複素平面の一部で定義したら拡張が一意に決まる → 「解析接続」 1.6 節
実変数関数だと、ある領域で関数を定義して微分可能性を要求しても



領域外の関数形は決まらない。

正則関数は、複素平面の一部で定義したら



拡張が一意に決まる。

- ▶ 他にも色々あります。(一部はレポート問題で出題予定。)

[講義終了後に、正則関数のこれらの性質がだいたい頭に残ってくれば、担当教員としては目標達成です!]

1.2 準備

まずは簡単な復習から始めます。のんびり聞いていて下さい。

1.2.1 複素数

- ▶ 複素数とは、2つの実数 x, y と虚数単位 i ($i^2 = -1$) を用いて

$$z = x + iy \quad (2)$$

と表される数のことである。

- ▶ 複素数全体の集合を \mathbb{C} と書く。実数の集合 \mathbb{R} は \mathbb{C} に含まれる ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)。
▶ 複素数 $z = x + iy$ に対して、以下の記号・用語を定義する。

$$z \text{ の実部 : } \operatorname{Re}(z) = x \quad (3)$$

$$z \text{ の虚部 : } \operatorname{Im}(z) = y \quad (4)$$

$$z \text{ 共役 : } \bar{z} = x - iy \quad (5)$$

\bar{z} を z^* と書くこともあります。

$$z \text{ の絶対値 : } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6)$$

- ▶ 複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$ と $z_2 = x_2 + iy_2$ に対して、

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \text{ かつ } y_1 = y_2. \quad (7)$$

特に

$$z = 0 \iff x = y = 0 \iff |z| = 0. \quad (8)$$

また四則演算は

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \quad (9)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (10)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad \text{for } z \neq 0. \quad (11)$$

- ▶ 極形式

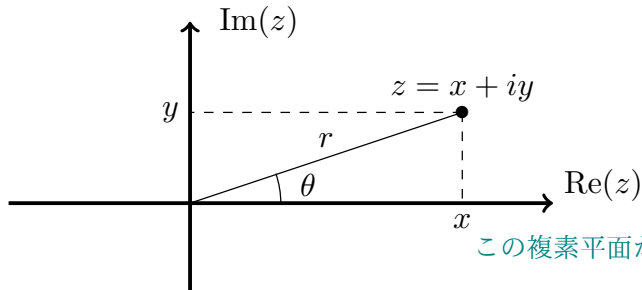
$$z = x + iy \quad (12)$$

$$= r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (13)$$

$$\text{where } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad (14)$$

θ を複素数 z の「偏角」という。(ただし $r = 0$ では θ は定まらない。)

- ▶ 複素平面 複素数は複素平面上の点で表される。

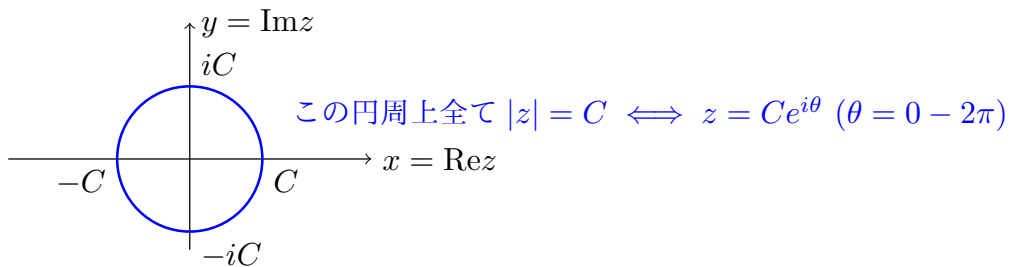


この複素平面が、今後この講義で何度も出てきます。

- ▶ 複素数の絶対値について。(これ以前の講義で、意外と間違えていた学生さんが複数いたので、あらためて書いておきます。)

C を正の実数として、

- 実数 x に対しては $|x| = C \implies x = \pm C$ だったが、
- 複素数 z に対しては $|z| = C \implies z = \pm C$ とはならない。



- ▶ さてこの辺りで、簡単なレポート問題をいくつか出しておこうと思います。

レポート問題

[b-1] $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、以下を示せ。

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= |z|^2, & z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z), & z - \bar{z} &= 2i\operatorname{Im}(z), \\ \bar{z} + \bar{w} &= \overline{z + w}, & \bar{z}\bar{w} &= \overline{zw}, & |z||w| &= |zw|. \end{aligned} \quad (15)$$

[b-2] $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、以下を示せ。

$$|z| + |w| \geq |z + w| \quad (16)$$

1.2.2 偏微分

複素関数は2変数関数なので、偏微分が出てくる。

- ▶ 実2変数関数 $f(x, y)$ に対して、点 (x, y) で極限

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (17)$$

が (Δx の符号によらず) に有限な一定値をとるとき、これを「 $f(x, y)$ の点 (x, y) における x に関する偏微分 (係数)」という。3変数以上の場合も同様。

- ▶ 省略した記法 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y) = \partial_x f(x, y)$ もよく使う。
- ▶ y に関する偏微分も同様。

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \partial_y f(x, y) = f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow \pm 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (18)$$

- ▶ 合成関数の偏微分：例えば2変数関数 $f_i = f_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots$) と f_i の多変数関数 $g = g(f_1, f_2, \dots)$ があつたとき、その偏微分は

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial f_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial f_2} + \dots \quad (19)$$

- (※) 偏微分における注意：微分していない変数 (固定している変数) が何かも指定しないといけない。例えば $f(x, y) = x^2 y$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2xy, \quad (20)$$

だが、ここから例えば変数を $(x, y) \rightarrow (x, s = xy)$ と変換すると、 $y = s/x$ だから $f(x, y) = xs$ 。これを同じ記号 f を用いて $f(x, s)$ と書いてしまうと (同じ記号を用いてしまうのが混乱のもとなのですが、、、下記参照)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, s) = s = xy. \quad (21)$$

なので、 $f_x = \partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$ と書いたときに、 x 以外の変数として何を固定しているかを指定しないと、答が変わってしまう。固定した変数を明確にするために、 $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_y$ とか $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_s$ と書いたりもする。(熱力学とか混乱しやすいですよ。混乱を避けるには、変数変換するたびに関数の表記を $f \rightarrow \tilde{f}$ などと変更すれば良いのですが、物理では関数が物理量を表すことが多いので、あまり変更したくないという事情もあります。)

1.2.3 (実変数関数の) テイラー展開

- ▶ 実変数関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で n 回微分可能であるとき、その k 階微分 $f^{(k)}(a)$ ($k = 1, \dots, n$) を用いて

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x), \quad (22)$$

と表すことができる。剰余項 $R_n(x)$ は $f(x)$ と多項式関数の誤差を表し、 $x \rightarrow a$ で $(x-a)^n$ より速く 0 に近づく (テイラーの定理)。(証明略)

- ▶ $f(x)$ が点 $x = a$ で無限回微分可能で、かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ のとき、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad (23)$$

と書ける (テイラー級数)。

- ▶ テイラー展開の例

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (24)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (25)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (26)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (27)$$

それぞれの級数がどの範囲で収束するか (収束半径) については、複素数に拡張して 1.3.6 節で議論する。例えば最後の式は、左辺は $x \neq 1$ で定義されているけど、右辺は $|x| < 1$ でしか収束しない。

1.2.4 オイラーの公式について

▶ (24) 式で $x \rightarrow i\theta$ とすると

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \dots \quad (28)$$

$$= 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \quad (29)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \dots\right) \quad (30)$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta. \quad (31)$$

ほとんどの人が見たことがあると思います。

オイラーの公式は、以下の状況証拠からも、正しそう。

| | 左辺 | 右辺 |
|-------|---|---|
| n 乗 | $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ | $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (ド・モアブルの公式) |
| 微分 | $(d/d\theta)e^{i\theta} = ie^{i\theta}$ | $(d/d\theta)[\text{右辺}] = -\sin \theta + i \cos \theta = i[\text{右辺}]$ |

しかし良く考えると・・・

- 勝手に指数関数 e^x の指数を $x \rightarrow i\theta$ と拡張したけどいいのか？
- するとさらに拡張して、一般の $z \in \mathbb{C}$ に対して $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ と言えるのか？
- すると $\cos z$ とか $\sin z$ というのは何者だ？ $z \in \mathbb{C}$ でどう定義する??
- 例えば $z = 1 + i$ として、 $\cos(1 + i)$ とか $\sin(1 + i)$ とかはどういう値を取る？

これらの疑問は後で回収する。(正則関数の例 1.3.4, 解析接続 1.6.)

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.1 複素関数

- ▶ 例えば実変数関数 $f(x) = x^2$ というものがある。これを素直に複素数に拡張すると、

$$f(z) = z^2. \quad (32)$$

これに $z = x + iy$ を代入すると

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (33)$$

したがって $f(z)$ は、複素数から複素数への写像となる。

$$\text{例} : z = 1 + 2i \rightarrow f(z) = z^2 = -3 + 4i. \quad (34)$$

- ▶ 一般に複素関数 $f(z)$ の実部と虚部を u, v と書くと、

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (35)$$

と書ける。上の $f(z) = z^2$ の例では、 $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$.

- ▶ いくつか例を挙げてみる。

| | | |
|-------------------|-------------------------|------------------------|
| $f(z)$ | $\text{Re}f = u(x, y),$ | $\text{Im}f = v(x, y)$ |
| z^2 | $x^2 - y^2$ | $2xy$ |
| z^3 | $x^3 - 3xy^2$ | $3x^2y - y^3$ |
| iz | $-y$ | x |
| $2z + i\bar{z}$ | $2x + y$ | $x + 2y$ |
| $(z + \bar{z})/2$ | x | 0 |
| $ z ^2$ | $x^2 + y^2$ | 0 |

(36)

下の3つの例では、 $f(z)$ が z だけでなく \bar{z} にも独立に依存していると仮定している。 $f(z, \bar{z})$ と書いてもよい。

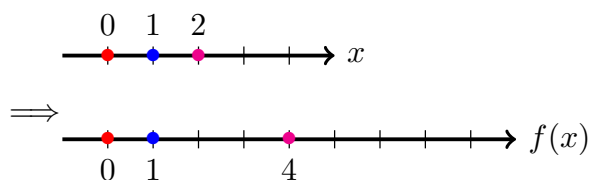
- ▶ 一般に $z = x + iy$ と $\bar{z} = x - iy$ を用いれば、任意の実2変数関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ を実部と虚部にもつような複素関数が作れる。

$$f(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (37)$$

$$= u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right). \quad (38)$$

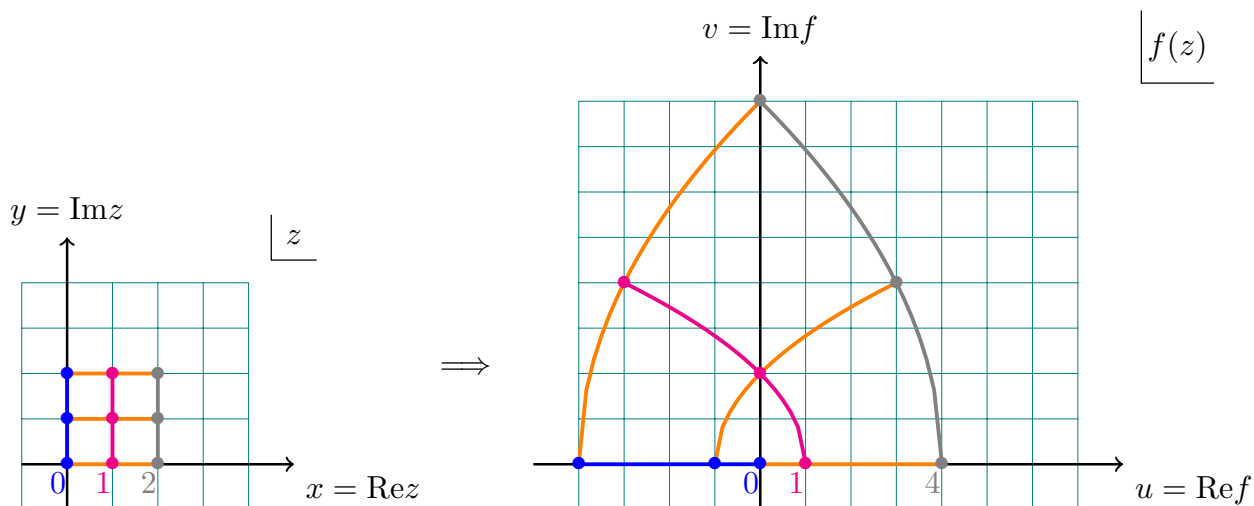
1.3.2 複素関数は平面から平面への写像

- ▶ 再び実変数関数 $f(x) = x^2$ を考える。これは実数から実数への写像。



- ▶ これを複素数に拡張した $f(z) = z^2$ は複素数から複素数への写像なので、「平面から平面への写像」になっている。これを見てみよう。[ここは、リアルタイムでノートを取るのもしんどいかも？後で pdf の講義ノートを見てもらおう。]

$$f(z) = z^2$$

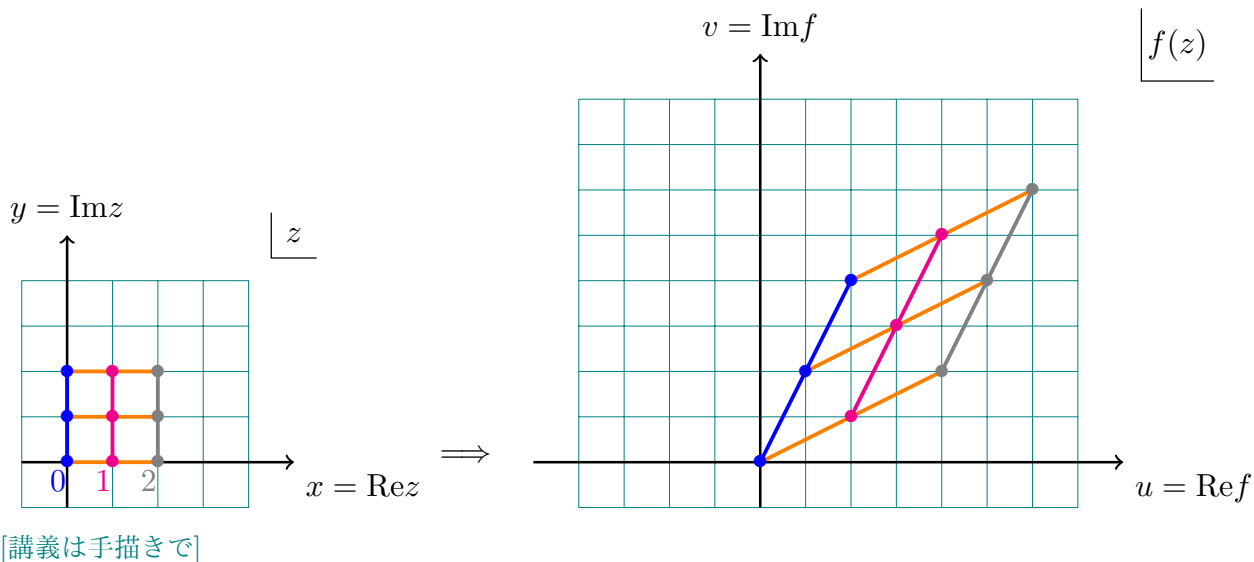


[講義は手描きで]

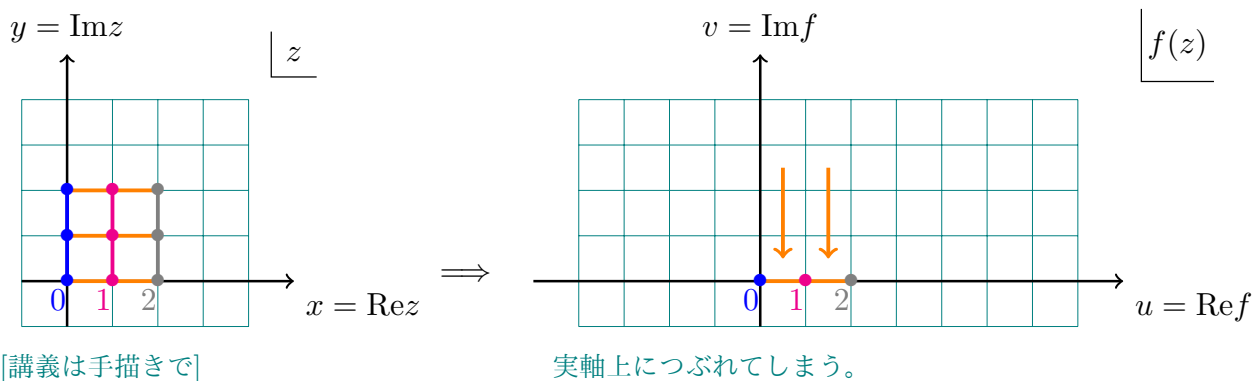
この例では、実は x - y 平面での格子が u - v 平面でも直交していることが分かる。

▶ $f(z, \bar{z})$ が \bar{z} に依存する例でも見てみよう。

$$f(z) = 2z + i\bar{z} = (2x + y) + i(x + 2y)$$



$$f(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = x + i0$$



レポート問題

[c-1] 上の $f(z) = z^2$ の例にならって、1つの具体的な正則関数 (\bar{z} を含まない z だけの関数。次節参照) について複素平面から複素平面への写像を図示せよ。手描きでも良いし、数値計算を用いても良い。

[c-2] 一般に、正則関数は $f'(z) \neq 0$ の点で複素平面上の角度を変えない「等角写像」になっていることを示せ。

1.3.3 複素微分と正則関数

- ▶ 実変数関数 $f(x)$ の微分は極限值

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (39)$$

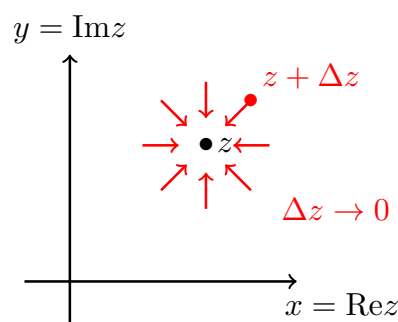
で与えられていた。このとき、極限值が Δx の符号によらないことを要求していた。(図を描いて説明。)

- ▶ これを素直に複素関数に拡張すると、、、極限值

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (40)$$

が存在すれば、それを複素関数の微分とすれば良さそうだ。

しかし、ここで Δz は複素数なので、 $\Delta z \rightarrow 0$ と言っても、複素平面上で色々な角度から $\Delta z \rightarrow 0$ とできる。



どのような近づき方で $\Delta z \rightarrow 0$ としても極限值

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が一意に定まるとき、「複素関数 $f(z)$ は点 z で複素微分可能である」と言い、その極限値を $f'(z)$, $\frac{df(z)}{dz}$ などで表す。

- ▶ 複素微分の例。 $f(z) = z^n$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}.$$

実数の場合と同じ。

- ▶ 複素微分できない例： $f(z) = \bar{z}$ 。 $\Delta z \rightarrow 0$ の向きを θ とし、 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \Delta r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta r(\cos \theta - i \sin \theta)}{\Delta r(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta + i \sin \theta}. \end{aligned}$$

θ の値によって値が一意に決まらないので、複素微分不可能。

- ▶ さて、いよいよこの講義前半の主役である正則関数を定義する。

正則関数の定義

複素関数 $f(z)$ が複素平面のある領域 D の全ての点において複素微分可能であるとき、「 $f(z)$ は D において正則である」といい、そのような関数を正則関数という。

この「正則関数」が、この講義の主役となる。次節以降でその性質を見る前に「複素微分可能」を他の条件に言い換えられる事を見る。

- ▶ 次の (i), (ii) は同値である。

(i) $f(z)$ が点 $z = x + iy$ で複素微分可能である。

\iff

(ii) $f(z)$ の実部 $u = \operatorname{Re} f$ と虚部 $v = \operatorname{Im} f$ がそれぞれ x, y の2変数関数として全微分可能であり、かつコーシー・リーマンの関係式

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ v_x + u_y = 0 \end{cases} \quad (41)$$

を満たす。(偏微分の省略記号 $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ を用いた。).

「複素微分可能」 \iff 「コーシー・リーマン」ではなく、

「複素微分可能」 \iff 「 u, v の全微分可能」かつ「コーシー・リーマン」であることに注意。(この節の最後に「コーシー・リーマンの関係式を満たすが、複素微分不可能な例」をあげておきます。興味のある人は見てみてください。)

▶ コーシー・リーマンの関係式 (41) はまとめて以下のようにも表せる。

$$(41) \iff \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_y + i \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_x = 0 \quad \text{あるいは} \quad f_x + if_y = 0 \quad (42)$$

(証明) $f_x + if_y = (u_x + iv_x) + i(u_y + iv_y) = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y)$ より、
 $f_x + if_y = 0 \iff u_x - v_y = v_x + u_y = 0 \iff (41)$.

▶ (i) \iff (ii) の証明はレポート問題とする。

レポート問題

[c-3] (i) \iff (ii) を示せ。ただし全微分可能性の条件に注意すること^a。

^a ヒント : (ii) において $u(x, y)$ が全微分可能であるとは、実数 A, B が存在して

$$\left| \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right| \xrightarrow{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0} 0, \quad (43)$$

が成り立つことをいう。このとき $A = u_x, B = u_y$ となる。 $v(x, y)$ についても同様である。また (i) における $f(z)$ の複素微分可能性は、ある複素数 $w = p + iq$ が存在して

$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - w \right| \xrightarrow{|\Delta z| \rightarrow 0} 0, \quad (44)$$

である、と言い換えることが出来る。

(i) \iff (ii) の証明のうち、(i) \implies コーシー・リーマン関係式、は簡単なのでここで示しておこう。(i) の複素微分可能性を仮定する。極限値が $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ の向きによらず一意に決まることから、特に $\Delta z = \Delta x$ (実軸方向) の場合と $\Delta z = i\Delta y$ (虚軸方向) の場合に極限値が存在してそれらが等しい。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z + i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y}. \\ \therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{i\Delta y}. \\ \therefore f_x &= \frac{1}{i} f_y = -if_y \end{aligned}$$

よってコーシー・リーマンの関係式 (42) を得る。■

▶ また、コーシー・リーマンの関係式は、

$$(41) \iff (42) \iff \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_z = 0, \quad (45)$$

とも書ける。

▶ コーシー・リーマン関係式 $\iff (45)$ の証明をする前に、 $\partial f / \partial \bar{z}|_z$ を定義しよう。複素数 z の関数 f があったとする。複素微分可能かどうかは問わない。このとき $z = x + iy$ を用いて関数 f を x, y の2変数関数として $f = f(x, y)$ と表すことも出来る。ここで

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (46)$$

を用いると、

$$f = f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right), \quad (47)$$

とも書ける。こう書いておいて、最右辺で定義された関数において、いったん z と \bar{z} を独立な変数とみなす（互いの複素共役である、ということも要求しない）とすると、 $(x, y) \leftrightarrow (z, \bar{z})$ の変数変換より

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\bar{z}} = \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{\bar{z}} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y + \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{\bar{z}} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x = \frac{1}{2} f_x - \frac{i}{2} f_y, \quad (48)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_z = \left. \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \right|_z \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_y + \left. \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \right|_z \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_x = \frac{1}{2} f_x + \frac{i}{2} f_y, \quad (49)$$

と書ける。そこで、

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\bar{z}} = \frac{1}{2} f_x - \frac{i}{2} f_y, \quad (50)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_z = \frac{1}{2} f_x + \frac{i}{2} f_y, \quad (51)$$

で複素偏微分 $\partial f / \partial z$, $\partial f / \partial \bar{z}$ を定義する。（**（講義後微修正 →）** 式 (50)(51) は「 z と \bar{z} を独立変数とみなす」という操作を用いずに定義できていることに注意。）

▶ $\partial f / \partial \bar{z}|_z$ の定義 (51) を用いると、

$$(45): \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_z = 0 \iff \frac{1}{2} f_x + \frac{i}{2} f_y = 0 \quad (\because 51) \quad (52)$$

$$\iff \text{コーシー・リーマンの関係式 (42)}. \blacksquare \quad (53)$$

- ▶ (45) 式は便利な判定法で、 $f(z)$ を z, \bar{z} を独立変数とする 2 変数関数としてみたときに、 $f(z)$ が正則関数であれば \bar{z} に依存しない。

例えば 1.3.1 節, 1.3.2 節で出てきた例

$$f(z) = 2z + i\bar{z}, \quad (54)$$

$$f(z) = (z + \bar{z})/2, \quad (55)$$

$$f(z) = |z|^2, \quad (56)$$

などは、 \bar{z} を含むので、すべて複素微分可能でない（正則でない）とわかる。

レポート問題

- [c-4] ある領域で $f(z)$ が正則で、かつ $|f(z)|$ が一定ならば、 $f(z)$ 自身が定数であることを示せ。（ $|f(z)| = C \rightarrow f(z) = \pm C$ ではないことに注意。1.2.1 参照。）

レポート問題

実 2 変数関数 $f(x, y)$ が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = 0 \quad (57)$$

を満たすとき、 $f(x, y)$ を (2 次元) 調和関数という。

- [b-3] 正則関数の実部 u 、虚部 v がそれぞれ (2 次元) 調和関数になっていることを示せ。ただし u と v が 2 回偏微分可能であることや偏微分が交換すること ($u_{xy} = u_{yx}$, $v_{xy} = v_{yx}$) は示さずに用いて良い。

逆に調和関数 $u(x, y)$ が与えられた時、それを実部とするような正則関数 $f(z)$ を構成することも出来る。

- [b-4] $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$ は調和関数である。この $u(x, y)$ に対してコーシー・リーマン関係式を満たす $v(x, y)$ を一つ示せ。
- [b-5] [b-4] の $u(x, y)$, $v(x, y)$ を実部と虚部に持つ複素関数 $f(z)$ を求めよ。

- ▶ この節の最後に「特異点」についてコメントしておく。関数 $f(z) = 1/z$ における点 $z = 0$ などのように、微分できない点（正則でない点）を「特異点」という。特異点も正則関数において重要な役割を果たす。これについては 1.5 でまた改めて取り上げる。

補足（講義では説明しない予定です）

「 z だけの関数であって、コーシー・リーマンの関係式を満たすが、複素微分不可能な例」をあげておきます。

$$f(z) \text{ を } f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases} \text{ で定義する。} (e^z \text{ の定義は 1.3.4 で。})$$

$$\text{この関数は実軸上で } f(x, y = 0) = \begin{cases} \exp(-1/x^4) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \text{ となり、}$$

$$\text{虚軸上で } f(x = 0, y) = \begin{cases} \exp(-1/y^4) & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases} \text{ となるので、}$$

原点で x, y でそれぞれ偏微分可能で、 $f_x(0) = f_y(0) = 0$ であり、コーシー・リーマンの関係式を満たす。しかし一方で、 z を偏角 45 度の方向から原点に近づけると、 $z = re^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}r$ として $f(z) = \exp(+1/r^4) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$ となるので、原点で複素微分できない。

$u(x, y)$ と $v(x, y)$ の全微分可能性について確認してみると

$$u(x, y) = \exp\left(-\frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^4}\right) \cos\left(\frac{4xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4}\right) \quad (58)$$

$$v(x, y) = \exp\left(-\frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^4}\right) \sin\left(\frac{4xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4}\right) \quad (59)$$

となるので、例えば上の z の偏角 45 度に対応して

$$x = 0 + \Delta t \quad (60)$$

$$y = 0 + \Delta t \quad (61)$$

とすると

$$u(0 + \Delta t, 0 + \Delta t) - u(0, 0) = \exp\left(\frac{1}{4\Delta t^4}\right) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \infty \quad (62)$$

となるため、全微分可能ではない。（連続でもない。）

1.3.4 正則関数の例

▶ 多項式：

$$f(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k \quad (n < \infty, c_k \in \mathbb{C}), \quad (63)$$

は $|z| < \infty$ で正則。(例： $f(z) = z^2$, $f(z) = 1 + 2iz + (3 + 4i)z^2$ 。)

▶ 有理関数：多項式 $p(z)$, $q(z)$ を用いて

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad (64)$$

は $q(z) = 0$ となる点 (特異点) を除いて正則。(特異点の数は $q(z)$ の次数以下。)

▶ 指数関数と三角関数は以下の式で定義する。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad (65)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \quad (66)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots. \quad (67)$$

これらの定義は以下の性質を満たす。

(i) 実軸上で、実数の場合の指数関数、三角関数に一致する (1.2.3 節参照)。

(ii) \mathbb{C} 全域で正則。

(iii) 収束半径が無限大。

(i) を満たすだけなら、他にも色々な複素関数があり得る、例えば $f(z, \bar{z}) = \sin x + y^{100} = \sin((z + \bar{z})/2) + ((z - \bar{z})/2i)^{100}$ は実軸上では $f(z) = \sin x$ となる。しかし、(i)(ii) を同時に満たす関数は、唯一上の定義式のものだけとなる。(→ 解析接続 1.6 で示す。)

