

「標準模型を超える物理」 入門
(2026 年 7 月 神戸大学 集中講義)

濱口幸一

最終更新日時：2026 年 7 月 28 日 09:19

目次

§ 1	標準宇宙論入門	2
§ 1.1	FLRW 宇宙	2
§ 1.1.1	Einstein 方程式と FLRW 計量	2
§ 1.1.2	Friedmann 方程式と連続の式	3
§ 1.1.3	エネルギー密度の進化と現在の宇宙	4
§ 1.1.4	Hubble パラメータ、臨界密度、密度パラメータ Ω	7
§ 1.1.5	宇宙の平坦性（平坦性問題）について	9
§ 1.1.6	Hubble パラメータ H と宇宙年齢 t の関係	10
§ 1.1.7	※おまけ：現在の宇宙年齢を計算してみよう	10
§ 1.2	Radiation dominated universe	12
§ 1.2.1	ρ_{rad} と温度 T	12
§ 1.2.2	時刻 t と温度 T の関係	13
§ 1.3	Thermal history	14
§ 1.3.1	宇宙の熱史	14
§ 1.3.2	宇宙背景放射 (CMB)	15
§ 1.3.3	Big Bang 元素合成 (BBN, Big Bang Nucleosynthesis)	16
§ 1.4	標準宇宙論（+ 素粒子の標準模型）では説明できないこと	17
§ 2	暗黒物質（概観）	18
§ 2.1	暗黒物質の証拠	18
§ 2.1.1	回転曲線についてざっくり見てみる	18
§ 2.2	暗黒物質であるための条件・候補	21
§ 2.2.1	暗黒物質の候補	22
§ 3	暗黒物質（WIMP）残存量の計算	23
§ 3.1	WIMP とは	23
§ 3.2	Boltzmann 方程式の導出	24
§ 3.3	実際に計算してみよう	29
§ 3.4	例：Higgs-portal 暗黒物質（→ 7/28 談話会も参照）	32
§ 4	インフレーション	36

§ 4.1	標準宇宙論の「初期値」の問題	36
§ 4.1.1	Flatness Problem	36
§ 4.1.2	Horizon 問題	37
§ 4.1.3	密度ゆらぎの種	38
§ 4.2	Inflation 宇宙	39
§ 4.2.1	Flatness 問題の解決	39
§ 4.2.2	Horizon 問題の解決	40
§ 4.2.3	密度ゆらぎのタネ	40
§ 4.3	典型的なインフレーションシナリオ	41
§ 4.3.1	step (i) : slow-roll インフレーション	41
§ 4.3.2	step (ii) : インフラトンの振動	42
§ 4.3.3	step (iii) : reheating (再加熱)	42
§ 4.4	ゆらぎについてちょっとだけ	44
§ 5	ニュートリノ質量と seesaw 機構	47
§ 5.1	準備：フェルミオンの質量項	47
§ 5.2	標準模型でのフェルミオンの質量	48
§ 5.3	ニュートリノ質量	49
§ 5.4	seesaw 機構	51
§ 5.5	レプトジェネシスとの関連	53
§ 6	宇宙の物質反物質非対称性とレプトジェネシス	54
§ 6.1	宇宙の物質反物質非対称性	54
§ 6.2	sphaleron 過程とレプトジェネシス	55
§ 6.3	B と L	58
§ 6.4	右巻きニュートリノの CP の破れた崩壊	60
§ 6.5	thermal leptogenesis	62
§ 7	大統一理論 (GUT)	65
§ 7.1	標準模型の復習	65
§ 7.1.1	ゲージ変換と共変微分の例	67
§ 7.2	GUT	68
§ 7.3	$SU(5)$ の表現	69
§ 7.4	ゲージボゾン	70

§ 7.5	ゲージ結合定数の統一	71
§ 7.6	その他のコメント	73
§ 7.6.1	$SO(10)$ と右巻きニュートリノ	73
§ 7.6.2	陽子崩壊	73
§ 7.6.3	Doublet-Triplet Splitting 問題	74
付録 A	場の量子論入門	75
A.1	はじめに	75
A.1.1	色々な場、標準模型	75
A.1.2	量子力学と場の量子論	75
A.1.3	Notation, convention	76
A.1.4	(無限に) 多い粒子のヒルベルト空間とハミルトニアン	77
A.1.5	調和振動子と場の量子論	81
A.2	自由スカラー場	83
A.2.1	自由スカラー場のラグランジアンと正準量子化	83
A.2.2	運動方程式 (Equation of Motion, EOM)	85
A.2.3	運動方程式の解	86
A.2.4	a と $a^\dagger$ の交換関係	87
A.2.5	ハミルトニアンを $a^\dagger$ と a で表す。	87
A.2.6	$a^\dagger$ と a は生成消滅演算子	88
A.2.7	真空状態	89
A.2.8	1 粒子状態と多粒子状態	90
A.3	相互作用するスカラー場	90
A.3.1	概略	92
A.3.2	S 行列と散乱振幅 $\mathcal{M}$	93
A.3.3	遷移確率：一般論	94
A.3.4	$n = 2$ の場合、散乱断面積 σ	97
A.3.5	散乱振幅 $\mathcal{M}$ の計算の概要	100

はじめに

このノートは、2026 年 7 月 27 日～29 日 神戸大学での集中講義「標準模型を超える物理」入門（担当：濱口幸一）の、後半 5 コマのためのノートです。

講義の Web ページは[こちら](#)。前半 2 コマの[スライド](#)も同じ Web ページにあります。

§ 1 標準宇宙論入門

ここでは、標準的な宇宙論（ビッグバン宇宙論）の基礎を紹介する。予備知識として、以下を（結果を認める形で）用いる。

- ▶ Einstein 方程式（結果だけを使う）
- ▶ 熱力学（少しだけ）

§ 1.1 FLRW 宇宙

FLRW は Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker の略である。

§ 1.1.1 Einstein 方程式と FLRW 計量

- ▶ 宇宙は、大きなスケール／初期宇宙において、一様・等方であると仮定する。
- ▶ 宇宙の時空は Einstein 方程式 に従う。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (1)$$

($\mu = 0$ は時間、 $\mu = 1, 2, 3$ は空間方向。) G は Newton 定数。

左辺は計量 $g_{\mu\nu}$ から決まる幾何学的な量（時空の曲がり）を、右辺の $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソル（物質側）を表す。以下、左辺と右辺をそれぞれ具体的に書き下す。

- ▶ 左辺（時空の幾何）：線素は計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

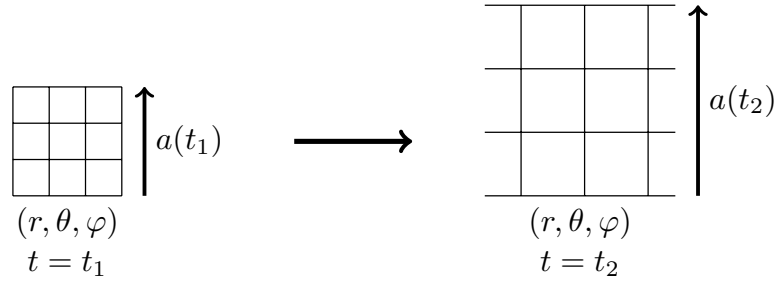
と書ける。一様・等方の仮定から、計量は FLRW 計量 で与えられる。

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (3)$$

ここで k は空間の曲率を表す定数で、

$$k \begin{cases} > 0 & \text{閉じた宇宙 (closed universe)} \\ = 0 & \text{平坦な宇宙 (flat universe)} \\ < 0 & \text{開いた宇宙 (open universe)} \end{cases} \quad (4)$$

に対応する。 $a(t)$ は スケール因子 (scale factor) であり、宇宙の膨張（空間全体の一様な伸び縮み）を表す。comoving 座標 (r, θ, φ) を固定したまま $a(t)$ が時間とともに大きくなると、2点間の物理的距離が伸びていく。



► 右辺 (物質)：一様・等方な完全流体を考えると、エネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \rho(t) & & & \\ & -p(t) & & \\ & & -p(t) & \\ & & & -p(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

の形になる。ここで $\rho(t)$ はエネルギー密度、 $p(t)$ は圧力である。一様・等方性から、これらは時刻 t のみの関数となる。

§ 1.1.2 Friedmann 方程式と連続の式

► 一般相対論では、計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられれば、以下の量が順に計算できる。

$$\text{Christoffel 記号 : } \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} [\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}] \quad (6)$$

$$\text{Riemann 曲率テンソル : } R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} \quad (7)$$

$$\text{Ricci テンソル : } R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (8)$$

$$\text{スカラー曲率 : } R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (9)$$

► FLRW 計量 (3) の $g_{\mu\nu}$ をこれらに代入すると、（計算は大変だが）次が得られる。

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (10)$$

$$R_{0i} = 0, \quad (11)$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}, \quad (12)$$

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (13)$$

ただし $\dot{a} = \frac{d}{dt}a(t)$, $\ddot{a} = \frac{d^2}{dt^2}a(t)$ 。

► これらを Einstein 方程式 (1) に代入する。左辺の (0,0) 成分と (i,i) 成分から、独立な 2 つの式が得られる。それらを整理すると

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt}(a^3) \quad (14)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (15)$$

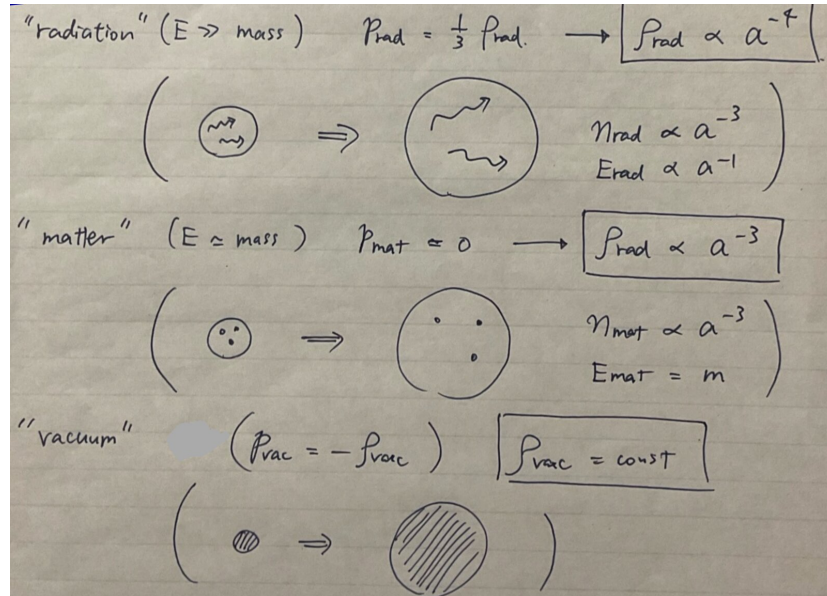
(14) 式は連続の式（エネルギー保存）であり、 $dE = -p dV$ （体積 $V \propto a^3$ の断熱膨張でのエネルギー保存）に対応する。(15) 式は Friedmann 方程式と呼ばれ、宇宙の膨張を支配する式である。以下では、この 2 式を使って宇宙の進化を調べていく。

§ 1.1.3 エネルギー密度の進化と現在の宇宙

► 連続の式 (14) に状態方程式 (ρ と p の関係) を与えると、各成分のエネルギー密度がスケール因子 a にどう依存するかが決まる。状態方程式を $p = w\rho$ (w は定数) と書くと、(14) より

$$\dot{\rho} a^3 + 3\rho a^2 \dot{a} = -3w\rho a^2 \dot{a} \implies \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \implies \boxed{\rho \propto a^{-3(1+w)}} \quad (16)$$

主要な 3 つの成分について見ていく。



- 放射 (radiation) : $E \gg m$ の相対論的な粒子。 $p_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{rad}}$ ($w = 1/3$) なので

$$\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4} \quad (17)$$

これは、数密度が $n_{\text{rad}} \propto a^{-3}$ (体積 $\propto a^3$ に反比例)、1 粒子あたりのエネルギーが $E_{\text{rad}} \propto a^{-1}$ (宇宙膨張で波長が伸びる = 赤方偏移) であることから、 $\rho_{\text{rad}} = n_{\text{rad}} E_{\text{rad}} \propto a^{-4}$ と理解できる。

- 物質 (matter) : $E \simeq m$ の非相対論的な粒子。 $p_{\text{mat}} \simeq 0$ ($w = 0$) なので

$$\rho_{\text{mat}} \propto a^{-3} \quad (18)$$

数密度 $n_{\text{mat}} \propto a^{-3}$ 、1 粒子あたりのエネルギー $E_{\text{mat}} \simeq m$ (一定) であることから、 $\rho_{\text{mat}} \propto a^{-3}$ 。

- 真空 (vacuum) : $p_{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}}$ ($w = -1$) なので

$$\rho_{\text{vac}} = \text{const} \quad (19)$$

宇宙が膨張してもエネルギー密度は一定のままである。

► 現在の宇宙では、これら 3 成分の割合はおよそ

$$\rho_{\text{rad}} : \rho_{\text{mat}} : \rho_{\text{vac}} \simeq 5 \times 10^{-5} : 0.32 : 0.68 \quad (20)$$

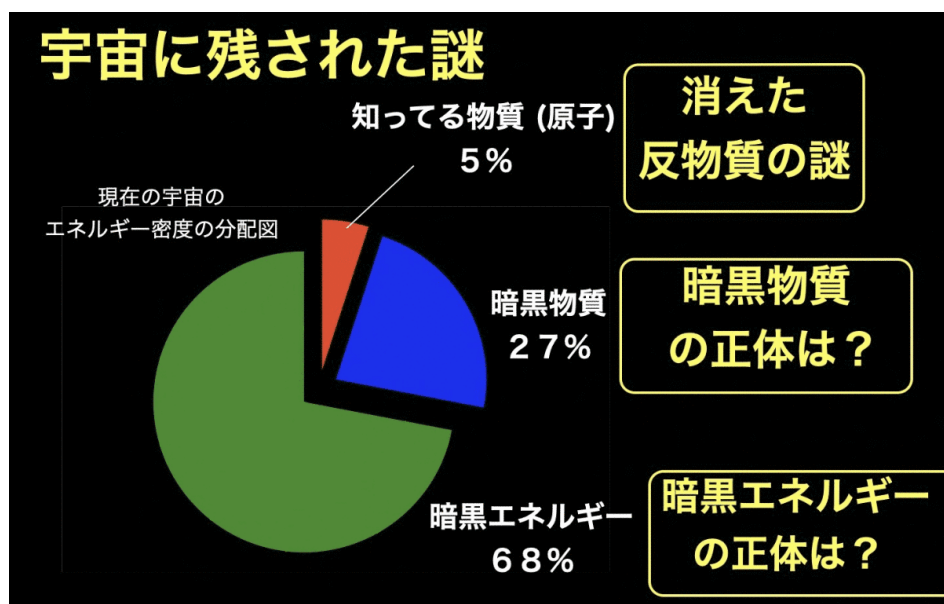
である。それぞれの中身は

ρ_{rad} : 光子 γ 、ニュートリノ ν

ρ_{mat} : バリオン（原子）＋暗黒物質 (DM) (バリオン数の起源、DM の正体は謎)

ρ_{vac} : 暗黒エネルギー (Dark Energy) (その正体は謎)

となっている。

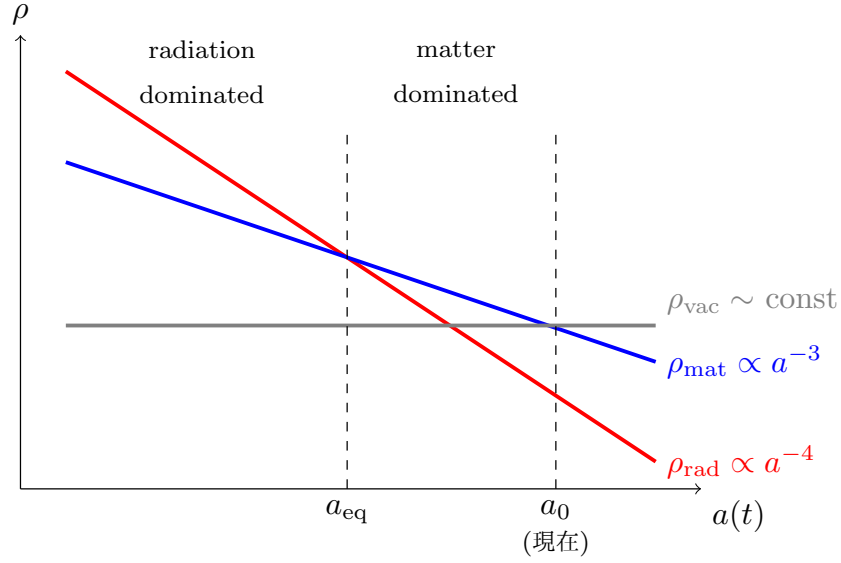


7/27 講義資料より

► 各成分の a 依存性が異なるため、時間をさかのぼって過去 (a が小さい) を考えると、最も急に増える $\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4}$ が効いてくる。実際、

$$a_{\text{eq}} \sim 10^{-4} a_0 \quad (21)$$

(a_0 は現在のスケール因子) を境に、 $a < a_{\text{eq}}$ の初期宇宙は radiation dominated、 $a > a_{\text{eq}}$ では matter dominated、そして最近になって vacuum dominated (暗黒エネルギー) へと移り変わってきた。



このように、かつての宇宙は放射（ $E \gg m$ の粒子たち）で満ちていた。

§ 1.1.4 Hubble パラメータ、臨界密度、密度パラメータ Ω

► 一方、Friedmann 方程式 (15)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (22)$$

に現れる $\dot{a}/a$ を Hubble パラメータ と呼び、 $H(t)$ と書く。

$$\frac{\dot{a}}{a} \equiv H(t) \quad (23)$$

H は宇宙の膨張率（膨張の速さ）を表す量である。その現在値 H_0 は

$$H_0 = 100 h \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}, \quad h \simeq 0.67 \quad (24)$$

