2022 年度秋学期　物理数学 I（浜口）期末テスト

2022 年 11 月 24 日実施。

→ 解答例を追記。（質問・コメントなどあれば、ITC-LMS かメールでどうぞ。）

- **試験時間は 13:10-14:30 の 80 分です。**
- 講義中で示した定理や講義のレポートで出題された定理は既知として用いて構いません。
- 教科書・参考書・ノートの持ち込み可です。紙媒体でも電子媒体 (タブレット, ノート PC, スマートフォンなど) でも構いません。
- 試験時間中のネットでの検索は禁止しません。ただし、試験時間中に試験問題をインターネット上にアップロードすること、および学生どうしが連絡を取り合うことは禁止します。
- 「. . . を求めよ」という問題は、答だけでなく（雑で良いので）途中式なども残しておくこと。
- 問題に間違いや誤植を見つけた場合は、正しく修正した上で解答すること。

---

[1] 以下の各命題について真偽を答え、「真」の場合は命題を証明し、「偽」の場合には具体的な反例を 1 つ示せ。

(1) 任意の複素数 z_1 と z_2 に対して、$|z_1 + iz_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ である。

偽． 反例：$z_1 = 1, z_2 = i$ など。

(2) 任意の複素関数 $g(z)$ に対して、複素関数 $f(z) = \dfrac{g(z)}{z-\alpha}$ は $z = \alpha$ に 1 位の極を持ち、その留数は $g(\alpha)$ である。

偽． 反例：$g(z) = \dfrac{1}{z-\alpha}$ など。

(3) $f(z)$ が点 $z = z_0$ で正則な関数のとき、$\overline{f(\overline{z})}$ は（z の関数として）$z = \overline{z_0}$ で正則な関数である。（ただし $\overline{X}$ は X の複素共役を表す。）

- 試験後追記コメント：この問題について「正則」と「複素微分可能」という言葉の使い方がいい加減なのではないか、という趣旨のコメントを複数の学生さんが書いてくれていました。確かにその通りですね。ありがとうございます。「複素微分可能」は 1 点でも定義出来るのに対して（例えば $f(z) = |z|^2$ は $z = 0$ でのみ複素微分可能）、「正則」は領域（開領域）について定義するのですね。見返してみると講義ノートでもいい加減な書き方をしていましたので、脚注を追記しておきました。
- この期末試験の問題では、正確には、1 点について聞くのであれば「$f(z)$ が点 $z = z_0$ で複素微分可能なとき、$\overline{f(\overline{z})}$ は（z の関数として）$z = \overline{z_0}$ で複素微分可能である。」とすべきでしたし、領域について聞くのであれば「$f(z)$ が点 $z = z_0$ を含むある領域で正則であるとき、$\overline{f(\overline{z})}$ は（z の関数として）$z = \overline{z_0}$ を含むある領域で正則である。」とすべきでした。以下の解答例のうち、例 1, 例 2 は前者の「1 点での複素微分可能性」について示しています。例 3 はテイラー展開なので「領域での正則性」についての証明になっています。

真．（証明）

- 解答例 1：仮定より

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0). \tag{1}$$

が存在する。このとき、$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ として、$z = \overline{z_0}$ での複素微分を考えると

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(\overline{z_0} + \Delta z) - g(\overline{z_0})}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{f(\overline{\overline{z_0} + \Delta z})} - \overline{f(\overline{\overline{z_0}})}}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{f(z_0 + \overline{\Delta z}) - f(z_0)}}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\left(\frac{f(z_0 + \overline{\Delta z}) - f(z_0)}{\overline{\Delta z}} \right)} \\
&= \lim_{\overline{\Delta z} \to 0} \overline{\left(\frac{f(z_0 + \overline{\Delta z}) - f(z_0)}{\overline{\Delta z}} \right)} \quad (\because \Delta z \to 0 \leftrightarrow |\Delta z| \to 0 \leftrightarrow \overline{\Delta z} \to 0) \\
&= \overline{f'(z_0)}.
\end{aligned} \tag{2}$$

したがって極限値が存在し、$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ は $z = \overline{z_0}$ での複素微分可能。