(iii) の収束半径については次節 1.3.6 で見る。

▶ 上の定義によって 1.2 節で出てきた疑問は解決できた。 $\cos z$, $\sin z$ は $z \in \mathbb{C}$ で定義されたし、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ およびその一般化

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (68)$$

は上の定義式から示せる。

レポート問題

[b-6] $z, w \in \mathbb{C}$ に対し、以下を示せ。(ここでは解析接続を用いずに示して下さい。無限和の順番は気にしなくて良いです。)

$$(i) e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

$$(ii) e^{z+w} = e^z e^w.$$

$$(iii) \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

ではもっと複雑な式、例えば $\cos 4z = 8 \cos^4 z - 8 \cos^2 z + 1$ などは? . . . 一つ一つ定義に戻れば確認出来るが、それも面倒だ。実はこれも 1.6 節の「解析接続」で解決する。

▶ 対数関数について : 実数では $\ln x$ は e^x の逆関数として定義できた。

$$f(x) = \ln x \iff x = e^{f(x)}. \quad (69)$$

これを素直に複素数に拡張すると

$$f(z) = \ln z \iff z = e^{f(z)}. \quad (70)$$

一方、極形式を用いて

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \\ &= r e^{i\theta} \\ &= e^{\ln r} e^{i\theta} \\ &= e^{\ln r + i\theta} \end{aligned} \quad (71)$$

なので、

$$f(z) = \ln z = \ln r + i\theta \quad (72)$$

と言えそうだ。ところが、 $z = e^{f(z)}$ を満たす $f(z)$ はこれだけではない。

$$e^{2n\pi i} = 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (73)$$

なので、

$$z = e^{\ln r + i\theta} e^{2n\pi i} = e^{\ln r + i\theta + 2n\pi i}. \quad (74)$$

よって

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln z \\ &= \ln r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (75)$$

したがって対数関数は多価関数となる。(1.6 節でまた戻って議論する。)

————— 10/3、ここまで —————

10/3に出題したレポートは [b-1]~[b-6]、[c-1]~[c-4] でした。

————— 10/10、ここから —————

先週のあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標

1.2 準備

1.2.1 複素数

1.2.2 偏微分

1.2.3 テイラー展開

1.2.4 オイラーの公式について

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.1 複素関数

1.3.2 複素関数は平面から平面への写像

1.3.3 複素微分と正則関数

1.3.4 正則関数の例

1.3.5 言葉の定義をいくつか ← 今日ココから

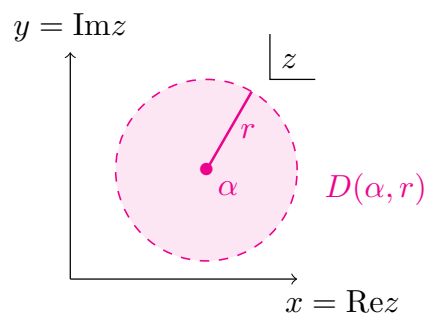
1.3.6 複素級数とその収束

1.3.5 言葉の定義をいくつか

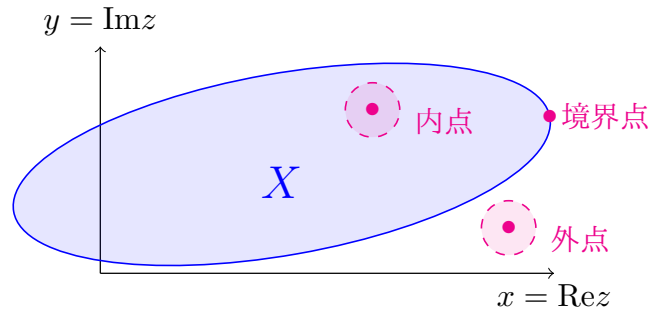
複素平面上の集合に関して、いくつか言葉を定義しておく。

▶ 円板 $D(\alpha, r)$: 点 α を中心とした半径 r の円の内部、つまり $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\}$ 。

(講義後に図を足しました。)



- ▶ 集合 X と点 α に対して、(講義後に図を足しました。)

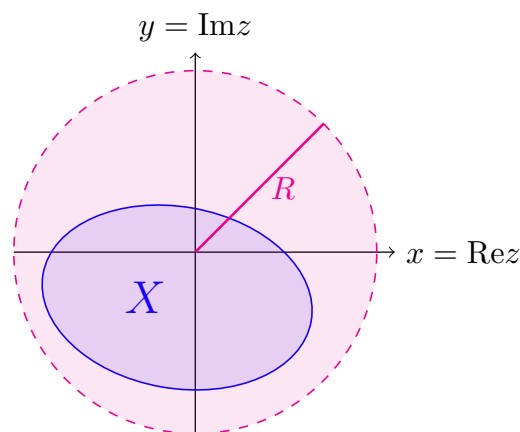


- α が X の内点である \iff 十分小さな $\epsilon > 0$ に対して円板 $D(\alpha, \epsilon)$ 全体が X に含まれる。
- α が X の外点である $\iff \alpha$ が X の補集合 $\mathbb{C} - X$ の内点であることをいう。
- α が X の境界点である $\iff \alpha$ が X の内点でも外点でもない。
- 境界点全体の集合を「境界」という

- ▶ 集合 X が開集合 $\iff X$ に含まれる全ての点が X の内点。(境界を含まない集合)
- ▶ 集合 X が閉集合 \iff 補集合 $\mathbb{C} - X$ が開集合。(境界を全て含む集合)
- ▶ 集合 X が連結 $\iff X$ 内の任意の2点が X 内の折れ線で結べる。(まあ要するに2つ以上に分かれていないということ。)
- ▶ 連結な開集合を、とくに「領域」という。文字 D をよく使う。 ← これが定義したかった!

以下はほとんど使わないけど、1.3.6.C/Dなどで少し使うので、一応定義。

- ▶ 集合 X が有界とは、ある $R > 0$ が存在して、 X 全体が円板 $D(0, R)$ に含まれることをいう。(例えば実軸全体は有界ではない。)(講義後に図を足しました。)
- ▶ 有界な閉集合をコンパクト集合という。



1.3.6 複素級数とその収束

複素級数とその収束についてまとめておく。

1.3.6.A 複素数列

▶ 複素数列の収束：複素数の数列 $\{z_n\}$

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (76)$$

に対して、「数列 $\{z_n\}$ は α に収束する」とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し、

$$n \geq N \implies |z_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つことをいう。これを

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ s.t. } n \geq N \implies |z_n - \alpha| < \epsilon$$

のようにも書く。「数列 $\{z_n\}$ は α に収束する」ことを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \alpha \quad \text{あるいは} \quad n \rightarrow \infty \text{ で } z_n \rightarrow \alpha. \quad (77)$$

のようにも書く。上記のような α が存在しないとき「数列 $\{z_n\}$ は収束しない（発散する）。」という。

▶ $n \rightarrow \infty$ で $z_n \rightarrow a, w_n \rightarrow b$ なら、

$$z_n \pm w_n \rightarrow a \pm b, \quad z_n w_n \rightarrow ab, \quad \frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{a}{b} \text{ for } w_n \neq 0, b \neq 0. \quad (78)$$

▶ コーシー列：数列 $\{z_n\}$ がコーシー列であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して自然数 N が存在し、

$$n, m \geq N \implies |z_n - z_m| < \epsilon$$

であることをいう。 ($\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } n, m \geq N \implies |z_n - z_m| < \epsilon$.)

レポート問題

[c-5] 複素数列 $\{z_n\}$ が収束することと $\{z_n\}$ がコーシー列であることが同値であることを示せ。ただし、実数列の場合の同値性は既知として良い。

実数列の場合も証明したことがなければ是非調べてみましょう。

1.3.6.B 級数

▶ 数列の和 $w_n = \sum_{k=1}^n z_k$ を級数という。

さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ が存在するとき、それを $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ と書き、無限級数という。 ($n \rightarrow \infty$

の極限が存在しないときも同じ記号を用いてしまって「 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ が収束しない」などと言う。)

▶ 各項の絶対値をとった級数 $s_n = \sum_{k=1}^n |z_k|$ は、単調増加な実数列となる。したがって上に有界なら収束する。(証明略)

▶ 絶対収束と条件収束

- $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は「絶対収束する」という。

レポート問題

[c-6] 絶対収束する複素級数は収束することを示せ。

- 絶対収束する複素級数は、足し算の順序を変えても和は変わらない。(証明略)
- 収束するが絶対収束しない級数は「条件収束する」という。

$$\text{複素級数 } \sum_{k=1}^{\infty} z_k \begin{cases} \text{収束する.} \\ \text{収束しない (発散する).} \end{cases} \begin{cases} \text{絶対収束する.} \\ \text{条件収束する.} \end{cases} \quad (79)$$

$$\text{条件収束の例: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \infty.$$

▶ 級数の収束の判定法の例:

レポート問題

[c-7] (ダランベールの判定法)

$$\exists N, \exists q < 1 \text{ s.t. } n \geq N \implies \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \leq q$$

ならば、 $\sum z_n$ は絶対収束することを示せ。

特に $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = q$ が存在するとき $\begin{cases} q < 1 \implies \text{絶対収束,} \\ q > 1 \implies \text{収束しない. (証明略)} \end{cases}$

1.3.6.C 関数級数

- ▶ 関数の極限と連続性: これまで特に断りなく使ってきたが、関数 $f(z)$ に対して、

$$\exists f_0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall z, 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f_0| < \epsilon.$$

であるとき f_0 を $z \rightarrow z_0$ での $f(z)$ の極限值といい、 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f_0$ と書く。 $f(z_0)$ が定義されていて $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ のとき「 $f(z)$ は $z = z_0$ で連続」という。

- ▶ 関数列の収束:

領域 D で定義された関数列 $f_1(z), f_2(z), \dots$ に対して

- $f_n(z)$ が $f(z)$ に 各点収束する、とは

$$\exists f(z), \forall \epsilon > 0, \forall z \in D, \exists N, \text{ s.t. } n \geq N \implies |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

であることをいう。(N が z に依存して良いことに注意。)

- $f_n(z)$ が $f(z)$ に 一様収束する、とは

$$\exists f(z), \forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } n \geq N, z \in D \implies |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

であることをいう。(N が z に依存せず決まる。)

- * 各点収束するけど一様収束しない例。 $0 < x < 1$ で実関数列 $f_n(x) = x^n$ を考える。これは各点で $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0$ と収束する。しかし任意の $0 < x < 1$ に対して $|f_n(x) - f(x)| = x^n < \epsilon$ とするには $n > \frac{|\ln \epsilon|}{|\ln x|}$ とする必要があり、 $|\ln x| \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ なので N は x に無関係に選べない。

- $f_n(z)$ が領域 D 上で 広義一様収束する、とは、 $f_n(z)$ が D の任意のコンパクト集合上で一様収束することをいう。

- * 上の関数列 $f_n(x) = x^n$ ($0 < x < 1$) は広義一様収束するが一様収束しない例になっている。

- * (講義後追記) 3つの収束の関係は、一様収束 \subset 広義一様収束 \subset 各点収束、となっており、一様収束 \rightarrow 広義一様収束、広義一様収束 \rightarrow 各点収束、が示せる。

▶ 正則関数列の無限級数: 領域 D で定義された正則関数の関数列 $f_1(z), f_2(z), \dots$ の

和 $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ を考える。 $\{S_n(z)\}$ が D 上で広義一様収束するとき、

- 無限和 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ も正則。
- $\int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z) dz$ (項別積分可能)
- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ (項別微分可能)

証明略。複素(線)積分については 1.4 節参照。

この講義で出てくる級数のほとんどは(広義)一様収束するので、項別微分、項別積分が可能、つまり無限和と微分・積分の順番を気にせず交換して良い。(←これが言いたかった。)

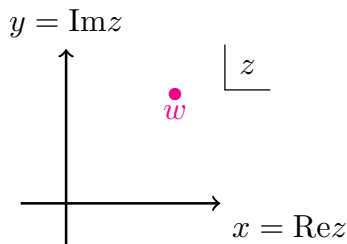
1.3.6.D べき級数と収束半径

▶ 複素数列 $\{c_n\}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \quad (80)$$

をべき級数と呼ぶ。

▶ 任意のべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対して、ある点 $z = w$ を考えよう。



このとき以下が示せる。

- (i) $f(z)$ が $z = w$ で収束 $\implies |z| < |w|$ なる全ての z に対して $f(z)$ は絶対収束。
- (ii) $f(z)$ が $z = w$ で収束しない $\implies |z| > |w|$ なる全ての z に対して $f(z)$ は収束しない。

証明

(i) 数列 $s_n = \sum_{k=0}^n c_k w^k$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は収束し、コーシー列になるので、

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \text{ s.t. } n, m \geq N \implies |s_n - s_m| < \epsilon.$$

$m = n + 1, \epsilon = 1$ として

$$\exists N, \text{ s.t. } n \geq N \implies |c_{n+1} w^{n+1}| < 1$$

したがって $B = \max\{|c_0|, |c_1 w^1|, \dots, |c_N w^N|, 1\}$ とすると

$$\{|c_n w^n|\} = \underbrace{\{|c_0|, |c_1 w^1|, \dots, |c_N w^N|\}}_{\leq B}, \underbrace{\{|c_{N+1} w^{N+1}|, \dots\}}_{< 1 \leq B}$$

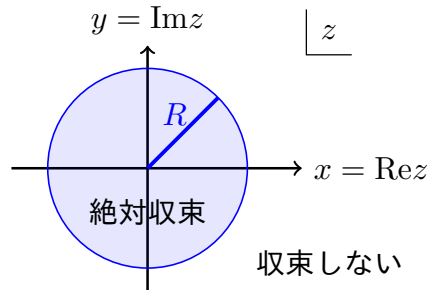
$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n w^n| \left| \frac{z}{w} \right|^n \leq B \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{w} \right|^n = B \frac{1}{1 - |z/w|} \text{ for } |z| < |w|.$$

したがって $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ は単調増加で上に有界なので収束する。■

- (ii) 背理法。ある点 $z = z_0$ ($|z_0| > |w|$) での収束を仮定すると、(i) より $z = w$ でも収束となり、仮定に反する。■

▶ したがって、任意のべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対してある長さ R (収束半径) が存在して

$$\begin{cases} |z| < R \text{ で } f(z) \text{ は絶対収束し,} \\ |z| > R \text{ で } f(z) \text{ は収束しない.} \end{cases}$$



(ただしここでの R は $R = 0$ と $R = \infty$ を含む。)

- さらに $|z| < R$ で $f(z)$ は広義一様絶対収束する。(証明略、1.3.6.C 参照)
- したがって $|z| < R$ で $f(z)$ は項別微分、項別積分が可能。(1.3.6.C 参照)

レポート問題

[b-7] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ が存在するとき、 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ がべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径となることを示せ。(ダランベールの判定法を既知としてよい。)

▶ 前節 1.3.4 で定義した指数関数と三角関数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (81)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (82)$$

の右辺の収束半径は $R = \infty$ である*2。また

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad (83)$$

の右辺の級数の収束半径は $R = 1$ である。(この式自体は $(1-z) \sum_{k=0}^n z^k = 1 - z^{n+1}$ から示せる。)

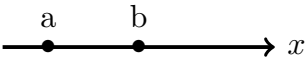
*2 $\cos z$ と $\sin z$ は $z^2 = w$ として w のべき級数として書き直せばダランベールの判定法が使えます。

1.4 複素積分

1.4.1 複素 (線) 積分の定義

- ▶ ここでもまずは実数関数の場合を思い出す。

関数 $f(x)$ に対して、例えば $x = a$ から $x = b$ までの積分

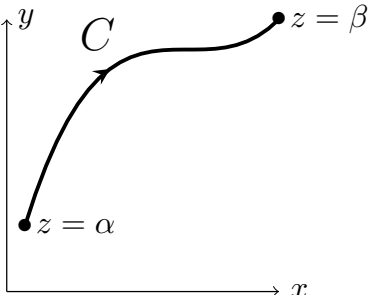
$$\int_a^b f(x) dx$$


を考えることができた。

- ▶ これを素直に複素関数 $f(z)$ に拡張すると、例えば点 $z = \alpha$ から $z = \beta$ までの積分

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz$$

が考えられそうだ。しかし z は複素数なので、 $z = \alpha$ から $z = \beta$ までいろんな経路が取りうる、そこで経路 C を指定して

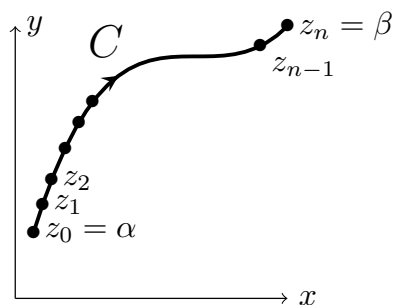
$$\int_C f(z) dz$$


と書くことにする。

- ▶ より正確には実数のときと同様に、無限小区間の和の極限として定義できる。

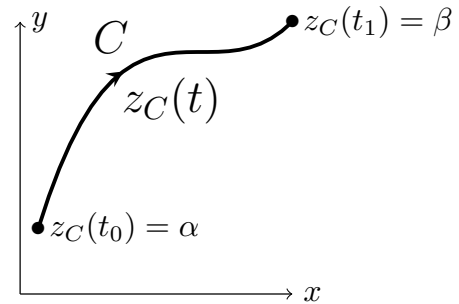
$$\int_C f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k,$$

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$



- ▶ あるいは、実数 t を用いて経路 C を $z_C(t) : \begin{array}{c|c} t & t_0 \rightarrow t_1 \\ z & \alpha \rightarrow \beta \end{array}$ とパラメータ表示して、

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z_C(t)) \frac{dz_C(t)}{dt} dt$$



のように定義することも出来る。

- ▶ この定義は（経路が同じなら）パラメータの取り方によらない。実際 t の代わりに $t'(t) : \begin{array}{c|c} t & t_0 \rightarrow t_1 \\ t' & t'_0 \rightarrow t'_1 \end{array}$ を用いても、変数変換によって

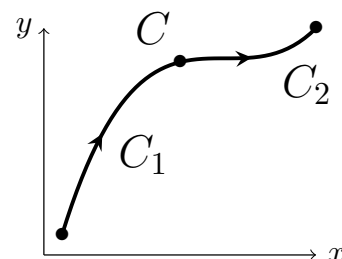
$$\begin{aligned} \int_{t'_0}^{t'_1} f(z_C(t')) \frac{dz_C(t')}{dt'} dt' &= \int_{t_0}^{t_1} f(z_C(t')) \frac{dz_C(t')}{dt'} \Big|_{t'=t'(t)} \frac{dt'(t)}{dt} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(z_C(t)) \frac{dz_C(t)}{dt} dt \end{aligned} \quad (84)$$

となり、元の表式と一致する。（最後の式では $z_C(t'(t))$ を $z_C(t)$ と書いている。）

1.4.2 複素積分の定義からすぐにわかるいくつかの性質

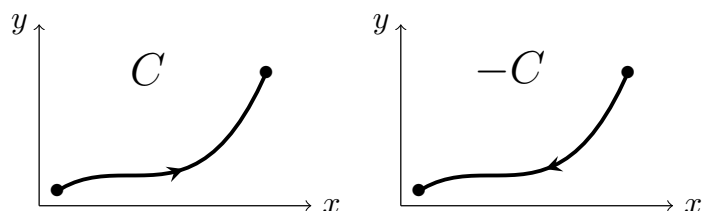
▶ 経路は足し算できる。

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C=C_1+C_2} f(z)dz.$$



▶ 逆向きの経路 ($-C$ と書く) は引き算になる。

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz.$$



▶ 積分の絶対値の上限について

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \left(\begin{array}{c} \text{経路 } C \text{ 上での} \\ |f(z)| \text{ の最大値} \end{array} \right) \times (\text{経路 } C \text{ の長さ}) \quad (85)$$

が成り立つ。ただし経路 C の長さは、経路を $z_C(t) = x_C(t) + iy_C(t)$ ($t = t_1 \rightarrow t_2$) とパラメータ表示したときに以下の式で定義される。

$$(\text{経路 } C \text{ の長さ}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx_C(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_C(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (86)$$

証明

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z)dz \right| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(z_C(t)) \cdot \frac{dz_C(t)}{dt} dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(z_C(t))| \cdot \left| \frac{dz_C(t)}{dt} \right| dt \\ &\leq (|f(z_C(t))| \text{ の最大値}) \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{dx_C(t)}{dt} + i \frac{dy_C(t)}{dt} \right| dt \\ &= (|f(z_C(t))| \text{ の最大値}) \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx_C(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_C(t)}{dt}\right)^2} dt \\ &= (|f(z_C(t))| \text{ の最大値}) \times (\text{経路 } C \text{ の長さ}) \quad \blacksquare \quad (87) \end{aligned}$$

不等式 (85) はこれから何度か用いる。

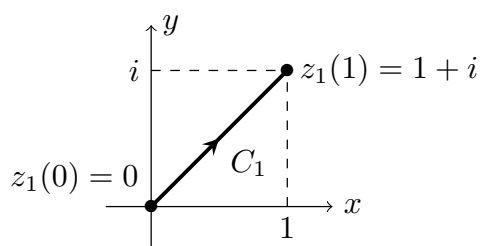
1.4.3 複素積分の例

例 1 具体的な計算の例として、

$$f(z) = a + bz \quad (88)$$

を考え、 $z = 0$ から $z = 1 + i$ まで、いくつかの経路で積分してみよう。

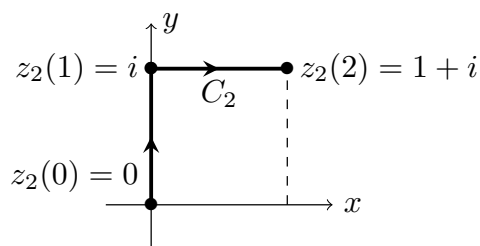
経路 1



$$\begin{cases} z_1(t) = (1+i)t & (0 \leq t \leq 1) \\ f(z_1(t)) = a + b(1+i)t \\ \frac{dz_1(t)}{dt} = 1+i \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_0^1 f(z_1(t)) \frac{dz_1(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 (a + b(1+i)t) \cdot (1+i) \cdot dt \\ &= \int_0^1 ((1+i)a + 2ibt) dt \\ &= (1+i)a + ib. \end{aligned} \quad (89)$$

経路 2



| | $0 \leq t \leq 1$ | $1 \leq t \leq 2$ |
|----------------------|-------------------|--------------------|
| $z_2(t)$ | it | $t - 1 + i$ |
| $f(z_2(t))$ | $a + ibt$ | $a + b(t - 1 + i)$ |
| $\frac{dz_2(t)}{dt}$ | i | 1 |

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) dz &= \int_0^2 f(z_2(t)) \frac{dz_2(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 (a + ibt) \cdot i \cdot dt + \int_1^2 [a + b(t - 1 + i)] \cdot 1 \cdot dt \\ &= (ia - \frac{1}{2}b) + (a + \frac{3}{2}b + (-1 + i)b) \\ &= (1+i)a + ib. \quad (\text{経路 1 と同じ!}) \end{aligned} \quad (90)$$

▶ 積分が経路によらない！

・・・実はこれも正則関数の一般的性質の1つ。(→ 次の 1.4.4 節)

レポート問題

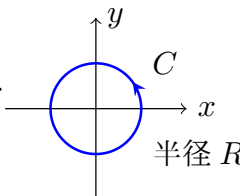
[b-8] 同じ $f(z) = a + bz$ に対して、上の2つ以外の経路を1つ自分で考え、積分を計算せよ。(端点は上と同じ $z = 0 \rightarrow 1 + i$ とする。)

▶ 正則でない関数の場合、積分の値は経路に依存してしまう。

レポート問題

[b-9] $f(z) = \bar{z}$ に対して、上の2つの経路で積分を計算せよ。

例 2 次の例として、原点を中心とした半径 R の円を反時計回りに1周する経路 C を考えて、次の複素積分を考えよう。

$$\oint_C z^n dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad \text{半径 } R \quad (91)$$


(周積分のことを \oint で表す。)

$z = z(\theta) = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とパラメータ表示すると

$$\oint_C z^n dz = \int_0^{2\pi} f(z(\theta)) \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (92)$$

$$= \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n \cdot iRe^{i\theta} d\theta \quad (93)$$

$$= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \quad (94)$$

$$= \begin{cases} \text{(for } n \neq -1) & = iR^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0, \\ \text{(for } n = -1) & = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \end{cases} \quad (95)$$

つまり

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i & (n = -1) \end{cases} \quad \begin{array}{c} y \\ \circlearrowright C \\ x \\ \text{半径 } R \end{array} \quad (96)$$

これは

- 答えが半径 R によらない。
- $n = -1$ のときだけ特別で、 $2\pi i$ となる。

これらの意味は、次の 1.4.4 節、および 1.5 節の留数定理でより明らかになる。

(以下の例 3 は講義では省略しました。)

例 3 上の $n = -1$ の場合に注目して

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad (97)$$

に対して、 $z = 1$ から $z = -1$ まで 2 つの経路で積分してみる。

$$\begin{array}{c} y \\ \circlearrowright C_1 \\ x \\ -1 \quad 1 \end{array} \quad I_1 = \int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{z(\theta)} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (z(\theta) = e^{i\theta}) \\ = \int_0^\pi \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \pi i. \quad (98)$$

$$\begin{array}{c} y \\ \circlearrowleft C_2 \\ x \\ -1 \quad 1 \end{array} \quad I_2 = \int_{C_2} \frac{1}{z} dz = \int_0^{-\pi} \frac{1}{z(\theta)} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (z(\theta) = e^{i\theta}) \\ = \int_0^{-\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = -\pi i. \quad (99)$$

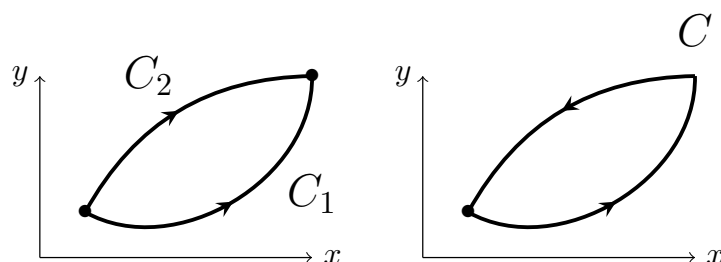
この場合は例 1 と違って、経路によって積分値が異なる。

1.4.4 コーシーの積分定理

- ▶ 前節の例 1 で「複素積分が経路によらない」場合を見た。これが一般の正則関数で成立することを示したい。

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

$$\Rightarrow \oint_{C=C_1-C_2} f(z) dz = 0$$



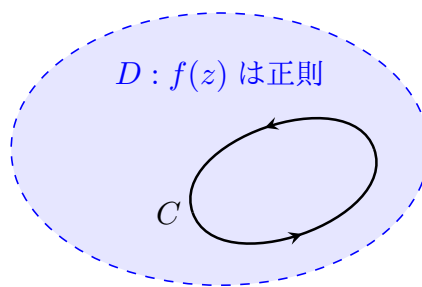
なので、「経路によらない」は「周積分がゼロ」と言い換えられる。



コーシーの積分定理

領域 D 内の単純閉曲線 C を考え、
 C の内部が D に含まれるとする。
 $f(z)$ が領域 D 上で正則であれば

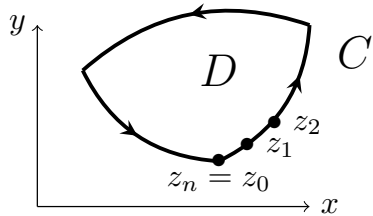
$$\oint_C f(z) dz = 0.$$



ただし閉曲線とは始点と終点が一致する曲線で、単純閉曲線（単一閉曲線）とは始点 = 終点以外に重複する点を持たない曲線である。（講義後に説明を修正しました。）
 (C の内部が D に含まれない例（穴が空いているような状況）は次節以降で考える。）

- コーシーの積分定理の証明: (グリーン¹の定理による)

無限小区間による定義を思い出して



$$\oint_C f(z)dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_k^{n-1} f(z_k) \Delta z_k \quad (\Delta z_k = z_{k+1} - z_k)$$

$$= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_k, \Delta y_k \rightarrow 0}} \sum_k^{n-1} f(z_k) (\Delta x_k + i \Delta y_k)$$

$$= \oint_C (f(z)dx + i f(z)dy) \quad \text{—————} (*)$$

ここで、グリーン¹の定理を使う。

グリーン¹の定理

(x, y) 平面上の領域 D 内の単純閉曲線 C を考え、 C の内部が D に含まれるとする。(コーシー¹の積分定理の仮定と同じ状況) $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ を D 上で定義された偏微分可能かつ偏微分が連続な関数 (C^1 級関数) とし、 D' を C とその内部の和集合 (C を境界にもつ閉集合) とするとき、以下が成り立つ。

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \int_{D'} (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy. \quad (100)$$

よって (*) より

$$\oint_C f(z)dz = \int_{D'} (i\partial_x f - \partial_y f) dx dy. \quad (101)$$

$f(z)$ が領域 D 内で正則であればコーシー・リーマン関係式より $i\partial_x f - \partial_y f = 0$ 。したがって $\oint_C f(z)dz = 0$ 。 ■

コメント: 以上の証明は、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が C^1 級であること仮定して示した。 $f(z)$ が正則であることから $f(z)$ が複素微分可能 $\rightarrow u(x, y), v(x, y)$ が全微分可能であることは言えるが (1.3.3 節)、全微分可能 $\rightarrow C^1$ 級は一般には成立しないので、実はこのグリーン¹の定理を用いた証明は不完全と言える。 $u(x, y), v(x, y)$ が C^1 級であることを用いない証明もあるが、担当教員は追ったことがないのでココでは紹介しない。ただし、ひとたびコーシー¹の積分定理を認めれば、後で見るとように $f'(z)$ の連続性 (正則性) が言えるので、 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が C^1 級であることも言える。

————— 10/10、ここまで —————

10/10に出題したレポートは [b-7]~[b-9]、[c-5]~[c-7] でした。

講義後に 1.3.5 や 1.4.4 にいくつか図を足しました。(講義中に板書したような図です。)

————— 10/17、ここから —————

先週までのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標

1.2 準備

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.3 複素微分と正則関数 (コーシー・リーマン関係式、など)

1.4 複素積分

1.4.1 定義

1.4.2 (すぐわかる) 性質

1.4.3 複素積分の例

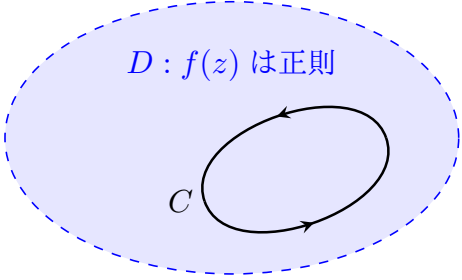
1.4.4 コーシーの積分定理 \Leftarrow イマココ

- ▶ 前回言わなかった言葉の定義: C を複素平面上の単純閉曲線とする。 C を境界にもつ2つの領域 (C の内側と外側) のうち内側 (有界な方) を「 C の内部」という。

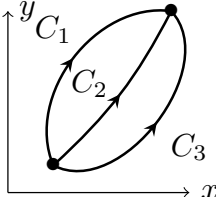
- ▶ 先週やったコーシーの積分定理をもう一度書いておく。

コーシーの積分定理

$f(z)$ を領域 D 上の正則関数とし
単純閉曲線 C とその内部が
 D に含まれるとする。このとき

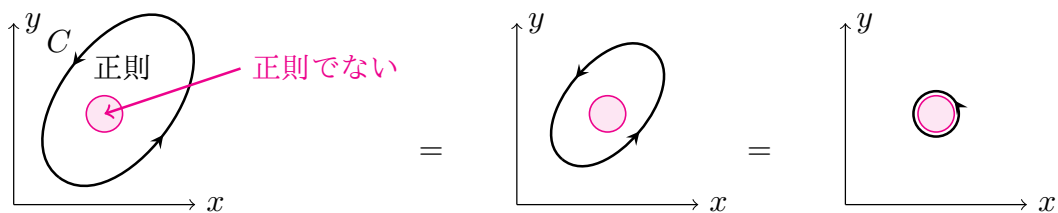
$$\oint_C f(z) dz = 0.$$


- ▶ コーシーの積分定理があるため、正則な領域では経路を好きなように曲げて良い!