と書かれる。

► Newton 定数 G のかわりに (換算) プランクスケール M_{pl} を使うと便利である。

$$8\pi G \equiv \frac{1}{M_{\text{pl}}^2}, \quad M_{\text{pl}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV}. \quad (25)$$

($M_* = 1/\sqrt{G} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$ をプランクスケールと言うこともあるので注意。) これ

らを用いると、Friedmann 方程式 (15) は

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2} \rho \quad (26)$$

と書ける。

► ここで臨界密度 (critical density) ρ_{crit} を

$$\rho_{\text{crit}} \equiv 3M_{\text{pl}}^2 H^2 \quad (27)$$

と定義する。その現在値は

$$\rho_{\text{crit},0} \sim 5 \text{ GeV}/\text{m}^3 \sim (2 \times 10^{-3} \text{ eV})^4 \quad (28)$$

程度である。 (1 m³ あたり水素原子 5 個程度。スカスカ。)

► ρ_{crit} を用いて密度パラメータ Ω を

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} \quad (29)$$

と定義する。Friedmann 方程式 (26) の両辺を H^2 で割ると

$$1 + \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{\rho}{3M_{\text{pl}}^2 H^2} = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} = \Omega \quad (30)$$

すなわち

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (31)$$

が成り立つ。したがって、 Ω の値と宇宙の曲率 k は次のように対応している。

$$\begin{cases} \Omega > 1 & \Longleftrightarrow & k > 0 & \text{閉じた宇宙 (closed)} \\ \Omega = 1 & \Longleftrightarrow & k = 0 & \text{平坦な宇宙 (flat)} \\ \Omega < 1 & \Longleftrightarrow & k < 0 & \text{開いた宇宙 (open)} \end{cases} \quad (32)$$

► 観測によると、現在の宇宙の密度パラメータは

$$\Omega_0 = 0.999 \pm 0.002 \quad (33)$$

であり、とても平坦 (flat)である。

§ 1.1.5 宇宙の平坦性（平坦性問題）について

► (31) 式と Ω の定義 (29) より

$$\left| \frac{\Omega - 1}{\Omega} \right| = \left| \frac{\frac{k}{a^2 H^2}}{\frac{\rho}{3M_{\text{pl}}^2 H^2}} \right| \propto \frac{1}{\rho a^2} \quad (34)$$

となる。ここで § 1.1.3 で見た ρ の a 依存性を使うと

$$\left| \frac{\Omega - 1}{\Omega} \right| \propto \begin{cases} a^2 & (\text{rad. dom. : } \rho \propto a^{-4}) \\ a & (\text{mat. dom. : } \rho \propto a^{-3}) \end{cases} \quad (35)$$

すなわち、この量 $|(\Omega - 1)/\Omega|$ は宇宙膨張とともに増え続ける。

► 逆に言えば、過去にさかのぼるとこの量はどんどん小さくなる。実際、

$$\left| \frac{\Omega - 1}{\Omega} (t) \right| \simeq \underbrace{\left| \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right|}_{\lesssim 0.01} \times \underbrace{\frac{a_{\text{eq}}}{a_0}}_{\sim 10^{-4}} \times \underbrace{\left(\frac{a(t)}{a_{\text{eq}}} \right)^2}_{\ll 1} \lll 1 \quad (36)$$

となり、かつての宇宙はすさまじく平坦だったことになる。

なぜそんなに平坦だったのか？ これを平坦性問題 (flatness problem)という。

→ § 4 も参照。

► 初期宇宙を考えるときは、上で見たように $\Omega \simeq 1$ が非常によい精度で成り立つので、おつりの項は無視してよい。

$$\Omega = 1 + \frac{k}{a^2 H^2} \quad (37)$$

つまり

$$3M_{\text{pl}}^2 H^2 = \rho \quad (\text{平坦な宇宙での Friedmann 方程式}) \quad (38)$$

が良い近似で成り立つ。以降の議論では、主にこの式を使っていく。

§ 1.1.6 Hubble パラメータ H と宇宙年齢 t の関係

- ▶ 平坦な宇宙での Friedmann 方程式 (38) より $\frac{\dot{a}}{a} = H \propto \rho^{1/2}$ 。すると

$$\frac{\dot{a}}{a} = H \propto \rho^{1/2} \propto \begin{cases} a^{-2} & \text{rad. dom.} & \therefore a \propto t^{1/2}, H = \frac{1}{2t} \\ a^{-3/2} & \text{mat. dom.} & \therefore a \propto t^{2/3}, H = \frac{2}{3t} \\ a^0 & \text{vac. dom.} & \therefore a \propto e^{Ht}, H = \sqrt{\frac{\rho_{\text{vac}}}{3M_{\text{pl}}^2}} = \text{const} \end{cases} \quad (39)$$

radiation/matter dominated では $H \sim 1/t$ となる。(vacuum dominated では指数関数的に膨張する。インフレーションはこの状況を初期宇宙で実現したもの。§ 4 も参照。)

§ 1.1.7 ※おまけ：現在の宇宙年齢を計算してみよう

(講義では省略するかも)

- ▶ すごく大雑把には、ずっと matter dominated ($\rho \propto a^{-3}$ 、 $t \simeq 2/(3H)$) だったとすると

$$t_0 \sim \frac{2}{3H_0} = \frac{1}{3 \times 67 \text{ km/s Mpc}^{-1}} \sim 97 \text{ 億年} \quad (40)$$

- ▶ もうちょっとちゃんとやると...

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt \quad (41)$$

ここで $\frac{a(t)}{a_0} = x$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dot{a}}{a_0} = \frac{a}{a_0} \frac{\dot{a}}{a} = xH, \quad \begin{array}{c|c} t & 0 \longrightarrow t_0 \\ x & 0 \longrightarrow 1 \end{array} \quad (42)$$

なので

$$t_0 = \int_0^1 \frac{dt}{dx} dx = \int_0^1 \frac{1}{xH} dx \quad (43)$$

↑ H を x で表したい。

► かんたんのため flat Univ. ($k = 0$) として (38) を使うと

$$\begin{aligned}
 3M_{\text{pl}}^2 H^2 &= \rho = \rho_{\Lambda} + \rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{rad}} \\
 &= \rho_{\Lambda,0} + \rho_{\text{mat},0} x^{-3} + \rho_{\text{rad},0} x^{-4} \\
 &= \underbrace{\rho_{\text{crit},0}}_{= 3M_{\text{pl}}^2 H_0^2} (\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{mat},0} x^{-3} + \Omega_{\text{rad},0} x^{-4}) \quad (44)
 \end{aligned}$$

($\because \rho_{\Lambda} \sim \text{const}$, $\rho_{\text{mat}} \propto a^{-3} \propto x^{-3}$, $\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4} \propto x^{-4}$. また $\Omega_{X,0} \equiv \frac{\rho_{X,0}}{\rho_{\text{crit},0}}$ 。) よって

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_0} \times \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{mat},0} x^{-3} + \Omega_{\text{rad},0} x^{-4}}} \quad (45)$$

H が x で書けた！

► (43) に代入して

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{mat},0} x^{-3} + \Omega_{\text{rad},0} x^{-4}}} \quad (46)$$

($\Omega_{\text{rad},0} x^{-4}$ の項は無視できる。 $\because$ 効くのは $x \lesssim 10^{-4}$ のときだけで、その寄与は $\int_{10^{-4}}^{10^{-4}} \frac{dx}{x \sqrt{x^{-4}}} \sim \int_{10^{-4}}^{10^{-4}} x dx \sim 10^{-8}$ 。) さらに $\Omega_{\text{mat},0} \simeq 1 - \Omega_{\Lambda,0}$ を用いて、

$$\begin{aligned}
 t_0 &\simeq \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{\Lambda,0}) x^{-3}}} \\
 &\stackrel{\text{Mathematica}}{=} \frac{1}{H_0} \cdot \underbrace{\frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}{\sqrt{1 - \Omega_{\Lambda,0}}} \right)}_{\Omega_{\Lambda,0}=0.685 \text{ を代入すると } 0.951} \\
 &\simeq \frac{1}{H_0} \times 0.951 \\
 &= 138 \text{ 億年} \quad (47)
 \end{aligned}$$

宇宙年齢が計算できた！

§ 1.2 Radiation dominated universe

§ 1.1.3 で見たように、初期宇宙は radiation dominated であった。ここではその時期の宇宙を、もう少し詳しく見ていく。

§ 1.2.1 ρ_{rad} と温度 T

- 初期宇宙では、ほとんどの粒子は thermalized されている（熱平衡にある）。このとき、放射のエネルギー密度は

$$\rho_{\text{rad}} = \sum_i g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E \cdot f_i(p) \quad (48)$$

と書ける。ここで g_i は粒子 i の内部自由度（d.o.f. スピンとかカラーとか）、 $f_i(p)$ は熱平衡分布

$$f_i(p) = \frac{1}{e^{E/T} \pm 1}, \quad \begin{cases} + : \text{fermion} \\ - : \text{boson} \end{cases} \quad (49)$$

である。

- この積分を実行すると（計算略）

$$\rho_{\text{rad}} \simeq \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 \quad (50)$$

となる。ここで $g_*(T)$ は有効自由度で

$$g_*(T) = \sum_{\substack{i=\text{boson} \\ m_i \ll T}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\substack{j=\text{fermion} \\ m_j \ll T}} g_j \quad (51)$$

で与えられる。（ T より軽い粒子だけを数える。）

- 例) $T \sim 10 \text{ MeV}$ のとき

$$g_*(T \sim 10 \text{ MeV}) = \underbrace{2}_{g_\gamma} + \frac{7}{8} \left(\underbrace{6}_{3 \times g_\nu} + \underbrace{4}_{g_{e^\pm}} \right) = 10.75 \quad (52)$$

（注： $T < 1 \text{ MeV}$ では $T_\nu \neq T$ となるので、少し変更が必要。）

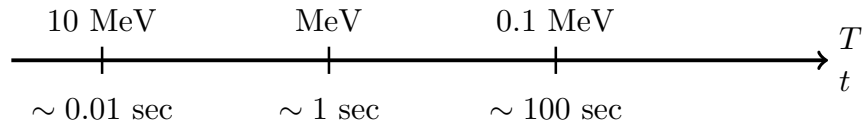
§ 1.2.2 時刻 t と温度 T の関係

- radiation dominated では $H = 1/(2t)$ ((39)) だったので、これと (50) を平坦な宇宙での Friedmann 方程式 (38) に代入すると

$$\rho_{\text{rad}} = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 = 3M_{\text{pl}}^2 H^2 = 3M_{\text{pl}}^2 \left(\frac{1}{2t} \right)^2 \quad (53)$$

すなわち t と T が結びつく。

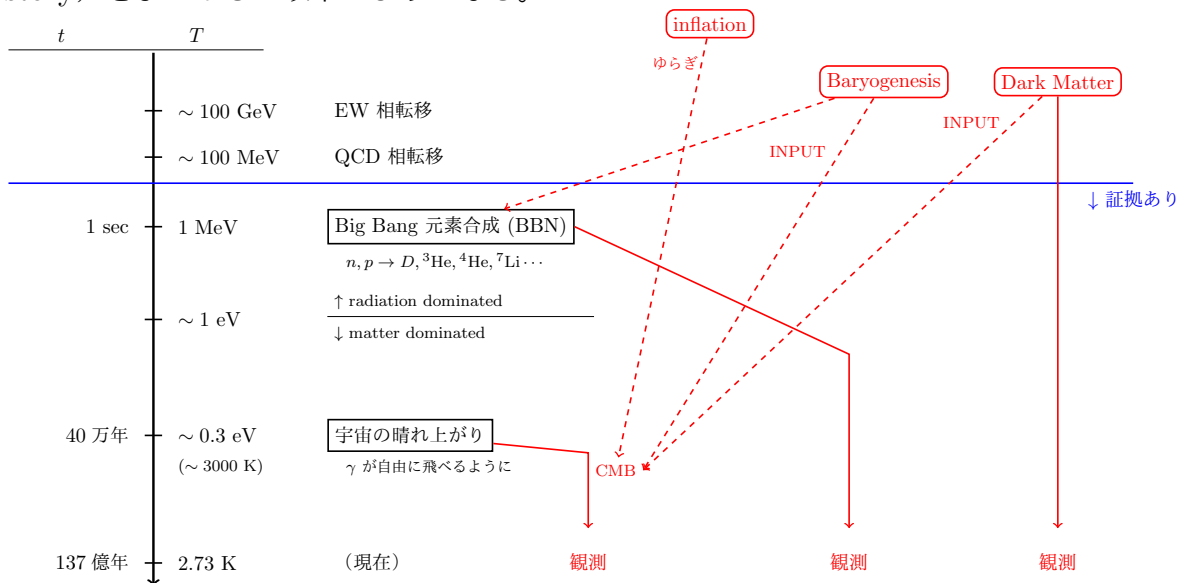
$$t = 2.4 \text{ sec} \times \frac{1}{g_*(T)^{1/2}} \left(\frac{\text{MeV}}{T} \right)^2 \quad (54)$$



§ 1.3 Thermal history

§ 1.3.1 宇宙の熱史

宇宙は熱いプラズマの状態から始まり、膨張とともに冷えてきた。その歴史（thermal history）をまとめると以下ようになる。



Inflation $\rightarrow$ § 4,

Baryogenesis $\rightarrow$ § 6,

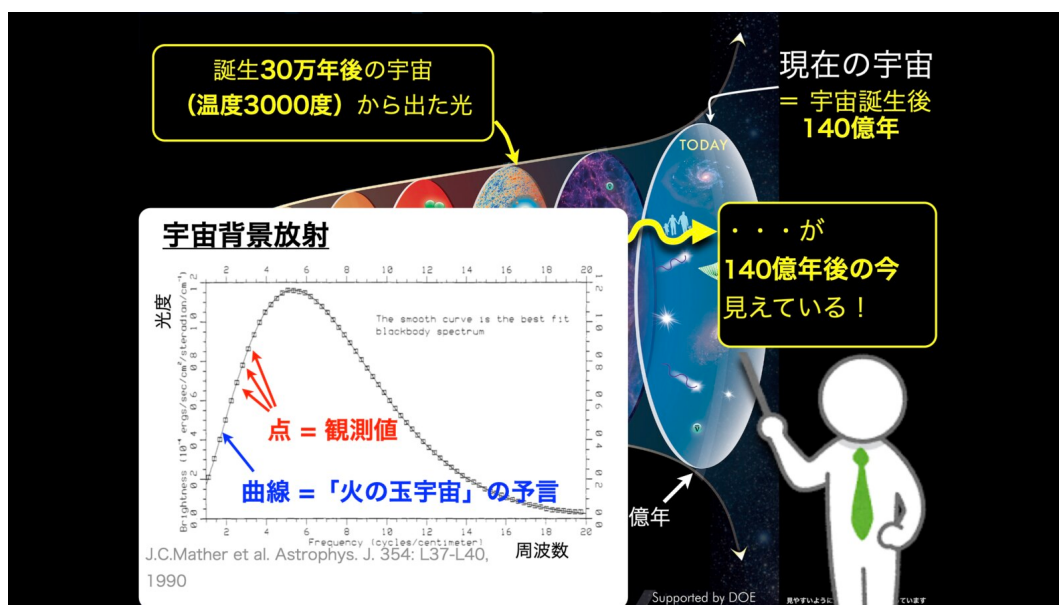
Dark Matter $\rightarrow$ § 3.

§ 1.3.2 宇宙背景放射 (CMB)

- ▶ 宇宙が晴れ上がったとき ($T \sim 0.3 \text{ eV} \sim 3000 \text{ K}$, $t \sim 40 \text{ 万年}$) に自由になった光子 γ は、その後も宇宙を飛び続け、現在の我々に届いている。全天から同じ温度の電磁波が来ており、これを Cosmic Microwave Background Radiation (CMBR または CMB)、宇宙背景放射という。
- ▶ その温度は現在

$$T_0 = 2.73 \text{ K} \quad (55)$$

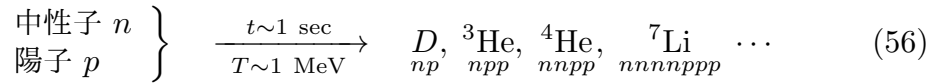
で、非常に精度よく黒体輻射のスペクトルに一致している。



7/27 講義資料より

§ 1.3.3 Big Bang 元素合成 (BBN, Big Bang Nucleosynthesis)

- ▶ $t \sim 1 \text{ sec}$, $T \sim 1 \text{ MeV}$ の頃、中性子 n と陽子 p から軽元素が合成された。



(詳細略。宇宙膨張 + 原子核反応 + 熱力学 で計算できる。)

- ▶ この計算の **INPUT** は、宇宙のバリオン数

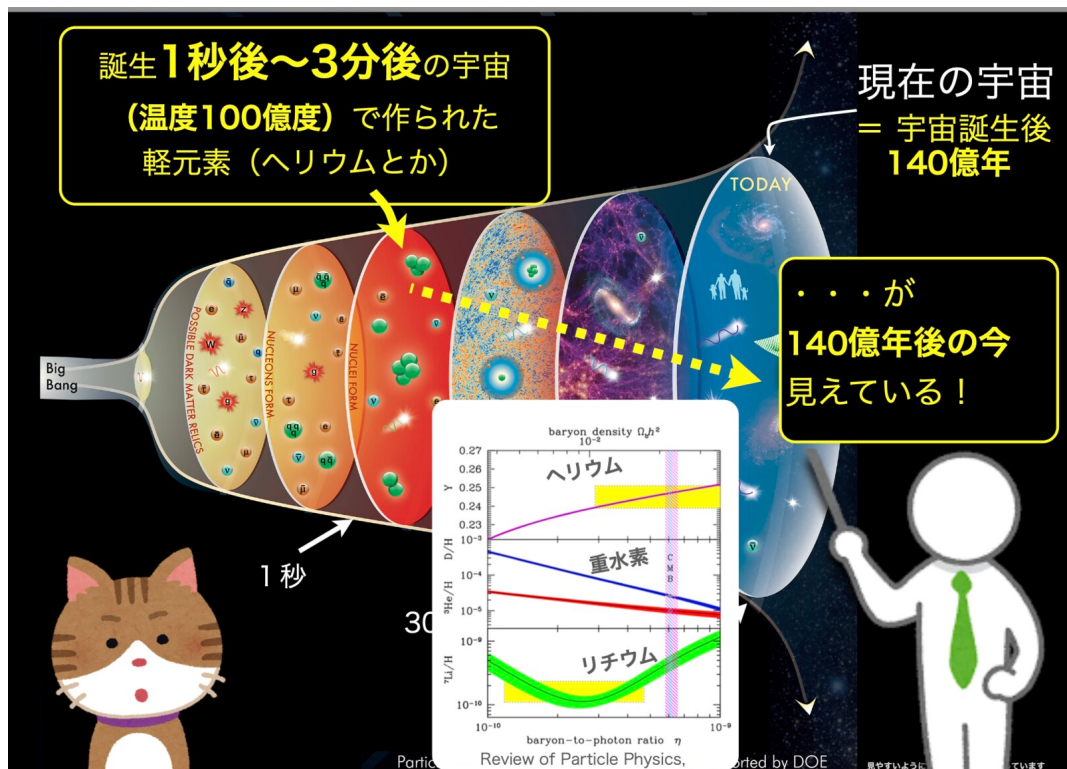
$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \quad (57)$$