▶ 解答例 2：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{3}$$
$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} = U(x, y) + iV(x, y). \tag{4}$$

とすると、$g(z) = \overline{u(x, -y) + iv(x, -y)} = u(x, -y) - iv(x, -y)$ より、

$$U(x, y) = u(x, -y), \tag{5}$$
$$V(x, y) = -v(x, -y). \tag{6}$$

これと $z = z_0$ における $f(z)$ に対するコーシー・リーマン関係式より、

$$U_x(\overline{z_0}) = U_x(x_0, -y_0) = u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = V_y(x, -y_0) = V_y(\overline{z_0}), \tag{7}$$
$$U_y(\overline{z_0}) = U_y(x_0, -y_0) = -u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0) = -V_x(x_0, -y_0) = -V_x(\overline{z_0}). \tag{8}$$

したがって U, V は $z = \overline{z_0}$ でコーシー・リーマン関係式をみたす。また $u(x, y), v(x, y)$ は $x = x_0, y = y_0$ で全微分可能なので、$U(x, y), V(x, y)$ は $x = x_0, y = -y_0$ で全微分可能。よって $g(z)$ は $z = z_0$（$x = x_0, y = -y_0$）で複素微分可能。

▶ 解答例 3：

定義により $f(z)$ は $z = 0$ のまわりでテイラー展開できて、$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ と書ける。すると $\overline{f(\bar{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} (z - \bar{z}_0)^n$ で、この関数の収束半径は（$\sum_{n=0}^{\infty} |\overline{c_n}| R^n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| R^n$ より）より $f(z)$ の収束半径と同じである。したがって $\overline{f(\bar{z})}$ は（点 $z = \overline{z_0}$ を含む領域で）正則である。

[2] 複素平面上の長方形領域 $0 \leq \mathrm{Re} z \leq \pi$, $0 \leq \mathrm{Im} z \leq 1$ において、$|\sin z|$ の最大値およびその最大値を与える z を求めよ。

（解答例）$z = x + iy$ に対して

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} + \cos x \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}. \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\sin z| &= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 x \cdot (e^{-y} + e^{y})^2 + \cos^2 x \cdot (e^{-y} - e^{y})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(e^{-2y} + e^{2y})^2 - 2\cos 2x}. \end{aligned} \tag{10}$$

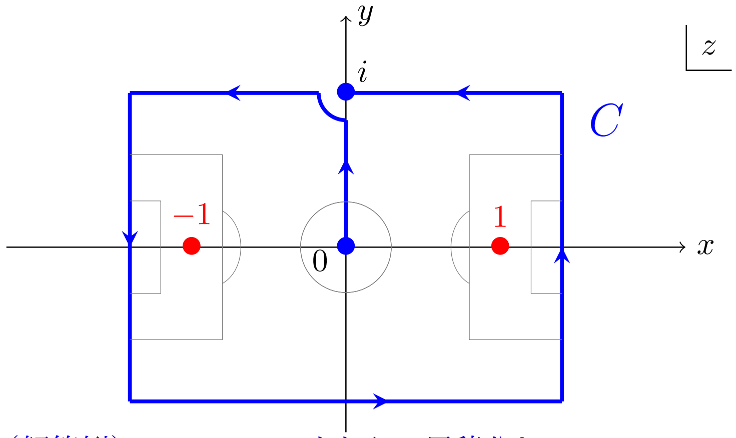
これを x, y に対してそれぞれ最大化すると

- ▶ $(e^{-2y} + e^{2y})^2$ を最大化 $\to y = 1$.
- ▶ $\cos 2x$ を最小化 $\to x = \frac{\pi}{2}$.