$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_3} f(z) dz \quad (102)$$

- ▶ C の内部に正則でない場所があったら? $\oint_C f(z) dz$ はどうなる??



周積分は、正則でないところの局所的な情報だけで決まりそうだ。

→ 次節 1.4.5 や 1.5 節の留数定理で見ていく。

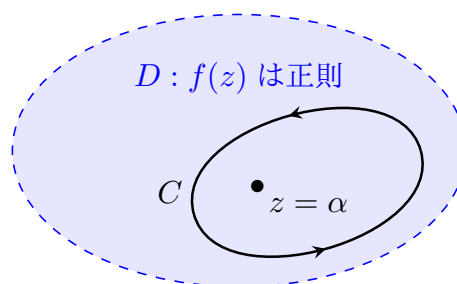
1.4.5 コーシーの積分公式と、無限回微分可能性

(コーシー、コーシーとコーシーだらけなのに、前節の「コーシーの積分定理」とこの節の「コーシーの積分公式」があるからさらにややこしい…。さらに読み上げると「コーシキ」だし…。)

▶ まずは

コーシーの積分公式

$f(z)$ を領域 D 上の正則関数とし、
経路 C (正の向き = 反時計回り
の単純閉曲線) とその内部が D に
含まれるとする。



このとき C の内部の点 $z = \alpha$ に対して

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = 2\pi i f(\alpha) \quad (103)$$

証明: $\frac{f(z)}{z - \alpha}$ は D 内では $z = \alpha$ を除いて正則なので、経路を $z = \alpha$ を中心とした半径 r の円 (経路 $C' \subset D$) に変形する。 C' は

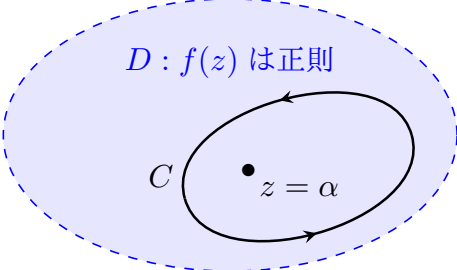
$$z(\theta) = \alpha + re^{i\theta}, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \begin{array}{c} C' \\ \circlearrowleft \\ z = \alpha \end{array} \text{半径 } r \quad (104)$$

とパラメータ表示できるので

$$\begin{aligned} \oint_{C'} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z(\theta))}{z(\theta) - \alpha} \cdot \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta}) i d\theta \xrightarrow{r \rightarrow 0} 2\pi i f(\alpha). \blacksquare \end{aligned} \quad (105)$$

(より正確には、 $f(z)$ の正則性 \rightarrow 連続性から $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|z - \alpha| < \delta \implies |f(z) - f(\alpha)| < \epsilon$ なので、 $0 < r < \delta$ とすれば $f(\alpha + re^{i\theta}) = f(\alpha) + \phi(\theta)$ s.t. $|\phi(\theta)| < \epsilon$ 、を代入して示せる。)

- ▶ コーシーの積分公式 (103) 式は 1.5 節でやる「留数定理」の特別な例になっている。
- ▶ コーシーの積分公式 (103) 式は以下のようにも書ける。



$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \quad (106)$$

(経路 C は点 α から離れているのに、積分すると $z = \alpha$ の値が得られる！)

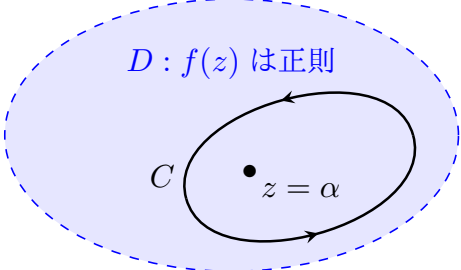
- ▶ さらに (106) から次のことが言える。

$f(z)$ を領域 D 上の正則関数とし、
経路 C (正の向き = 反時計回り
の単純閉曲線) とその内部が D に
含まれるとする。

このとき $f(z)$ は C の内部で何回でも複素微分可能であり、 $z = \alpha$ での n 階微分係数は

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz, \quad (107)$$

で与えられる。(何回でも微分可能なので、 $f'(z), f''(z), \dots$ も全て正則関数。)



- ▶ (証明の前に) いくつかコメント
 - (i) $n = 0$ の場合は上のコーシーの積分公式になっている。
 - (ii) この式もコーシーの積分公式とよばれるらしい。さらに文献によっては「グルサの定理 (公式)」とも書いてある。
- ▶ 証明:

先ほど示したコーシーの積分公式 (106) $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$ の両辺を α の関数と見て微分する。

方法 1 : 微分と積分の交換を気にしない。

$$\begin{aligned}
 f'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{f(z)}{z-\alpha} \right) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz.
 \end{aligned} \tag{108}$$

次々と微分して

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz. \blacksquare \tag{109}$$

方法 2 : 気にする。

$$g(\alpha) = \oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \tag{110}$$

として定義通り微分すると

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{g(\alpha + \Delta\alpha) - g(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \oint_C \left[\frac{f(z)}{z-(\alpha + \Delta\alpha)} - \frac{f(z)}{z-\alpha} \right] dz \\
 &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha-\Delta\alpha)(z-\alpha)} dz \\
 &= \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz + \underbrace{\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \Delta\alpha \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha-\Delta\alpha)(z-\alpha)^2} dz}_{(A)}
 \end{aligned} \tag{111}$$

第二項は、経路 C 上で $f(z)$ が正則なので $|f(z)| < \infty$ 、かつ $|\Delta\alpha|$ が十分小さければ $|z-\alpha| > 0$ かつ $|z-\alpha-\Delta\alpha| > 0$ なので、 $|(A)| < \infty$ 。したがって第二項 $\xrightarrow{\Delta\alpha \rightarrow 0} 0$ 。よって

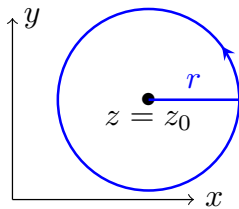
$$g'(\alpha) = \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz. \tag{112}$$

さらに同様にしてこの右辺が複素微分可能であることが示せて、以下それを繰り返して

$$g^{(n)}(\alpha) = n! \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz. \blacksquare \tag{113}$$

▶ コーシーの積分公式を用いた計算の具体例を見てみよう。

記号の定義



以下「 $z = z_0$ を中心とした半径 r の円を正の向きに一周する経路」を $C(z_0, r)$ と表す。

例 1: $\oint_{C(0,2)} \frac{\cos z}{z-1} dz$

$z = 1$ は $C(0, 2)$ の内部にあるので、 $f(z) = \cos z$ として

$$\oint_{C(0,2)} \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \cos 1. \quad (114)$$

例 2: $\oint_{C(0,1)} \frac{1}{z^n} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$

$f(z) = 1$ として、

$$\oint_{C(0,1)} \frac{f(z)}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) = \begin{cases} 2\pi i & (n = 1) \\ 0 & (n = 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (115)$$

前節の結果が再現できた。

例 3: $\oint_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2-1} dz$

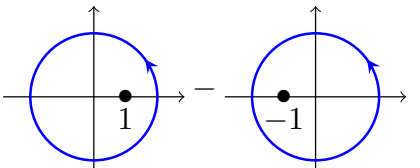
経路を変形して $C(-1, 1)$ と $C(1, 1)$ に分割すると

$$\begin{aligned} \oint_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2-1} dz &= \oint_{C(-1,1)} \frac{e^z}{z^2-1} dz + \oint_{C(1,1)} \frac{e^z}{z^2-1} dz \\ &= \oint_{C(-1,1)} \frac{1}{z+1} \underbrace{\left(\frac{e^z}{z-1} \right)}_{f(z)} dz + \oint_{C(1,1)} \frac{1}{z-1} \underbrace{\left(\frac{e^z}{z+1} \right)}_{g(z)} dz. \end{aligned}$$

コーシーの積分公式を用いて

$$(右辺) = 2\pi i(f(-1) + g(1)) = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{-2} + \frac{e}{2} \right). \quad (116)$$

あるいは被積分関数を変形して

$$\begin{aligned} \oint_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2-1} dz &= \oint_{C(0,2)} \frac{1}{2} \left(\frac{e^z}{z-1} - \frac{e^z}{z+1} \right) dz \\ &= \pi i (e^1 - e^{-1}). \end{aligned} \quad (117)$$


レポート問題

[b-10] 以下の積分を計算せよ。

$$\oint_{C(0,2)} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz. \quad (118)$$

$$\oint_{C(0,2)} \frac{z^5}{(z-1)^3} dz. \quad (119)$$

$$\oint_{C(0,4)} \frac{z^{10}}{(z-1)(z-3)^2} dz. \quad (120)$$

[b-11] 次の実数積分を、 $z = e^{i\theta}$ として複素積分を用いて計算せよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \beta \cos \theta} d\theta \quad (0 < \beta < 1). \quad (121)$$

レポート問題

[b-12] $f(z)$ が領域 D で正則であり、 $C(\alpha, r)$ とその内部が D に含まれるとき、次の式を示せ。

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta}) d\theta. \quad (122)$$

(適当な半径 r の円周上で周積分して「平均」を取れば、中心での値が分かる！)

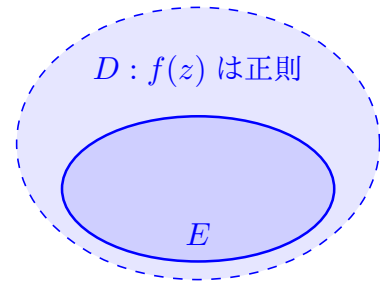
▶ コーシーの積分公式 (106) $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$ を用いて次の定理も示せる。

最大値の定理

複素関数 $f(z)$ は領域 D 内で正則とする。

このとき

- $f(z)$ が領域 D 上で定数関数でなければ、
 $|f(z)|$ は領域 D 上に最大値を持たない。
 (注: 領域 D は境界を含まない.)
- E を D のコンパクト部分集合とするとき、
 $f(z)$ が E 上で定数関数でなければ
 $|f(z)|$ の E における最大値は E の境界で
 与えられる。 (注: E は境界を含む.)



(講義後修正。後半の前提に「 $f(z)$ が E 上で定数関数でなければ」を加えました。)

図を描いて説明しよう。

(証明)

1. $|f(z)|$ の最大値が、 D 上の点 $z = \alpha$ で与えられると仮定する。

$$|f(z)| \leq |f(\alpha)| \quad \text{for } \forall z \in D \quad (123)$$

$z = \alpha$ は境界にはないので、 α を中心とした半径 r ($r > 0$) の円 $C(\alpha, r)$ を D 内にとることができる (図を描こう)。

するとコーシーの積分公式 (106) $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$ を用いて

$$|f(\alpha)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \right| \quad \because (106) \quad (124)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \times \left[C(\alpha, r) \text{ 上の } \left| \frac{f(z)}{z - \alpha} \right| \text{ の最大値} \right] \times [C(\alpha, r) \text{ の経路長}] \quad (125)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \times \frac{|f(\alpha)|}{r} \times 2\pi r \quad \because C(\alpha, r) \text{ 上で } |z - \alpha| = r \text{ かつ } (123) \quad (126)$$

$$= |f(\alpha)|. \quad (127)$$

結局全ての不等号は等号となり、成立するためには

$$\text{円 } C(\alpha, r) \text{ 上で } |f(z)| = |f(\alpha)|. \quad (128)$$

2. 円の半径はいくらでも小さく取れるので、円 $C(\alpha, r)$ の内部で $|f(z)|$ は定数。
3. 領域 D 上の全ての点は内点だけを通る折れ線で α につながられるので、領域内の小さな円を重ねて点 α までつながられる (図を描こう)。よって結局 D 内全域で $|f(z)|$ は定数。
4. よって [c-4] ($|f(z)|$ が定数 $\rightarrow f(z)$ が定数) より D 内で $f(z)$ は定数。これは仮定に反するので、背理法により $|f(z)|$ は D 内に最大値を持たない。(前半の証明終わり)
5. (後半) E における $|f(z)|$ の最大値が (境界ではなく) E の内部にある点 α で与えられると仮定すると、 $|f(\alpha)| \geq |f(z \in E \text{ の内部})|$ 。よって点 α は E の内部 (領域) の最大値を与えることになるので前半の内容と矛盾する。(証明終わり)

レポート問題

[b-13] 上の最大値の定理の仮定 ($f(z)$ が領域 D で正則、 E は D のコンパクト部分集合、 $f(z)$ は E 上で定数関数ではない)のもと、 E 内で $f(z) \neq 0$ なら E における $|f(z)|$ の最小値も E の境界で与えられることを示せ。

- ▶ さらにコーシーの積分公式の微分バージョン (107) $f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$ を用いてリウビルの定理も示しておこう。

リウビルの定理

$f(z)$ を複素平面全体で正則な複素関数とする。

$|f(z)|$ が複素平面全体で有界なら $f(z)$ は定数関数である。

($|f(z)|$ が複素平面全体で有界 $\longleftrightarrow \exists M > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq M$.)

(“Liouville”をどうカタカナにするかは色々な流儀があるようです。)

証明

任意の複素数 α に対して、円経路 $C(\alpha, r)$ を考えて

$$|f'(\alpha)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz \right| \quad \because \text{コーシーの積分公式の微分バージョン (107)}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \times \left[C(\alpha, r) \text{ 上の } \left| \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} \right| \text{ の最大値} \right] \times [C(\alpha, r) \text{ の経路長}] \quad (129)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \times \frac{M}{r^2} \times 2\pi r \quad \because C(\alpha, r) \text{ 上で } |z-\alpha| = r \text{ かつ } |f(z)| \leq M \quad (130)$$

$$= \frac{M}{r}. \quad (131)$$

$r > 0$ は任意にとれるので $r \rightarrow \infty$ として $f'(\alpha) = 0$ 。 α は任意なので、複素平面全体で $f'(z) = 0$ 、よって $f(z)$ は定数関数。■

レポート問題

[c-8] $f(z)$ を複素平面全体で正則な複素関数とする。 $|z| \leq r$ (原点中心で半径 r の円とその内部) における $|f(z)|$ の最大値を $M(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ とおく。

$$\frac{M(r)}{r^{n+1}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad (132)$$

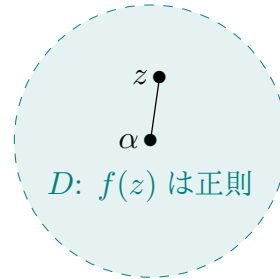
が成り立つとき、 $f(z)$ は n 次以下の多項式 $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ となることを示せ。(ヒント: 上と同様、コーシーの積分公式の微分バージョン (107) を用いる。原点中心と $z = \alpha$ 中心の2つの円は異なることに注意すること。)

1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

1.5.1 テイラー展開

テイラー展開

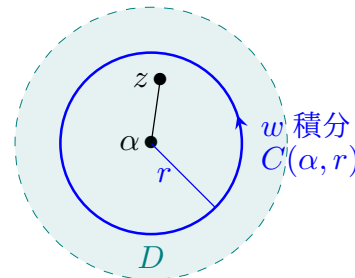
関数 $f(z)$ が点 $z = \alpha$ を中心とした円板領域 D 内で正則であるとき、 $f(z)$ はこの領域内で常に次の形のべき級数で展開できる (テイラー展開)。



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n. \quad (133)$$

(証明) : 任意の D 上の点 z に対して、コーシーの積分公式 (106) より、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (134)$$



と書ける。ただし右辺は z ではなく複素数 w による積分であり、円周経路 $C(\alpha, r)$ の半径 r は $|z - \alpha|$ より大きくとる。この経路上で $|w - \alpha| = r > |z - \alpha|$ なので

$$\begin{aligned} \frac{f(w)}{w - z} &= \frac{f(w)}{(w - \alpha) - (z - \alpha)} \\ &= \frac{f(w)}{w - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right)} = \frac{f(w)}{w - \alpha} \left[1 + \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right) + \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{f(w)}{w - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right)^n \quad \left(\text{for } \left| \frac{z - \alpha}{w - \alpha} \right| < 1. \quad \because (83) \right). \end{aligned} \quad (135)$$

これを (134) に代入すると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \left[\frac{f(w)}{w - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha}\right)^n \right] dw. \quad (136)$$

w の経路 $C(\alpha, r)$ ($|w - \alpha| = r > |z - \alpha|$) の上でこの級数は一様収束するので積分と無限和を交換できて

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C(\alpha, r)} \left[\frac{f(w)}{w - \alpha} \left(\frac{z - \alpha}{w - \alpha} \right)^n \right] dw \quad (137)$$

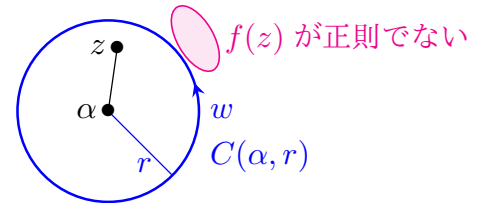
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw \right) (z - \alpha)^n \quad (138)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n \quad \because \text{コーシーの積分公式 (微分バージョン) (107)} \quad \blacksquare$$

(139)

▶ テイラー展開

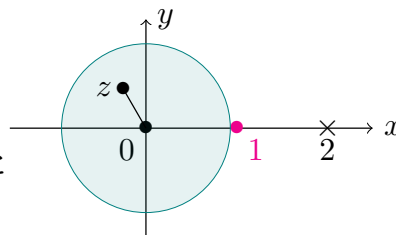
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw \right) (z - \alpha)^n,$$



は、 w の経路 $C(\alpha, r)$ が正則な範囲で取れる限り可能。

収束半径は α と「 α から最も近い $f(z)$ が正則でない点 (特異点)」までの距離となる。

▶ 例として、 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ をいくつかの点の周りでテイラー展開してみよう。



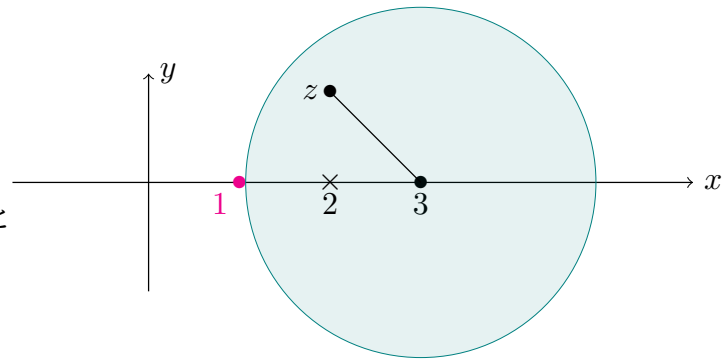
まず $z = 0$ のまわりで展開すると

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1). \quad \text{---(i)}$$

収束半径は 1 ($z = 0$ から最寄りの特異点の $z = 1$ までの距離)。

- 収束半径の中の点、例えば $z = 1/2$ を代入すると、左辺は $\frac{1}{1-1/2} = 2$ となつて、右辺も $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2$ と収束して一致する。
- 収束半径の外側の点、例えば $z = 2$ を代入すると、左辺は $\frac{1}{1-2} = -1$ だけど、右辺は $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ となつて発散してしまう。

▶ 同じ $\frac{1}{1-z}$ を $z=3$ のまわりで展開すると



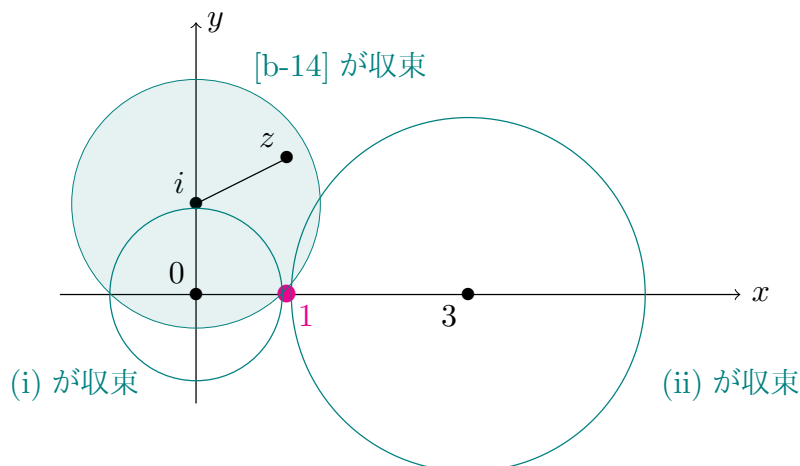
$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{-2-(z-3)} = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-3}{-2}\right)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-3}{-2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (z-3)^n \quad (|z-3| < 2). \quad \text{---(ii)} \end{aligned}$$

収束半径は2。今度は $z=2$ は収束半径の中に入っていて、右辺に代入すると、 $(-1/2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^n = -1$ に収束して、左辺と一致する。

▶ もう1つ $z=i$ まわりも。

レポート問題

[b-14] $f(z) = \frac{1}{1-z}$ を $z=i$ のまわりで展開し、収束半径が $\sqrt{2}$ であることを示せ。[b-7] の結果を用いてもよい。



[b-14] が収束する範囲は (i) や (ii) が収束する範囲と重なりがある。

(例えば $z=i/2$ では、(i) のテイラー展開と [b-14] のテイラー展開がどちらも収束する。)

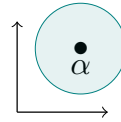
重なっているところでは2つの異なるテイラー展開が同じ関数を表している。

→ この「テイラー展開の重なり」は 1.6 節で再び見る。

▶ またテイラー展開から次のことも言える。

ゼロ点の孤立

複素関数 $f(z)$ が点 $z = \alpha$ を中心とした円板領域 D で正則かつ $f(\alpha) = 0$ とする。このとき $f(z)$ が恒等的にゼロでない限り $z = \alpha$ は「孤立したゼロ点」である。
 $(\exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |z - \alpha| < \delta \implies f(z) \neq 0.)$



(証明): 仮定より $f(z)$ は $z = \alpha$ の周りで

$$f(z) = c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \dots \quad (140)$$

とテイラー展開できる。 $f(\alpha) = 0$ より $c_0 = 0$ 。さらに「 $f(z)$ が恒等的にゼロでない」と仮定すると、ある $c_m \neq 0$ ($m \geq 1$) が存在して

$$f(z) = c_m(z - \alpha)^m + c_{m+1}(z - \alpha)^{m+1} + c_{m+2}(z - \alpha)^{m+2} + \dots \quad (141)$$

$$= (z - \alpha)^m \underbrace{(c_m + c_{m+1}(z - \alpha) + c_{m+2}(z - \alpha)^2 + \dots)}_{f_m(z)} \quad (142)$$

$f_m(z)$ の連続性 (証明略) と $f_m(\alpha) = c_m \neq 0$ から、 $\exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |z - \alpha| < \delta \implies f_m(z) \neq 0$ 。よって同じ δ に対して $0 < |z - \alpha| < \delta \implies f(z) \neq 0$ 。■

コメント

- (i) 正則関数でなければ必ずしも「ゼロ点の孤立」は成り立たない。
 (例: $f(z) = z + \bar{z}$ は虚軸上 ($z = iy$) で連続的に $f(z) = 0$ 。)
- (ii) $f(z) = (z - 1)(z - 2)$ のように、離れたゼロ点があることはある。
- (iii) 上の「ゼロ点の孤立」は 1.6 節の解析接続で用いる。

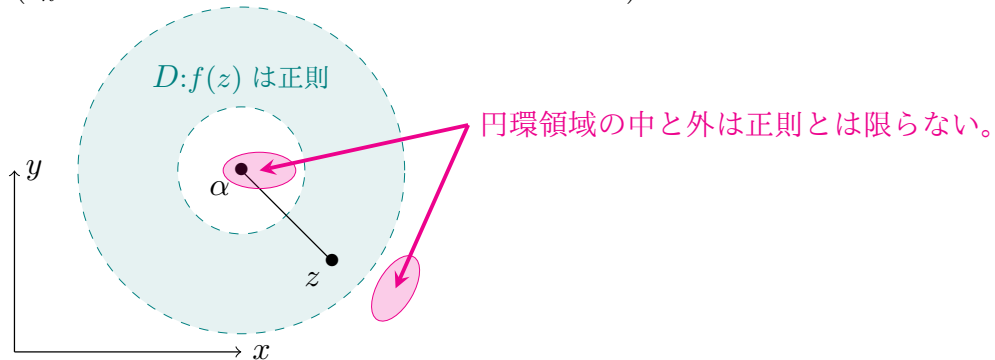
1.5.2 ローラン展開と留数

ローラン展開

関数 $f(z)$ が点 $z = \alpha$ を中心とした円環領域 D ($0 < r_1 < |z - \alpha| < r_2$) 内で正則であるとき、 $f(z)$ はこの領域内で常に次の形で展開できる。(ローラン展開)

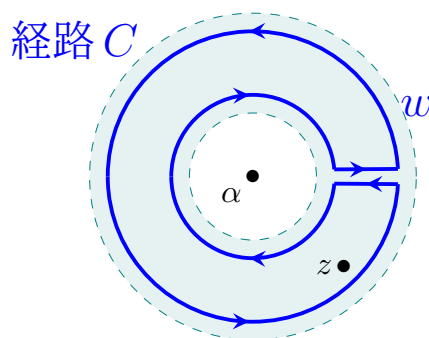
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n = c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + \frac{c_{-2}}{(z - \alpha)^2} + \frac{c_{-3}}{(z - \alpha)^3} + \cdots \quad (143)$$

(c_n の具体的な表式は以下の証明の中で示す。)



(証明)