である。ここで n_B はバリオン (陽子・中性子) の数密度、 n_γ は光子の数密度。

▶

$$\eta \simeq 6.1 \times 10^{-10} \quad (58)$$

とすれば、観測 $\longleftrightarrow$ 理論の予言 が見事に一致する！ (D , ${}^4\text{He}$, (${}^7\text{Li}$))



7/27 講義資料より

- ▶ では、この $\eta = n_B/n_\gamma \simeq 6.1 \times 10^{-10}$ (58) の起源は？
→ 謎の1つ。§ 1.4 を参照。

§ 1.4 標準宇宙論（+ 素粒子の標準模型）では説明できないこと

ここまで見てきた標準宇宙論は、素粒子の標準模型 (SM) と合わせて、宇宙の進化を非常にうまく記述する。しかし、以下のことは説明できない。これらが、標準模型を超える物理 (BSM) を考える動機の一つとなっている。

▶ flatness 問題

なぜ初期宇宙はあれほど平坦だったのか？ (§ 1.1.5)

▶ horizon 問題

なぜ全天の CMB の温度が、因果関係を持ち得ないほど離れた領域どうしで同じ ($\sim 10^{-5}$ の精度) なのか？

▶ ゆらぎの種

温度ゆらぎ (CMB)

密度ゆらぎ (銀河や星のタネ)

これらのゆらぎは、どこから来たのか？

→ 以上の3つは inflation で説明できる。§ 4 を参照。

▶ Baryon Asymmetry (宇宙の物質・反物質非対称性)

$\eta = n_B/n_\gamma \simeq 6.1 \times 10^{-10}$ (58) の起源は？

→ § 6 を参照。

▶ Dark Matter

何？ どこから来た？

→ § 2 を参照。

▶ Dark Energy

何？ なぜこんなに小さいのか？

§ 2 暗黒物質（概観）

ここでは、暗黒物質 (dark matter, DM)について紹介する。暗黒物質は、その存在が様々な観測から強く支持されているにもかかわらず、標準模型の粒子では説明できない。すなわち標準模型を超える物理の代表的な証拠のひとつである。

参考資料：

- ▶ 日本語解説記事「宇宙のダークマター直接探索の現状」
https://www.jstage.jst.go.jp/article/butsuri/75/2/75_68/_article/-char/ja/
- ▶ 最近のレビュー（500 ページ以上！）
<https://arxiv.org/abs/2406.01705>

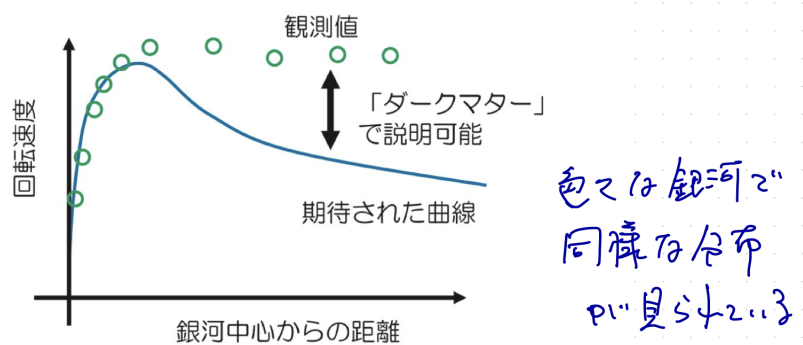
§ 2.1 暗黒物質の証拠

暗黒物質の存在は、様々なスケールで独立に証拠が得られている。

スケール	観測
銀河 ($\sim \text{kpc}$)	回転曲線 DM がないと遠くの星を束縛できない
銀河団 ($\sim \text{Mpc}$)	速度分散
銀河団の衝突	ガス分布（X 線）と質量分布（重力レンズ） この2つが分離している
宇宙全体	CMB、大規模構造

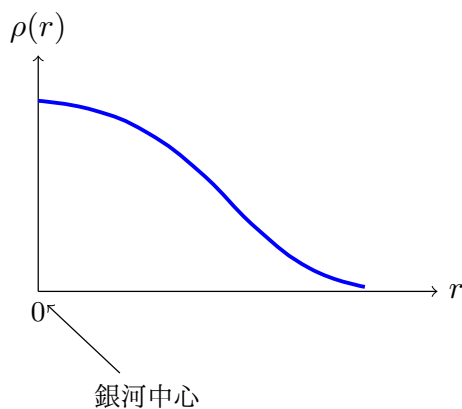
§ 2.1.1 回転曲線についてざっくり見てみる

暗黒物質の存在を最初に強く支持することになった観測のひとつが、銀河の回転曲線 (rotation curve)である。これは、銀河中心からの距離 r に対して、そこにある星やガスの回転速度 $v(r)$ をプロットしたものである。

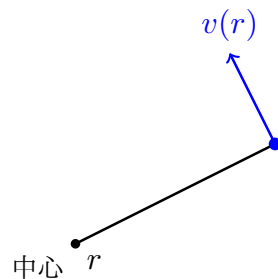


(光学的に観測される天体のみによる引力で期待される回転速度を曲線で示す。観測された回転速度は丸印のようになり、この差を説明するために「ダークマター」が必要とされた。)

色々な銀河で同様な振る舞いが見られている。以下、この振る舞いを簡単なモデルで理解してみよう。簡単のため、球対称な密度分布 $\rho(r)$ を仮定する。



中心から距離 r のところにいる質量 m の星が、(簡単のため) 中心のまわりを円運動しているとする。



円運動の条件（遠心力=重力）から、

$$\frac{m v^2(r)}{r} = \frac{G m M(r)}{r^2}, \quad \text{ただし} \quad M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \quad (59)$$

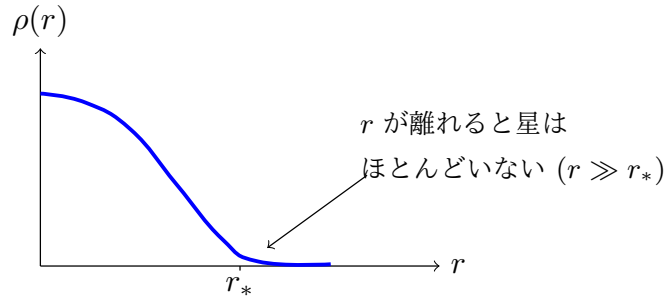
ここで $M(r)$ は半径 r の内側にある全質量、 G は Newton 定数である。(59) を $v(r)$ について解くと、

$$v(r) = \sqrt{\frac{G M(r)}{r}} \quad (60)$$

を得る。この式が、回転曲線を考える出発点となる。

- もし、暗黒物質がなく「見えている星」だけだったとすると...

星の密度 $\rho(r)$ は、ある半径 r_* より外側ではほとんど 0 になる（星はほとんど存在しない）。



このとき、 $r \gg r_*$ では

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' \simeq \int_0^{r_*} \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = M(r_*) = \text{一定} \quad (61)$$

となる。したがって (60) より、遠方では

$$v(r) \simeq \sqrt{\frac{G M(r_*)}{r}} \propto \frac{1}{r^{1/2}} \quad (62)$$

と、距離とともに減少するはずである。

- しかし観測では、遠方でも

$$v(r) \sim \text{const} \quad (63)$$

と、ほぼ一定にとどまっている。(60) を逆に読むと、これは

$$v(r) \sim \text{const} \implies M(r) \propto r \implies \rho(r) \propto \frac{1}{r^2} \quad (64)$$

を意味する。すなわち、見えていないところにも何か質量（密度）が広がっている。これが **暗黒物質 (Dark Matter)** である。

§ 2.2 暗黒物質であるための条件・候補

前節でみたように、暗黒物質の存在は様々な観測から支持されている。では、暗黒物質はどのような粒子なのだろうか。まず、暗黒物質であるために満たすべき条件を整理する。

1. 中性 (neutral) : 電氣的に中性であること。さらに、色 (color) も持つてはいけない (=強い相互作用をしない)。そうでないと、光や他の物質と強く相互作用してしまい、CMB の観測などと合わない。
2. 安定 (stable) : 安定である、あるいは少なくとも寿命が宇宙年齢より長いこと。そうでないと、生成されてから現在に至るまでに崩壊してしまい、現在の観測を説明できない。
3. “cold” : 少なくとも宇宙の構造形成の頃以降 ($t \sim$ 数万年、温度 $T \sim 1 \text{ eV} \sim 10000 \text{ K}$) には非相対論的 (速度 $v \ll 1$) であること。このような暗黒物質を **Cold Dark Matter (CDM)** と呼ぶ。そうでないと (=相対論的に飛び回っていると)、密度ゆらぎがならされてしまい、宇宙の構造を作れない。

これらの条件に照らすと、標準模型の粒子は暗黒物質になれない。

標準模型の粒子		中性	安定	cold
quark	u, d, s, c, b, t	No		
lepton	e, μ, τ	No		
	ν	Yes	Yes	No
gauge	W, Z, g	No		
boson	γ	Yes	Yes	No
Higgs	H	Yes	No	

(ν : 中性かつ安定だが、非常に軽く相対論的なので “cold” でない (hot dark matter)。 γ : 質量ゼロで相対論的。いずれも構造形成の観測と合わない。)

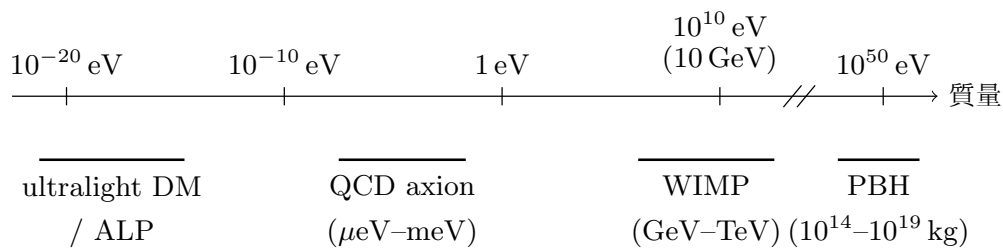
すなわち、暗黒物質を説明するには **標準模型を超える物理** が必要である。

§ 2.2.1 暗黒物質の候補

標準模型を超える暗黒物質の候補は非常に多いが、代表的なものを挙げる。

- ▶ **WIMP** (Weakly Interacting Massive Particle) : 弱い相互作用程度の強さで標準模型粒子と相互作用する、質量 $\sim \text{GeV} - \text{TeV}$ の粒子。 (次節 § 3 で詳しく扱う。)
- ▶ **QCD axion** : 強い相互作用の CP 問題を解決するために導入される、非常に軽い粒子。その拡張版として ALP (Axion-Like Particle) も広く考えられている。
- ▶ **原始ブラックホール** (Primordial Black Hole, PBH) : 初期宇宙で形成されたブラックホール。
- ▶ ... (他にも多数)

これらは、想定される 質量スケール が大きく異なる。



(横軸は暗黒物質の質量。想定される候補は 120 桁以上にわたって広がっている。)

次節 § 3 では、広く研究されている WIMP を取り上げ、その存在量 (残存量) が理論的にどのように決まるかを見ていく。

§ 3 暗黒物質 (WIMP) 残存量の計算

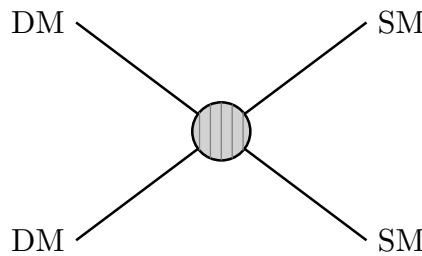
前節 (§ 2) でみたように、暗黒物質の候補は多数あるが、ここでは広く研究されている **WIMP** を取り上げる。特に、WIMP の 存在量 (残存量) が理論的にどのように決まるかを、Boltzmann 方程式 を用いて調べる。これがこの節の主目標である。

§ 3.1 WIMP とは

WIMP (Weakly Interacting Massive Particle) とは、その名の通り

- ▶ Weakly Interacting: 標準模型 (SM) の電弱相互作用くらい (結合の強さ $\alpha \sim 0.01$) で SM 粒子と相互作用し、
- ▶ Massive: 質量が $\sim \text{GeV} - \text{TeV}$ 程度、

であるような粒子の総称である。WIMP は SM 粒子と 対消滅 (annihilation) できると仮定する。

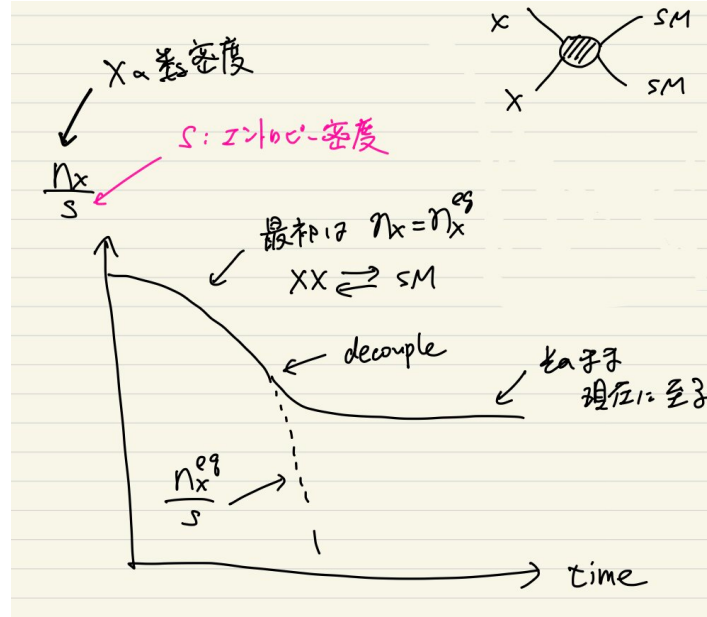


● 熱的残存量 (thermal relic) の考え方

初期宇宙は高温で、暗黒物質 X は SM 粒子と

$$X X \rightleftharpoons \text{SM SM} \quad (65)$$

の反応を通じて 熱平衡 にあったと考える。宇宙が膨張・冷却するにつれてこの反応が追いつかなくなり、ある時点で 脱結合 (decouple) / 凍結 (freeze-out) する。その後、 X の数は (comoving 体積あたり) ほぼ一定に保たれる。この freeze-out 後に残った量が、現在観測される暗黒物質の量を与える、というのが 熱的残存量 のシナリオである。



(縦軸は数密度 n_X をエントロピー密度 s で割った量。 n_X/s を使う理由は § 3.3 で説明する。)

§ 3.2 Boltzmann 方程式の導出

● 暗黒物質 X の分布関数

▶ 暗黒物質 X (質量 m) の分布関数を $f_X(\vec{p}, t)$ とすると、数密度は

$$n_X(t) = \int [dp] f_X(\vec{p}, t) \quad (66)$$

で与えられる。ただし

$$[dp] \equiv \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (67)$$

▶ もし X が熱浴に入っていれば、 f_X は熱平衡分布

$$f_X^{\text{eq}}(\vec{p}, T) = \frac{1}{e^{E_X/T} \pm 1} \quad (E_X = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) \quad (68)$$

に一致する。以下、簡単のため X の自由度 (スピン・粒子／反粒子の別) は無視する (実スカラーなら自由度 1)。

● 対消滅 (annihilation) による減少

- $XX \rightarrow ab$ (a, b は SM 粒子) という対消滅を考える。対消滅断面積 σ_{ann} は、場の量子論入門 (付録 A) の断面積の公式 (399) より

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ann}}(p_1 p_2 \rightarrow ab) \\ = \frac{1}{2E_1 \cdot 2E_2 \cdot v_{\text{rel}}} \int \frac{[dp_a]}{2E_a} \frac{[dp_b]}{2E_b} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_a - p_b) |\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_a p_b)|^2 \end{aligned} \quad (69)$$

である。

- 運動量 $\vec{p}_1$ の X が対消滅するタイムスケール (単位時間あたり消滅確率) は

$$(\Delta t)^{-1} = \int \underbrace{[dp_2] f_X(\vec{p}_2, t)}_{\text{target momentum で積分}} \underbrace{\sigma_{\text{ann}}(p_1 p_2 \rightarrow ab)}_{\text{対消滅断面積}} v_{\text{rel}} \quad (70)$$

と書ける。 ($(\Delta t)^{-1} \sim n\sigma v$. 付録 A の (396) あたり参照。)

- よって

$$\left. \frac{d}{dt} f_X(\vec{p}_1, t) \right|_{\text{ann}} = - \underbrace{(\Delta t)^{-1} f_X(\vec{p}_1, t)}_{\text{対消滅の寄与}}. \quad (71)$$

- 両辺を $\int [dp_1]$ で積分すると

$$\left. \frac{d}{dt} n_X \right|_{\text{ann}} = - \int [dp_1] [dp_2] f_X(\vec{p}_1) f_X(\vec{p}_2) \sigma_{\text{ann}}(p_1 p_2 \rightarrow ab) v_{\text{rel}} \quad (72)$$