となるので、与えられた領域において$\underline{|\sin z| \text{ は } z = \frac{\pi}{2} + i \text{ で最大値 } \frac{e + e^{-1}}{2} \text{ を取る。}}$

（別解法）最大値の定理より境界で最大値を与えることを用いて、4 辺での最大値を順番に見ていっても良い。左右の辺 $x = 0, \pi$ での最大値は $y = 1$ で $\frac{e - e^{-1}}{2}$、下辺 $y = 0$ での最大値は $x = \frac{\pi}{2}$ で 1 となって、結局、上辺 $y = 1$ での最大値（$x = \frac{\pi}{2}$ で $\frac{e + e^{-1}}{2}$）が全体での最大値を与えることになる。

[3] 下図の積分経路 C に対して、$\displaystyle\int_C \frac{2z}{z^2-1}dz$ を求めよ。（ただし細い線は問題とは関係ない。）



（解答例）$z=1,-1$ のまわりの周積分と、$z=0\to z=i$ の直線積分 $C_\uparrow$ の、3 つの経路に分けると

$$z=1 \text{ まわり：}\quad 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,1)=2\pi i. \tag{11}$$

$$z=-1 \text{ まわり：}\quad 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,-1)=2\pi i. \tag{12}$$

$$\begin{aligned} z=0\to i \ : \quad \int_{C_\uparrow} f(z)dz &= \int_0^1 f(z(y))\frac{dz(y)}{dy}dy \qquad (z(r)=iy) \\ &= \int_0^1 \frac{2iy}{-y^2-1}idy = \int_0^1 \frac{2y}{y^2+1}dr = \ln(y^2+1)\Big|_0^1 = \ln 2. \end{aligned} \tag{13}$$

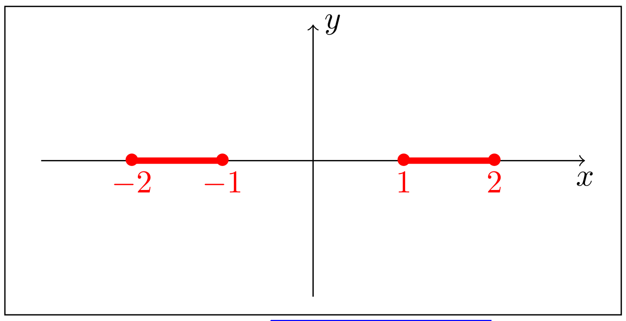
よって与えられた積分の値は $\underline{\ln 2+4\pi i}$.

[4] 実数積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{2\cos\theta + a + 1/a}d\theta \qquad (a$ は実数、$a>1)$ を求めよ。

（解答例）

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{2\cos\theta + a + 1/a}d\theta && (14)\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{e^{2i\theta}}{2\cos\theta + a + 1/a}d\theta && (15)\\ &= \oint \frac{z^2}{z+z^{-1}+a+1/a}\cdot\frac{dz}{iz} && (16)\\ &= (-i)\oint \frac{z^2}{z^2+1+(a+1/a)z}dz && (17)\\ &= (-i)\oint \frac{z^2}{(z+a)(z+1/a)}dz && (18)\\ &= (-i)(2\pi i)\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z+a)(z+1/a)}, -1/a\right) && (19)\\ &= \frac{2\pi}{a}\cdot\frac{1}{a^2-1} && (20) \end{aligned}$$

[5] 下図のような分岐線を与え、この他に特異点はなく、かつリーマン面が 2 枚の複素平面からなるような複素関数の例を 1 つ挙げよ（答だけで良い）。



（解答例）$f(z) = \sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$.

（別解）$f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}}$, $f(z) = \dfrac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-4}}$, $f(z) = \dfrac{\sqrt{(z+1)(z+2)}}{\sqrt{(z-1)(z-2)}}$ など。

[6] 関数 $f(t) = t^x e^{\lambda t}$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f](p)$ を Γ 関数を用いて表せ。ただし x, λ は実数とし $p > \lambda$、$x > -1$ とする。

（解答例）

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty e^{-pt}(t^x e^{\lambda t})dt \tag{21}$$

$$= \int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t} t^x dt \tag{22}$$

$$= \int_0^\infty e^{-t'} \left(\frac{t'}{p-\lambda}\right)^x \frac{1}{p-\lambda} dt' \qquad t' = (p-\lambda)t \tag{23}$$

$$= \frac{1}{(p-\lambda)^{x+1}} \int_0^\infty e^{-t'} t'^{(x+1)-1} dt' \tag{24}$$

$$= \frac{\Gamma(x+1)}{(p-\lambda)^{x+1}} \tag{25}$$

問題文は以上です。