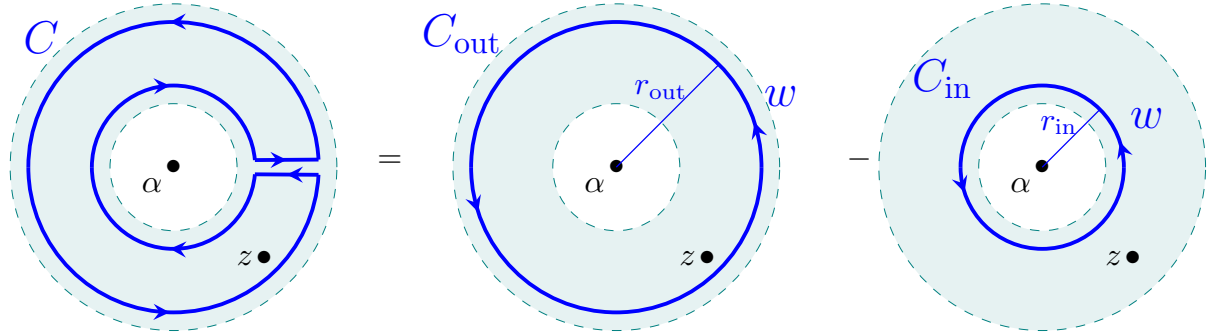
図のような経路 C を考える。 C 内で $f(z)$ は正則なので、コーシーの積分公式より



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (144)$$

経路 C は $C_{\text{out}} = C(\alpha, r_{\text{out}})$ と $C_{\text{in}} = C(\alpha, r_{\text{in}})$ を用いて $C = C_{\text{out}} - C_{\text{in}}$ と分け

られるので



$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{out}}} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{f_{\text{out}}(z)} + \underbrace{\frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{f_{\text{in}}(z)}. \quad (145)$$

($C_{\text{out/in}}$ は内部が正則でない (正則とは限らない) ので、ここから先それぞれの項 $f_{\text{out/in}}(z)$ でコーシーの積分定理や積分公式が使えないことに注意。) (← 講義後追記)

まず $f_{\text{out}}(z)$ の中の $\frac{1}{w-z}$ は、積分変数 w が経路 C_{out} 上で $|w-\alpha| = r_{\text{out}} > |z-\alpha|$ を満たすので

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-\alpha) - (z-\alpha)} = \frac{1}{w-\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{w-\alpha}} = \frac{1}{w-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right)^n, \quad (146)$$

と展開できる。級数は C_{out} 上で一様収束するので

$$\begin{aligned} f_{\text{out}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{out}}} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{out}}} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \quad \because (146) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{out}}} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \right)}_{c_n \ (n \geq 0)} (z-\alpha)^n \quad \because \text{一様収束} \quad (147) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n. \quad (148)$$

次に $f_{\text{in}}(z)$ の中の $\frac{1}{w-z}$ は、経路 C_{in} 上で $|w-\alpha| = r_{\text{in}} < |z-\alpha|$ なので

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-\alpha) - (z-\alpha)} = \frac{-1}{z-\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-\alpha}{z-\alpha}} = \frac{-1}{z-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha} \right)^n, \quad (149)$$

と展開できる。級数は C_{in} 上で一様収束するので

$$\begin{aligned} f_{\text{in}}(z) &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(w-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}} dw \quad \because (149) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} f(w)(w-\alpha)^n dw \right)}_{c_{-n-1} \ (n \geq 0)} \frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}} \quad \because \text{一様収束} \quad (150) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-\alpha)^{-n}. \quad (151)$$

以上より

$$f(z) = f_{\text{out}}(z) + f_{\text{in}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n. \quad \blacksquare \quad (152)$$

- ▶ ローラン展開はテイラー展開を含む。 もし円環領域の内側で $f(z)$ が正則なら、 $f_{\text{in}}(z) = 0$ であり*3、 $c_{-1} = c_{-2} = \dots = 0$ となるので、ローラン展開はテイラー展開に帰着する。

*3 $f_{\text{in}}(z)$ の定義

$$f_{\text{in}}(z) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_{\text{in}}} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

において、 w 積分の被積分関数を $g(w) = f(w)/(w-z)$ とおくと、積分は

$$\oint_{C_{\text{in}}} g(w) dw,$$

と書いて、 $g(w)$ は w の関数としてみたときに、 C_{in} およびその内部で正則です。したがって、「コーシーの積分定理」(1.4.4) より、

$$\oint_{C_{\text{in}}} g(w) dw = 0,$$

よって $f_{\text{in}}(z) = 0$ 、となる。あるいは、式(150)の w 積分でコーシーの積分定理を用いて $c_{-1} = c_{-2} = \dots = 0$ としても同じ結論が得られる。

————— 10/17、ここまで —————

10/17に出題したレポートは [b-10]~[b-14]、[c-8] でした。

講義後、付録 A に [b-1]~[b-6] の解答例を追加しました。

————— 10/24、ここから —————

先週までのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標

1.2 準備

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.3 複素微分と正則関数 (コーシー・リーマン関係式、など)

1.4 複素積分

1.4.1 定義

1.4.2 (すぐわかる) 性質

1.4.3 複素積分の例

1.4.4 コーシーの積分定理 $\oint f(z)dz = 0$

1.4.5 コーシーの積分公式 $f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$

1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

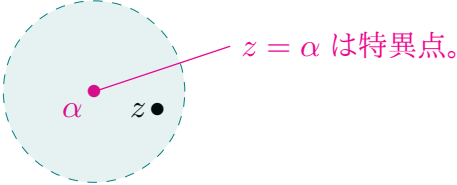
1.5.1 テイラー展開

1.5.2 ローラン展開: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n$ (テイラー展開を含む)

← いまココ

▶ 特に「孤立特異点のまわりのローラン展開」が重要である。

$f(z)$ が $z = \alpha$ を中心とした円板領域 D 内で
 $z = \alpha$ を除いて正則なとき、



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n = c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \dots$$

$$+ \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + \frac{c_{-2}}{(z - \alpha)^2} + \frac{c_{-3}}{(z - \alpha)^3} + \dots \quad (153)$$

と展開できる。係数は円周経路 $C(\alpha, r) \subset D$ を用いて

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (154)$$

で与えられる。

言葉をいくつか定義する。

- α が $f(z)$ の孤立特異点である。
 $\iff z = \alpha$ が特異点、かつ $\exists r > 0$, s.t. $0 < |z - \alpha| < r \implies f(z)$ が正則。
- 負べきの次数に最大値 m があるとき α を $f(z)$ の m 位の極という。
- 負べきの次数に上限がなく無限に続くとき、 α を $f(z)$ の真性特異点という。
- 孤立特異点のまわりのローラン展開の -1 次の係数 c_{-1} を留数という。

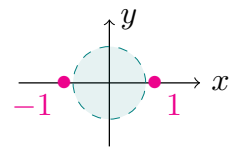
留数: $\text{Res}(f, \alpha) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha, r)} f(z) dz.$

→ 次節 1.5.3 の主役。

- ▶ (留数定理に行く前に) ローラン展開の具体例をいくつか見ておこう。例として

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}. \quad (155)$$

を考える。まず $z = 0$ のまわりで $|z| < 1$ の範囲で展開すると、

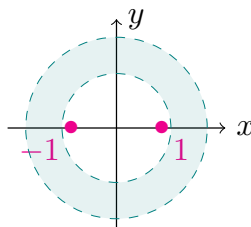


$$f(z) = (-z) \frac{1}{1 - z^2} = (-z) \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n$$

$$= -z - z^3 - z^5 - \dots \quad (|z| < 1). \quad (156)$$

これはただのテイラー展開。

- ▶ 次に同じ $z = 0$ のまわりで、今度は $|z| > 1$ で展開すると



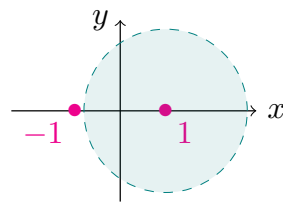
$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{z}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - 1/z^2} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \dots \quad (|z| > 1). \quad (157)$$

このときローラン展開の -1 次の係数は $c_{-1} = 1$ だが、これは留数とは呼ばない。(孤立特異点のまわりの展開ではないため。)

同じ $f(z)$ なのに (156) と (157) で全然展開式が違うのは、収束する範囲が違うから。

- ▶ 今度は孤立特異点 $z = 1$ のまわりで、 $0 < |z - 1| < 2$ の範囲でローラン展開してみよう。



$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 1} \right) \quad (158)$$

であり、第二項は

$$\frac{1}{z + 1} = \frac{1}{2 + (z - 1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - 1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z - 1}{2}\right)^n \quad (|z - 1| < 2), \quad (159)$$

と展開できるので、結局

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} (z - 1)^n \quad (0 < |z - 1| < 2), \quad (160)$$

となる。したがって $z = 1$ における留数は $\text{Res}(f, 1) = 1/2$ となる。

レポート問題

[b-15] 上の例 $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$ について以下の問いに答えよ。

1. $f(z)$ を $z = -1$ のまわりで $0 < |z + 1| < 2$ の範囲で $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z + 1)^n$ とローラン展開し、係数 c_n を求めよ。 $(z = -1$ での留数 $c_{-1} = \text{Res}(f, -1)$ はいくつになるか?)
2. $f(z)$ を $z = -1$ のまわりで、 $|z + 1| > 2$ の範囲で $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z + 1)^n$ とローラン展開し、係数 c_n を求めよ。

レポート問題

[b-16] $f(z) = \exp(1/z)$ について以下の問いに答えよ。ただし $\exp z$ のテイラー展開は既知として良い。

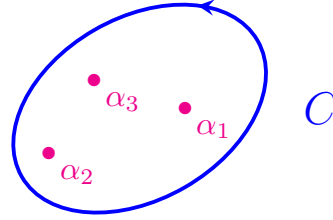
1. $\exp(1/z)$ を $z = 0$ のまわりでローラン展開せよ。
2. $\exp(1/z)$ の $z = 0$ における留数を求めよ。
3. $z = 0$ が $\exp(1/z)$ の真性特異点になっていることを確認せよ。

1.5.3 留数定理

留数定理

経路 C (正の向きの単純閉曲線) とその内部を含む領域を考える。関数 $f(z)$ がこの領域で C の内部の N 個の孤立特異点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ を除いて正則であるとき

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(f, \alpha_k). \quad (161)$$



周積分の値は、内部の留数の和だけで決まる。

(証明): ここまでやってきたことを組み合わせるだけ。

1. まず経路を分割。(コーシーの積分定理)

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^N \oint_{C_k} f(z) dz.$$

2. 次に各経路でローラン展開。

$$\oint_{C_k} f(z) dz = \oint_{C_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} (z - \alpha_k)^n dz = \oint_{C_k} \left[\dots + \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - \alpha_k} + c_0^{(k)} + c_1^{(k)} (z - \alpha_k) + \dots \right] dz \quad (162)$$

3. それぞれの経路で $z(\theta) = \alpha_k + re^{i\theta}$ として円周積分すると、

$$\oint_{C_k} (z - \alpha_k)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases} \quad (1.4.3 \text{ 節参照}) \quad (163)$$

$$\therefore \oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}^{(k)} = 2\pi i \text{Res}(f, \alpha_k). \quad (164)$$

4. 足して $\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(f, \alpha_k)$. ■

留数の求め方

定義によれば、それぞれの孤立特異点のまわりでローラン展開して

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}^{(k)}}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - \alpha_k} + c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(z - \alpha_k) + c_2^{(k)}(z - \alpha_k)^2 + \cdots, \quad (165)$$

この $c_{-1}^{(k)}$ が留数となる。しかし、もし極の位がわかっている場合にはいちいち展開しなくても留数を求められる便利な方法がある。

▶ まず $z = \alpha$ が 1 位の極である場合は、そのまわりで

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \cdots, \quad (166)$$

と展開できるので、

$$\text{Res}(f, \alpha) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z), \quad (167)$$

とすれば留数が求まる。

▶ 一般に $z = \alpha$ が m 位の極である場合は、そのまわりで

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - \alpha)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z - \alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + c_0 + c_1(z - \alpha) + \cdots, \quad (168)$$

と展開できるので、

$$\boxed{\text{Res}(f, \alpha) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - \alpha)^m f(z) \right)}, \quad (169)$$

とすれば留数が求まる。

▶ 例: $f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)^3}$ ($\alpha \neq \beta$) は $z = \alpha$ に 1 位の極、 $z = \beta$ に 3 位の極を持つ。それぞれの留数は

$$\text{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)f(z) = \frac{1}{(\alpha - \beta)^3}, \quad (170)$$

$$\text{Res}(f, \beta) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{d^2}{dz^2} \left((z - \beta)^3 f(z) \right) = \frac{1}{(\beta - \alpha)^3}. \quad (171)$$

▶ コメント：極の位数について

上の例では極の位数が1位、3位と見た目で見えるが、より一般には？

$z = \alpha$ が $f(z)$ の孤立特異点であるとき、ある自然数 n と $\beta \neq 0$ が存在して

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)^n f(z) = \beta (\neq 0), \quad (172)$$

であれば、 $z = \alpha$ は $f(z)$ の n 位の極である。

と言える。これは、 $z = \alpha$ が $f(z)$ の m 位の極のとき、(168) のようにローラン展開できるので

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha)^n f(z) = \begin{cases} \text{発散} & (n < m) \\ c_{-m} \neq 0 & (n = m), \\ 0 & (n > m) \end{cases}, \quad (173)$$

となることから分かる。

特に、 $f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^n} g(z)$ のようにきれいに因数分解された形をしていて、 $\lim_{z \rightarrow \alpha} g(z) = \beta$ が存在して $\beta \neq 0$ であるときは、見た目ですぐに n 位の極、と分かる。((170)、(171) の例はこのパターン。)

レポート問題

[b-17] $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ の全ての極とそこでの留数を求めよ。

[b-18] $\oint_{C(0,1)} z^2 \sin(1/z) dz$ を求めよ。

レポート問題

[b-19] $g(z), h(z)$ を正則関数とする。(← 条件足しました。11/7)

複素関数 $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ が $z = \alpha$ に1位の極を持つことが分かっている、かつ $g(\alpha) \neq 0$ のとき、留数が

$$\text{Res}(f, \alpha) = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}. \quad (174)$$

で与えられることを示せ。

1.5.4 実数積分への応用

留数定理を使うと、様々な実数積分が(簡単に)計算できる!

1.5.4.A 三角関数の1周積分

▶ 実数積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta. \quad (175)$$

を留数積分を用いて求めてみよう。これは、

- (i) 経路 $C(0,1)$: $z(\theta) = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を考え、
- (ii) $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ を代入し
- (iii) $d\theta = \frac{dz}{iz}$ とした複素周積分

$$\oint_{C(0,1)} \frac{1}{5 + 3 \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)} \frac{dz}{iz}, \quad (176)$$

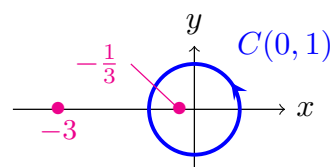
に帰着する。実際、パラメータ表示での複素積分の定義を代入すると

$$\text{(上式)} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \left(\frac{z(\theta) + z(\theta)^{-1}}{2} \right)} \underbrace{\frac{1}{iz(\theta)} \frac{dz(\theta)}{d\theta}}_{=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \cos \theta} d\theta = I. \quad (177)$$

となって元の実数積分に帰着する。複素積分は留数定理で簡単に求められて

$$I = \oint_{C(0,1)} \frac{1}{5 + 3 \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)} \frac{dz}{iz} = \oint_{C(0,1)} \frac{-2i}{10z + 3z^2 + 3} dz \quad (178)$$

$$= \oint_{C(0,1)} \underbrace{\frac{-2i}{3(z + 1/3)(z + 3)}}_{f(z)} dz. \quad (179)$$



ここで $C(0,1)$ 内に特異点は $z = -1/3$ だけなので、

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1/3) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1/3} (z + 1/3)f(z) = \frac{\pi}{2}. \quad (180)$$

と答が求まる。

▶ 一般に、 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の関数の 1 周積分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \quad (181)$$

は上の例と同様にして

(i) 経路 $C(0, 1)$: $z(\theta) = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を考え

(ii) $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$, $\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ を代入し

(iii) $d\theta = \frac{dz}{iz}$ とすれば

複素周積分に帰着できて

$$I = \oint_{C(0,1)} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (182)$$

で与えられる。特に、 $R(\cos \theta, \sin \theta)$ が有理関数

$$R(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)} \quad (P, Q \text{ は } \cos \theta, \sin \theta \text{ の多項式}) \quad (183)$$

のときは（経路上で Q がゼロになる場合を除いて）留数積分で計算できる。

レポート問題

[b-20]

1. 上の例のように、 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ の形の実数積分が留数定理によって計算できる例を 1 つ自分で考え、留数定理を用いて積分値を求めよ。ただし $R(\cos \theta, \sin \theta)^{-1} \neq 0$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする。
2. 1. の実数積分を（複素積分以外の）何らかの方法で計算し、結果を検算せよ。（解析的に計算出来ればそれでも良いですし、自分で数値計算で確認しても良いです。あるいは Wolfram Alpha などのツールで計算した結果の画像を添付する、とかでも良いです。）

▶ 次に第二項（追加した半円の経路積分）がゼロになることを示す。1.4.2 でやった「複素積分の絶対値の上限」を用いて

$$\left| \int_{C_\infty} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in C_\infty} |f(z)| \cdot (C_\infty \text{の経路長}) \quad \because (85) \quad (190)$$

$$= \max_{z \in C_\infty} \left| \frac{1}{z^4 + 1} \right| \cdot (C_\infty \text{の経路長}) \quad (191)$$

$$= \frac{1}{|R^4 - 1|} \cdot \pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (192)$$

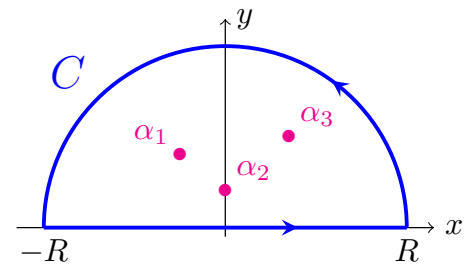
▶ したがって、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad (193)$$

$$= \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz}_{\text{留数積分}} - \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_\infty} f(z) dz}_{=0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \text{計算できた!} \quad (194)$$

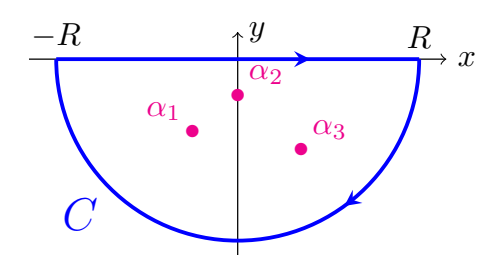
▶ 一般に $f(z)$ が

1. 実軸上に特異点を持たない。
 2. 上半面 ($\text{Im} z > 0$) に有限個の極をもつ。
 3. 上半面の半円経路の積分 $\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ 。 ($\lim_{R \rightarrow \infty} |Rf(Re^{i\theta})| = 0$ for $0 \leq \theta \leq \pi$)
- の条件をみたすとき、上の例と同様にして計算できて

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } \alpha_k > 0} \text{Res}(f, \alpha_k).$$


のように $\pm\infty$ の範囲の実数積分が留数計算に帰着できる。

▶ 下半面の半円経路の積分がゼロになる場合 ($\lim_{R \rightarrow \infty} |Rf(Re^{i\theta})| = 0$ for $-\pi \leq \theta \leq 0$) も同様で、経路を下半面で閉じて

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } \alpha_k < 0} \text{Res}(f, \alpha_k).$$


レポート問題

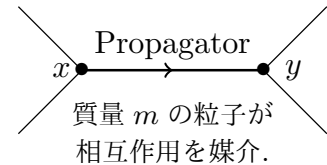
[b-21]

1. 上の例のように、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の形の実数積分が「無限遠の積分路の追加」と留数定理によって計算できる例を1つ自分で考え、留数定理を用いて積分値を求めよ。
2. 1. の実数積分を（複素積分以外の）何らかの方法で計算し、結果を検算せよ。（解析的に計算出来ればそれでも良いですし、自分で数値計算で確認しても良いです。あるいは Wolfram Alpha などのツールで計算した結果の画像を添付する、とかでも良いです。）

レポート問題

[c-9] 「場の量子論」において、以下のような“Feynman Propagator”という量が重要な役割を果たす。

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$$



where $\begin{cases} p = (p^0, \vec{p}), & p^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2, \\ x = (x^0, \vec{x}), & p \cdot (x-y) = p^0(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}). \end{cases}$

$$\int d^4p = \int d^3\vec{p} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0.$$

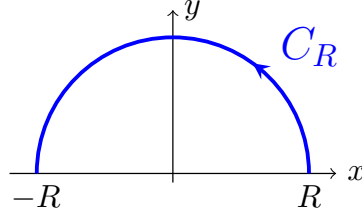
留数定理を用いて p^0 積分を実行し、以下の式を示せ。

$$D_F(x-y) \xrightarrow{\epsilon > 0, \epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \times \begin{cases} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=E_p} & (\text{for } x^0 > y^0) \\ e^{-ip \cdot (y-x)} \Big|_{p^0=E_p} & (\text{for } y^0 > x^0) \end{cases}$$

where $E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$

1.5.4.C ジョルダンの補助定理を使う例

▶ ジョルダンの補助定理:



上半面の半円経路 C_R ($z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$) と $a > 0$ に対して、

$$f(z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \text{ for } \forall z \in C_R \implies \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (195)$$

レポート問題

[b-22] 以下の手順でジョルダンの補助定理を示せ。

(i) $\max_{z \in C_R} |f(z)| = M(R)$ とするとき、

$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq M(R) R \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta. \text{ を示せ。}$$

(ii) $\int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta$ を示せ。

(iii) $\sin \theta \geq (2/\pi)\theta$ for $0 \leq \theta \leq \pi/2$ を示せ。

(iv) (iii) の結果を用いて $R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{2a}$ を示せ。

(v) 以上を組み合わせてジョルダンの補助定理を示せ。

▶ ジョルダンの補助定理を使う例:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx. \quad (196)$$

まず式変形して

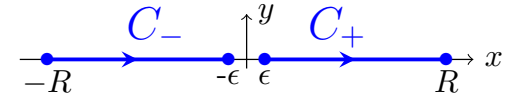
$$I = \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \int_\epsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx \quad (197)$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \int_\epsilon^R \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x} \right) dx. \quad (198)$$

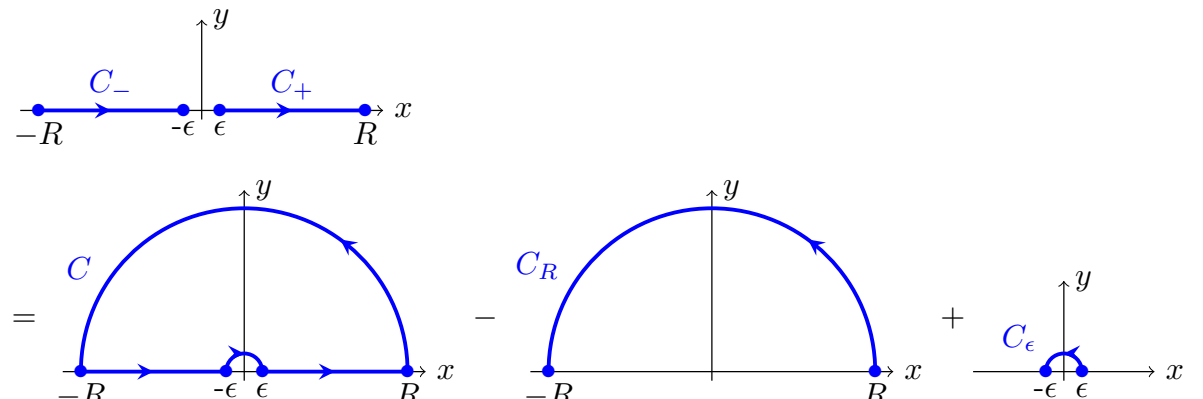
ただし $\epsilon \rightarrow +0$ は $\epsilon > 0, \epsilon \rightarrow 0$ の意味である。第二項は $x \rightarrow -x$ と変数変換して

$$- \int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{x} dx = - \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{ix}}{-x} (-dx) = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx. \quad (199)$$

よって

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2i} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \cdot \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \int_{C_+ + C_-} f(z) dz. \quad \left(f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \right)
 \end{aligned} \tag{200}$$


ここで半径 ϵ と R の半円を加えて



$$2iI = \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \int_{C_- + C_+} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow +0} \left(\oint_C - \int_{C_R} + \int_{C_\epsilon} \right) f(z) dz \tag{201}$$

まず、 C の内部に $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ の特異点はないので $\oint_C f(z) dz = 0$.

次に、ジョルダンの補助定理より*4、 $\int_{C_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$.