を得る。

● 対生成 (production) による増加

- 次に逆過程 $ab \rightarrow XX$ を考える。 X の対生成断面積は、(399) より

$$\begin{aligned} \sigma(ab \rightarrow XX) \\ = \frac{1}{2E_a \cdot 2E_b \cdot v_{\text{rel}}} \int \frac{[dp_1]}{2E_1} \frac{[dp_2]}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2) |\mathcal{M}(p_a p_b \rightarrow p_1 p_2)|^2 \end{aligned} \quad (73)$$

で与えられる。

- よって単位時間・単位体積あたりに増える X は

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} n_X \right|_{\text{prod}} &= \int [dp_a] f_a(\vec{p}_a) \int [dp_b] f_b(\vec{p}_b) \sigma(ab \rightarrow XX) v_{\text{rel}} \\ (73) \text{ を代入} \quad &= \int \frac{[dp_a]}{2E_a} \frac{[dp_b]}{2E_b} \int \frac{[dp_1]}{2E_1} \frac{[dp_2]}{2E_2} f_a(\vec{p}_a) f_b(\vec{p}_b) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2) |\mathcal{M}(p_a p_b \rightarrow p_1 p_2)|^2 \end{aligned} \quad (74)$$

と書ける。

► a, b は SM 粒子なので熱浴に入っている

$$f_a = f_a^{\text{eq}} = \frac{1}{e^{E_a/T} \pm 1}. \quad (75)$$

簡単のため

$$f_a = f_a^{\text{eq}} \simeq e^{-E_a/T}, \quad (76)$$

と近似する。(以下の議論は $\frac{1}{e^{E_a/T} \pm 1}$ を用いても成立する。)

► すると

$$\begin{aligned} f_a^{\text{eq}}(E_a) f_b^{\text{eq}}(E_b) &= e^{-E_a/T} e^{-E_b/T} \\ &= e^{-(E_a+E_b)/T} \end{aligned} \quad (77)$$

ここで、積分内のデルタ関数 $\delta(E_a + E_b - E_1 - E_2)$ (エネルギー保存)のもと、 $E_a + E_b = E_1 + E_2$ が成り立つので

$$\begin{aligned} e^{-(E_a+E_b)/T} &= e^{-(E_1+E_2)/T} \\ &= e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} \\ &= f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1) f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2). \end{aligned} \quad (78)$$

つまり、 X の熱平衡分布が現れる。

► さらに (CP が破れていない限り) $|\mathcal{M}(p_a p_b \rightarrow p_1 p_2)|^2 = |\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_a p_b)|^2$ であることを用いると、対生成の項 (74) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_X \Big|_{\text{prod}} &= \int \frac{[dp_a]}{2E_a} \frac{[dp_b]}{2E_b} \int \frac{[dp_1]}{2E_1} \frac{[dp_2]}{2E_2} f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1) f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2) |\mathcal{M}(p_a p_b \rightarrow p_1 p_2)|^2 \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} &= \int [dp_1][dp_2] f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1) f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2) \\ &\quad \times \underbrace{\frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \int \frac{[dp_a]}{2E_a} \frac{[dp_b]}{2E_b} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - p_2) |\mathcal{M}(p_a p_b \rightarrow p_1 p_2)|^2}_{=\sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}}} \end{aligned} \quad (80)$$

と、(72) と同じ形 ($f_X \rightarrow f_X^{\text{eq}}$ としたもの) にまとまる。

- 対消滅と対生成を合わせて

► 対消滅と対生成を足すと、

$$\frac{d}{dt}n_X = - \int [dp_1][dp_2] \left(f_X(\vec{p}_1)f_X(\vec{p}_2) - f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1)f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2) \right) \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \quad (81)$$

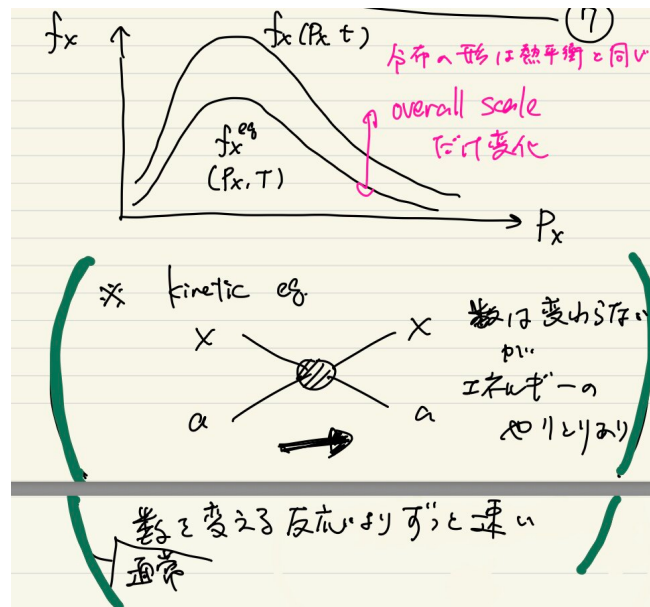
となる。

► ここで、

$$f_X(\vec{p}, t) = f_X^{\text{eq}}(\vec{p}, T) \frac{n_X(t)}{n_X^{\text{eq}}(T)} \quad (82)$$

を仮定する。ただし

$$n_X^{\text{eq}}(T) = \int [dp] f_X^{\text{eq}}(\vec{p}, T). \quad (83)$$



(弾性散乱 $Xa \rightarrow Xa$ は数を変えないがエネルギーをやりとりする反応で、通常、数を変える対消滅よりずっと速い。このため運動学的平衡が保たれ、分布の「形」は熱平衡のまま保たれる。)

► したがって (81) のカッコは

$$\begin{aligned} & \underbrace{f_X(\vec{p}_1)f_X(\vec{p}_2)}_{\text{対消滅}} - \underbrace{f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1)f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2)}_{\text{対生成}} \\ &= \left(\frac{n_X(t)}{n_X^{\text{eq}}(T)} \right)^2 f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1)f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2) - f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1)f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2) \\ &= \frac{f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1)f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2)}{n_X^{\text{eq}}(T)^2} (n_X^2(t) - n_X^{\text{eq}}(T)^2) \end{aligned} \quad (84)$$

と書ける。これを (81) に代入すると、

$$\frac{d}{dt}n_X = - \left[\frac{1}{n_X^{\text{eq}}(T)^2} \int [dp_1][dp_2] f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1) f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2) \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \right] (n_X^2(t) - n_X^{\text{eq}}(T)^2) \quad (85)$$

($\sigma_{\text{ann}}, v_{\text{rel}}$ は p_1, p_2 に依存することに注意。)

► 熱平均化した対消滅断面積

$$\langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle(T) \equiv \frac{1}{n_X^{\text{eq}2}(T)} \int [dp_1][dp_2] f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_1) f_X^{\text{eq}}(\vec{p}_2) \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \quad (86)$$

を定義すると、(85) は

$$\frac{d}{dt}n_X = - \langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle (n_X^2 - n_X^{\text{eq}2}) \quad (87)$$

と書ける。

● 熱平衡数密度 $n_X^{\text{eq}}(T)$

► $T \ll m$ では $f_X^{\text{eq}} \simeq e^{-E/T}$ 、 $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \simeq m + \frac{\vec{p}^2}{2m}$ と近似できるので、

$$\begin{aligned} n_X^{\text{eq}}(T) &= \int [dp] f_X^{\text{eq}} \simeq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-(m+\vec{p}^2/2m)/T} = e^{-m/T} \int \frac{4\pi p^2}{(2\pi)^3} dp e^{-p^2/2mT} \\ &= \frac{T^3}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} e^{-m/T} \end{aligned} \quad (88)$$

を得る ($x = p/\sqrt{2mT}$ と置換し、 $\int dx x^2 e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/4$ を用いた)。

● 宇宙膨張の効果

► 何も反応がなくても、宇宙膨張だけで数密度は薄まる： $n_X \propto a^{-3}$ 、すなわち $\dot{n}_X = -3Hn_X$ ($H = \dot{a}/a$)。これを加えると、

$$\dot{n}_X + 3Hn_X = - \langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle (n_X^2 - n_X^{\text{eq}2}) \quad (89)$$

• まとめ：暗黒物質の Boltzmann 方程式

$$\dot{n}_X + 3Hn_X = -\langle\sigma_{\text{ann}}v_{\text{rel}}\rangle\left(n_X^2 - n_X^{\text{eq}2}\right) \quad (90)$$

- $n_X(t)$: 暗黒物質 X の数密度
- $\dot{n}_X = dn_X(t)/dt$
- $H(t)$: Hubble パラメータ
- $\langle\sigma_{\text{ann}}v_{\text{rel}}\rangle(T)$: 熱平均化した暗黒物質の対消滅断面積
- T : 温度
- $n_X^{\text{eq}}(T) = \frac{T^3}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} e^{-m/T}$ ((88) 式)

§ 3.3 実際に計算してみよう

(90) を実際に解く前に、無次元化しておくとお見通しがよい。

▶ 数密度の無次元化 : $Y_X = n_X/s$

何もしなくても $n_X \propto a^{-3}$ と薄まってしまうので、同じく $\propto a^{-3}$ で変化する量で割っておくと便利である。そこで エントロピー密度

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_*(T) T^3 \quad (91)$$

($g_*(T)$ は有効自由度 (51)) で割った

$$Y_X \equiv \frac{n_X}{s} \quad (92)$$

を考える。エントロピーは保存する ($sa^3 = \text{一定}$ 、 $s \propto a^{-3}$) ので、 $0 = \frac{d}{dt}(sa^3) = \dot{s}a^3 + 3sa^2\dot{a}$ より $\dot{s} + 3Hs = 0$ 。したがって

$$\dot{n}_X + 3Hn_X = \frac{d}{dt}(Y_X s) + 3H(Y_X s) = \dot{Y}_X s + Y_X \underbrace{(\dot{s} + 3Hs)}_{=0} = \dot{Y}_X s \quad (93)$$

となり、(90) は

$$\dot{Y}_X = -\langle\sigma_{\text{ann}}v_{\text{rel}}\rangle s \left(Y_X^2 - Y_X^{\text{eq}2}\right), \quad Y_X^{\text{eq}} = \frac{n_X^{\text{eq}}}{s} \quad (94)$$

と書き換わる。

► 時間の無次元化： $z = m/T$

時間 t のかわりに $z \equiv m/T$ を独立変数にとる。radiation dominated 宇宙 ($T \gg 1 \text{ eV}$) を仮定し、標準宇宙論入門 (§ 1) で導いた関係を用いる。 $H = 1/(2t)$ なので、(50) と (38) より

$$\frac{\pi^2}{30} g_* T^4 = \rho_{\text{rad}} = 3M_{\text{pl}}^2 H^2 = 3M_{\text{pl}}^2 \left(\frac{1}{2t}\right)^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{2\pi^2}{45} g_*}_{\equiv g'} T^4 = \frac{M_{\text{pl}}^2}{t^2} \quad (95)$$

すなわち

$$t = \frac{M_{\text{pl}}}{\sqrt{g'} T^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dT} = -\frac{2M_{\text{pl}}}{\sqrt{g'}} \frac{1}{T^3} \quad (96)$$

となる。よって、 $z = m/T$ ($\Rightarrow \frac{dz}{dT} = -\frac{m}{T^2}$) を用いると、時間微分は

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} = \frac{dT}{dt} \frac{dz}{dT} \frac{d}{dz} = \left(-\frac{\sqrt{g'} T^3}{2M_{\text{pl}}}\right) \left(-\frac{m}{T^2}\right) \frac{d}{dz} = \frac{\sqrt{g'} m^2}{2M_{\text{pl}}} \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \quad (97)$$

と書き換えられる。(簡単のため g' (g_*) の時間変化は無視した。) また、エントロピー密度と (88) より

$$s = g' T^3 = g' \frac{m^3}{z^3}, \quad (98)$$

$$Y_X^{\text{eq}} = \frac{n_X^{\text{eq}}}{s} = \frac{1}{g' T^3} \cdot \frac{T^3}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2} e^{-m/T} = \frac{1}{g'(2\pi)^{3/2}} z^{3/2} e^{-z} \quad (99)$$

となる。これらを (94) に代入すると、

$$\frac{\sqrt{g'} m^2}{2M_{\text{pl}}} \frac{1}{z} \frac{dY_X}{dz} = -\langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle g' \frac{m^3}{z^3} (Y_X^2 - Y_X^{\text{eq}2}) \quad (100)$$

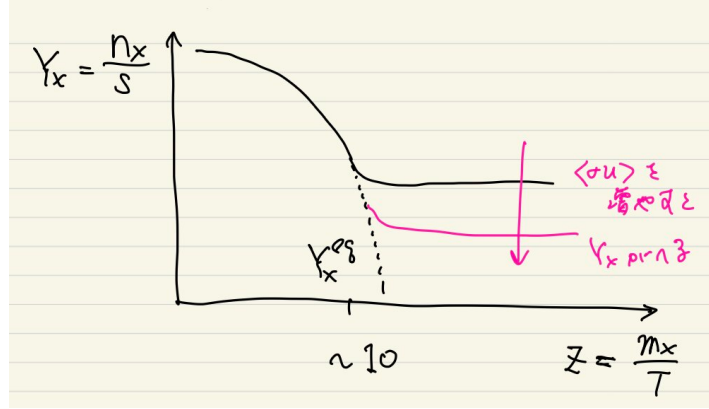
となり、整理すると

$$\frac{dY_X}{dz} = - \underbrace{m M_{\text{pl}} \langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle}_{\text{無次元量}} \frac{2\sqrt{g'}}{z^2} (Y_X^2 - Y_X^{\text{eq}2}) \quad (101)$$

となる。ただし

$$g' = \frac{2\pi^2}{45} g_* \simeq 0.44 g_*, \quad Y_X^{\text{eq}} = \frac{1}{g'(2\pi)^{3/2}} z^{3/2} e^{-z} \simeq \frac{0.14}{g_*} z^{3/2} e^{-z} \quad (102)$$

- これを解くと、、、（各自ぜひ (101) を数値的に解いてみよう。）



$z \sim 10$ 付近でfreeze-outし、以後ほぼ一定値に落ち着く。freeze-out 後の残存量は、

$$Y_X(z \rightarrow \infty) \simeq \frac{1}{m_X M_{\text{pl}} \langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle} \quad (+ \log \text{ 補正}) \quad (103)$$

- よって、現在の暗黒物質の密度パラメータ $\Omega_{X,0}$ は (27) ・ (29) を用いて、

$$\begin{aligned} \Omega_{X,0} &= \frac{\rho_{X,0}}{\rho_{\text{crit},0}} = \frac{m_X n_{X,0}}{\rho_{\text{crit},0}} \\ &= m_X \left(\frac{n_X}{s} \right)_0 \frac{1}{(\rho_{\text{crit}}/s)_0} \\ &\simeq m_X \frac{1}{m_X M_{\text{pl}} \langle \sigma v \rangle} \frac{1}{(\rho_{\text{crit}}/s)_0} \\ &\simeq \frac{1}{M_{\text{pl}} \langle \sigma v \rangle} \frac{1}{1.8 \times 10^{-9} \text{ GeV}} \\ &\simeq 0.2 \left(\frac{1 \text{ pb}}{\langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle} \right) \end{aligned} \quad (104)$$

したがって、観測される暗黒物質質量 $\Omega_{X,0} \simeq \Omega_{\text{DM}}^{\text{obs}} \simeq 0.3$ を説明するには、

$$\langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle \sim 1 \text{ pb} \quad (105)$$

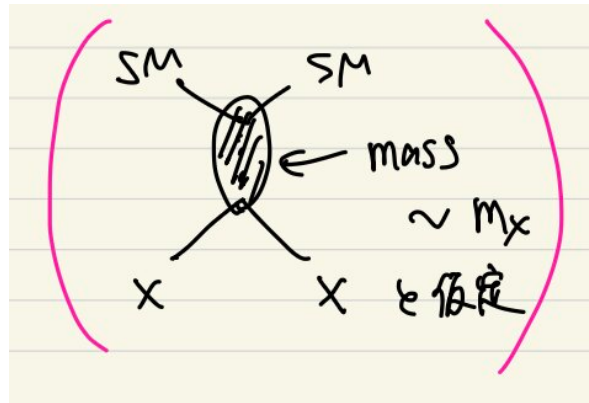
であればよいことがわかる。

► WIMP ミラクル

質量も結合も電弱スケール (weak scale)にとると、対消滅断面積は

$$\sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \simeq \frac{\mathcal{O}(\alpha^2)}{m_X^2} \sim 1 \text{ pb} \quad (\alpha \sim 0.01, \quad m_X \sim 100 \text{ GeV--TeV}) \quad (106)$$

程度になる。



すなわち、電弱スケールの質量・結合をもつ粒子を仮定すると、観測される暗黒物質質量がちょうど再現される。これを **「WIMP ミラクル」** と呼ぶ。（「ミラクル」と言うほどのことか？というのはあるが、結果が何桁も違い得ることを考えると、やはり結構すごい。）暗黒物質が電弱スケールの新粒子であることを示唆する、WIMP シナリオの魅力的な特徴である。

§ 3.4 例：Higgs-portal 暗黒物質（→ 7/28 談話会も参照）

- WIMP の中でも最もシンプルな（minimal な）模型のひとつが **Higgs-portal 暗黒物質** である。“minimal DM”、“simplest DM” などと呼ばれることもある。

V. Silveira and A. Zee (1985).

J. McDonald (1994).

C. P. Burgess, M. Pospelov, T. ter Veldhuis (2001).

暗黒物質 ϕ を スピン 0（実スカラー粒子） と仮定する。

Z_2 対称性 ($\phi \rightarrow -\phi$) を仮定すると、くりこみ可能（次元 4 以下）で書ける最も一般的なラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \lambda_{\phi H} (H^\dagger H) \phi^2 \quad (107)$$

