

2022 年度秋学期 物理数学 I (浜口) 期末テスト

2022 年 11 月 24 日実施。

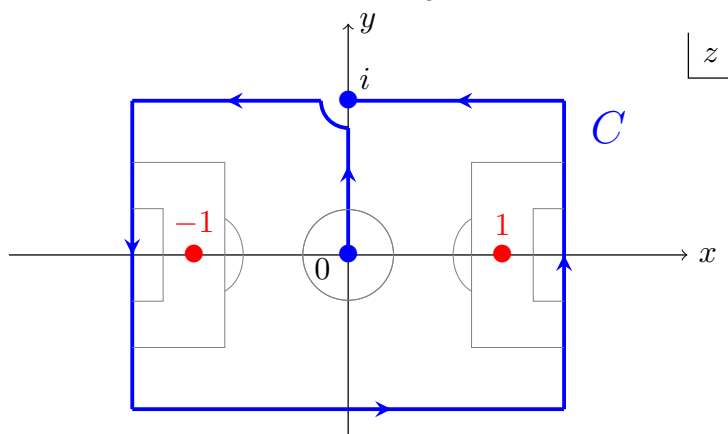
- ▶ 試験時間は **13:10-14:30** の 80 分です。
- ▶ 講義中で示した定理や講義のレポートで出題された定理は既知として用いて構いません。
- ▶ 教科書・参考書・ノートの持ち込み可です。紙媒体でも電子媒体 (タブレット, ノート PC, スマートフォンなど) でも構いません。
- ▶ 試験時間中のネットでの検索は禁止しません。ただし、試験時間中に試験問題をインターネット上にアップロードすること、および学生どうしが連絡を取り合うことは禁止します。
- ▶ 「...を求めよ」という問題は、答だけでなく (雑で良いので) 途中式なども残しておくこと。
- ▶ 問題に間違いや誤植を見つけた場合は、正しく修正した上で解答すること。

[1] 以下の各命題について真偽を答え、「真」の場合は命題を証明し、「偽」の場合には具体的な反例を 1 つ示せ。

- (1) 任意の複素数 z_1 と z_2 に対して、 $|z_1 + iz_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ である。
- (2) 任意の複素関数 $g(z)$ に対して、複素関数 $f(z) = \frac{g(z)}{z - \alpha}$ は $z = \alpha$ に 1 位の極を持ち、その留数は $g(\alpha)$ である。
- (3) $f(z)$ が点 $z = z_0$ で正則な関数のとき、 $\overline{f(\bar{z})}$ は (z の関数として) $z = \bar{z}_0$ で正則な関数である。(ただし \bar{X} は X の複素共役を表す。) (試験後追記コメントあり、解答例のコメント参照。)

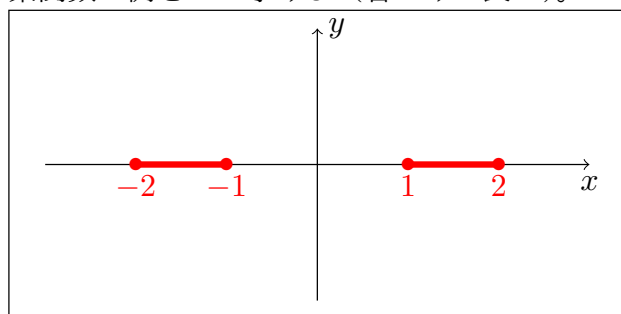
[2] 複素平面上の長方形領域 $0 \leq \operatorname{Re}z \leq \pi, 0 \leq \operatorname{Im}z \leq 1$ において、 $|\sin z|$ の最大値およびその最大値を与える z を求めよ。

[3] 下図の積分経路 C に対して、 $\int_C \frac{2z}{z^2 - 1} dz$ を求めよ。(ただし細かい線は問題とは関係ない。)



[4] 実数積分 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + i \sin 2\theta}{2 \cos \theta + a + 1/a} d\theta$ (a は実数、 $a > 1$) を求めよ。

[5] 下図のような分岐線を与え、この他に特異点はなく、かつリーマン面が 2 枚の複素平面からなるような複素関数の例を 1 つ挙げよ (答だけで良い)。



[6] 関数 $f(t) = t^x e^{\lambda t}$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f](p)$ を Γ 関数を用いて表せ。ただし x, λ は実数とし $p > \lambda, x > -1$ とする。

問題文は以上です。