最後に、経路 C_ϵ は $z(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とパラメータ表示できるので

$$\int_{C_\epsilon} f(z) dz = \int_0^\pi f(\epsilon e^{i\theta}) \frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{d\theta} d\theta \tag{202}$$

$$= \int_0^\pi \frac{\exp(i\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \tag{203}$$

$$= i \int_0^\pi (1 + i\epsilon e^{i\theta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \pi i. \tag{204}$$

以上を (201) に代入して $2iI = \pi i$ 。よって

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{205}$$

*4 (195) 式で $a = 1$ 、 $f(z) = 1/z$ とすれば良い。(195) 式の $f(z)$ とココでの $f(z) = e^{iz}/z$ は違うものなので注意。

1.5.4.D 主値積分

- ▶ 前節 1.5.4.C の途中計算で $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$ という形が出てきた。一般に、実関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ 内に $x = c$ に特異点を持つとき、特異点をはさんで微小距離 $\pm\epsilon$ 離れたところまでの積分を実行し、足してから $\epsilon \rightarrow 0$ とする、という

$$\text{主値積分: } P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right). \quad (206)$$

が定義できる。(他にも「 $P.V. f(\dots)$ 」という書き方など、色々な表記があるようです。)

- ▶ 例:

$$\begin{aligned} P \int_0^3 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{x-1} dx + \int_{1+\epsilon}^3 \frac{1}{x-1} dx \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left([\ln|x-1|]_0^{1-\epsilon} + [\ln(x-1)]_{1+\epsilon}^3 \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\ln \epsilon - 0 + \ln 2 - \ln \epsilon) = \ln 2. \end{aligned}$$

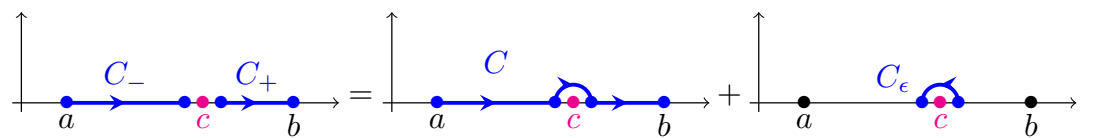
両サイドの微小区間 (ϵ) が異なると、一般には値が異なったり発散してしまったりするので注意。

- ▶ 複素積分との関係

主値積分

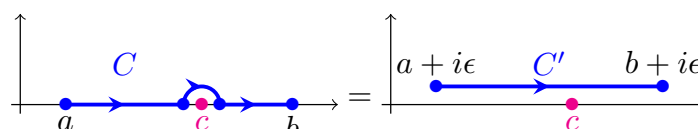
$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\epsilon} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\epsilon}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right), \quad (207)$$

を求めたいとする。ただし $f(x)$ を複素数に拡張した $f(z)$ は実軸上 $[a, b]$ の近くで正則であるとする。前節 1.5.4.C のように半径 ϵ の半円を足した経路 C を考えて



$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{C_- + C_+} \frac{f(z)}{z-c} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_C \frac{f(z)}{z-c} dz + \int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-c} dz \right). \quad (208)$$

経路 C は、少しだけずらすと



$$\int_C \frac{f(z)}{z-c} dz = \int_{C'} \frac{f(z)}{z-c} dz = \int_a^b \frac{f(x)}{x+i\epsilon-c} dx. \quad (209)$$

ただし端点でのずらしから来る寄与が $\epsilon \rightarrow 0$ でゼロになることを用いた。

$z = b \rightarrow z = b + i\epsilon$ の経路を $C_{b \rightarrow b+i\epsilon}$ と書くと、

$$\left| \int_{C_{b \rightarrow b+i\epsilon}} \frac{f(z)}{z-c} dz \right| \leq \underbrace{\max_{z \in C_{b \rightarrow b+i\epsilon}} \left| \frac{f(z)}{z-c} \right|}_{< \infty} \times \underbrace{(\text{経路 } C_{b \rightarrow b+i\epsilon} \text{ の長さ})}_{=\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

となるので、 $f(z)$ が $z = b$ の近くで正則である限りは、確かにゼロとなる。
 $z = a$ の方も同様。(講義後追記:) さらに $f(x)$ と $f(x + i\epsilon)$ の差が $\epsilon \rightarrow 0$ で
 ゼロに行くこと(証明略)も用いています。

一方、経路 C_ϵ の積分は $z(\theta) = c + \epsilon e^{i\theta}$ とパラメータ表示して

$$\int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-c} dz = \int_0^\pi \frac{f(z(\theta))}{z(\theta)-c} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_0^\pi f(c + \epsilon e^{i\theta}) i d\theta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \pi i f(c). \quad (210)$$

以上より

$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x+i\epsilon-c} dx + \pi i f(c). \quad (211)$$

が得られる。

————— 10/24、ここまで —————

10/24に出題したレポートは [b-15]~[b-22]、[c-9] でした。

講義後、付録 A に [b-7]~[b-9] の解答例を追加しました。

————— 10/31、ここから —————

先週までのあらすじ

1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

1.5.2 ローラン展開と留数:
$$\begin{cases} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n \\ \text{Res}(f, \alpha) = c_{-1}. \end{cases}$$

1.5.3 留数定理:
$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(f, \alpha_k)$$

1.5.4 実数積分への応用

- A. 三角関数 B. 無限遠の積分路の追加
- C. ジョルダンの補助定理を使う例
- D. 主値積分 ← いまココ

10/24 はすごく中途半端なところで終わってしまいました。すいません。

1.5.4.D では、主値積分を定義して、経路を変更することで（図を描く）

$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x+i\epsilon-c} dx + \pi i f(c).$$

となるところまでやりました。同様に、下半面の半円経路を考えると（図を描く）

また下半面 $\text{Im}z < 0$ の半円の経路を考えて、

$$P \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x-i\epsilon-c} dx - \pi i f(c). \quad (212)$$

これらの式は（正則関数と共に積分されることを前提に）形式的に

$$\boxed{\begin{aligned} P \frac{1}{x-c} &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x-c+i\epsilon} + \pi i \delta(x-c) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x-c-i\epsilon} - \pi i \delta(x-c). \end{aligned}} \quad (213)$$

と書ける。

（ただし $\delta(x)$ はデルタ関数： $\delta(x) = 0$ for $x \neq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-c)dx = f(c)$ 。）

さらに上の式から次の式も得られる。

$$\boxed{\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x-c-i\epsilon} - \frac{1}{x-c+i\epsilon} \right) = 2\pi i \delta(x-c)}. \quad (214)$$

1.5.4.E 分散関係式

- ▶ 1.5.4.D の結果より、以下が示せる。

分散関係式／クラマース・クローニツヒの関係式

複素平面の上半面で正則かつ $|f(z)| \xrightarrow{\text{Im}z \geq 0, |z| \rightarrow \infty} 0$ を満たす関数 $f(z)$ に対して

$$\begin{cases} \text{Re}f(a) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}f(x)}{x-a} dx. \\ \text{Im}f(a) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}f(x)}{x-a} dx. \end{cases} \quad (a \text{ は実数}) \quad (215)$$

これらは関数 $f(z)$ の実部（虚部）を虚部（実部）の積分を用いて表した式で、線形応答理論など様々な場面で登場する。

- ▶ (証明) 1.5.4.D の結果より、 $f(z)$ が実軸上 $(-\infty, \infty)$ で特異点を持たない場合は

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x+i\epsilon-a} dx + \pi i f(a). \quad (216)$$

ここで、 $f(z)$ が複素平面の上半面で正則かつ $|f(Re^{i\theta})| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を満たすとき、右辺第一項の積分を半径 $R \rightarrow \infty$ の上半面半円で閉じてゼロになる。

関数 $g(z) = \frac{f(z)}{z+i\epsilon-a}$ を考えると、この関数は複素平面の上半面で正則（分母から来る極 $z = a - i\epsilon$ は下半面）なので、コーシーの積分定理より

$$0 = \oint_{\text{上半面で閉じた経路}} g(z) dz = \underbrace{\int_{\text{実軸}} g(z) dz}_{(216) \text{ 右辺第一項}} + \int_{\text{上半面半円}} g(z) dz. \quad (217)$$

一方、

$$\begin{aligned} \left| \int_{\text{上半面半円}} g(z) dz \right| &\leq \max_{\text{上半面半円}} |g(z)| \times (\text{半円の長さ}) \\ &\leq \frac{\max_{0 \leq \theta \leq \pi} |f(Re^{i\theta})|}{R - |a|} \cdot \pi R \xrightarrow{|z|=R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (218)$$

よって (216) 右辺第一項 = 0.

よって

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \pi i f(a). \quad (219)$$

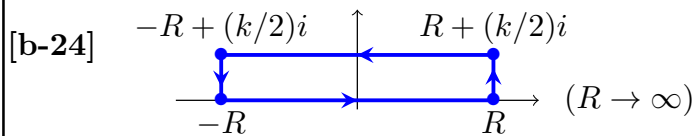
両辺の実部と虚部をとると (215) が示せる。

レポート問題

[b-23] 条件を満たす具体的な関数 $f(z)$ を一つ代入してクラマース・クローニッヒの関係式の両辺を計算し、一致することを確認せよ。

1.5.4.F (虚軸方向にずらした) ガウス積分

レポート問題



図のような経路を考えることによって実数積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - ikx} dx \quad (220)$$

を求めよ。(11/7 追記: 別の経路を考えても構いません。)

コメント

- この形の積分も様々な場面で登場する。
(例: 熱伝導方程式 $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ のフーリエ変換での解法。)
- $k = 0$ の場合のガウス積分については以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2} \quad (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta) \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r dr e^{-r^2} = \left[-\pi e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi. \end{aligned} \quad (221)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \quad (222)$$

1.5.4.G 直交多項式への応用 (物理数学 2 の予習)

レポート問題

ロドリゲスの公式

$$P_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)Q(x)^n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (223)$$

に以下の表の式を代入すると、様々な直交多項式が得られる。^{a,b}

| c_n | $w(x)$ | $Q(x)$ | 名前 |
|---------------------|------------|-----------|-----------|
| $(-1)^n / (2^n n!)$ | 1 | $1 - x^2$ | ルジャンドル多項式 |
| 1 | e^{-x} | x | ラゲール多項式 |
| $(-1)^n$ | e^{-x^2} | 1 | エルミート多項式 |

(224)

[b-25] $n = 0, 1, 2$ の場合について 3 つの多項式の具体的な形を求めよ。

[c-10] ロドリゲスの公式は、コーシーの積分公式を用いて

$$P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} c_n \frac{1}{w(x)} \oint_C \frac{w(z)Q(z)^n}{(z-x)^{n+1}} dz, \quad (225)$$

と書きかえられる。(C は x を中心とした周経路。) この式と、適当な経路と留数定理を用いることによって、上の 3 つの多項式がそれぞれ母関数

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n \quad \text{または} \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{y^n}{n!} \quad (226)$$

の形にまとめられることを示し、母関数の具体的な形を導出せよ。^c

[b-26] 各多項式の直交性について調べて、簡潔に説明せよ。

[b-27] 各多項式の満たす微分方程式について調べて、簡潔に説明せよ。

[b-28] 各多項式の満たす漸化式について調べて、簡潔に説明せよ。

^a 規格化因子 c_n は慣習によって異なる定義の場合もあります。

^b この他にも、ヤコビ多項式、ゲージンバウア多項式、チェビシェフ多項式などが同じ表式から得られます。

^c 母関数を用いて直交多項式を定義することも出来ます。ここではそうせずに、ロドリゲスの公式から出発して母関数を導いてください、という問題です。

1.6 一致の定理と解析接続


1.6.1 一致の定理と解析接続

(いよいよ予告編で書いていた最後のトピックだ。)

▶ 点 $z = 0$ のまわりのテイラー展開で定義された次の複素関数を考えよう。

$$f_1(z) = 1 + 3z + 5z^2 + 7z^3 + 9z^4 + 11z^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n.$$

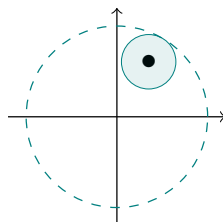
ダランベールの判定法を用いて、この関数 $f_1(z)$ の収束半径は $|z| < 1$ だと分かる。


$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n \quad (|z| < 1).$$

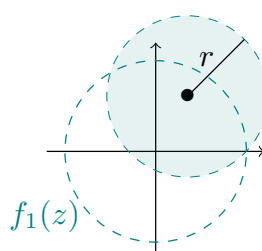
(227)

$|z| > 1$ では関数は定義されていない。(実はちょっと考えると $f_1(z)$ の正体がある有理関数のテイラー展開だと分かるのだが、、しばらく知らないフリをする。)

▶ 次に $f_1(z)$ の収束円内の適当な点 α をとってきて、そこでテイラー展開してみる。


$$\begin{aligned} f_1(z) &= f_1(\alpha) + f_1'(\alpha)(z - \alpha) + \frac{f_1''(\alpha)}{2}(z - \alpha)^2 + \cdots \\ &= c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \cdots \end{aligned}$$

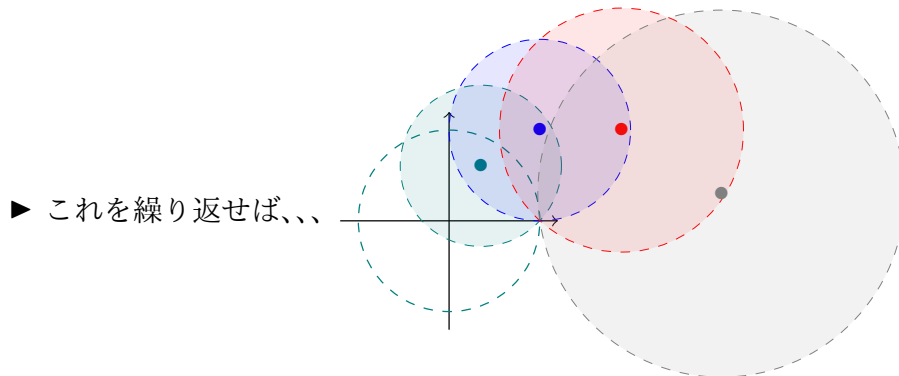
このテイラー展開の収束円は、一般には元の収束円の外にはみ出しても良い。(1.5.1 節の $f(z) = \frac{1}{1-z}$ の例を思い出そう。) そこでこの右辺が収束する領域で、新たに関数 $f_2(z)$ を定義する。


$$f_2(z) = c_0 + c_1(z - \alpha) + c_2(z - \alpha)^2 + \cdots \quad (|z - \alpha| < r).$$

- ▶ 2つの関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が重なっている領域で両者は一致するので、関数

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & (|z| < 1) \\ f_2(z) & (|z - \alpha| < r), \end{cases} \quad (228)$$

を定義すれば、元の定義域よりも広い領域に関数が拡張されたことになる。



複素平面上で正則性を保ったまま関数の定義域を次々と拡張できる。

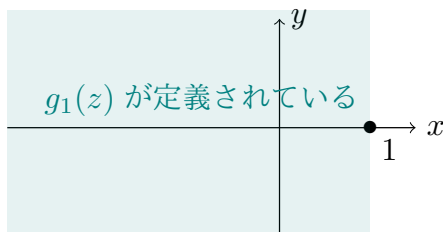
- ▶ 実は今の場合、元の関数 $f_1(z)$ は、 $z = 1$ 以外の全域で定義された関数 $f(z) = \frac{1+z}{(1-z)^2}$ のテイラー展開だった。しかし一般に、そのような「答の関数」を知らなくても、上の方法でテイラー展開で次々と関数の定義域を拡張できる。

コメント：級数によっては、ある限界があってそれを超えて拡張できないこともある。例えば $f(z) = z + z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + \dots$ は収束半径が $|z| < 1$ だが、境界 $|z| = 1$ 上に特異点 $z = \exp(2\pi im/2^n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$) がぎっしり（稠密に）詰まっていて、 $|z| > 1$ に拡張できない。以下ではこのような場合は考えない。

- ▶ 「定義域の拡張」の別の例を見てみよう。以下の実数積分

$$g_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-t(1-z)} dt \quad (\operatorname{Re} z < 1), \quad (229)$$

で複素関数 $g_1(z)$ を定義する。この関数は、 $\operatorname{Re} z < 1$ でのみ定義されている。



実際、 $\operatorname{Re} z < 1$ で上の積分を実行してみると

$$\int_0^{\infty} e^{-t(1-z)} dt = \left[\frac{e^{-t(1-z)}}{-(1-z)} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{1-z} \quad (\operatorname{Re} z < 1). \quad (230)$$

となるが、 $\operatorname{Re} z > 1$ では $t \rightarrow \infty$ で積分が収束しない。

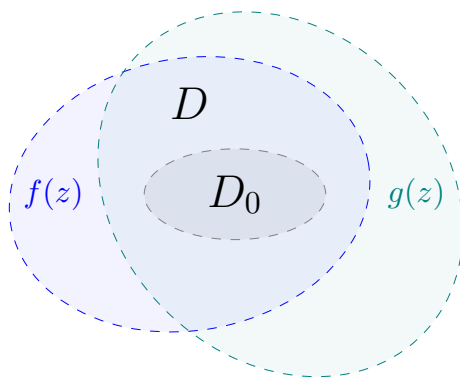
- ▶ 上にあるように、 $g_1(z)$ はその定義域においては関数 $g(z) = \frac{1}{1-z}$ に一致している。この例でも、関数 $g(z)$ は元の関数 $g_1(z)$ の 定義域を拡張した関数 になっている。

$$g_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-t(1-z)} dt \quad (\operatorname{Re} z < 1) \quad \xrightarrow{\text{拡張}} \quad g(z) = \frac{1}{1-z} \quad (z \neq 1). \quad (231)$$

- ▶ 一般に、上の2つの例のように、ある領域で定義された正則関数を、正則性を保ったままより広い定義域の関数に拡張できる。これを「解析接続」という。
- ▶ ではこのような拡張は一意的か?...これを保証するのが「一致の定理」である。

一致の定理

2つの複素関数 $f(z)$, $g(z)$ が共通な正則領域 D を持つとする。



このとき、 D 上の 集積点をもつ部分集合 D_0 において $f(z) = g(z)$ ならば、 D 内全てにおいて $f(z) = g(z)$ である。部分集合 D_0 は曲線や線分でも良い。

(言葉): 複素平面上的集積点...「孤立していない点」と言い換えても良い。

$z = \alpha$ が D_0 の集積点 $\iff \forall r > 0, \exists z \in D_0$ s.t. $0 < |z - \alpha| < r$.

つまり「 D_0 は孤立した点だけで出来た集合ではない」というのが仮定。

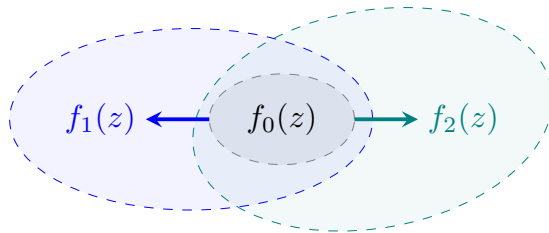
(証明): 共通領域 D で関数 $\phi(z) = f(z) - g(z)$ を定義する。仮定より

- $\phi(z)$ は D 内で正則。
- 部分集合 D_0 内の全ての点で $\phi(z) = 0$ 。

つまり $\phi(z)$ は 孤立していないゼロ点を持つ正則関数 になっている。1.5.1 節の「ゼロ点の孤立」の定理により、そのような関数は定数関数 $\phi(z) = 0$ しかない。したがって D 内全域で $f(z) = g(z)$ 。■

証明から分かるように、部分集合 D_0 は曲線や線分でも良い。

▶ 一致の定理により、「解析接続による定義域の拡張は一意である」ことが言える。



つまり、ある領域で定義された正則関数 $f_0(z)$ を 2 つの正則関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ に拡張したとき、 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が重なる領域（両者が共に正則な領域）では、必ず $f_1(z) = f_2(z)$ となる。

▶ 解析接続により、1.3.4 節で先延ばしにしてきた宿題も片付けられる。

宿題 (i) 実軸上で実数の場合の指数関数、三角関数に一致するような正則関数は一意に決まるか？ \implies Yes.

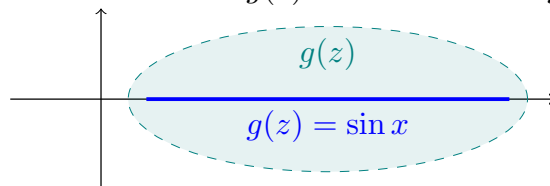
例として三角関数を考えよう。1.3.4 節で定義した正則関数

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \quad (\text{これを } \sin z \text{ と定義した.)} \quad (232)$$

は $|z| < \infty$ で正則であり、実軸上で実数関数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad (233)$$

に一致する。これとは別に、実軸のある区間 $I = [a, b]$ を含む領域 D で定義された関数 $g(z)$ があり、 I 上で $g(z)$ が $\sin x$ に一致するとしよう。



すると、一致の定理により D 内で $g(z) = f(z) = \sin z$ である。したがって「実軸上で実数関数に一致し、正則性を保ったまま定義域を拡張する方法」は一意に定まる。■

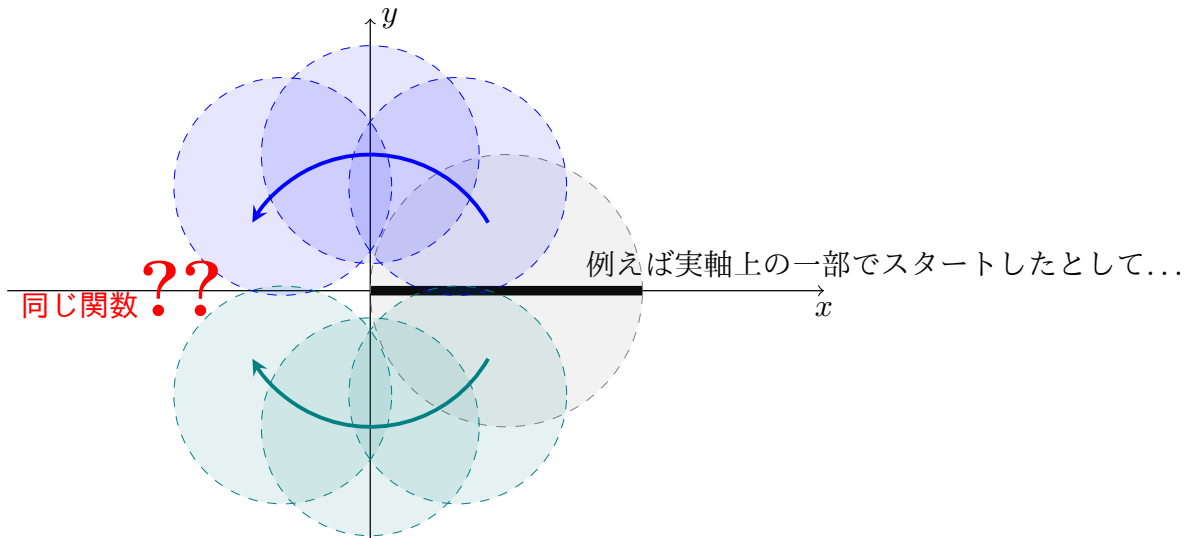
宿題 (ii) 実数で成立していた式、例えば $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$ は x を複素数 z に拡張した正則関数でも成立するか？ \implies Yes.

両辺を解析接続した正則関数 $f(z) = \cos 4z$ 、 $g(z) = 8 \cos^4 z - 8 \cos^2 z + 1$ を考えると、両者は複素数全域で正則であり、かつ実軸上で一致する。したがって一致の定理により複素数全域で $f(z) = g(z)$ である。■

1.6.2 多価関数とリーマン面

実はここまでの議論では、「正則」というときには多くの場合「一価正則」を暗黙に仮定していた。この節では、多価関数の場合にこれまでの議論をどう拡張すべきかを考える。

- ▶ 前節 1.6.1 で解析接続を議論した。一致の定理により「局所的」な関数の拡張は一意的なものだったが、、、「大局的」にはどうか？



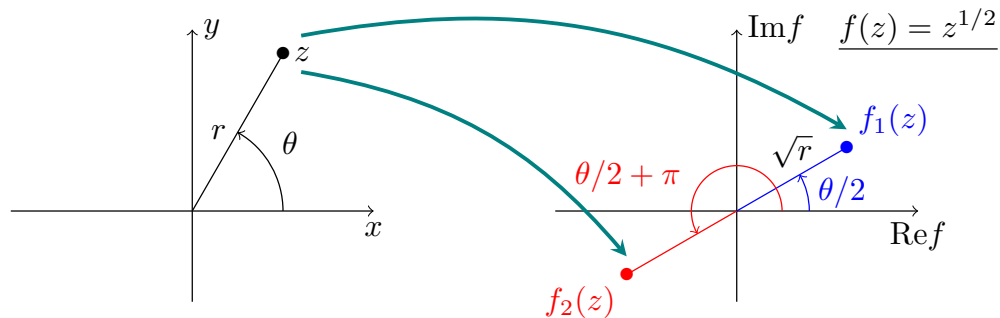
実は多価関数の場合には、解析接続による定義域の拡張が複素平面上でぶつかることがある。これを見てみよう。

- ▶ 多価関数の例として、まずは

$$f(z) = z^{1/2}, \quad (234)$$

を考える。 $z = re^{i\theta}$ として、 $f(z) = z^{1/2} \iff [f(z)]^2 = z$ となるような複素数は

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \\ f_2(z) = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} = -f_1(z) \end{cases}, \quad (235)$$

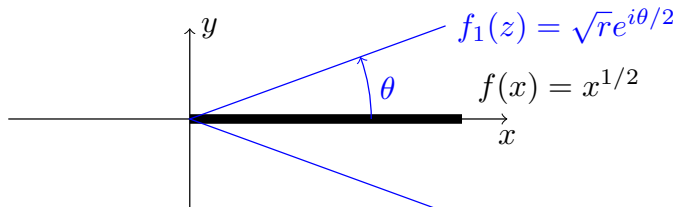


の 2 つある。つまり $f(z) = z^{1/2}$ は 2 価関数である。

▶ 実軸上の実数関数 $f(x) = x^{1/2}$ ($x \geq 0$) からスタートして解析接続を考えよう。実

軸上 $x \geq 0$ で $f(x)$ に一致するのは、
$$\begin{cases} f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \sqrt{r} \\ f_2(z) = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} -\sqrt{r} \end{cases}$$

なので、 $f_1(z)$ の方。したがって $\theta = 0$ 近辺では $f(x) \rightarrow f_1(z)$ と解析接続される。



しかしそのまま定義域を拡げていくと、どこかで不連続になってしまう。

$$\begin{cases} f_1(z) \xrightarrow{\theta \rightarrow \theta_0 - 0} \sqrt{r}e^{i\theta_0/2}, \\ f_1(z) \xrightarrow{\theta \rightarrow \theta_0 + 0} \sqrt{r}e^{-i(2\pi - \theta_0)/2} = -\sqrt{r}e^{i\theta_0/2}. \end{cases}$$

(236)

例えば $\theta = \pi$ だと

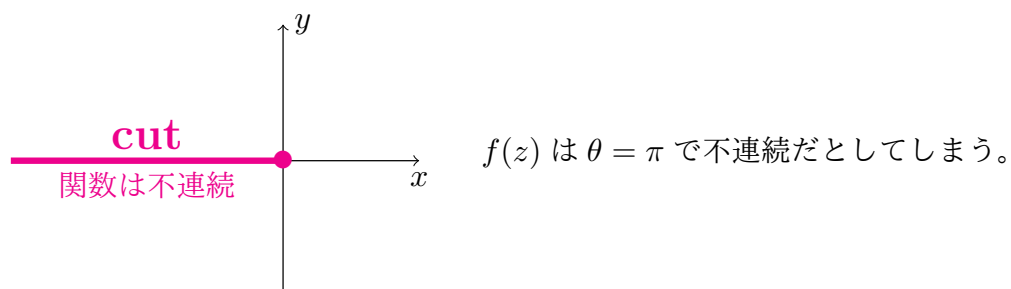
$$\begin{cases} f_1(z) \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi - 0} i\sqrt{r}, \\ f_1(z) \xrightarrow{\theta \rightarrow -\pi + 0} -i\sqrt{r}. \end{cases}$$

(237)

▶ このように、多価関数では、解析接続による単純な定義域の拡張がうまく行かない。

z がある点 z_0 のまわりを一周して $f(z)$ が元の値に戻らないとき、 z_0 を分岐点という。 $f(z) = z^{1/2}$ の場合、原点 $z = 0$ が分岐点になっている。

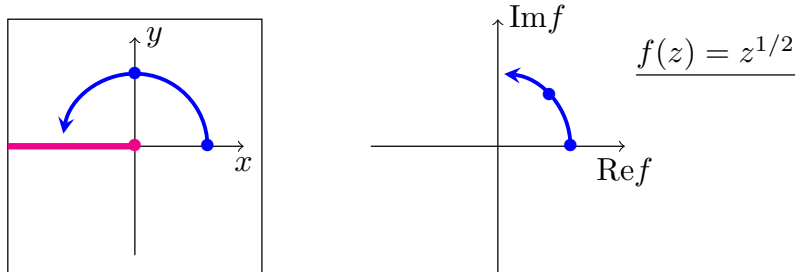
▶ 多価関数の扱い方には2つの方法がある。1つは、複素平面上に「cut (切断)」を入れて、そこで関数が不連続だとしてしまう考え方である。



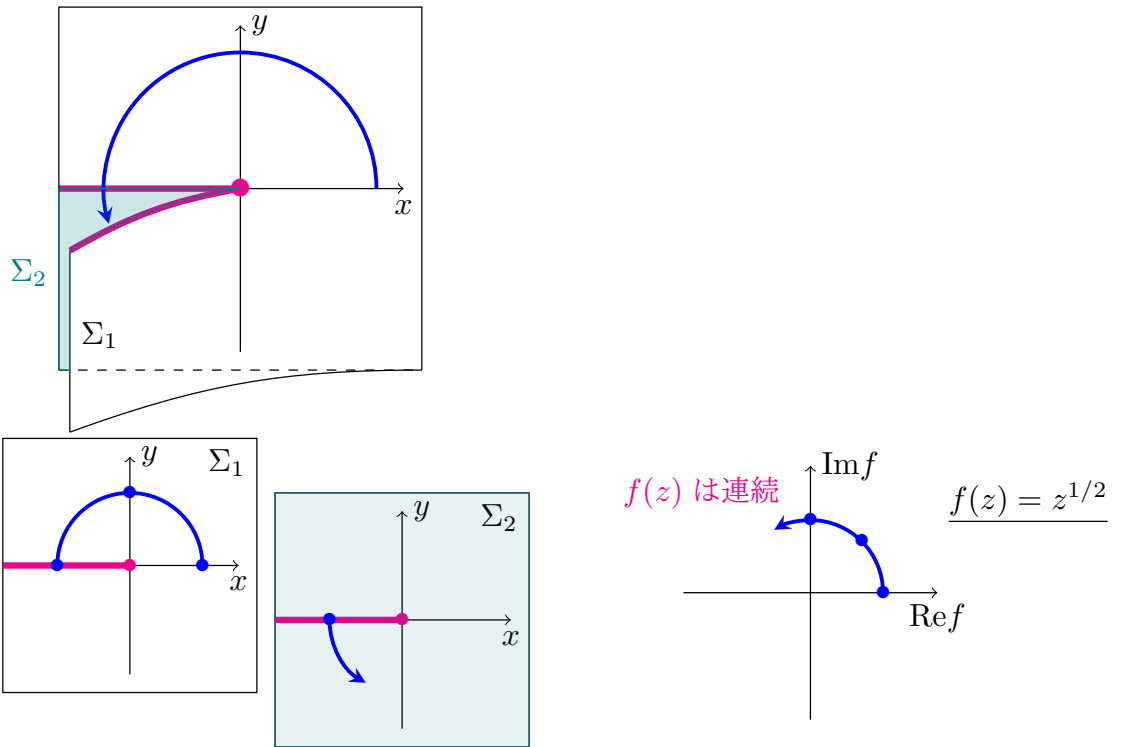
しかし関数が不連続だと何かと不便な場合もある。

▶ もう1つの方法は、連続性を保つために、cut を通り過ぎると別の複素平面に定義域が移る、とする考え方である。これを見ていこう。

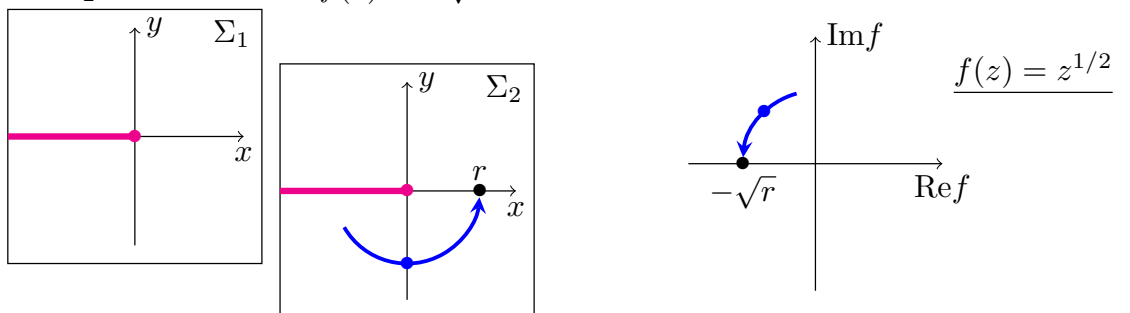
- 実軸 ($x > 0$) からスタートして解析接続により連続的に関数を定義していく。



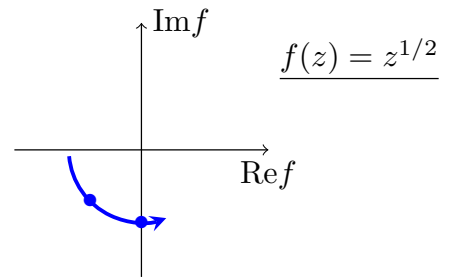
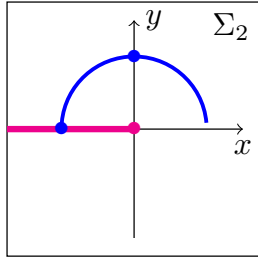
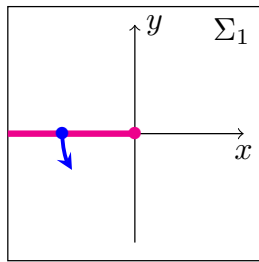
- cut を通り過ぎるとき、 $f(z)$ を連続に保ったまま定義域を2枚目の複素平面に移す。



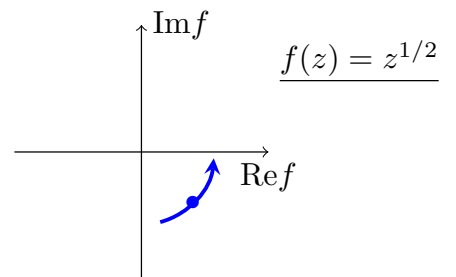
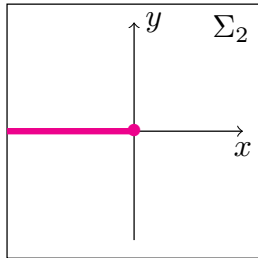
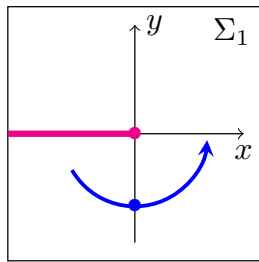
- $z \in \Sigma_2$ では、実軸上で $f(z) = -\sqrt{x}$ となる。



- 再び cut を通ると (今の場合) 元の複素平面 Σ_1 に戻る。

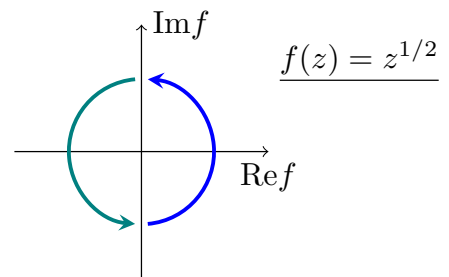
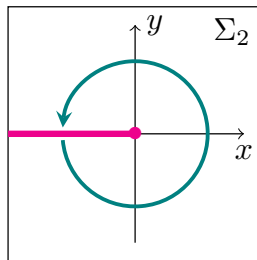
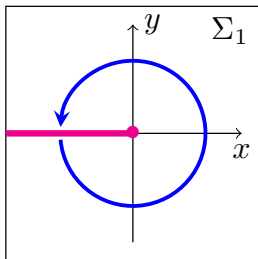


- ゴール!