ただし H は Higgs 粒子、標準模型 (SM) の中で唯一のスカラー粒子 (スピン 0)。

► 暗黒物質の対消滅断面積は、 $m_\phi \gg m_H \simeq 125 \text{ GeV}$ では

$$\sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}}(\phi\phi \rightarrow H^\dagger H) \simeq \frac{\lambda_{\phi H}^2}{16\pi} \frac{\beta_S}{E_{p_1}^2}, \quad \beta_S = \sqrt{1 - \frac{m_H^2}{E_{p_1}^2}} \quad (108)$$

となる。(導出は省略。付録 A の A.3 節で同様の計算をしているので参照のこと。ここでは Higgs H が $SU(2)$ 二重項の複素スカラー場で、4 個の実成分をもつため、断面積が (435) のちょうど 4 倍になっている。厳密には $SU(2) \times U(1)$ の破れや $m_H \simeq 125 \text{ GeV}$ を考慮すべきだが、ここでは $m_\phi \gg m_H$ として無視した。)

► freeze-out は $z = m_\phi/T \sim 20$ ($T \sim m_\phi/20$) で起こり、このとき ϕ は非相対論的で $E_\phi \simeq m_\phi$ 。よって $E_{p_1} = E_\phi \simeq m_\phi$ 。さらに $m_\phi \gg m_H$ なら $\beta_S \simeq 1$ 。したがって

$$\sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}}(\phi\phi \rightarrow H^\dagger H) \simeq \frac{\lambda_{\phi H}^2}{16\pi m_\phi^2} \quad (109)$$

これは運動量によらないので熱平均しても同じで

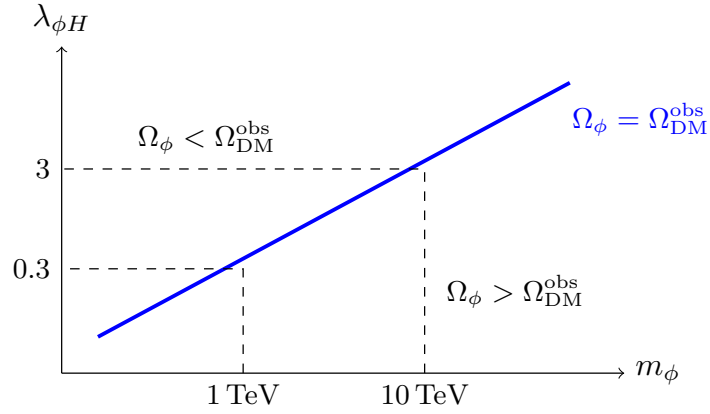
$$\langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle \simeq \frac{\lambda_{\phi H}^2}{16\pi m_\phi^2} \quad (110)$$

となる。

► (105) より、観測量 $\Omega_{\text{DM}}^{\text{obs}} \simeq 0.3$ を再現するには $\langle \sigma_{\text{ann}} v_{\text{rel}} \rangle \sim 1 \text{ pb}$ が必要であった。(110) と合わせると

$$\frac{\lambda_{\phi H}^2}{16\pi m_\phi^2} \simeq 1 \text{ pb} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_{\phi H} \simeq \sqrt{1 \text{ pb} \times 16\pi m_\phi^2} \simeq 0.3 \left(\frac{m_\phi}{1 \text{ TeV}} \right) \quad (111)$$

と、 $\lambda_{\phi H}$ と m_ϕ が一意に関係づけられる。



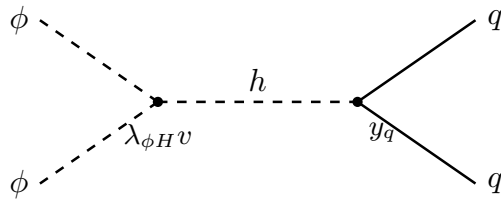
► ● 直接検出

ところで、同じ結合 $\lambda_{\phi H}$ が暗黒物質の直接検出にも効いてくる。Higgs が真空期待値 v をもつことを使うと、

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + h \\ 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow -\frac{1}{2}\lambda_{\phi H}(H^\dagger H)\phi^2 \\ &= -\frac{1}{4}\lambda_{\phi H}(v+h)^2\phi^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}(\lambda_{\phi H}v)h\phi^2 + \dots \end{aligned} \quad (113)$$

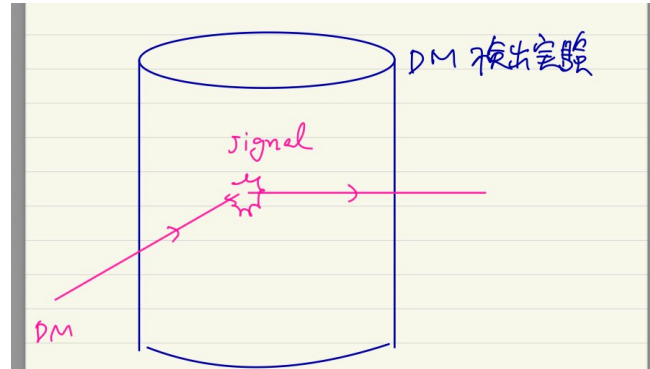
となり、 ϕ は Higgs h を介して SM 粒子（クォークなど）と結合する。



暗黒物質 ϕ が原子核 N を弾性散乱する断面積は（導出略）

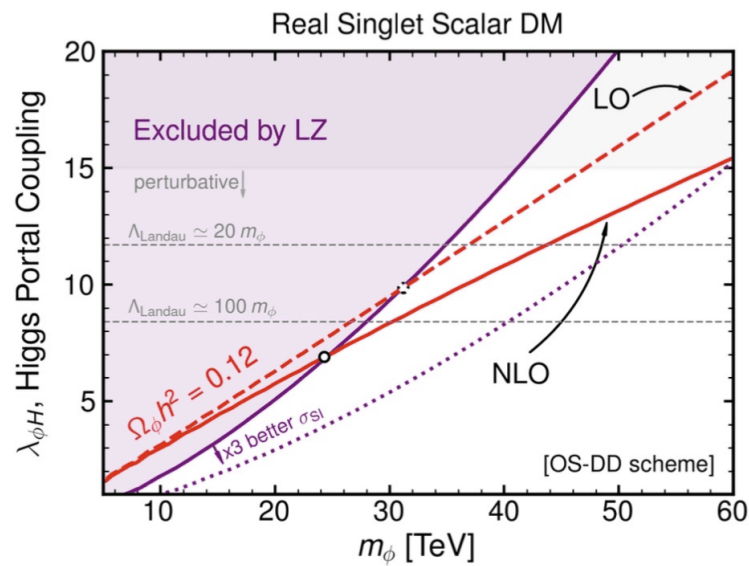
$$\sigma(\phi N \rightarrow \phi N) = \frac{\lambda_{\phi H}^2 f_N^2}{4\pi} \left(\frac{m_N}{m_h} \right)^4 \frac{1}{(m_\phi + m_N)^2} \quad (114)$$

となる（ $f_N \simeq 0.3$ 、 $m_N \simeq 0.94 \text{ GeV}$ 、 $m_h \simeq 125 \text{ GeV}$ ）。地下の大型検出器で、この反跳信号を探索する。



(直接探索の現状は、解説記事「宇宙のダークマター直接探索の現状」を参照。)

- ▶ 残存量 (111) と直接検出 (114) はどちらも同じ $(\lambda_{\phi H}, m_\phi)$ で決まるため、「残存量を正しく与える線」を直接検出実験の感度と直接比較できる。loop 補正まで含めた最近の解析によると、



(Real Singlet Scalar DM の $\lambda_{\phi H}-m_\phi$ 平面。赤線が残存量 $\Omega_\phi h^2 = 0.12$ を与える線 (LO/NLO)、紫の領域が LZ による排除。図は [arXiv:2505.02408](https://arxiv.org/abs/2505.02408) より。)

最もシンプルな Higgs-portal (実スカラー) 暗黒物質はかなり苦しい状況にある。

(→ 7/28 談話会も参照)

§ 4 インフレーション

§ 1.4 で見たように、標準宇宙論には「なぜ初期宇宙はあれほど平坦だったのか」「なぜ全天の CMB の温度が因果関係を持ち得ないほど離れた領域どうして同じなのか」「密度ゆらぎ（銀河や星のタネ）はどこから来たのか」という、いわば初期条件についての謎がある。ここでは、これらの謎がインフレーションという初期宇宙のシナリオで説明できることを見ていく。

§ 4.1 標準宇宙論の「初期値」の問題

§ 4.1.1 Flatness Problem

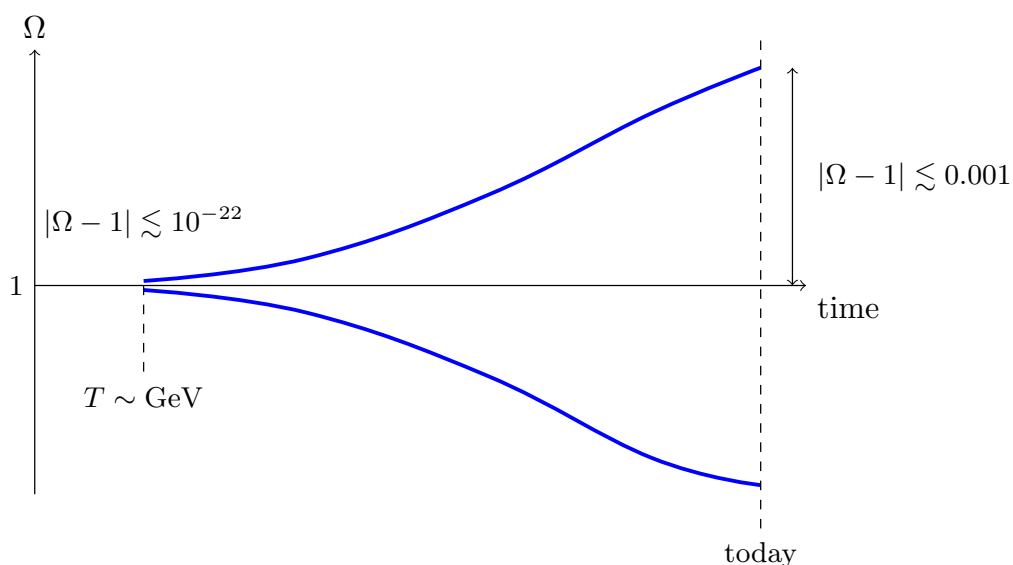
► § 1.1.5 で導いた

$$\left| \frac{\Omega - 1}{\Omega} \right| \propto \frac{1}{\rho a^2} \quad (115)$$

を思い出すと（ Ω の定義は (29)）、

$$\left| \frac{\Omega - 1}{\Omega} (t) \right| \sim \left| \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right| \times \frac{a_{\text{eq}}}{a_0} \times \left(\frac{a(t)}{a_{\text{eq}}} \right)^2 \sim \left| \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right| \times 10^{-22} \left(\frac{T}{\text{GeV}} \right)^{-2} \quad (116)$$

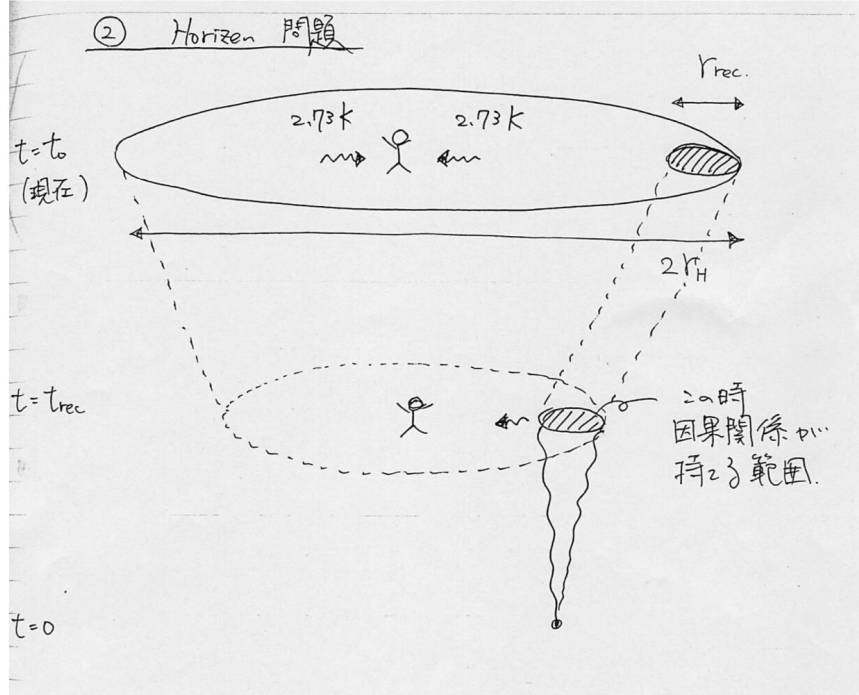
となる。



何故 Ω がこんなに 1 に近かったのか？ fine-tuning 問題。

§ 4.1.2 Horizon 問題

- 現在 ($t = t_0$)、我々は全天から同じ温度 (2.73 K) の CMB を観測している。しかし、CMB が放出された時刻 ($t = t_{\text{rec}}$ 、宇宙の晴れ上がり) にその光を出した領域はどうして、因果関係を持ってないほど離れている (下図)。



- 現在 ($t = t_0$) 我々が CMB で見ている範囲は、 t_{rec} から t_0 までに光が進める距離 (=現在我々が CMBR で見ている範囲) である。平坦 ($k = 0$) な計量を考えると

$$0 = ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dr^2 \implies dr = \frac{dt}{a(t)} \quad (117)$$

なので、comoving 座標で測った距離は

$$r_H = \int_{t_{\text{rec}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \simeq \frac{3t_{\text{rec}}}{a_{\text{rec}}} \left[\left(\frac{t_0}{t_{\text{rec}}} \right)^{1/3} - 1 \right] \quad (118)$$

(簡単のため matter dominated を仮定して $a \propto t^{2/3}$ 、 $\frac{dt}{a} \sim t^{-2/3} dt$ を用いた。) これは現在 ($t = t_0$) の物理的な距離で言うと

$$d_H = a_0 \times r_H \sim 3a_0 \frac{t_{\text{rec}}}{a_{\text{rec}}} \left(\frac{t_0}{t_{\text{rec}}} \right)^{1/3} \sim 2H_0^{-1} \sim 6000 h^{-1} \text{ Mpc} \quad (119)$$

- 一方、 $t = 0$ から $t = t_{\text{rec}}$ までに光が進める距離（ $= t_{\text{rec}}$ の時点で因果関係を持ちうる範囲）は

$$r_{\text{rec}} = \int_0^{t_{\text{rec}}} \frac{dt}{a(t)} = \frac{3t_{\text{rec}}}{a_{\text{rec}}} \quad (120)$$

（ここでも簡単のため matter dominated で計算した。radiation dominated ($a \propto t^{1/2}$) で計算すると $2t_{\text{rec}}/a_{\text{rec}}$ になる。）

- (118), (120) より

$$\frac{2r_H}{r_{\text{rec}}} \sim 2 \left(\frac{t_0}{t_{\text{rec}}} \right)^{1/3} \quad (121)$$

ここで $T \propto a^{-1}$ (redshift) $\propto t^{-2/3}$ より $t \propto T^{-3/2}$ を使うと、

$$\frac{2r_H}{r_{\text{rec}}} \sim 2 \left(\frac{T_{\text{rec}}}{T_0} \right)^{1/2} \sim 2 \left(\frac{3000 \text{ K}}{3 \text{ K}} \right)^{1/2} \sim \underline{60} \quad (122)$$

因果的に遠く離れた点から発せられた光が、同じ温度 ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$ の精度で) に見えていることになる。これも fine-tuning であり、不自然である。

§ 4.1.3 密度ゆらぎの種

温度ゆらぎ (CMB)、密度ゆらぎ (銀河や星のタネ) $\delta T/T \sim 10^{-5}$ はどこから来たのか？ これについては後で (§ 4.4) 少しだけ触れる。

以上 § 4.1.1 Flatness 問題、§ 4.1.2 Horizon 問題 (および § 4.1.3 ゆらぎのタネ) は、いずれも 宇宙の初期条件に関する問題 である。これらを自然に解決するのが、次に見る インフレーション である。

§ 4.2 Inflation 宇宙

- ▶ idea. ある時期、真空のエネルギー ρ_{vac} が宇宙を支配していたとする。

$$\rho_{\text{total}} \simeq \rho_{\text{vac}} = \text{const.} \quad (123)$$

- ▶ このとき、Friedmann 方程式より

$$3M_{\text{pl}}^2 H^2 = \rho_{\text{vac}} \quad (124)$$

$$\therefore \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\rho_{\text{vac}}^{1/2}}{\sqrt{3}M_{\text{pl}}} \quad (125)$$

右辺は定数なので、これは簡単に解けて

$$a \propto e^{H_I t}, \quad H_I = \frac{\rho_{\text{vac}}^{1/2}}{\sqrt{3}M_{\text{pl}}} = \text{const.} \quad (126)$$

すなわち **指数関数的膨張** が起きる。

- ▶ ただし インフレーションは遅くとも BBN が始まる前までに終わって、standard cosmology につながらなければならない。

ρ_{vac} が解放されて ρ_{rad} へ... **“再加熱” (reheating)**。

- ▶ インフレーション前後でのスケール因子は、(126) より

$$\underbrace{a(t_i)}_{\text{インフレーション前}} \longrightarrow \underbrace{a(t_f)}_{\text{インフレーション後}}, \quad a(t_f) = e^{H_I(t_f-t_i)} a(t_i) \quad (127)$$

以下、これで § 4.1 の問題が解決することを見ていく。

§ 4.2.1 Flatness 問題の解決

インフレーション中は $H = H_I = \text{const.}$ なので

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H_I^2} \propto a^{-2} \propto e^{-2H_I t} \quad (128)$$

$$\longrightarrow \text{自動的に } \Omega = 1 \text{ に tune してくれる} \quad (129)$$

§ 4.2.2 Horizon 問題の解決

- ▶ 現在我々が CMBR を見ている範囲は ($t = t_0$ で測って)

$$d_H \sim 2H_0^{-1} \sim 6000 h^{-1} \text{ Mpc} \quad (130)$$

- ▶ 一方、インフレーション中に光が進める距離は ($t = t_0$ で測って)

$$\begin{aligned} d_{\ell, \text{inf}} &= a(t_0) \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a(t)} \\ &= \frac{a(t_0)}{a(t_{\text{eq}})} \frac{a(t_{\text{eq}})}{a(t_f)} \int_{t_i}^{t_f} \frac{a(t_f)}{a(t)} dt \\ &\sim 10^4 \times \frac{T_f}{T_{\text{eq}}} \times \frac{1}{H_I} e^{H_I(t_f - t_i)} \\ &\sim 10^{-25} \text{ Mpc} e^{H_I(t_f - t_i)} \times \left(\frac{T_f}{H_I} \right) \end{aligned}$$

簡単のため、inflation が終わってすぐに radiation dominated になったとした
(後の議論も参照)

$$\text{※ 上の仮定 (inflation 直後に rad. dom.) とすると } T_f \gtrsim H_I \quad (131)$$

- ▶ したがって、 $d_{\ell, \text{inf}} > d_H$ となるには (インフレーション中に光が進める距離が現在見ている CMBR の範囲を超えるには)

$$e^{H_I(t_f - t_i)} \gtrsim 10^{30} \quad \text{くらいあれば OK} \quad (132)$$

すなわち、インフレーションが十分長く続けば、現在 CMB で見ている全天は因果関係を持てることになる。

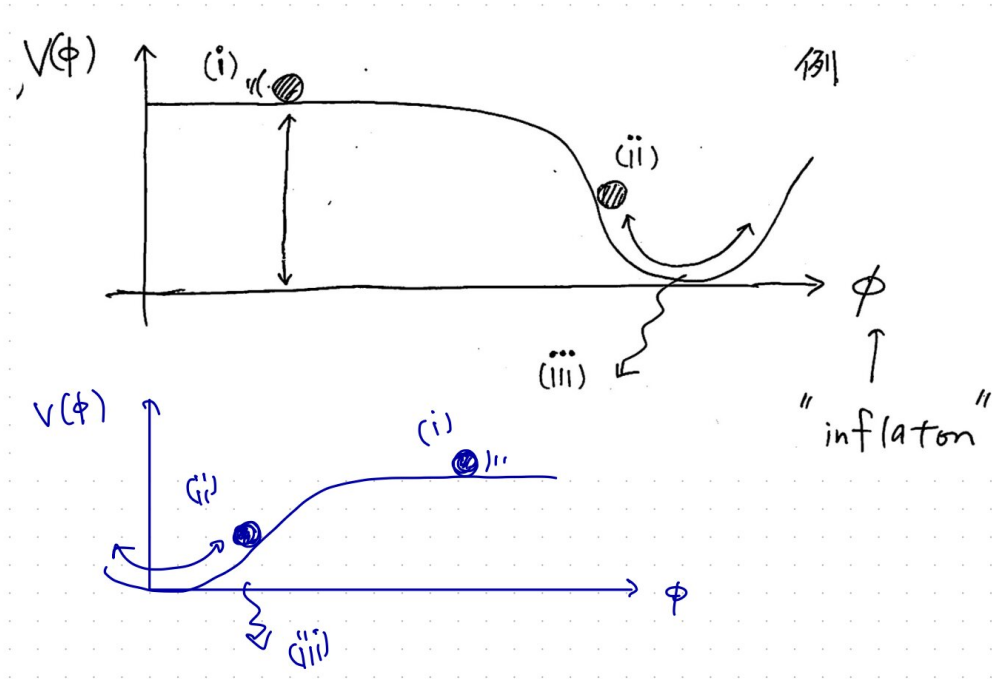
§ 4.2.3 密度ゆらぎのタネ

後で (§ 4.4) 少しだけ触れる。

§ 4.3 典型的なインフレーションシナリオ

$$\rho_{\text{inf}} \left(\begin{array}{l} \text{インフレーション中の} \\ \text{宇宙のエネルギー密度} \end{array} \right) \simeq \begin{array}{l} \text{スカラー場 (インフラトン)} \\ \text{のポテンシャルエネルギー密度} \end{array} \quad (133)$$

と考える。



(インフラトン ϕ は、(i) ポテンシャルの平坦な部分をゆっくり転がり、(ii) 最小値のまわりで振動し、(iii) 崩壊して radiation になる。)

§ 4.3.1 step (i) : slow-roll インフレーション

- ▶ インフラトン場 ϕ のポテンシャルエネルギー $V(\phi)$ が ρ_{total} の主成分となる。
Friedmann 方程式より

$$\begin{aligned} 3M_{\text{pl}}^2 H^2 &= \rho_{\text{total}} \\ &\simeq \rho_{\phi} \\ &= \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + V(\phi) \end{aligned} \quad (134)$$

ここで

$$\begin{cases} \phi(t, \vec{x}) \simeq \phi(t) & \vec{x} \text{に依存しない、coherent} \\ \left(\dot{\phi}\right)^2 \ll V(\phi) & \text{“slow roll”} \end{cases} \quad (135)$$

と仮定すると

$$3M_{\text{pl}}^2 H^2 \simeq V(\phi) \simeq \text{const} \quad (136)$$

となり、(126) の指数関数的膨張が実現する。

► インフラトン $\phi(t)$ の時間発展は、運動方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (137)$$

で決まる。

slow-roll condition

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{1}{2} M_{\text{pl}}^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \\ \eta = M_{\text{pl}}^2 \frac{V''}{V}, \quad |\eta| \ll 1 \end{cases} \quad (138)$$

が満たされると、インフラトンがゆっくり動き (slow-roll)、 $\rho \simeq \rho_\phi \sim \text{const}$ となる。

§ 4.3.2 step (ii) : インフラトンの振動

インフラトン ϕ が、ポテンシャルの最小値のまわりを振動する。

$V \sim \frac{1}{2} m_\phi^2 (\phi - \phi_{\text{min}})^2$ と近似すると、(137) の $3H\dot{\phi}$ の項により (宇宙膨張に伴い) 減衰振動 となる。このとき

$$\rho_{\text{inf}} \sim a^{-3} \quad (\text{matter のようにふるまう}) \quad (139)$$

§ 4.3.3 step (iii) : reheating (再加熱)

► H が inflaton ϕ の decay rate Γ_ϕ と同じくらいになると、 ϕ が崩壊する。

$$H_{\text{RH}} \sim \Gamma_\phi \quad (\Longleftrightarrow t_{\text{RH}} \sim \tau_\phi) \quad (140)$$

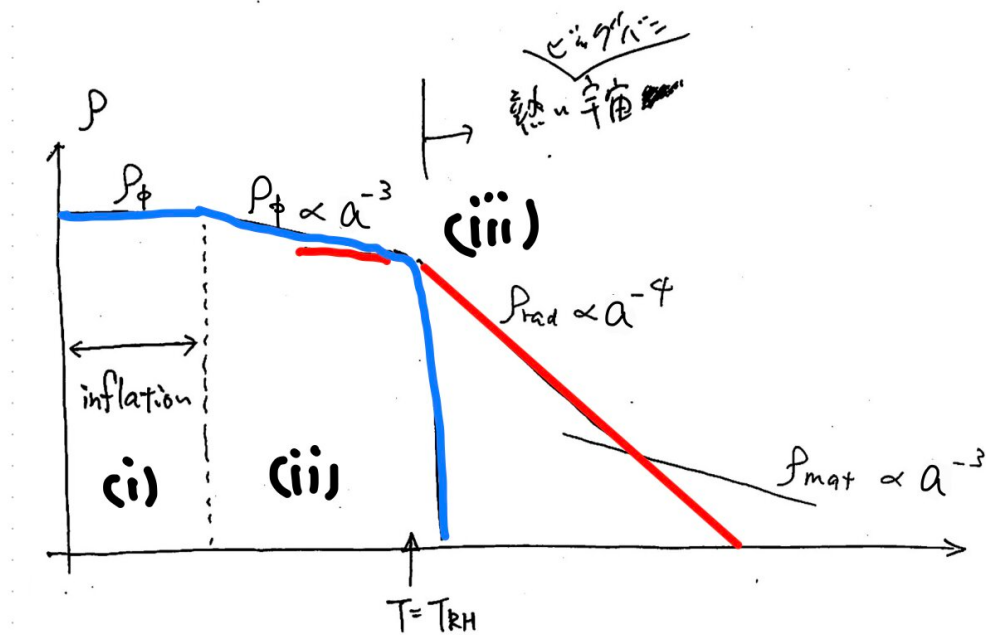
► その時、全てのエネルギーが radiation に変わるとして

$$\begin{aligned}\rho_{\text{rad}}(t_{\text{RH}}) &\sim 3M_{\text{pl}}^2 H_{\text{RH}}^2 \sim 3M_{\text{pl}}^2 \Gamma_\phi^2 \\ &\simeq \frac{\pi^2}{30} g_*(T_{\text{RH}}) T_{\text{RH}}^4\end{aligned}\quad (141)$$

$$T_{\text{RH}} : \text{reheating 温度} \quad (142)$$

► 例えば $\Gamma_\phi \sim \frac{m_\phi^3}{M_{\text{pl}}^2}$ 、 $m_\phi \sim 10^{13}$ GeV と思うと $\Gamma_\phi \sim 10^3$ GeV、 $T_{\text{RH}} \sim 10^{10}$ GeV。

以上をまとめると、宇宙のエネルギー密度は以下のように進化する。



((i) inflation 中は $\rho_\phi \sim \text{const}$ 、(ii) $\rho_\phi \propto a^{-3}$ 、 $T = T_{\text{RH}}$ で $\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4}$ に切り替わる (=ビッグバン、熱い宇宙)。(iii) その後、 $\rho_{\text{mat}} \propto a^{-3}$ が ρ_{rad} を追い越す。)

§ 4.4 ゆらぎについてちょっとだけ

- インフラトン場 ϕ には、量子ゆらぎ $\delta\phi$ がある。

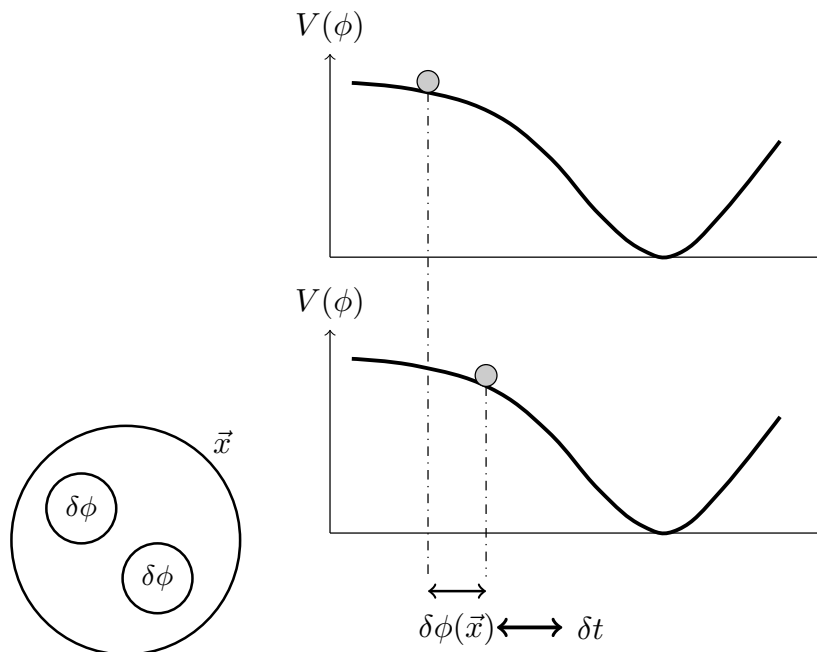
$$\phi = \phi(t) + \underbrace{\delta\phi(t, \vec{x})}_{\text{量子ゆらぎ}} \quad (143)$$

その大きさは

$$\langle \delta\phi \rangle^2 \sim \left(\frac{H_{\text{inf}}}{2\pi} \right)^2 \quad (144)$$

(導出は省略。宇宙論の教科書とかを見ましょう。)

- すると、宇宙の場所 ($\vec{x}$) によって inflation が終わるタイミングがちがう。



(インフラトンが $\delta\phi(\vec{x})$ だけずれると、ポテンシャルの底に到達する (= inflation が終わる) 時刻が δt だけずれる。)

► ものすごく大雑把には

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{\delta a}{a} = \frac{\delta e^{H_I t}}{e^{H_I t}} = H_I \delta t \quad (145)$$

$$= H_I \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \quad (146)$$

$$= H \cdot \frac{H}{2\pi} \times \frac{3H}{V'}$$

$$\left(\because (144) + \text{slow roll 近似 } \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \rightarrow \dot{\phi} \simeq -V'/3H \right) \quad (147)$$

$$\sim \frac{H^3}{V'} \quad (148)$$

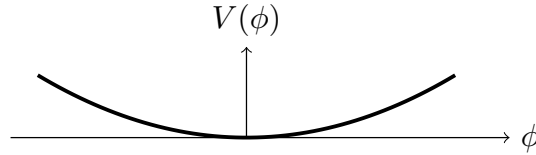
$$\sim \boxed{\frac{V^{3/2}}{V' M_{\text{pl}}^3}} \quad (\because 3M_{\text{pl}}^2 H^2 = \rho \simeq V) \quad (149)$$

これがゆらぎの大きさを決める。

inflation model の例 : chaotic inflation

► **chaotic inflation** :

$$V = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (150)$$



► slow-roll 条件 (138) は

$$\epsilon = \frac{1}{2} M_{\text{pl}}^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = \frac{1}{2} M_{\text{pl}}^2 \left(\frac{2}{\phi} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} M_{\text{pl}}}{\phi} \right)^2 \ll 1 \quad (151)$$

$$\eta = M_{\text{pl}}^2 \left| \frac{V''}{V} \right| = \left| M_{\text{pl}}^2 \frac{2}{\phi^2} \right| = \epsilon \quad (152)$$

$$\implies \underline{\phi \gtrsim M_{\text{pl}} \text{ で slow roll}} \quad (153)$$

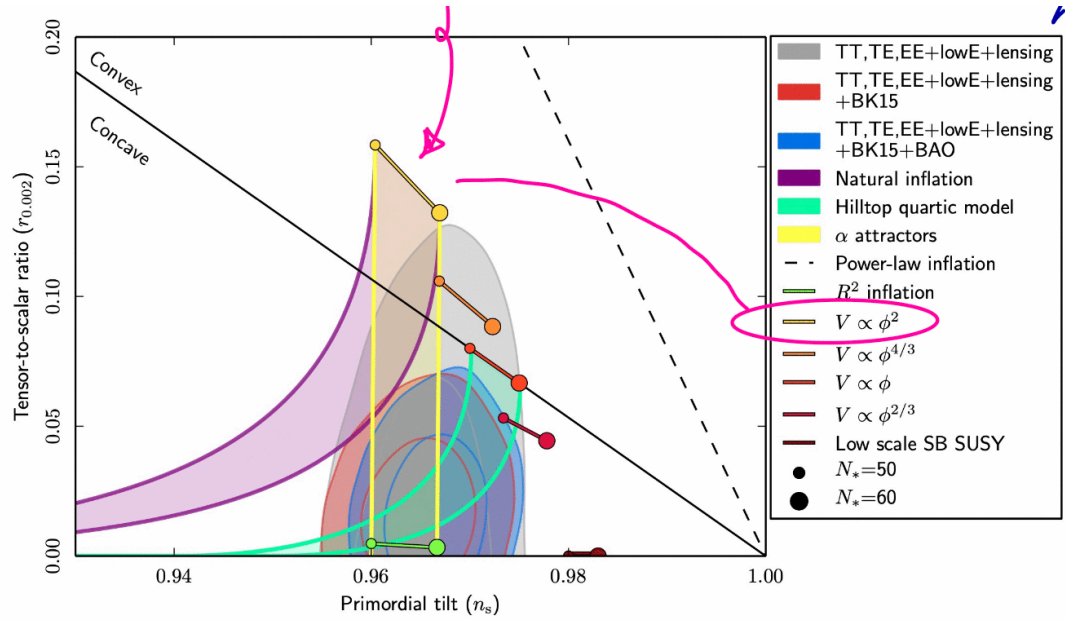
► ゆらぎ (149) は

$$\frac{V^{3/2}}{V' M_{\text{pl}}^3} \sim \frac{m^3 \phi^3}{m^2 \phi \cdot M_{\text{pl}}^3} \sim \left(\frac{m}{M_{\text{pl}}} \right) \left(\frac{\phi}{M_{\text{pl}}} \right)^2 \sim \frac{m}{M_{\text{pl}}} \quad \text{for } \phi \sim M_{\text{pl}} \quad (154)$$

したがって、 $\delta T/T \sim 10^{-5}$ を説明するには

$$m \sim 10^{-5} M_{\text{pl}} \sim 10^{13} \text{ GeV} \quad (155)$$

► (注) このモデル自体は、今では観測で exclude されてしまっている。



(Particle Data Group (PDG) のレビューより。横軸は n_s (primordial tilt)、縦軸は r (tensor-to-scalar ratio)。chaotic inflation ($V \propto \phi^2$) は観測領域から外れている。)

§ 5 ニュートリノ質量と seesaw 機構

ここでは、ニュートリノ質量とその起源として有力なseesaw 機構について紹介する。

予備知識：標準模型（ゲージ対称性、Higgs 機構、Yukawa 結合）。

§ 5.1 準備：フェルミオンの質量項

§ 5.2 標準模型でのフェルミオンの質量

§ 5.3 ニュートリノ質量

§ 5.4 seesaw 機構

§ 5.5 レプトジェネシスとの関連

参考文献：（cf. PDG review）

（レプトジェネシスについては、この章で得られるラグランジアンをそのまま使うので、次章「宇宙の物質反物質非対称性／レプトジェネシス」で改めて扱う。）

§ 5.1 準備：フェルミオンの質量項

► Dirac フェルミオン ψ の運動項と質量項は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (156)$$

である。Weyl (chiral) 表示では

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (I, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad \bar{\sigma}^\mu = (I, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \quad (157)$$