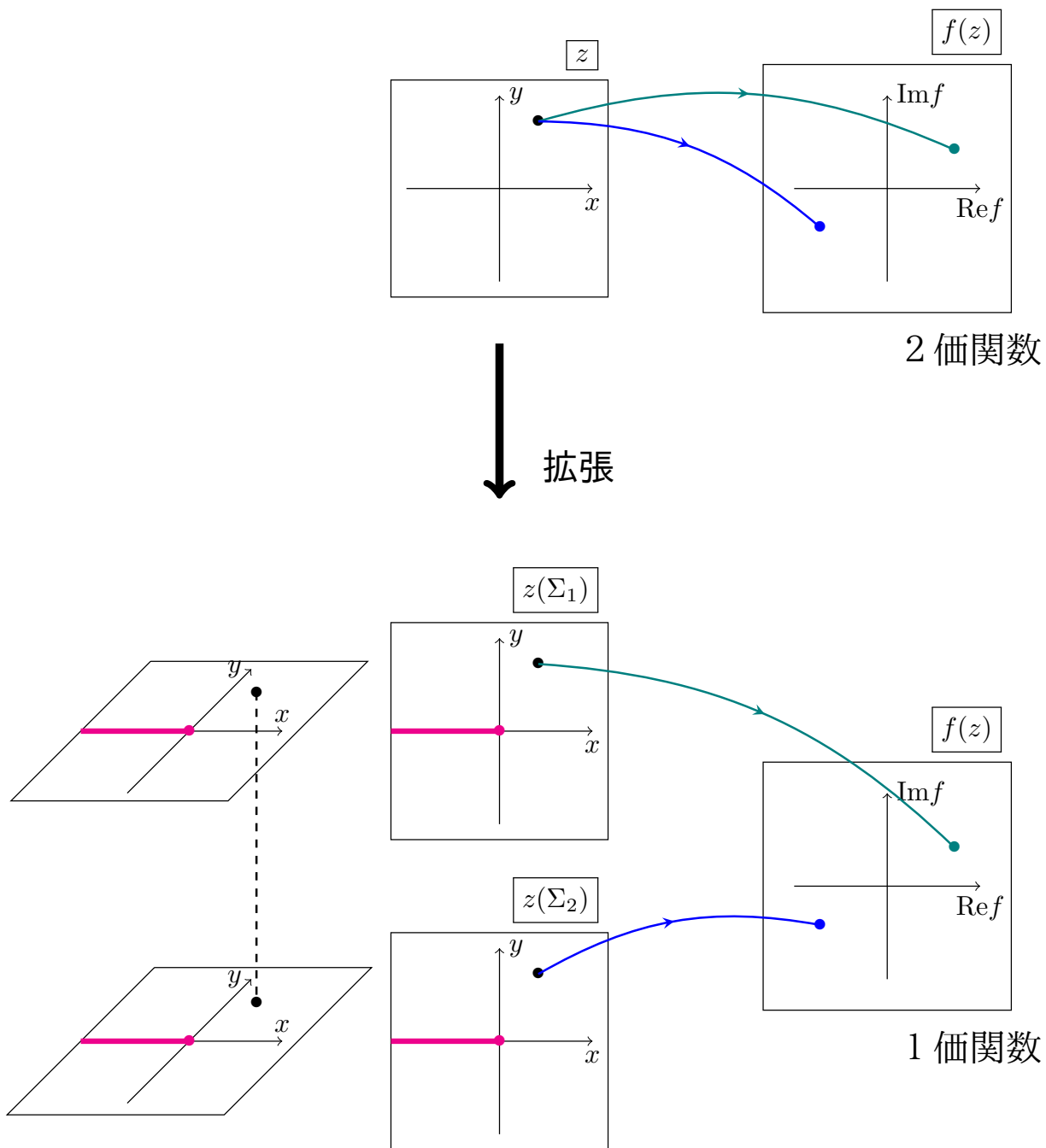


▶ 式で書くと

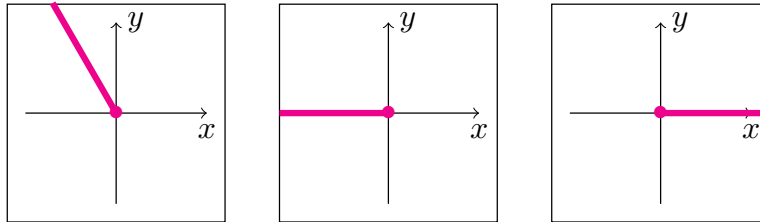
$$f(z) = z^{1/2} = \begin{cases} f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} & (z \in \Sigma_1, -\pi \leq \theta < \pi) \\ f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2+i\pi} & (z \in \Sigma_2, -\pi \leq \theta < \pi) \end{cases}. \quad (238)$$



- ▶ 定義域を Σ_1 と Σ_2 という 2 つの複素平面に拡張することで、 $f(z) = z^{1/2}$ を連続かつ正則な一価関数とみなせた。

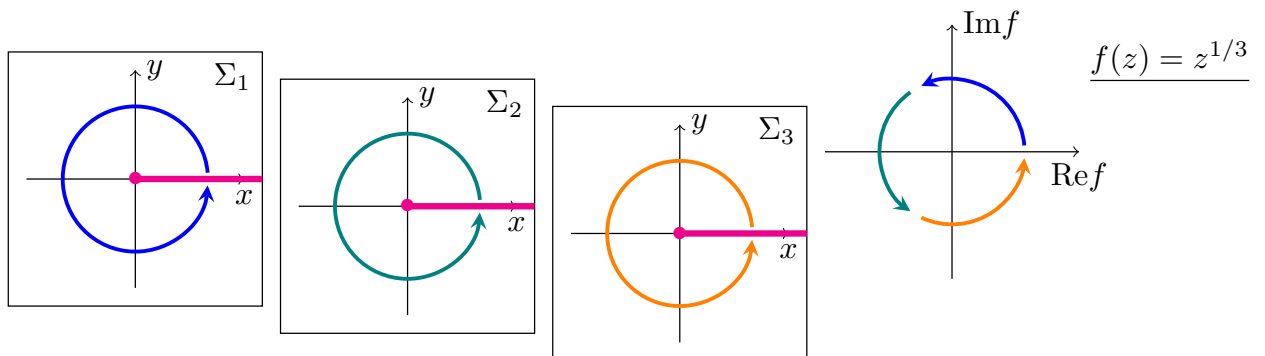


- ▶ このように複素平面を複数つなぎ合わせたものをリーマン面という。
 - リーマン面上で解析接続によって定義された関数は一価正則である。
 - 複素平面どうしをはり合わせる線 (cut) を分岐線 (branch cut) という。
 - 分岐線の端点は分岐点になっている。(今の場合 $z = \infty$ も分岐点。)
 - 分岐線の選び方には自由度がある。(今の場合 $z = 0$ と $z = \infty$ を結べば良い。)



- ▶ $f(z) = z^{1/3}$ の場合はリーマン面は 3 枚の複素平面からなる。例えば分岐線を実軸 $x > 0$ にとると

$$f(z) = z^{1/3} = \begin{cases} r^{1/3} e^{i\theta/3} & (z \in \Sigma_1, 0 \leq \theta < 2\pi) \\ r^{1/3} e^{i(\theta+2\pi)/3} & (z \in \Sigma_2, 0 \leq \theta < 2\pi) \\ r^{1/3} e^{i(\theta+4\pi)/3} & (z \in \Sigma_3, 0 \leq \theta < 2\pi) \end{cases} \quad (239)$$

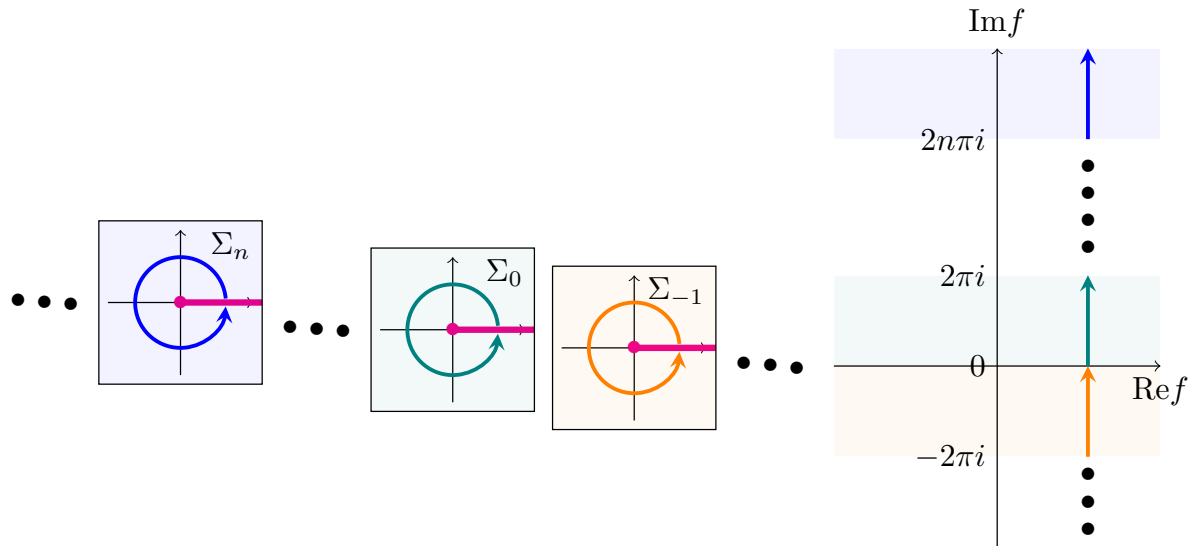


- ▶ 一般に $f(z) = z^\alpha$ のリーマン面は...
 - α が有理数 $\alpha = m/n$ (n と m が互いに素) なら n 枚の複素平面からなる。($z = 0$ のまわりを n 回まわれば元に戻る。 $z = 0$ は代数的分岐点という。)
 - α が無理数ならリーマン面は無限枚の複素平面からなる。($z = 0$ のまわりを何回まわっても元に戻らない。 $z = 0$ は対数的分岐点という。)

- ▶ 1.3.4 節で出てきた対数関数も多価関数であり、リーマン面は無限枚の複素平面からなる。 $(z = 0$ が対数的分岐点。) 分岐線を実軸 $x > 0$ にとると

$$f(z) = \ln z$$

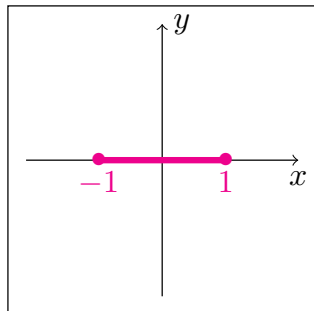
$$= \ln r + i(\theta + 2n\pi) \quad (z \in \Sigma_n, 0 \leq \theta < 2\pi), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (240)$$



- ▶ 分岐線が線分にとれる場合もある。

レポート問題

[c-11] 関数 $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ について、分岐線が図のようにとれることを説明し、またリーマン面が何枚の複素平面からなるか答えよ。



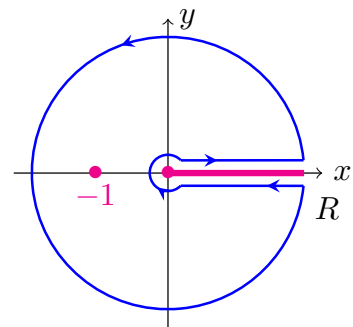
▶ これまでの 1.4～1.5 節で出てきた「閉じた経路」については、多価関数の場合は注意が必要。

- 経路が分岐線を横切らない場合は、一枚の複素平面で考えて問題ない。
- 経路が分岐線を横切る場合は、リーマン面での閉じた経路を考える必要あり。

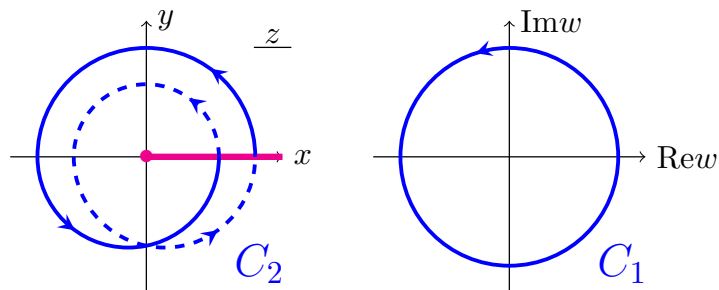
分岐線避ける例:

レポート問題

[c-12] 実数積分 $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx$ ($0 < a < 1$) を求めたい。



複素関数 $f(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} = \frac{e^{-a \ln z}}{z+1}$ を考え、
分岐線を実軸 $x > 0$ にとって図の経路の周積分を実行することで I を求めよ。(最後は実数になるはず。虚数単位がない形に変形しよう。)



分岐線を横切る例:

例えば先ほどの $f(z) = z^{1/2}$ で、分岐点まわりを2回まわって閉じる経路 C_2 を考える。このような場合、一価関数に帰着する変数変換を用いると見通しが良い。今の場合 $w = z^{1/2}$ とおくと、 w の複素平面は1枚になり、

$\oint_{C_2} f(z) dz = \oint_{C_1} f(w^2) 2w dw$ となる。(ただし C_1 は w 平面での1周積分。)

- $\oint_{C_2} z^{1/2} dz = \oint_{C_1} w \cdot 2w dw = 0$. (\because コーシーの積分定理)
- $\oint_{C_2} \frac{dz}{(z^{1/2})^2} = \oint_{C_1} \frac{2w dw}{w^2} = 2 \oint_{C_1} \frac{dw}{w} = 4\pi i$. (\because 留数定理)
- $\oint_{C_2} \frac{dz}{z^{1/2} - \alpha} = \oint_{C_1} \frac{2w dw}{w - \alpha} = 4\pi i \alpha$. (\because 留数定理. α が経路内の場合.)

————— **10/31、ここまで** —————

10/31 に出題したレポートは [b-23]~[b-28]、[c-10]~[c-12] でした。
講義後、付録 A に [b-10]~[b-14] の解答例を追加しました。

————— **11/7、ここから** —————

いよいよあと 2 週になりました。

1.7 発展的話題：部分分数展開、 Γ 、 B 、 ζ 、など

最後に発展的話題について紹介しておく。

1.7.1 部分分数展開 (と無限積)

▶ 部分分数展開

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right), \quad (241)$$

$$\frac{1}{\tan z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right), \quad (242)$$

や無限積

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right), \quad (243)$$

などを示したい。

▶ まず一般に以下のことを示そう。

次のような関数 $f(z)$ を考える。

1. $f(z)$ の $|z| < \infty$ での特異点には極しかない。原点に極はない。極の数は無限個ある。極を α_k ($0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots$) とおく。
2. 全ての極 α_n に対して、それを含む原点中心の円周経路 $C_n = C(0, R_n)$ がとれて ($R_n > |\alpha_n|$)、全ての C_n 上で $f(z)$ は有限 $\left(\max_{z \in C_n, \forall n} |f(z)| = M < \infty \right)$ 、かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n \rightarrow \infty$ 。
(次ページの図を描く)

このとき、 $f(z)$ は次のように極の主要部 $P_k(z)$ の和で書ける。

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} (P_k(z) - P_k(0)). \quad (\text{部分分数展開}) \quad (244)$$

特に 1 位の極しかないときは

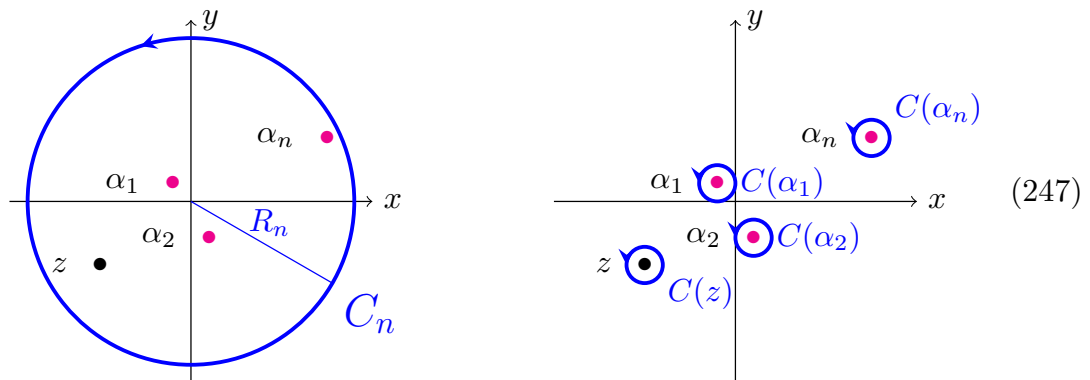
$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}(f, \alpha_k) \left(\frac{1}{z - \alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k} \right). \quad (245)$$

ただし主要部 $P_k(z)$ とは各極まわりのローラン展開の負べき部分である。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} (z - \alpha_k)^n + \underbrace{\frac{\text{Res}(f, \alpha_k)}{z - \alpha_k} + \frac{c_{-2}^{(k)}}{(z - \alpha_k)^2} + \cdots + \frac{c_{-m_k}^{(k)}}{(z - \alpha_k)^{m_k}}}_{\text{主要部 } P_k(z)},$$

$$(k = 1, 2, \dots) \tag{246}$$

▶ 証明: 経路 C_n 内の極以外の点 z ($z \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) に対して



$$\oint_{C_n} \frac{f(w)}{w - z} dw = \oint_{C(z)} \frac{f(w)}{w - z} dw + \sum_{k=1}^n \oint_{C(\alpha_k)} \frac{f(w)}{w - z} dw. \tag{248}$$

ただし $C(z)$ は $w = z$ まわりの小円である。留数定理より (第一項) = $2\pi i f(z)$ 。第二項は

$$\oint_{C(\alpha_k)} \frac{f(w)}{w - z} dw = -2\pi i P_k(z), \tag{249}$$

となる。

レポート問題

[b-29] (249) を示せ。

よって

$$\oint_{C_n} \frac{f(w)}{w - z} dw = 2\pi i f(z) - 2\pi i \sum_{k=1}^n P_k(z). \tag{250}$$

$z = 0$ を代入した式を両辺から引いて

$$\oint_{C_n} f(w) \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w} \right) dw = 2\pi i \left(f(z) - f(0) - \sum_{k=1}^n (P_k(z) - P_k(0)) \right). \tag{251}$$

仮定より

$$|(251) \text{ の (左辺)}| = \left| \oint_{C_n} f(w) \frac{z}{w(w-z)} dw \right| < M \frac{|z|}{R_n(R_n - |z|)} 2\pi R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty, \therefore R_n \rightarrow \infty} 0. \quad (252)$$

よって (251) の右辺 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ 。したがって

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} (P_k(z) - P_k(0)). \quad \blacksquare \quad (253)$$

▶ 例:

- $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ (with $f(0) = 0$) は $z = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) に 1 位の極をもち、それぞれの留数は $(-1)^n$ なので ([b-17] 参照)

$$\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \stackrel{(245)}{=} \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{(-1)^n}{z - n\pi}. \quad (254)$$

- $f(z) = \frac{1}{\tan z} - \frac{1}{z}$ (with $f(0) = 0$) は $z = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) に 1 位の極をもち、それぞれの留数は 1 なので (← 計算略)

$$\frac{1}{\tan z} - \frac{1}{z} \stackrel{(245)}{=} \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right) = \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{1}{z - n\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \quad (255)$$

▶ 無限積

$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ の部分分数展開がわかれば $f(x)$ の無限積が得られる。

例として $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ を考えると

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \stackrel{(255)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}. \quad (256)$$

両辺を $x = 0$ から $y (< \pi)$ まで実数積分すると (← 収束の議論略)

$$\ln \left(\frac{f(y)}{f(0)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(x^2 - (n\pi)^2) \Big|_0^y \quad (257)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{y^2}{n^2\pi^2} \right) \quad (258)$$

$$= \ln \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{n^2\pi^2} \right) \right] \quad (259)$$

$$\therefore f(y) = f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{n^2\pi^2} \right). \quad (260)$$

ここから $\sin z$ の無限積表示

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right). \quad (261)$$

が得られる。($z \in \mathbb{C}$ に解析接続した。)

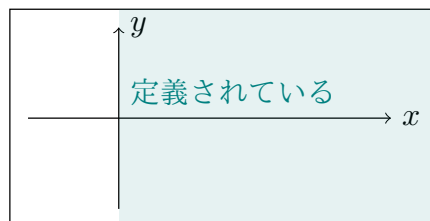
1.7.2 Γ (ガンマ) 関数

▶ 大雑把には $n!$ の拡張。

$$n! \left(\xrightarrow{\text{実数に拡張}} \Gamma(x) \right) \xrightarrow{\text{複素数に拡張}} \Gamma(z) \xrightarrow{\text{解析接続}} \Gamma(z) \quad \begin{matrix} \text{Re}z > 0 \\ z \neq 0, -1, -2, \dots \end{matrix}$$

▶ 以下の実数積分で Γ 関数を定義する。(オイラーの第二種積分)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{Re}z > 0).$$



(262)

▶ 定義域の確認：

レポート問題

[c-13] (262) 式右辺の積分 $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ が $\text{Re}z > 0$ で収束することを示せ。

$\text{Re}z \leq 0$ では積分の下端 $t \rightarrow 0$ が収束しない。

▶ さらに、次も言える。

レポート問題

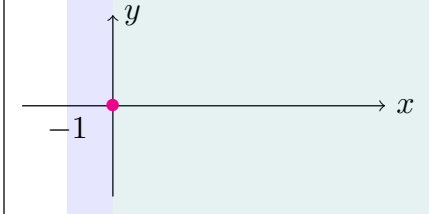
[b-30] $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を示せ。

これと $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ より、

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (263)$$

が得られる。

▶ [b-30] より

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1). \quad (264)$$


この式の左辺は $\operatorname{Re}z > 0$ のみで定義されているが、右辺はより広い領域 $\operatorname{Re}z > -1$ ($z \neq 0$) で定義されている。したがって、右辺を用いて、解析接続により定義域が拡張できる。さらに上式を繰り返し使うと

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) = \frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}\Gamma(z+3) = \dots \quad (265)$$

により $\operatorname{Re}z > -2, \operatorname{Re}z > -3, \dots$ と次々と解析接続できて、複素平面全域 に定義域を拡張できる。

▶ 上式からわかるように、こうして得られた $\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \dots$ に 1 位の極をもつ。それぞれの留数は

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) \quad (266)$$

$$= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{1}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \Gamma(z+n+1) \quad (267)$$

$$= \frac{1}{(-n)(-n+1)\dots(-1)} \Gamma(1) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (268)$$

▶ Γ 関数に関しては、スターリングの公式

$$\Gamma(t+1) \xrightarrow{t=\text{実数}, t \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t. \quad (269)$$

も便利である。特に $t = n$ のときの $\Gamma(n+1) = n!$ より、対数を取って

$$\ln n! \simeq n \ln n - n + \ln(2\pi n)/2. \quad (270)$$

さらに $\ln(2\pi n)/2$ の項も無視した

$$\ln n! \sim n \ln n - n. \quad (271)$$

がよく用いられる。スターリングの公式はいくつかの証明方法があるが、次節 1.7.3 で、複素積分の「鞍点法」を用いた証明 (のようなもの) を紹介する。

1.7.3 鞍点法 (とスターリングの公式)

▶ 十分大きな実数 $t > 0$ に対して、複素積分

$$F(t) = \int_C \underbrace{e^{t w(z)}}_{f(z)} dz. \quad (280)$$

を考えよう*5。ここで、 $w(z)$ が以下の条件を満たすと仮定する。

- 積分経路 C を含む領域 D で正則。
- 領域 D 内にある点 $z = z_0$ で、 $w'(z_0) = 0$ かつ $w''(z_0) \neq 0$ 。
- 積分経路 C の端点で $\operatorname{Re}(w)$ は $-\infty$ に向かう。

このとき積分 $F(t)$ は、 t が十分大きいとき「鞍点法」により近似的に以下のように求められる。

$$F(t) \simeq e^{t w(z_0)} e^{i\theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{|w''(z_0)|t}} \quad (281)$$

(θ_0 の定義は以下で述べる。) 以下これを説明する。

- (i) まず $w'(z_0) = 0$ より $f'(z_0) = t w'(z_0) e^{t w(z_0)} = 0$ 。よって $\frac{d}{dz} |f(z)|_{z=z_0} = 0$ *6。
この点 $z = z_0$ は $|f(z)|$ の「鞍点」になっている。(図を描く。)(理由: 1.4.5 節の最大値の定理より、 $z = z_0$ で $|f(z)|$ は極大でも極小でもない。)
- (ii) この鞍点 $z = z_0$ のまわりで、 $|f(z)|$ が最も急激に減少する向き (最急降下の向き) を考えたい。

$$|f(z)| = e^{t \operatorname{Re}(w(z))} \quad (283)$$

なので、それは $\operatorname{Re}(w(z))$ が最も急激に減少する向きである。

- (iii) そのため、 $w(z)$ を $z = z_0$ のまわりでテイラー展開する。 $w'(z_0) = 0$ だから

$$w(z) = w(z_0) + \frac{1}{2} w''(z_0) (z - z_0)^2 + \dots \quad (284)$$

*5 より一般的に $\int_C e^{t w(z)} g(z) dz$ や $\int_C e^{F(z,t)} dz$ といった形を考えることも出来るが、ここでは単のために式 (280) の形を考える。