とし、4 成分 spinor ψ を 2 つの 2 成分 spinor χ, η を使って

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta^\dagger \end{pmatrix} \quad (158)$$

と書く。このとき

$$\psi^\dagger = (\chi^\dagger, \eta), \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\chi^\dagger, \eta) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = (\eta, \chi^\dagger) \quad (159)$$

なので、質量項は

$$m\bar{\psi}\psi = m(\eta, \chi^\dagger) \begin{pmatrix} \chi \\ \eta^\dagger \end{pmatrix} = m(\eta\chi + \chi^\dagger\eta^\dagger) \quad (160)$$

となる。射影演算子 $P_{L,R}$ を使って ψ を left, right 成分に分けると

$$\psi_L = P_L \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (161)$$

$$\psi_R = P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^\dagger \end{pmatrix} \quad (162)$$

であり、質量項を ψ_L, ψ_R で書き直すと

$$m \bar{\psi} \psi = m (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R) \quad (163)$$

を得る。つまり質量項を持つには、left 成分と right 成分の両方が必要である。

- ▶ 標準模型では、quark, lepton の left 成分と right 成分は別の粒子である。例えば電子は

$$e_L \cdots L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} : (1, 2)_{-1/2} \quad (164)$$

$$e_R \cdots e_R : (1, 1)_{-1} \quad (165)$$

というように別々のゲージ表現に属している。

(SU(3) の表現, SU(2) の表現)_{U(1) の電荷}、という形式で量子数を書いている。）

したがって

$$\bar{e}_L e_R \quad (166)$$

という組み合わせは、それ自体ではgauge 不変でないので、(163) のような質量項をそのまま書くことはできない。

- ▶ 標準模型ではクォークと荷電レプトンはHiggs を通して質量を持っている。

$$\mathcal{L} = -y_e \bar{L} \Phi e_R + \text{h.c.}, \quad (167)$$

$$= -y_e \underbrace{\bar{L}}_{(2,1)_{1/2}} \underbrace{\Phi}_{(2,1)_{1/2}} \underbrace{e_R}_{(1,1)_{-1}} + \text{h.c.}, \quad (168)$$

$$= -y_e (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} e_R \quad (169)$$

これで gauge 不変 ($SU(2) \times U(1)$ 不変) になっている。

§ 5.2 標準模型でのフェルミオンの質量

前節の考え方を一般化すると、標準模型の Yukawa ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{SM}} = -y_e \bar{L} \Phi e_R - y_u \bar{Q} \cdot \tilde{\Phi} u_R - y_d \bar{Q} \cdot \Phi d_R + \text{h.c.} \quad (170)$$

と書ける。ここで $\tilde{\Phi}_a = \epsilon_{ab} \Phi_b^*$ である。電子の項を具体的に書くと

$$-y_e (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} e_R + \text{h.c.} \quad (171)$$

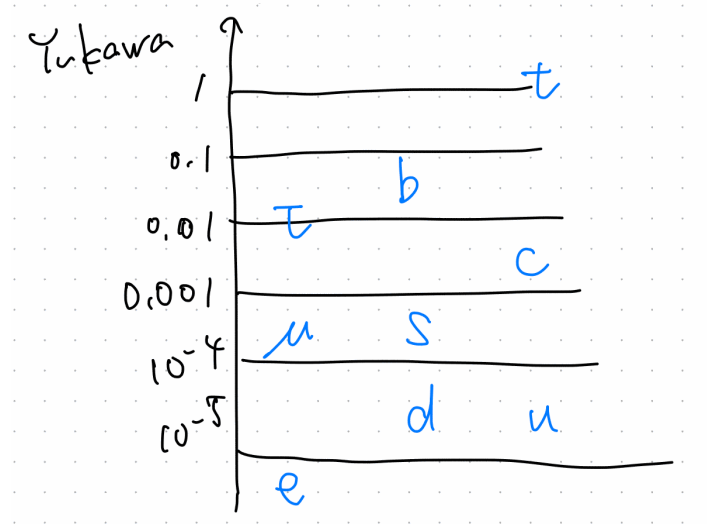
Higgs が真空期待値 (vacuum expectation value, VEV) $\langle \Phi^0 \rangle \neq 0$ を持つと、

$$-y_e \langle \Phi^0 \rangle (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) = \underbrace{-y_e \langle \Phi^0 \rangle}_{\equiv m_e} \bar{\psi} \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix} : \text{Dirac} \quad (172)$$

という質量項が生成される。数値を入れると ($\langle \Phi^0 \rangle \simeq 174 \text{ GeV}$, $m_e \simeq 511 \text{ keV}$)

$$y_e = \frac{m_e}{\langle \Phi^0 \rangle} \simeq 3 \times 10^{-6} \quad (173)$$

同様にして、他のクォーク・レプトンについても Yukawa 結合 $y_i = m_i / \langle \Phi^0 \rangle$ が決まる。



どうしてこんな風になっているのか？これ自体が標準模型における最大の謎の一つ（でもこの講義では掘り下げない）。

§ 5.3 ニュートリノ質量

- ニュートリノ振動実験からは、ニュートリノの質量の2乗差が測られている (cf. PDG review) :

$$\Delta m_{\text{atm}}^2 (\equiv m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2) \simeq (0.05 \text{ eV})^2 \quad (\text{SK, T2K, etc.}) \quad (174)$$

$$\Delta m_{\text{sol}}^2 (\equiv m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2) \simeq (0.0086 \text{ eV})^2 \quad (\text{solar } \nu, \text{ KamLAND, etc.}) \quad (175)$$

また宇宙論的観測（Planck など）からは、ニュートリノ質量の和に上限が付く：

$$\sum_i m_{\nu_i} \lesssim 0.12 \sim 0.16 \text{ eV} \quad (\text{Planck など}) \quad (176)$$

これらから、少なくとも 2 つのニュートリノはゼロでない質量を持っていることが分かり、その大きさはおよそ

$$0.008 \sim 0.05 \text{ eV} \lesssim m_\nu \lesssim 0.1 \text{ eV} \quad (177)$$

の範囲にある。

- ▶ もしニュートリノの質量が、他の標準模型フェルミオンと同様に Higgs との Yukawa 相互作用で与えられているとしたら、どうなるだろうか？
- ▶ その場合、まず右巻きニュートリノ N_R という、標準模型には無かった新しい場（新しい自由度）を導入する必要がある。このとき

$$\mathcal{L}_{\nu, \text{Yukawa}} = -y_\nu \bar{L} \tilde{\Phi} N_R + \text{h.c.} \quad (178)$$

$$= -y_\nu (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \Phi^{0*} \\ -\Phi^- \end{pmatrix} N_R + \text{h.c.} \quad (179)$$

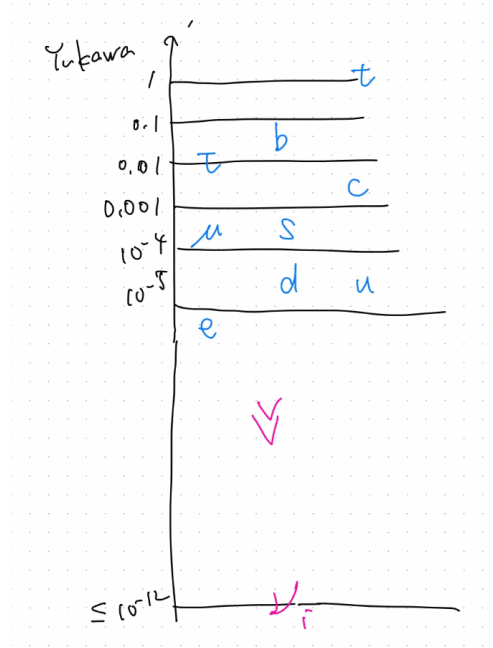
という gauge invariant な湯川項が書ける。Higgs VEV をもつと、Dirac ニュートリノ質量

$$m_\nu^{(\text{Dirac})} = y_\nu \langle \Phi^0 \rangle \quad (180)$$

が生成される。しかし、 $m_\nu \lesssim 0.1 \text{ eV}$ を再現するには

$$y_\nu = \frac{m_\nu}{\langle \Phi^0 \rangle} \lesssim \frac{0.1 \text{ eV}}{100 \text{ GeV}} \sim 10^{-12} \quad (181)$$

という、他の標準模型の Yukawa 結合に比べても桁違いに小さいYukawa 結合が必要になる。



§ 5.4 seesaw 機構

- **Point** : N_R は (他のフェルミオンと違って) ゲージ群の singlet $(1, 1)_0$ である。

$$\mathcal{L} = -y_\nu \bar{L} \tilde{\Phi} N_R + \text{h.c.}, \quad (182)$$

$$= -y_\nu \underbrace{\bar{L}}_{(2,1)_{1/2}} \underbrace{\tilde{\Phi}}_{(2,1)_{-1/2}} \underbrace{N_R}_{(1,1)_0} + \text{h.c.}, \quad (183)$$

- このような singlet の場合 (このような場合に限りに)、 N_R は自分自身で「Majorana 質量」を持てる :

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{N_R} = -\frac{1}{2} M_R \overline{N_R^c} N_R + \text{h.c.} \quad (184)$$

ここで N_R^c は N_R の荷電共役 (left-handed になる)。 M_R は新しいパラメータ (Majorana 質量) である。

- singlet でない場合 (電荷を持っている場合)、このような Majorana 質量項を持つことはできない。 例えば e_R (電荷 -1) について、その荷電共役は e_R^c は left-handed なので

$$\mathcal{L} = m \overline{e_R^c} e_R \quad (185)$$

と書くと left + right で Lorentz 対称性の観点では OKだが、電荷を考えると

$$\mathcal{L} = m \underbrace{\overline{e_R^c}}_{-1} \underbrace{e_R}_{-1} \quad (186)$$

となり電荷を保存しない (ゲージ対称性が保てない)。したがってこのような質量項は許されない。 N_R のように電荷ゼロの singlet だけが、 $\overline{N_R^c} N_R$ という Majorana 質量項を持つことができる。

► (179) と (184) の両方をあわせて考えると

$$\mathcal{L} = -y_\nu \bar{L} \tilde{\Phi} N_R - \frac{1}{2} M_R \overline{N_R^c} N_R + \text{h.c.} \quad (187)$$

Higgs VEV を代入すると、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_L, \overline{N_R^c}) \begin{pmatrix} 0 & y_\nu \langle \Phi^0 \rangle \\ y_\nu \langle \Phi^0 \rangle & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ N_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (188)$$

という質量行列が得られる。ここで

$$M_R \gg y_\nu \langle \Phi^0 \rangle (\sim 100 \text{ GeV}) \quad (189)$$

を仮定する (M_R は Higgs VEV よりずっと大きい、新しい高いエネルギースケール)。(188) を対角化すると、質量固有値は

$$M_N \simeq M_R, \quad m_\nu \simeq \frac{(y_\nu \langle \Phi^0 \rangle)^2}{M_R} \quad (190)$$

となる。

► 標準模型ニュートリノの質量は

$$m_\nu \simeq 0.1 \text{ eV} \times y_\nu^2 \left(\frac{10^{14} \text{ GeV}}{M_R} \right) \quad (191)$$

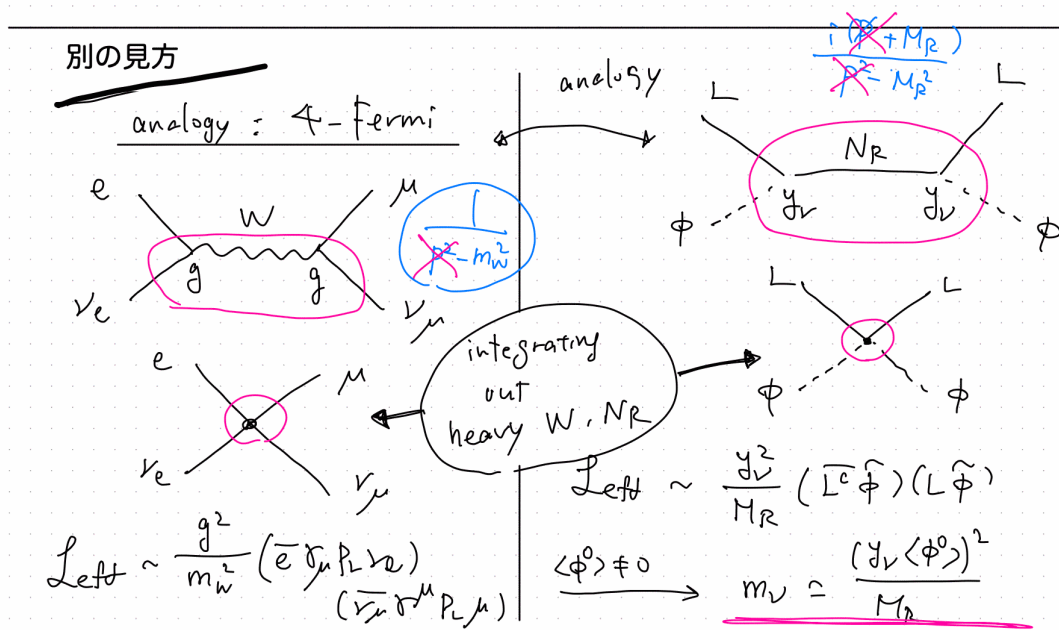
となり、 M_R が大きくなるほど、 m_ν は小さくなる (seesaw 機構)。 $M_R \sim 10^{14} \text{ GeV}$ 程度 (大統一理論のスケールに近い) とすると、観測されているニュートリノ質量 $m_\nu \sim 0.1 \text{ eV}$ の小ささを自然に説明できる。

► このとき、標準模型ニュートリノ (ν) も重いニュートリノ (N) も、両方とも Majorana 粒子になる。

→ Majorana かどうかは、 $0\nu\beta\beta$ 崩壊の探索実験 (e.g. KamLAND-Zen) で検証されている。

▶ 別の見方：4-Fermi 理論とのアナロジー

弱い相互作用の 4-Fermi 理論や「重い粒子を積分して有効理論を得る」という考え方を知っていれば、以下の考え方でも同じ seesaw 関係式が得られる。



§ 5.5 レプトジェネシスとの関連

この章で議論したラグランジアン

$$-y_\nu \bar{L} \tilde{\Phi} N_R - \frac{1}{2} M_R \overline{N_R^c} N_R + \text{h.c.} \quad (192)$$

は、そのまま § 6 「宇宙の物質反物質非対称性／レプトジェネシス」でも使う。 N_R の崩壊が、物質・反物質の非対称性を生み出す。

§ 6 宇宙の物質反物質非対称性とレプトジェネシス

ここでは、宇宙の物質反物質非対称性と、その起源として有力なレプトジェネシス (leptogenesis)について紹介する。

予備知識：標準宇宙論 (§ 1)、seesaw 機構 (§ 5)。

§ 6.1 宇宙の物質反物質非対称性

§ 6.2 sphaleron 過程とレプトジェネシス

§ 6.3 B と L

§ 6.4 右巻きニュートリノの CP の破れた崩壊

§ 6.5 thermal leptogenesis

参考文献：

- ▶ 日本語解説記事：[宇宙における物質の起源とマヨラナニュートリノ](#)
- ▶ レビュー：S. Davidson, E. Nardi and Y. Nir, Phys. Rept. 466 (2008), 105-177 [[arXiv:0802.2962](#)]

§ 6.1 宇宙の物質反物質非対称性

- ▶ 観測 (BBN、CMB) から、宇宙のバリオン数密度は

$$\frac{n_B}{n_\gamma} \simeq 6 \times 10^{-10} \quad (193)$$

であることが分かっている。ここで n_γ は光子の数密度、

$$n_B \equiv n_{\text{baryon}} - n_{\text{anti-baryon}} \quad (194)$$

である。(現在は $n_{\text{baryon}} \gg n_{\text{anti-baryon}}$ 、early universe では $n_{\text{baryon}} \simeq n_{\text{anti-baryon}}$)

- ▶ インフレーション (§ 4) があると、それ以前のバリオン数は全て薄められてしまうので、インフレーション後には $n_B = 0$ から出発することになる。したがって、

$$n_B = 0 \quad \longrightarrow \quad n_B \neq 0 \quad (195)$$

という過程が必要である。これをバリオジェネシス (Baryogenesis)という。

► バリオジェネシスが起こるためには、サハロフの3条件が必要である：

(i) B の破れ (バリオン数非保存)

(ii) C と CP の破れ

$$\Gamma(B = 0 \rightarrow B > 0) \neq \Gamma(B = 0 \rightarrow B < 0) \quad (196)$$

(iii) 熱平衡からのずれ (out-of-equilibrium)

$$B = 0 \longrightarrow B > 0 \quad (\text{逆向きの過程が効かない}) \quad (197)$$

► バリオジェネシスには非常に多くのシナリオがある。

- Electroweak Baryogenesis
- Leptogenesis ⇐ 本節で扱う
- などなど...