*6 以下のように示せます。三角不等式 $|a| - |b| \leq |a - b|$ より

$$\left| \frac{d}{dz} |f(z)|_{z=z_0} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{|f(z_0 + \Delta z)| - |f(z_0)|}{\Delta z} \right| \leq \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)| = 0. \quad (282)$$

$w''(z_0)$ の偏角を α とし ($w''(z_0) = |w''(z_0)|e^{i\alpha}$)、さらに $z - z_0 = re^{i\theta}$ と書く

$$w(z) = w(z_0) + \frac{1}{2}|w''(z_0)|e^{i(\alpha+2\theta)}r^2 + \dots \quad (285)$$

(iv) したがって、 $z = z_0$ まわりで $\operatorname{Re}(w(z))$ および $|f(z)|$ が最も急激に減少するのは (図を描く。)

$$\cos(\alpha + 2\theta) = -1 \iff \theta = \theta_0, \theta_0 + \pi \quad \left(\theta_0 = \frac{\pi - \alpha}{2}\right). \quad (286)$$

(v) ここで、元の積分経路 C を「 $z = z_0$ を通り、角度 θ_0 の経路 C' 」に変形し、さらに積分経路の端点で $\operatorname{Re}(w) \rightarrow -\infty$ となることから、 C' を z_0 近くの経路で近似してしまう。(図を描く)

$$F(t) = \int_C f(z)dz = \int_{C'} e^{t w(z)} dz \simeq \int_{C'(z_0 \text{ 近辺})} e^{t w(z)} dz. \quad (287)$$

(vi) この経路 $C'(z_0 \text{ 近辺})$ 上で、 $z = z_0 + re^{i\theta_0}$ とパラメータ表示すると

$$w(z(r)) = w(z_0) - \frac{1}{2}|w''(z_0)|r^2 + \dots \quad (288)$$

となるので ($\because e^{i(\alpha+2\theta_0)} = -1$ in (285))、 r^2 までの項で近似して

$$\begin{aligned} F(t) &\simeq \int \exp\left(t\left(w(z_0) - \frac{1}{2}|w''(z_0)|r^2\right)\right) \underbrace{\frac{dz(r)}{dr}}_{e^{i\theta_0}} dr \\ &= e^{t w(z_0)} e^{i\theta_0} \int \exp\left(-\frac{|w''(z_0)|t}{2}r^2\right) dr. \end{aligned} \quad (289)$$

(vii) 上式の r の積分範囲は「 z_0 近辺」の適当な範囲だが、 t が十分大きいときに鞍点から離れると $\exp\left(-\frac{|w''(z_0)|t}{2}r^2\right)$ が十分小さくなることから、積分範囲を $\pm\infty$ と近似してしまう。すると

$$F(t) \simeq e^{t w(z_0)} e^{i\theta_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\underbrace{\frac{|w''(z_0)|t}{2}r^2}_{r'^2}\right) dr \quad (290)$$

$$= e^{t w(z_0)} e^{i\theta_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r'^2} \sqrt{\frac{2}{|w''(z_0)|t}} dr' \quad (291)$$

$$= e^{t w(z_0)} e^{i\theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{|w''(z_0)|t}}. \quad (292)$$

目標の式 (281) が示せた。

(viii) ... 以上が鞍点法の一般論。(いつも以上に議論がガバガバなのが気になる人は、近似の次のオーダーがどうなるかとか、「漸近展開」とは何か、などなど調べてみよう。)

▶ Γ 関数の場合に応用すると

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^t ds \quad (293)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-tz} (tz)^t t dz \quad (s = tz) \quad (294)$$

$$= t^{t+1} \int_0^{\infty} e^{-tz} \underbrace{z^t}_{e^{t \ln z}} dz \quad (295)$$

$$= t^{t+1} \int_0^{\infty} e^{t(\ln z - z)} dz. \quad (296)$$

これを複素数 z の実軸上の複素積分と考え、 $w(z) = \ln z - z$ として鞍点法を適用すると、 $w'(z) = \frac{1}{z} - 1$ より鞍点は $z = z_0 = 1$ で、 $w'(z_0) = 0$ 、 $w''(z_0) = -1$ 。 $z \rightarrow 0$ 、 $z \rightarrow \infty$ で $w(z) \rightarrow -\infty$ なので条件を満たしている。

▶ $w''(z_0)$ の偏角は $\alpha = \pi$ で、最急降下の向きは $\theta = 0$ 、つまり実軸方向になる。積分経路は特に角度の変更の必要はなく、範囲を $[0, \infty)$ から $(-\infty, \infty)$ に変更して

$$\Gamma(t+1) \simeq t^{t+1} \cdot e^{t w(z_0)} e^{i\theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{|w''(z_0)|t}} \quad \because (281) \quad (297)$$

$$= t^{t+1} \cdot e^{-t} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \quad (298)$$

$$= \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t. \quad (= (269)、スターリングの公式) \blacksquare \quad (299)$$

1.7.4 B (ベータ) 関数

定義

$p, q \in \mathbb{C}$ に対して

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad (\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0). \quad (300)$$

を解析接続して得られる関数を B (ベータ) 関数という。

レポート問題

[b-31] $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ を示せ。

1.7.5 ζ(ゼータ) 関数

▶ 定義

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots, \quad (\operatorname{Re}z > 1) \quad (301)$$

を解析接続して得られる関数を ζ(ゼータ or ツェータ) 関数という。

レポート問題
[c-14] 上式が $\operatorname{Re}z > 1$ で絶対収束することを示せ。

▶ ζ 関数にはいくつかの別の表式がある。

実数積分を用いた表式

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (\operatorname{Re}z > 1). \quad (302)$$

複素積分を用いた表式

$$\zeta(z) = \frac{i}{2\pi} \Gamma(1-z) \int_C \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds. \quad (303)$$

上の 2 式の証明略 : 2021 年度の講義ノート参照。

複素積分の表式から $z = 1, 2, \dots$ が極になりそうだが、 $z = 1$ 以外は除去可能 (極限值が存在する)。(和の定義に戻ると収束する。)

▶ ζ(z) の性質のいくつかを紹介。

- $\zeta(z) = \prod_{p \in \text{素数}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$. (∵ 定義式 (301) より。松尾先生の講義ノート参照)
- $z = 1$ のみに 1 位の極をもち、その留数は $\operatorname{Res}(\zeta, 1) = 1$ 。
- $\zeta(-2m) = 0$ ($m = 1, 2, \dots$)。
- これ以外のゼロ点が全て直線 $\operatorname{Re}z = 1/2$ とするのが リーマン予想 (未解決問題, 1859~)。
- この他の特殊な点での値としては $\zeta(0) = -1/2$, $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(-1) = -1/12$, $\zeta(-3) = 1/120$ など。

§ 2 常微分方程式

物理では様々な場面で微分方程式が出てくる。ニュートンの運動方程式、マックスウェル方程式、シュレディンガー方程式、アインシュタイン方程式...

ここでは微分する変数が1つだけの微分方程式、常微分方程式を扱う。

2.1 べき級数展開による2階斉次微分方程式の解法

(一般論の前に、正則関数の性質を応用した2階斉次微分方程式の話題をやっておこう。)

▶ 2階斉次微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \right) y(x) = 0. \quad (304)$$

を複素関数に拡張した

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + p(z) \frac{d}{dz} + q(z) \right) f(z) = 0. \quad \text{—————} (*) \quad (305)$$

を考える。これを $z = \alpha$ の周りでべき級数展開して解くことを考えたい。

▶ 特に、以下では

- $p(z), q(z)$ が $z = \alpha$ のまわりで正則な場合。
- $p(z), q(z)$ が $z = \alpha$ で極をもつが、 $p(z)(z - \alpha)$ および $q(z)(z - \alpha)^2$ が $z = \alpha$ のまわりで正則な場合。($\leftrightarrow z = \alpha$ が $p(z)$ のたかだか1位の極、かつ $q(z)$ のたかだか2位の極の場合。) ...このとき $z = \alpha$ を上の微分方程式の 確定特異点 という。

の場合に限って考える。具体例としては表1のものなど。

▶ 上の条件が満たされるとき、 $p(z), q(z)$ は以下のように展開できる。

$$p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m (z - \alpha)^{m-1} = \frac{p_0}{z - \alpha} + p_1 + p_2(z - \alpha) + p_3(z - \alpha)^2 + \dots \quad (306)$$

$$q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m (z - \alpha)^{m-2} = \frac{q_0}{(z - \alpha)^2} + \frac{q_1}{z - \alpha} + q_2 + q_3(z - \alpha) + \dots \quad (307)$$

| 微分方程式の名前 | 微分方程式 | 確定特異点 | 正則な点の例 |
|--------------|---|---------------------|----------|
| ベッセルの微分方程式 | $f'' + \frac{1}{z}f' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)f = 0.$ | $z = 0$ | |
| エルミートの微分方程式 | $f'' - 2zf' + 2\nu f = 0.$ | | $z = 0.$ |
| ルジャンドルの微分方程式 | $(1 - z^2)f'' - 2zf' + \nu(\nu + 1)f = 0.$ | $z = \pm 1, \infty$ | $z = 0.$ |
| ラゲールの微分方程式 | $zf'' + (1 - z)f' + \nu f = 0.$ | $z = 0$ | |
| 超幾何微分方程式 | $z(1 - z)f'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]f' - \alpha\beta f = 0.$ | $z = 0, 1, \infty$ | |

表 1 この節で考えている微分方程式の例。 $z = \infty$ については $w = 1/z$ の微分方程式に書き直して考える。

▶ $f(z)$ の解として、 $z = \alpha$ まわりで $f(z) \sim (z - \alpha)^s$ ($s \in \mathbb{C}$) となるもの、

$$f(z) = (z - \alpha)^s [1 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + \dots] \quad (308)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^{s+n}. \quad (a_0 = 1) \quad (309)$$

があると仮定し、微分方程式 $(\star): f'' + pf' + q = 0$ の各項に代入してみる。すると

$$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (s+n)(s+n-1)a_n (z - \alpha)^{s+n-2}. \quad (310)$$

$$p(z)f'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m (z - \alpha)^{m-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} (s+\ell)a_\ell (z - \alpha)^{s+\ell-1}. \quad (311)$$

$$q(z)f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m (z - \alpha)^{m-2} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (z - \alpha)^{s+\ell}. \quad (312)$$

これらの和がゼロになるので、 $(z - \alpha)^{s+n-2}$ の係数から

$$(s+n)(s+n-1)a_n + \sum_{m=0}^n p_m (s+n-m)a_{n-m} + \sum_{m=0}^n q_m a_{n-m} = 0. \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$\therefore \begin{cases} s(s-1) + p_0 s + q_0 = 0. \quad (\because a_0 = 1 \neq 0) \\ \underbrace{\left((s+n)(s+n-1) + p_0(s+n) + q_0 \right)}_{A_n(s)} a_n = - \sum_{m=1}^n \left(p_m (s+n-m) + q_m \right) a_{n-m}. \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(313)

1つ目の式、 $s^2 + (p_0 - 1)s + q_0 = 0$ は解 $f(z) \sim (z - \alpha)^s$ の指数 s を決める式であり、決定方程式と呼ばれる。2次式なので解は2つある。(⇔ 微分方程式の2つの独立な解に対応する。) それらを s_1, s_2 ($\text{Res}_1 \geq \text{Res}_2$) と置こう。

- ▶ s が決まれば、2つ目の式 (漸化式) を用いて、 a_1, a_2, \dots が順次決まっていく。ただし $s = s_2$ に関しては、決定方程式の解と係数の関係から

$$A_n(s_2) = n(n - (s_1 - s_2)). \quad (314)$$

となるので、 $s_1 - s_2 = 0, 1, 2, \dots$ のときは漸化式が止まってしまう、2つ目の級数解は求まらない。この場合、もう1つの独立な解を求めるには別の方法が必要となる。(ここでは省略する。)

- ▶ ここでは、 $s = s_1$ の場合の級数解

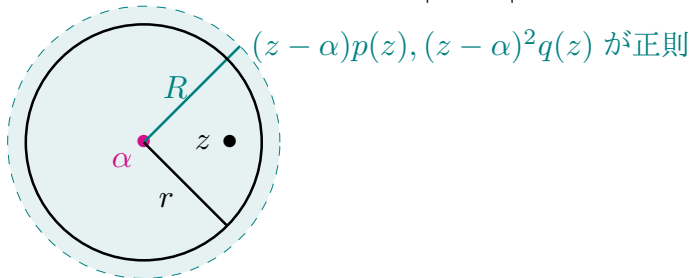
$$f(z) = (z - \alpha)^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n, \quad (315)$$

が有限の収束半径をもつことを確認しよう。

$$(z - \alpha)p(z) = p_0 + p_1(z - \alpha) + \dots \quad (316)$$

$$(z - \alpha)^2 q(z) = q_0 + q_1(z - \alpha) + \dots \quad (317)$$

は正則な級数なので、これらの収束半径のうち小さい方を R とおく。収束半径より内側の任意の点 z に対して、 $|z - \alpha| < r < R$ となる正の実数 r がとれる。



収束性から $|p_m|r^m, |q_m|r^m < \infty$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)。よって適当な実数 M があって

$$1 < \exists M < \infty, \text{ s.t. } \forall m, |p_m|r^m < M, |p_m s_1 + q_m|r^m < M. \quad (318)$$

このとき帰納法により

$$|a_k r^k| < M^{k+1}. \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (319)$$

が言える。

(証明) まず $k = 0$ では $a_0 = 1$, $M > 1$ より成り立つ。次に $k = 1, 2, \dots, n-1$ で成り立つと仮定する。漸化式 (313) より

$$a_n r^n = -\frac{1}{A_n(s_1)} \sum_{m=1}^n \left(p_m(s_1 + n - m) + q_m \right) a_{n-m} r^n. \quad (320)$$

決定方程式の解と係数の関係を用いて

$$|A_n(s_1)| = |n(n + s_1 - s_2)| \geq n^2. \quad (\because \operatorname{Re}s_1 \geq \operatorname{Re}s_2.) \quad (321)$$

一方、

$$\left| \sum_{m=1}^n \left(p_m(s_1 + n - m) + q_m \right) a_{n-m} r^n \right| \quad (322)$$

$$\leq \sum_{m=1}^n \left| \left(p_m(s_1 + n - m) + q_m \right) a_{n-m} r^n \right| \quad (323)$$

$$= \sum_{m=1}^n \left| (p_m s_1 + q_m) r^m + (n - m) p_m r^m \right| |a_{n-m} r^{n-m}| \quad (324)$$

$$< \left(nM + \frac{n(n-1)}{2} M \right) M^n = \frac{n(n+1)}{2} M^{n+1}. \quad (325)$$

よって

$$|a_n r^n| < \frac{n+1}{2n} M^{n+1} \leq M^{n+1}. \quad (n = 1, 2, \dots). \quad \blacksquare \quad (326)$$

よって級数解

$$f(z) = (z - \alpha)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n, \quad (327)$$

の級数部分は

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - \alpha)^n| = M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n r^n}{M^{n+1}} \right| \left| \left(\frac{z - \alpha}{r/M} \right)^n \right| < M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{z - \alpha}{r/M} \right)^n \right|. \quad (328)$$

となり、有限な領域 $|z - \alpha| \leq \frac{r}{M}$ ($0 < \forall r < R$) で収束することが分かった。

- ▶ こうして得られた関数 $f(z)$ を解析接続すれば、 z 平面全体で元の微分方程式を満たす解が得られる。

▶ 実際に物理に応用する場合には、考えたい領域全体での収束を要求する。(波動関数の積分が有限、など。)

→ すると多くの場合、級数が途中で止まるような特別な場合(漸化式の右辺 = 0 となり $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$ となる場合)を要求することになり、級数解は多項式となる。(1.5.4.H のレポートも参照。)

→ この「級数が途中で止まる特別な場合」の要求は、微分方程式のパラメータにも特別な値を要求することになり、これが固有値の量子化などに結びつく。先にあげた具体例ではベッセル、エルミート、ルジャンドル、ラゲールのそれぞれの微分方程式で、 $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$ の場合がそれに相当する。具体的な計算はここでは省略します。量子力学などで該当する微分方程式が出てきたとき、この辺りの議論を思い出してもらえればと思います。

11/7、ここまで

11/7 に出題したレポートは [b-29]~[b-31]、[c-13]~[c-14] でした。

[b-24] に補足を追記しました。

講義後、付録 A に [b-15]~[b-22] の解答例を追加しました。

11/7 までのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標

1.2 準備

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.4 複素積分

1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

1.6 一致の定理と解析接続

1.7 発展的話題：部分分数展開、 Γ 、 B 、 ζ 、など

§ 2 常微分方程式

2.1 べき級数展開による 2 階斉次微分方程式の解法

11/14、ここから

2.2 以降の内容（11/14の2限の内容）は期末試験の範囲外とします。

2.2 定義と分類

(あらためて、微分方程式の定義と分類をしておこう。)

- ▶ $y(x)$ を1つの実変数 x の関数であるとする。このとき、 $y(x)$ とその微分 $y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ および x との関係式

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (329)$$

を常微分方程式 (Ordinary Differential Equation, ODE) という。

一般には、関数の数を複数にして $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots)$ に関する連立常微分方程式を考えることも出来るが、以下では主に関数が1つの場合を考える。

[ここから先、pdf では「常微分方程式」を単に「微分方程式」と書いてしまいます。また板書では「微分方程式」と書くのが面倒なので、「ODE」と書いてしまおうと思います。]

- ▶ 最高次の微分が $y^{(n)}(x)$ のときは n 階の微分方程式 という。
- ▶ 最高次の微分が低次の微分で書けている

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (330)$$

の形の微分方程式を正規形という。(以下では主にこの形の微分方程式を扱う。)

- ▶ n 階の微分方程式は、常に1階の連立微分方程式に帰着できる。実際

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \quad (331)$$

に対して、 $y_0 = y, y_1 = y', y_2 = y'', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$ と定義すると、上の式は

$$y'_{n-1}(x) = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad (332)$$

$$y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x), \quad (333)$$

$$\dots \quad (334)$$

$$y'_1(x) = y_2(x), \quad (335)$$

$$y'_0(x) = y_1(x). \quad (336)$$

となり、 n 個の関数に対する1階の連立微分方程式に帰着する。(数値計算でもこの形にしてから解くことが多いと思います。) この連立微分方程式は初期条件 $x = x_0$ で

の値 $y_i(x_0)$ ($i = 0, \dots, n-1$) を与えれば解が定まる。つまり元の n 階微分方程式も、 n 個の初期条件 $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ を与えると解が定まることになる。

▶ 関数 $y(x)$ とその微分に関して線形な

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x) \right) y(x) = b(x), \quad (337)$$

の形の微分方程式を線形微分方程式という。ただし $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x), b(x)$ は与えられた関数とする。 $b(x) = 0$ の場合斉次 (同次) 微分方程式という。

$$\text{微分方程式} \begin{cases} \text{線形微分方程式} \\ \text{非線形微分方程式} \end{cases} \begin{cases} \text{斉次 (同次) 微分方程式} & (b(x) = 0) \\ \text{非斉次線形微分方程式} & (b(x) \neq 0) \end{cases}$$

▶ 常微分方程式の例

- 古典調和振動子 (単振動)。変数は時間 t 。 $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) x(t) = 0$. (2 階斉次)
- 量子力学：1 次元の時間に依存しないシュレディンガー方程式。変数は座標 x 。

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \varphi(x) = E\varphi(x). \quad (\leftarrow \text{量子力学 1}) \quad (2 \text{ 階斉次})$$

- 量子力学：3 次元球対称ポテンシャル中の動径方向波動関数のシュレディンガー方程式。変数は動径座標 r 。

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] R(r) = ER(r). \quad (\leftarrow \text{量子力学 2}) \quad (2 \text{ 階斉次})$$

- 場の量子論：くりこみ群方程式。変数はスケール μ 。

$$\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = \beta(g(\mu)) \quad (\text{例えば QED だと}) = \frac{g^3(\mu)}{12\pi^2} + \dots \quad (1 \text{ 階非線形}).$$

2.3 線形微分方程式

この講義では主に線形微分方程式を考える。

2.3.1 解の線形性

▶ 斉次微分方程式

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x) \right) y(x) = 0 \quad \text{---}(\star). \quad (338)$$

を満たす解 $y_1(x), y_2(x)$ があつたとき、その線形和

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x), \quad (339)$$

も (\star) の解である。

▶ n 階斉次微分方程式 (\star) の線形独立^{*7}な n 個の解 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ が与えられたとすれば、その線形和

$$y(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x). \quad (340)$$

が一般解となる。 c_1, \dots, c_n は積分定数である。 $(n$ 階なので積分定数は n 個ある。)

▶ 非斉次線形微分方程式

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x) \right) y(x) = b(x) \quad \text{---}(\star\star). \quad (341)$$

の場合は、その解 $y_0(x)$ が 1 つ見つければ (特解とよばれる)、斉次解との和

$$y(x) = \underbrace{y_0(x)}_{\text{特解}} + \underbrace{c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)}_{\text{斉次解}} \quad (342)$$

が $(\star\star)$ の一般解となる。

2.3.2 2 階斉次微分方程式

→ 2.1 でやりました。

^{*7} $c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0$ for $\forall x \iff c_1 = \cdots = c_n = 0$ のとき「 $y_1(x), \dots, y_n(x)$ は線形独立」という。

2.3.3 定数係数線形微分方程式とラプラス変換

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n \right) x(t) = Q(t), \quad (a_i = \text{定数}) \quad (343)$$

の形の定数係数線形微分方程式はラプラス変換により代数方程式に帰着する。

2.3.3.A ラプラス変換

- ▶ $t \geq 0$ で連続な関数 $f(t)$ に対して

$$\boxed{\tilde{f}(p) = \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt} \quad (344)$$

のような変換をラプラス変換という。

(これ以降、ラプラス変換の積分が収束するための条件 (関数 $f(t)$ に対する条件および p の範囲) についてはあまり気にせず、特に断りがない場合は積分の収束を仮定して話を進めてまいります。)

- ▶ 例 1: $f(t) = e^{\lambda t}$ に対して、

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot e^{\lambda t} dt \quad (345)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt = \frac{1}{p-\lambda} \quad (\text{for } \text{Re}(p-\lambda) > 0.) \quad (346)$$

- ▶ 例 2: $f(t) = \cos \omega t$ に対して、

$$\mathcal{L}[\cos \omega t](p) = \mathcal{L} \left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right] (p) \quad (347)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right) \quad (348)$$

$$= \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (349)$$

2.3.3.B ラプラス変換の性質

▶ 微分のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = -f(0) + p \mathcal{L}[f](p). \quad (350)$$

証明:

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt \quad (351)$$

$$= [e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-p)e^{-pt} f(t) dt \quad (352)$$

$$= -f(0) + p \mathcal{L}[f](p) \quad \blacksquare \quad (353)$$

($e^{-pt} f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ を仮定しました。)

▶ $f''(t), f'''(t), \dots$ に対してラプラス変換すると、帰納法により

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}](p) &= p^n \mathcal{L}[f](p) \\ &\quad - \left(f(0) p^{n-1} + f'(0) p^{n-2} + \dots + f^{(n-2)}(0) p + f^{(n-1)}(0) \right). \end{aligned} \quad (354)$$

$(n = 1, 2, \dots)$

も示せる。

▶ 他の性質はまとめてレポートで：

レポート問題

以下を示せ。ただし左辺は全て t の関数としてみたときのラプラス変換を表す。また p および変換前の関数はラプラス変換の積分が収束するための条件を満たしているとする。

[b-32] $\mathcal{L}[e^{at} f(t)](p) = \mathcal{L}[f](p - a).$

[b-33] $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s) ds\right](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f](p).$ (積分)

[c-15] $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)g(t-s) ds\right](p) = \mathcal{L}[f](p) \mathcal{L}[g](p).$ (畳み込み)

2.3.3.C 逆ラプラス変換

▶ $\tilde{f}(p) = \mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ から逆に $f(t)$ を与える逆ラプラス変換は、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt} dp, \quad (355)$$

となる (Bromwich 積分)。ただし p_0 は $\tilde{f}(p)$ の全ての特異点より右に経路が来るように取る。

(証明略。フーリエ変換を用いるものなど、色々な証明があるようです。)

逆ラプラス変換は留数定理を用いて求められますが、調べるとラプラス変換表 ($f(t) \longleftrightarrow \tilde{f}(p)$ の対応表) もたくさん見つかると思います。

2.3.3.D ラプラス変換を用いた定数係数線形微分方程式の解法

▶ さて、微分方程式の話に戻ろう。解きたかった微分方程式

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n \right) x(t) = Q(t), \quad (356)$$

の両辺をラプラス変換すると、2.3.3.B の (354) より

$$\begin{aligned} (p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n) \tilde{x}(p) &= \tilde{Q}(p) \\ &+ x(0) p^{n-1} + x'(0) p^{n-2} + \cdots + x^{(n-1)}(0) \\ &+ a_1 \left(x(0) p^{n-2} + x'(0) p^{n-1} + \cdots + x^{(n-2)}(0) \right) \\ &+ \cdots \\ &+ a_{n-1} x(0). \end{aligned} \quad (357)$$

よって、

$$\tilde{x}(p) = \frac{\tilde{Q}(p) + (p \text{ の高々 } (n-1) \text{ 次多項式})}{p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n}. \quad (358)$$

これを逆ラプラス変換すれば求めたい $x(t)$ が得られる。

▶ 例:

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = A \cos \omega t. \quad (359)$$

両辺をラプラス変換すると

$$(p^2 + \omega_0^2) \tilde{x}(p) = A \frac{p}{p^2 + \omega^2} + x(0)p + x'(0). \quad (360)$$

例えば初期条件として $x(0) = x'(0) = 0$ とすると、

$$\tilde{x}(p) = A \frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + \omega_0^2)}. \quad (361)$$

2.3.3.C の (355) 式 (Bromwich 積分) で逆ラプラス変換すると (左半円で閉じて、ジョルダンの補助定理の 90 度回転バージョンを使って...) $p = \pm i\omega$ 、 $p = \pm i\omega_0$ での $e^{pt} \tilde{x}(p)$ の留数を拾って

$$x(t) = -A \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (362)$$

と解が求まる。

2.4 一階微分方程式の解法の例

一階微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ の解法のうち、簡単なものをいくつか紹介する。
あまり時間がなさそうなので、残りはまとめてレポートにして紹介しちゃいます。どれも簡単だと思います。

2.4.1 変数分離形

レポート問題

$\frac{dy}{dx} = \frac{X(x)}{Y(y)}$ の形の微分方程式（変数分離形）は以下のように解ける。

$$X(x) = Y(y) \frac{dy}{dx}, \quad (363)$$

$$\therefore \int X(x) dx = \int Y(y) \frac{dy}{dx} dx + C \quad (364)$$

$$= \int Y(y) dy + C. \quad (365)$$

[b-34] 変数分離形の常微分方程式を1つ考え、解け。（ $Y(y) \neq$ 定数とする。）

2.4.2 同次形

レポート問題

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ の形の微分方程式に対して、 $f(kx, ky) = f(x, y)$ が成り立つとき（同次形）は、変数分離形に帰着する。 $u = y/x \iff y = xu$ として代入すると

$$\frac{d(xu)}{dx} = f(x, xu) = f(1, u) \equiv g(u). \quad (366)$$

$$\therefore u + x \frac{du}{dx} = g(u). \quad (367)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x} \quad \leftarrow \text{変数分離形}. \quad (368)$$

[b-35] 同次形の常微分方程式を1つ考え、解け。（ $f(x, y) \neq$ 定数とする。）

2.4.3 一階線形微分方程式

レポート問題

一階線形微分方程式 (正規形) は一般に

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x). \quad (369)$$

と書ける。ただし $a(x), b(x)$ は与えられた関数である。これは以下のように解ける。

1. まず $b(x) = 0$ の場合の斉次微分方程式 $\frac{dy}{dx} = a(x)y$ の解を求める。これは変数分離形なので $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = a(x) \rightarrow \ln y = \int a(x) dx + C$ として解けて

$$y(x) = C \exp\left(\int^x a(x') dx'\right) \quad (\text{for } b(x) = 0). \quad (370)$$

2. 次にこの積分定数 C を x に依存するとし (定数変化法)

$$y(x) = C(x) \exp\left(\int^x a(x') dx'\right). \quad (371)$$

とにおいて、元の微分方程式に代入して $C(x)$ に関する微分方程式を得る。

$$a(x)y(x) + b(x) = \frac{d}{dx}y(x) \quad (372)$$

$$= \frac{dC}{dx} \exp\left(\int^x a(x') dx'\right) + a(x)y(x). \quad (373)$$

$$\therefore \frac{dC}{dx} = b(x) \exp\left(-\int^x a(x') dx'\right). \quad (374)$$

3. これを解いて代入すれば $y(x)$ の解を得る。

$$C(x) = \int^x b(x') \exp\left(-\int^{x'} a(x'') dx''\right) dx' + C'. \quad (375)$$

$$\therefore y(x) = \left[\int^x b(x') \exp\left(-\int^{x'} a(x'') dx''\right) dx' + C' \right] \exp\left(\int^x a(x') dx'\right). \quad (376)$$

[b-36] 一階線形微分方程式を1つ考え、解け。 ($a(x) \neq 0, b(x) \neq 0$ とする.)

————— 11/14、ここまで —————

11/14に出題したレポートは [b-32]~[b-36]、[c-15] でした。
講義後、付録 A に [b-23]~[b-28] の解答例を追加しました。

2024 年度の講義ノートは以上です。お疲れ様でした。

UTOL のメッセージ欄やお昼休みなどに質問もあり、楽しい講義でした。

またどこかでお会いしましょう。

講義期間が終わったあとも、もし質問などあればいつでもご連絡下さい。

「授業評価アンケート」もぜひお願いします。UTOL にリンクを貼っておきます。

付録 A レポート問題 [b] の解答例

レポート問題 [b] のうち締め切りを過ぎたものの解答例を載せていきます。

10/3 出題分

[b-1] 解答例 $z = x + iy, w = u + iv$ としてとして

$$z\bar{z} = |z|^2 = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (377)$$

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re}(z). \quad (378)$$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\operatorname{Im}(z). \quad (379)$$

$$\begin{aligned} z + \bar{w} &= \overline{(x + iy) + (u + iv)} = \overline{(x + u) + i(y + v)} \\ &= (x + u) - i(y + v) = (x - iy) + (u - iv) = \bar{z} + \bar{w}. \end{aligned} \quad (380)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}\bar{w} &= \overline{(x + iy)(u + iv)} = \overline{(xu - yv) + i(xv + yu)} \\ &= (xu - yv) - i(xv + yu) = (x - iy)(u - iv) = \bar{z}\bar{w}. \end{aligned} \quad (381)$$

$$\begin{aligned} |zw| &= |(x + iy)(u + iv)| = |(xu - yv) + i(xv + yu)| \\ &= \sqrt{(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2)(u^2 + v^2)} = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{u^2 + v^2} = |z||w|. \end{aligned} \quad (382)$$

[b-2] 解答例

$$\begin{aligned} (|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 &= (|z| + |w|)^2 - (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= (|z| + |w|)^2 - (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| - (|z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + w\bar{z}) \\ &= 2|z||\bar{w}| - (z\bar{w} + \bar{z}w) \\ &= 2|z\bar{w}| - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &= 2\left(\sqrt{\{\operatorname{Re}(z\bar{w})\}^2 + \{\operatorname{Im}(z\bar{w})\}^2} - \operatorname{Re}(z\bar{w})\right) \geq 0. \end{aligned} \quad (383)$$

等号成立は $\operatorname{Im}(z\bar{w}) = 0$ のとき。(z と w の偏角が揃っているとき。)

[b-3] 解答例 コーシー・リーマン関係式 (42) より

$$f_x = -if_y. \quad (384)$$

両辺をさらに x で偏微分して

$$f_{xx} = -i(f_y)_x \quad (385)$$

$$= -i(f_x)_y \quad (386)$$

$$= -i(-if_y)_y \quad \because (42) \quad (387)$$

$$= -f_{yy}. \quad (388)$$

よって両辺の実部と虚部をとって

$$u_{xx} = -u_{yy}, \quad (389)$$

$$v_{xx} = -v_{yy}. \quad \blacksquare \quad (390)$$

[b-4] 解答例 コーシー・リーマン関係式 (41) より

$$v_x = -u_y = 2y, \quad \therefore v = 2xy + C_1(y), \quad (391)$$

$$v_y = u_x = 2x - 1, \quad \therefore v = 2xy - y + C_2(x). \quad (392)$$

これらを同時に満たす v は

$$v(x, y) = 2xy - y + C. \quad (393)$$

ただし C は任意の実数定数。 $(C = 0$ としても良い。)

[b-5] 解答例

$$f = u + iv \quad (394)$$

$$= (x^2 - y^2 - x) + i(2xy - y + C) \quad (395)$$

$$= z^2 - z + iC. \quad (396)$$

[b-6] 解答例

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \cos z + i \sin z.
 \end{aligned} \tag{397}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \delta_{n,\ell+k} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{n,\ell+k} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,\ell+k}}_{=1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} \\
 &= e^z e^w.
 \end{aligned} \tag{398}$$

(iii) 定義より $\sin(-z) = -\sin z$. したがって (i) より

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}). \tag{399}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \cos(z+w) &= \frac{1}{2} (e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) \\
 &= \frac{1}{2} (e^{iz} e^{iw} + e^{-iz} e^{-iw}) \quad \because \text{(ii)} \\
 &= \frac{1}{2} ((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) + (\cos z - i \sin z)(\cos w - i \sin w)) \\
 &\quad \because \text{(i)} \\
 &= \cos z \cos w - \sin z \sin w.
 \end{aligned} \tag{400}$$

10/10 出題分

[b-7] 解答例 $w_n = c_n z^n$ とすると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} w_n. \quad (401)$$

このとき

$$\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \frac{|c_{n+1} z^{n+1}|}{|c_n z^n|} = \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{R}. \quad (402)$$

よってダランベールの判定法により $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ は $|z| < R$ で絶対収束し、 $|z| > R$ では収束しない。つまり収束半径は R である。

[b-8] 解答例省略。端点と同じならどんな経路でも $\int_C f(z) dx = (1+i)a + ib$ になるはず。

[b-9] 解答例 経路 1 では $\int_{C_1} \bar{z} dx = 1$ 、経路 2 では $\int_{C_2} \bar{z} dx = 1 - i$ となる。

$$\begin{aligned} \text{計算例: } \int_{C_1} \bar{z} dz &= \int_0^1 \frac{dz_1(t)}{z_1(t)} dt \\ &= \int_0^1 (1-i)t \cdot (1+i) \cdot dt \\ &= \int_0^1 2t dt = 1. \end{aligned} \quad (403)$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \bar{z} dz &= \int_0^2 \frac{dz_2(t)}{z_2(t)} dt \\ &= \int_0^1 (-it) \cdot i \cdot dt + \int_1^2 (t-1-i) \cdot 1 \cdot dt \\ &= 1 - i. \end{aligned} \quad (404)$$

10/17 出題分

[b-10] 解答例 (11/6(水)に3つ目の解答を修正しました。)

$$\begin{aligned}
 \oint_{C(0,2)} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz &= \oint_{C(0,2)} \frac{e^{2z}}{(z+i)(z-i)} dz \quad \begin{array}{c} y \\ \circlearrowleft \\ x \end{array} \\
 &= \oint_{C(-i,1)} \frac{1}{z+i} \frac{e^{2z}}{z-i} dz + \oint_{C(i,1)} \frac{1}{z-i} \frac{e^{2z}}{z+i} dz \\
 &= 2\pi i \left(\frac{e^{-2i}}{-2i} + \frac{e^{2i}}{2i} \right) \\
 &= \pi(-e^{-2i} + e^{2i}) = 2\pi i \sin 2. \tag{405}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \oint_{C(0,2)} \frac{z^5}{(z-1)^3} dz &= \oint_{C(0,2)} \frac{1}{(z-1)^3} \underbrace{z^5}_{f(z)} dz \\
 &= \frac{2\pi i}{2!} f''(z)|_{z=1} = 20\pi i. \tag{406}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \oint_{C(4,0)} \frac{z^{10}}{(z-1)(z-3)^2} dz &= \oint_{C(3,1)} \frac{1}{(z-3)^2} \underbrace{\frac{z^{10}}{z-1}}_{f(z)} dz + \oint_{C(1,1)} \frac{1}{z-1} \underbrace{\frac{z^{10}}{(z-3)^2}}_{g(z)} dz \\
 &= 2\pi i f'(z)|_{z=3} + 2\pi i g(z)|_{z=1} = 167306\pi i. \tag{407}
 \end{aligned}$$

[b-11] 解答例 $z(\theta) = e^{i\theta}$ として

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\beta \cos \theta} d\theta \quad (0 < \beta < 1) \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\beta(z(\theta)+z(\theta)^{-1})/2} \underbrace{\frac{1}{iz(\theta)} \frac{dz(\theta)}{d\theta}}_{=1} d\theta \\
 &= \oint_{C(0,1)} \frac{1}{1+\beta(z+z^{-1})/2} \frac{1}{iz} dz \\
 &= \frac{2}{i} \oint_{C(0,1)} \frac{1}{\beta z^2 + 2z + \beta} dz \\
 &= \frac{2}{i} \oint_{C(0,1)} \frac{1}{\beta(z-z_+)(z-z_-)} dz \quad \left(z_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \right) \tag{408}
 \end{aligned}$$

ここで $0 < \beta < 1$ より、 z_+ が円周 $C(0,1)$ の中、 z_- が $C(0,1)$ の外にあることに

注意すると (図を描いてみよう)

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{i} \oint_{C(0,1)} \frac{1}{z - z_+} \underbrace{\left(\frac{1}{\beta(z - z_-)} \right)}_{f(z)} dz \quad (f(z) \text{ は } C(0,1) \text{ 内で正則.}) \\
 &= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i f(z_+) \quad (\because 1.4.5 \text{ コーシーの積分定理}) \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{409}
 \end{aligned}$$

この問題は 1.5.4.A 節の形になっているので、予習していた人はそちらのやり方で「留数積分を用いて...」として解いても OK です。途中はほぼ同じ計算ですね。

[b-12] 解答例 1.4.5 コーシーの積分公式より

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\alpha,r)} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz. \tag{410}$$

ここで $z(\theta) = \alpha + re^{i\theta}$ とパラメータ表示すると

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z(\theta))}{z(\theta) - \alpha} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \tag{411}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \tag{412}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta}) d\theta. \quad \blacksquare \tag{413}$$

[b-13] 解答例 $f(z) \neq 0$ なので、

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \tag{414}$$

とおけば $g(z)$ は D 内で正則。したがって最大値の定理より $|g(z)| = 1/|f(z)|$ は E の境界で最大値を取る。したがって $|f(z)|$ は境界で最小値を取る。■

[b-14] 解答例

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{1}{(1-i) - (z-i)} \\ &= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-i}{1-i}} \\ &= \frac{1}{1-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n \quad \text{for } \left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1 \end{aligned} \tag{415}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(1-i)^{-(n+1)}}_{c_n} (z-i)^n. \tag{416}$$

収束半径は、[b-7] より $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}| = |1-i| = \sqrt{2}$.

(あるいは、[b-7] を使わなくても、式 (415) の収束条件から $|(z-i)/(1-i)| < 1 \rightarrow |z-i| < \sqrt{2}$ 、としても良いですね。)

10/24 出題分

[b-15] 解答例

1.

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right). \quad (417)$$

$$[\text{第一項}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2 + (z+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} \quad (418)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2^{-n-2})(z+1)^n. \quad (|z+1| < 2) \quad (419)$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2}(z+1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-2^{-n-2})(z+1)^n. \quad (|z+1| < 2) \quad (420)$$

$$\begin{cases} c_{-1} &= \frac{1}{2} = \text{Res}(f, -1), \\ c_n &= -2^{-n-2} \quad (n \geq 0), \\ c_n &= 0 \quad (n \leq -2). \end{cases} \quad (421)$$

2.

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right). \quad (422)$$

$$[\text{第一項}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z+1) - 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z+1}} \quad (423)$$

$$= \frac{1}{2}(z+1)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z+1} \right)^n = \sum_{m=-1}^{-\infty} 2^{-m-2}(z+1)^m. \quad (|z+1| > 2) \quad (424)$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2}(z+1)^{-1} + \sum_{n=-1}^{-\infty} 2^{-n-2}(z+1)^n \quad (|z+1| > 2) \quad (425)$$

$$= (z+1)^{-1} + \sum_{n=-2}^{-\infty} 2^{-n-2}(z+1)^n \quad (|z+1| > 2) \quad (426)$$

$$\begin{cases} c_{-1} &= 1 \\ c_n &= 2^{-n-2} \quad (n \leq -2), \\ c_n &= 0 \quad (n \geq 0). \end{cases} \quad (427)$$

[b-16] 解答例

1. $\exp z$ のテイラー展開 ($\exp z$ の定義) で $z \rightarrow 1/z$ として

$$\exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \quad \begin{cases} c_n = \frac{1}{(-n)!} & (n \leq 0) \\ c_n = 0 & (n > 0) \end{cases} \quad (428)$$

2. $\text{Res}(f, 0) = c_{-1} = 1$.

3.

$$\exp(1/z) = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} \cdots + \frac{1}{n!} z^{-n} + \cdots \quad (429)$$

と負べきが無限に続くので確かに真性特異点になっている。

[b-17] 解答例 $f(z) = 1/\sin z$ は $\sin z = 0$ となる点以外では正則。 $\sin z = 0$ となるのは $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) のときだけである。

これは本当か? z が複素数のときにも成り立つのか?? 証明しておこう。

$$\sin z = 0 \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \quad (430)$$

$$\iff e^{iz} = e^{-iz} \quad (431)$$

$$\iff e^{2iz} = 1 \quad (432)$$

$$\iff e^{2ix-2y} = 1 \quad (z = x + iy) \quad (433)$$

$$\iff e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x) = 1 \quad (434)$$

$$\iff y = 0 \text{ かつ } x = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (435)$$

$$\iff z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (436)$$

$z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) は孤立特異点である。極なのか真性特異点なのか、極だとしたら位数はいくつなのか、すぐには分からない気がするが、 $z = n\pi$ のまわりで $z = n\pi + \delta z$ として $\sin z$ を展開してみると (三角関数の合成は仮定しよう。

[b-6] 参照)

$$\sin(n\pi + \delta z) = \sin n\pi \cos \delta z + \cos n\pi \sin \delta z \quad (437)$$

$$= (-1)^n \sin \delta z \quad (438)$$

$$= (-1)^n \left(\delta z + \frac{-1}{3!} \delta z^3 + \cdots \right). \quad (439)$$

よって

$$f(n\pi + \delta z) = \frac{1}{\sin(n\pi + \delta z)} \quad (440)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\delta z} \underbrace{\left(1 + \frac{-1}{3!}\delta z^2 + \dots\right)^{-1}}_{\delta z \rightarrow 0 \text{ で有限.}} \quad (441)$$

したがって $z = n\pi$ は $f(z)$ の一位の極になっている。その留数は式 (169) より

$$\text{Res}(f, n\pi) = \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi)f(z) \quad (442)$$

$$= \lim_{\delta z \rightarrow 0} (\delta z)f(n\pi + \delta z) \quad (443)$$

$$= \lim_{\delta z \rightarrow 0} (\delta z) \frac{(-1)^n}{\delta z} \left(1 + \frac{-1}{3!}\delta z^2 + \dots\right)^{-1} \quad (444)$$

$$= (-1)^n. \quad (445)$$

(ここの留数計算はロピタルの定理を用いてもいいですね。あるいはこの後出てくる

[b-19] を用いても良いです。)

[b-18] 解答例 $f(z) = z^2 \sin(1/z)$ は $C(0, 1)$ 内で孤立特異点 $z = 0$ を除いて正則なので、留数定理より

$$\oint_{C(0,1)} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0). \quad (446)$$

$z = 0$ での留数は (この場合は真性特異点なので、式 (169) を用いるのではなく展開する)

$$f(z) = z^2 \sin(1/z) = z^2 \left(z^{-1} - \frac{1}{3!}z^{-3} + \frac{1}{5!}z^{-5} + \dots \right) \quad (447)$$

$$= z - \frac{1}{3!}z^{-1} + \frac{1}{5!}z^{-3} + \dots \quad (448)$$

よって $z = 0$ での留数は $-1/3! = -1/6$ 。代入して

$$\oint_{C(0,1)} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = -\frac{\pi i}{3}. \quad (449)$$

[b-19] 解答例 $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ が $z = \alpha$ に 1 位の極を持っていて、 $g(\alpha) \neq 0$ なので、 $h(\alpha) = 0$ 。 (正確には $g(z), h(z)$ が正則である、という条件が必要でしたね。すいません。問題に追記しておきました。) よって 1.5.3 の留数の求めかたより

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z) \quad (450)$$

$$= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) \frac{g(z)}{h(z)} \quad (451)$$

$$= \lim_{z \rightarrow \alpha} g(z) \left(\frac{h(z)}{z - \alpha} \right)^{-1} \quad (452)$$

$$= \lim_{z \rightarrow \alpha} g(z) \left(\frac{h(z) - h(\alpha)}{z - \alpha} \right)^{-1} \quad (453)$$

$$= \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)} \quad \blacksquare \quad (454)$$

[b-20] 解答例 略。

[b-21] 解答例 略。

[b-22] 解答例

(i)

$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{iaRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) \frac{dRe^{i\theta}}{d\theta} d\theta \right| \quad (455)$$

$$\leq \int_0^\pi \left| e^{iaRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) \frac{dRe^{i\theta}}{d\theta} \right| d\theta \quad (456)$$

$$= \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} \underbrace{|f(Re^{i\theta})|}_{\leq M(R)} R d\theta \quad (457)$$

$$\leq M(R)R \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta. \quad (458)$$

(ii)

$$\int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta. \quad (459)$$

第二項で $\theta = \pi - \theta'$ とすると $\sin(\pi - \theta') = \sin \theta'$ なので

$$\text{第二項} = \int_{\pi/2}^0 e^{-aR \sin \theta'} (-d\theta') = \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta'} d\theta' = \text{第一項}. \quad (460)$$

よって

$$\int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta. \quad (461)$$

(iii) $f(\theta) = \sin \theta - (2/\pi)\theta$ とすると、

$$f''(\theta) = -\sin \theta \leq 0 \quad (\text{for } 0 \leq \theta \leq \pi/2). \quad (462)$$

より、 $f(\theta)$ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ で上に凸。一方 $f(0) = f(\pi/2) = 0$ 。よって $f(\theta)$ は端点で値がゼロで上に凸なので

$$f(\theta) \geq 0 \quad (\text{for } 0 \leq \theta \leq \pi/2). \quad (463)$$

したがって $\sin \theta \geq (2/\pi)\theta$ for $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 。

(iv) (iii) の結果より

$$e^{-aR \sin \theta} < e^{-aR \cdot (2/\pi)\theta} \quad (\text{for } 0 \leq \theta \leq \pi/2). \quad (464)$$

$$\therefore R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta < R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \cdot (2/\pi)\theta} d\theta \quad (465)$$

$$= R \left[\frac{-\pi}{2aR} e^{-aR \cdot (2/\pi)\theta} \right]_0^{\pi/2} \quad (466)$$

$$= \frac{\pi}{2a} (1 - e^{-aR}) < \frac{\pi}{2a}. \quad (467)$$

(v) 以上より

$$f(z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \text{ for } \forall z \in C_R \quad (468)$$

$$\implies \left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq M(R) R \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \theta} d\theta \quad (469)$$

$$= 2M(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \theta} d\theta \quad (470)$$

$$< 2M(R) \frac{\pi}{2a} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (471)$$

10/31 出題分

[b-23] 解答例 条件「複素平面の上半面で正則かつ $|f(z)| \xrightarrow{\text{Im}z>0, |z|\rightarrow\infty} 0$ 」を満たす関数 $f(z)$ で確認出来ていれば良い。例えば簡単な例としては $f(z) = \frac{1}{z+i}$ を考えると、これは下半面の $z = -i$ に極を持つだけで、 $|f(z)| \xrightarrow{|z|\rightarrow\infty} 0$ を満たしている。この場合のクラマース・クローニツヒ関係式は

$$f(x) = \frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + i \frac{-1}{x^2+1} \quad (472)$$

$$\therefore \text{第1式左辺} = \text{Re}f(a) = \frac{a}{a^2+1} \quad (473)$$

$$\text{第2式左辺} = \text{Im}f(a) = \frac{-1}{a^2+1} \quad (474)$$

$$\text{第1式右辺} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}f(x)}{x-a} dx = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{(x-a)(x^2+1)} dx \quad (475)$$

$$\text{第2式右辺} = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}f(x)}{x-a} dx = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x-a)(x^2+1)} dx \quad (476)$$

ここで*8

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-a)(x^2+1)} dx &= \frac{1}{a^2+1} \int \left(\frac{1}{x-a} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-a}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{a^2+1} \left(\ln|x-a| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - a \tan^{-1} x \right) + C \\ &= \frac{1}{a^2+1} \left(\ln \left| \frac{x-a}{\sqrt{x^2+1}} \right| - a \tan^{-1} x \right) + C \equiv F(x), \end{aligned} \quad (478)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-a)(x^2+1)} dx &= \frac{1}{a^2+1} \int \left(\frac{a}{x-a} + \frac{-ax}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{a^2+1} \left(a \ln|x-a| - \frac{a}{2} \ln|x^2+1| + \tan^{-1} x \right) + C' \\ &= \frac{1}{a^2+1} \left(a \ln \left| \frac{x-a}{\sqrt{x^2+1}} \right| + \tan^{-1} x \right) + C' \equiv G(x), \end{aligned} \quad (479)$$

*8 $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x$ を用いました。この式は、 $y = \tan^{-1} x$ として

$$\tan y = x \quad \rightarrow \quad y' \frac{1}{\cos^2 y} = 1 \quad \rightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (477)$$

として示せます。

とおくと

$$\begin{aligned} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-a)(x^2+1)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F(\infty) - F(a+\epsilon) + F(a-\epsilon) - F(-\infty)] \\ &= \frac{-a\pi}{a^2+1} \quad \left(\because \tan^{-1}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (480)$$

$$\begin{aligned} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x-a)(x^2+1)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [G(\infty) - G(a+\epsilon) + G(a-\epsilon) - G(-\infty)] \\ &= \frac{\pi}{a^2+1}. \end{aligned} \quad (481)$$

よって

$$\text{第1式右辺} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{(x-a)(x^2+1)} dx = \frac{a}{a^2+1}, \quad (482)$$

$$\text{第2式右辺} = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x-a)(x^2+1)} dx = \frac{-1}{a^2+1}. \quad (483)$$

となり、それぞれの左辺と確かに一致している。

(ここでは頑張って実数積分を実行しましたが、複素積分で経路を閉じて、、、とやって示しても OK です。)

[b-24] 解答例 図の経路を $C = C_{\text{下辺}} + C_{\text{右辺}} + C_{\text{上辺}} + C_{\text{左辺}}$ とおき、 $f(z) = e^{-z^2}$ とすると、コーシーの積分定理より

$$0 = \oint f(z) dz = \left(\int_{C_{\text{下辺}}} + \int_{C_{\text{右辺}}} + \int_{C_{\text{上辺}}} + \int_{C_{\text{左辺}}} \right) f(z) dz. \quad (484)$$

ここで

$$\int_{C_{\text{下辺}}} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (485)$$

$$\int_{C_{\text{上辺}}} f(z) dz = \int_{\infty}^{-\infty} f\left(x + \frac{k}{2}i\right) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ik/2)^2} dx = -e^{k^2/4} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-ikx} dx}_{\text{求めたい積分}} \quad (486)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_{\text{右辺}}} f(z) dz \right| &\leq \max_{z \in C_{\text{右辺}}} |f(z)| \times (C_{\text{右辺}} \text{の長さ}) \\ &= \max_{y \in [0, k/2]} \left| e^{-(R+iy)^2} \right| \times \frac{k}{2} = e^{-R^2+k^2/4} \times \frac{k}{2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (487)$$

$C_{\text{左辺}}$ も同様。したがって

$$0 = \sqrt{\pi} - e^{k^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - ikx} dx \quad (488)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - ikx} dx = e^{-k^2/4} \sqrt{\pi}. \quad (489)$$

この問題は、複素平面の下半面の長方形を考える解き方もあります。どちらでも OK です。

[b-25] 解答例

$$\begin{aligned} \text{ルジャンドル: } & P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \\ \text{ラゲール: } & P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 1 - x, \quad P_2(x) = x^2 - 4x + 2. \\ \text{エルミート: } & P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 2x, \quad P_2(x) = 4x^2 - 2. \end{aligned} \quad (490)$$

[b-26] 解答例 それぞれの直交多項式 $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) に対して、内積を以下のように定義する

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_I w(x) P_n(x) P_m(x) dx. \quad I = \begin{cases} [-1, 1] & \text{ルジャンドル} \\ [0, \infty) & \text{ラゲール} \\ (-\infty, \infty) & \text{エルミート} \end{cases} \quad (491)$$

この内積は $n \neq m$ のときゼロになる。 $(P_n(x))$ が直交系を成している。) (証明は省略する。物理数学 2 参照。) $n = m$ のときの値は以下のようになる。

$$\text{ルジャンドル: } \langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}, \quad (492)$$

$$\text{ラゲール: } \langle P_n, P_m \rangle = \int_0^{\infty} e^{-x} P_n(x) P_m(x) dx = (n!)^2 \delta_{n,m}, \quad (493)$$

$$\text{エルミート: } \langle P_n, P_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P_n(x) P_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}. \quad (494)$$

[b-27] 解答例 各多項式がみたす微分方程式は以下の通り (これも証明略。)

$$\text{ルジャンドル: } \left((1-x)^2 \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + n(n+1) \right) P_n(x) = 0, \quad (495)$$

$$\text{ラゲール: } \left(x \frac{d^2}{dx^2} + (1-x) \frac{d}{dx} + n \right) P_n(x) = 0, \quad (496)$$

$$\text{エルミート: } \left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right) P_n(x) = 0, \quad (497)$$

この問題って 2.1 節の表 1 にほぼ答が載っちゃってましたね。(あちらは一般の ν と一般の $f(z)$ ですが。) まあ OK でしょう。

[b-28] 解答例 各多項式がみたす漸化式は以下の通り (これも証明略。)

$$\text{ルジャンドル} : (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (498)$$

$$\text{ラゲール} : P_{n+1}(x) + (x-2n-1)P_n(x) + n^2P_{n-1}(x) = 0, \quad (499)$$

$$\text{エルミート} : P_{n+1}(x) - 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0. \quad (500)$$

微分が入っている形もありますので、そちらでも OK。

11/7 出題分

[b-29] 解答例

$$\oint_{C(\alpha_k)} \frac{f(w)}{w-z} dw = -2\pi i P_k(z) \quad (249)$$

を示したい。留数定理を用いるため、左辺の $f(w)$ と $\frac{1}{w-z}$ を $w = \alpha_k$ のまわりで展開すると

$$f(w) = \sum_{n=-m_k}^{\infty} c_n^{(k)} (w - \alpha_k)^n, \quad (501)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w - \alpha_k) - (z - \alpha_k)} \\ &= \dots \\ &= -\frac{1}{z - \alpha_k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{w - \alpha_k}{z - \alpha_k} \right)^\ell, \quad \left| \frac{w - \alpha_k}{z - \alpha_k} \right| < 1. \end{aligned} \quad (502)$$

$$\therefore \frac{f(w)}{w-z} = -\frac{1}{z - \alpha_k} \sum_{n=-m_k}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} c_n^{(k)} (z - \alpha_k)^{-\ell} (w - \alpha_k)^{n+\ell} \quad (503)$$

これを $w = \alpha_k$ のまわりの小円で周積分すると、留数定理より $n + \ell = -1$ の項だけ、つまり $n = -m_k, \dots, -1$ かつ $\ell = -n - 1$ の項だけが残り

$$\begin{aligned} \oint_{C(\alpha_k)} \frac{f(w)}{w-z} dw &= -\frac{1}{z - \alpha_k} \cdot 2\pi i \sum_{n=-m_k}^{-1} c_n^{(k)} (z - \alpha_k)^{n+1} \\ &= -2\pi i \sum_{n=-m_k}^{-1} c_n^{(k)} (z - \alpha_k)^n \\ &= -2\pi i P_k(z). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (504)$$

[b-30] 解答例

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \quad (\operatorname{Re} z > -1) \quad (505)$$

$$= \underbrace{[-e^{-t} \cdot t^z]_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot z t^{z-1} dt \quad (506)$$

$$= z\Gamma(z). \quad \blacksquare \quad (507)$$

[b-31] 解答例 まず (300) 式で $t = \sin^2 \theta$ と変数変換すると $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ より

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad (\operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0) \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta. \end{aligned} \quad (508)$$

次に

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2(p-1)} 2x dx \quad (t = x^2) \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx, \end{aligned} \quad (509)$$

より

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy. \quad (510)$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ として二重積分を極座標積分にすると

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty r dr \int_0^{\pi/2} d\theta e^{-r^2} (r \cos \theta)^{2p-1} (r \sin \theta)^{2q-1} \\ &= 4 \int_0^\infty r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q). \quad \because (509), (508) \end{aligned} \quad (511)$$

$$\therefore B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad \blacksquare \quad (512)$$

別解として

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt. \quad (513)$$

を用いる証明もあります。(省略)