§ 6.2 sphaleron 過程とレプトジェネシス

► 標準模型における B と L

標準模型では、バリオン数 B とレプトン数 L について

- classical level では B と L は保存する

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = 0 \quad (198)$$

- quantum level では B と L は破れる！ (アノマリー)

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = \frac{g_2^2}{64\pi^2} N_f \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^{(a)} F_{\rho\sigma}^{(a)}, \quad N_f = 3 \quad (199)$$

NOTE : $(B - L)$ は保存する。

$$\partial_\mu (j_B^\mu - j_L^\mu) = 0 \quad (200)$$

► 低温では B や L の破れは小さい

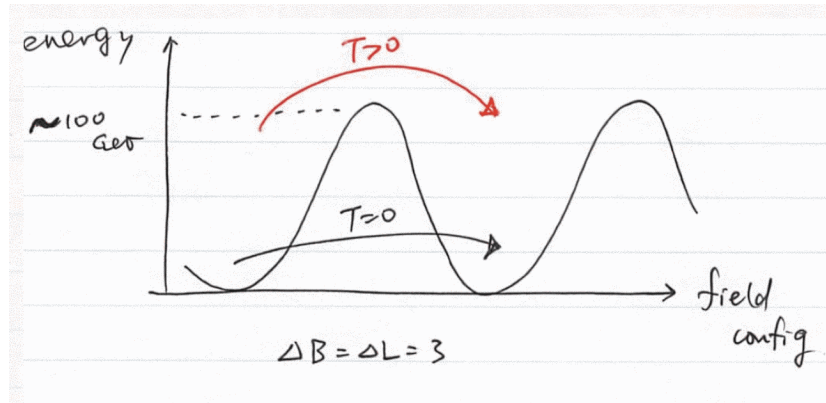
低温 ($T \lesssim 100 \text{ GeV}$) では、 B や L の破れは非常に小さい。実際 $T = 0$ では

$$\Gamma_B \propto e^{-16\pi^2/g_2^2} \sim 10^{-170} \quad (201)$$

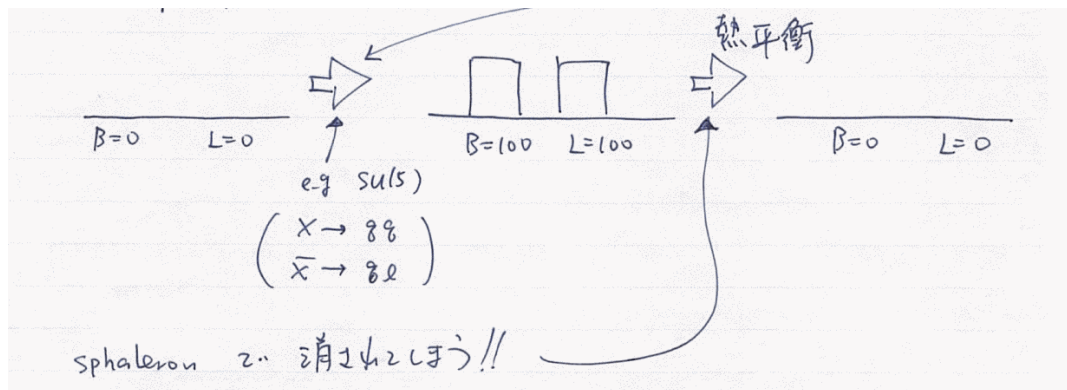
と、完全に無視できる。

ところが、高温 ($T \gtrsim 100 \text{ GeV}$) では、 $(B - L)$ を保ちつつ B と L を破る process (“sphaleron process”) が thermal equilibrium に入る：

$$\Gamma_{\text{sphaleron}} \gg H \quad \text{for } T > T_c \sim 100 \text{ GeV} \quad (202)$$



- もしバリオン数が $(B - L)$ -conserving process で作られたとすると、どうなるだろうか。例えば simple な $SU(5)$ 大統一理論では、



何か $(B - L)$ を破る process が必要

つまり、サハロフの3条件の1つ目 (i) B -violation は、実際には

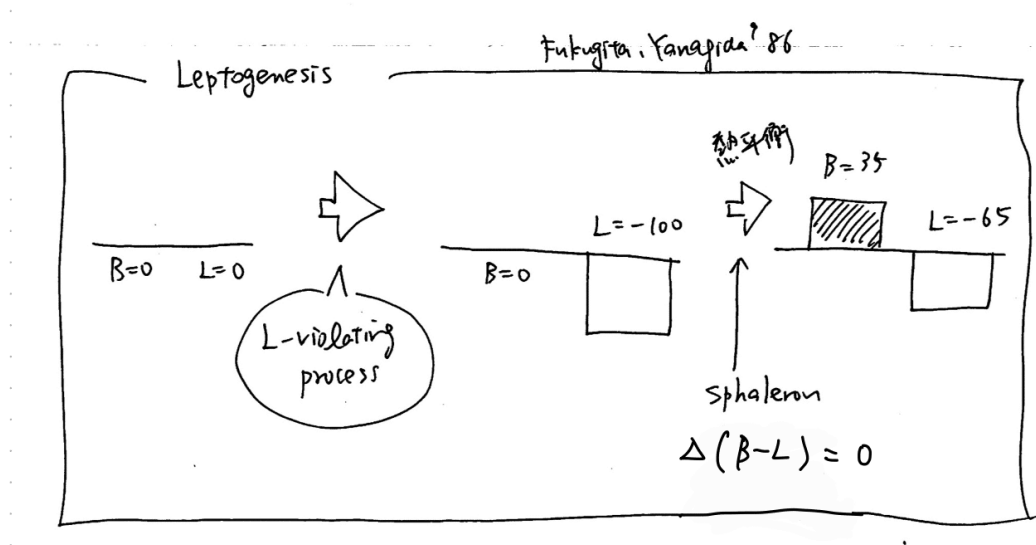
$$(i)' \quad (B - L)\text{-violation} \quad (203)$$

と読み替える必要がある。（例外：EWBG（電弱バリオジェネシス）、Q-ball を使った Affleck-Dine baryogenesis など。）

- ▶ つまり、直接 B を破らなくても、 L の破れがあれば十分である。ここで seesaw 機構 (§ 5) を思い出すと、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} M_R \bar{N}_R^c N_R + y_\nu \bar{L} \cdot \hat{\Phi} N_R + \text{h.c.} \quad (204)$$

の Majorana 質量項がまさに lepton 数を破っている！



- ▶ 中でも最も simple なのが thermal leptogenesis である
(他に : non-thermal Leptogenesis、Affleck-Dine Leptogenesis など)。

仮定

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} - \frac{1}{2} M \bar{N} N + y_\nu \bar{L} \cdot \hat{\Phi} N + \text{h.c.} \quad (205)$$

+ 十分高い reheating 温度 これだけ！

このとき、次の流れでバリオン数が生成される：

$$\text{熱浴} \xrightarrow[\text{(\S 6.5)}]{\text{生成}} N_R \xrightarrow[\text{(\S 6.4)}]{\text{decay}} \begin{cases} \ell + \phi \\ \bar{\ell} + \bar{\phi} \end{cases} \Rightarrow n_L \neq 0 \xrightarrow[\text{(\S 6.3)}]{\text{sphaleron}} n_B \neq 0 \quad (206)$$

以下、後ろから順に見ていく。

§ 6.3 B と L

まず、 n_L が与えられたときに、sphaleron によってどれだけの n_B が作られるかを求める。

▶ particle asymmetry

熱浴中の粒子 i の粒子・反粒子数密度の差は

$$\begin{aligned}\Delta n_i &\equiv n_i^{\text{粒子}} - n_i^{\text{反粒子}} \\ &= g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{(E-\mu_i)/T} \pm 1} - \frac{1}{e^{(E+\mu_i)/T} \pm 1} \right) \quad \begin{array}{l} + : \text{fermion} \\ - : \text{boson} \end{array} \end{aligned} \quad (207)$$

ただし μ_i は化学ポテンシャル。 g_i は自由度。 $\mu_i \ll T$ のとき、これは

$$\Delta n_i = \frac{1}{3} g_i T^2 \mu_i \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_i}{T}\right)^2 \right) \times \begin{cases} 1/2 & \text{fermion} \\ 1 & \text{boson} \end{cases} \quad (208)$$

と展開できる。

▶ 標準模型の場合

粒子種は

$$i = q_k, \bar{u}_k, \bar{d}_k, \ell_k, \bar{e}_k \quad (k = 1 \sim 3), \quad \phi \text{ (Higgs)} \quad (209)$$

である。 $\mu_i \ll T$ として、

$$\begin{aligned}n_B &\equiv \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{3} \Delta n_{q_k} - \frac{1}{3} \Delta n_{\bar{u}_k} - \frac{1}{3} \Delta n_{\bar{d}_k} \right) = \frac{1}{6} T^2 \sum_k (2\mu_{q_k} - \mu_{\bar{u}_k} - \mu_{\bar{d}_k}) \\ n_L &\equiv \sum_{k=1}^3 (\Delta n_{\ell_k} - \Delta n_{\bar{e}_k}) = \frac{1}{6} T^2 \sum_k (2\mu_{\ell_k} - \mu_{\bar{e}_k}) \end{aligned} \quad (210)$$

▶ chemical equilibrium

反応 $A + B \leftrightarrow C + D$ が熱平衡にあるとき、化学ポテンシャルの間に

$$\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D$$

という関係が成り立つ。標準模型では：

① Yukawa interaction

$$\begin{aligned}\mu_\phi + \mu_{\ell_k} + \mu_{\bar{e}_k} &= 0 \\ -\mu_\phi + \mu_{q_k} + \mu_{\bar{u}_k} &= 0 \\ \mu_\phi + \mu_{q_k} + \mu_{\bar{d}_k} &= 0\end{aligned} \quad (211)$$

NOTE : CKM 混合により $\mu_{q_1} = \mu_{q_2} = \mu_{q_3} \equiv \mu_q$ 、 $\mu_{\bar{u}_1} = \cdots \equiv \mu_{\bar{u}}$ 、 $\mu_{\bar{d}_1} = \cdots \equiv \mu_{\bar{d}}$ となる。

② sphaleron

$$\sum_{k=1}^3 (3\mu_{q_k} + \mu_{\ell_k}) = 0 \quad (212)$$

(左辺の 3 は color の数。和は全ての $SU(2)$ doublet フェルミオンについて取る。)

► charge neutrality

U(1) の保存 (宇宙は全体として電氣的に中性) より

$$\sum_i \Delta n_i Y_i = 0 \implies \sum_k (\mu_{q_k} - 2\mu_{\bar{u}} + \mu_{\bar{d}} - \mu_{\ell_k} + \mu_{\bar{e}_k}) - 2\mu_{\phi} = 0 \quad (213)$$

► (210)~(213) を連立して解くと、

$$n_B = -\frac{28}{51} n_L \quad (214)$$

を得る。さらに $(B - L)$ が保存していることに注意すると、

$$n_B|_{\text{eq}} = C (n_B - n_L)|_{\text{eq}} = C (n_B - n_L)|_{\text{initial}} \quad \text{for } T \gtrsim 100 \text{ GeV} \quad (215)$$

ここで

$$C = \frac{28}{79} \simeq 0.35 \quad (216)$$

(※実は (211)~(213) より $\frac{1}{3}B - L_k$ ($k = e, \mu, \tau$) が別々に保存する。今は和に注目している。)

► Leptogenesis では初期に $n_B = 0$ 、 $n_L \neq 0$ なので、

$$n_B|_{\text{eq}} = -C n_L|_{\text{initial}} \quad (217)$$

となる。

§ 6.4 右巻きニュートリノの CP の破れた崩壊

次に、 n_L がどれだけ作られるかを見る。出発点は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}M_i \overline{N_{Ri}^c} N_{Ri} - y_{i\alpha} \bar{\ell}_\alpha \cdot \hat{\Phi} N_{Ri} + \text{h.c.} \quad (218)$$

$$i = 1, 2, 3 \ (M_1 < M_2 < M_3) \ , \quad \alpha = e, \mu, \tau \ (\text{lepton flavor})$$

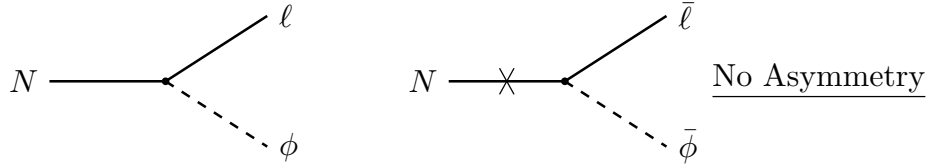
である。

- ▶ 以下、一番軽い N_{R1} の崩壊のみを考える。 (Higgs は期待値を持つ前 : $T > T_c$ では $\langle \phi \rangle = 0$.)

- ▶ tree level

tree level では、粒子への崩壊と反粒子への崩壊の幅は等しい :

$$\Gamma_{\text{tree}} (N_{R1} \rightarrow \ell_\alpha \phi) = \Gamma_{\text{tree}} (N_{R1} \rightarrow \bar{\ell}_\alpha \bar{\phi}) \quad (219)$$



($\times$ は Majorana 質量の挿入。)

- ▶ 1-loop level

1-loop まで含めると、tree 図と 1-loop 図の干渉によって崩壊幅に差が生じる :

$$\left| \begin{array}{c} N \\ \swarrow \quad \searrow \\ l \quad \phi \end{array} + \begin{array}{c} N \\ \swarrow \quad \searrow \\ l \quad \phi \end{array} + \begin{array}{c} N \\ \swarrow \quad \searrow \\ l \quad \phi \end{array} \right|^2 - \left| \begin{array}{c} N \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bar{l} \quad \phi^* \end{array} + \begin{array}{c} N \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bar{l} \quad \phi^* \end{array} + \begin{array}{c} N \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bar{l} \quad \phi^* \end{array} \right|^2 \neq 0$$

N_{R1} 1 個あたり、どれだけの L -asymmetry ができるかを表す量を

$$\epsilon_1 \equiv \frac{n_\ell - n_{\bar{\ell}}}{n_{N_{R1}}} = \frac{\sum_\alpha \Gamma(N_{R1} \rightarrow \ell_\alpha \phi) - \sum_\alpha \Gamma(N_{R1} \rightarrow \bar{\ell}_\alpha \bar{\phi})}{\sum_\alpha \Gamma(N_{R1} \rightarrow \ell_\alpha \phi) + \sum_\alpha \Gamma(N_{R1} \rightarrow \bar{\ell}_\alpha \bar{\phi})} \quad (220)$$

と定義する。場の量子論の 1-loop 計算 (結構大変、略) を行くと、

$$\epsilon_1 = -\frac{1}{8\pi} \sum_{j=2,3} \frac{\text{Im} \left[(yy^\dagger)_{1j} (yy^\dagger)_{1j} \right]}{(yy^\dagger)_{11}} f\left(\frac{M_j^2}{M_1^2}\right) \quad (221)$$

を得る。ここで

$$f(x) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{x-1} - 1 + (x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$$

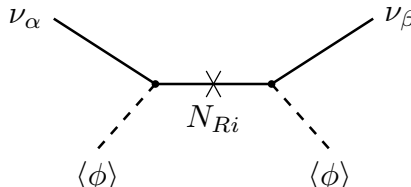
である。 y が **complex** である必要がある (CP の破れが必要) ことに注意。

► 以下、 $M_1 \ll M_2, M_3$ (つまり $x \gg 1$) を仮定すると、

$$f\left(\frac{M_j^2}{M_1^2}\right) \simeq \frac{3}{2} \frac{M_1}{M_j} \quad (222)$$

► さらに以下の関係式を用いる：

◎ seesaw formula (§ 5.4) ν 質量行列。



$$(m_\nu)_{\alpha\beta} = - \sum_i y_{i\alpha} \frac{\langle \phi \rangle^2}{M_i} y_{i\beta}, \quad \alpha, \beta = e, \mu, \tau \quad (223)$$

◎ ν -mixing

$$(m_\nu)_{\alpha\beta} = U_{\alpha i} U_{\beta i} m_{\nu_i}^{\text{diag}}, \quad m_{\nu_3} > m_{\nu_2} > m_{\nu_1} \quad (224)$$

ここで U は Maki-Nakagawa-Sakata 行列 (ニュートリノ振動)。

◎ $\tilde{y}$ を定義

$$\tilde{y}_{ij} \equiv y_{i\alpha} U_{\alpha j}^* \quad \begin{array}{l} i: M_i \text{ のラベル} \\ j: m_{\nu_j} \text{ のラベル} \end{array} \quad (225)$$

► (221)~(225) より (see e.g. [hep-ph/0212305](#)),

$$\epsilon_1 = \frac{3}{16\pi} \frac{M_1}{\langle\phi\rangle^2} m_{\nu_3} \delta_{\text{eff}} \quad (226)$$

ここで

$$\delta_{\text{eff}} \equiv \frac{\text{Im} \left[(\tilde{y}_{13})^2 + \frac{m_{\nu_2}}{m_{\nu_3}} (\tilde{y}_{12})^2 + \frac{m_{\nu_1}}{m_{\nu_3}} (\tilde{y}_{11})^2 \right]}{|\tilde{y}_{13}|^2 + |\tilde{y}_{12}|^2 + |\tilde{y}_{11}|^2}, \quad \text{Note } |\delta_{\text{eff}}| \leq 1 \quad (227)$$

数値的には (Higgs VEV $\langle\phi\rangle \simeq 174$ GeV を代入して)

$$\epsilon_1 = 1.0 \times 10^{-6} \left(\frac{M_1}{10^{10} \text{ GeV}} \right) \left(\frac{m_{\nu_3}}{0.05 \text{ eV}} \right) \delta_{\text{eff}} \quad (228)$$

§ 6.5 thermal leptogenesis

最後に、 N_{R1} がどれだけ作られるかを見る。

► もし N_{R1} が thermal bath に入っていて、かつ

$$N_{R1} \rightarrow \begin{cases} \ell + \phi \\ \bar{\ell} + \bar{\phi} \end{cases} \quad (229)$$

が一瞬で起きて、その後 L -number violation が一切なかったら、

$$\begin{aligned} \left. \frac{n_B}{s} \right|_{\text{その場合}} &= \left. \frac{n_{N_{R1}}}{s} \right|_{\text{eq}} \times \frac{n_L}{n_{N_{R1}}} \times \frac{n_B}{n_L} \\ &= \epsilon_1 (\S 6.4) \simeq 0.35 (\S 6.3) \end{aligned} \quad (230)$$

となるはず。

Comments

(i) n_B/n_γ の代わりに n_B/s を使う。

$$\left. \frac{n_B}{s} \right|_{\text{now}} \simeq \frac{1}{7} \frac{n_B}{n_\gamma} \Big|_{\text{now}} \simeq 9 \times 10^{-11} \quad (231)$$

ここで $s = \frac{2\pi^2}{45} g_*(T) T^3$ はエントロピー密度である。 $g_*(T)$ の T 依存性まで

考えると、 B -number が保存するとき

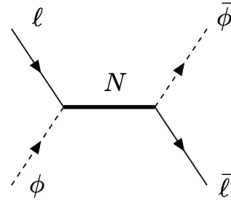
$$\frac{n_B}{s} = \text{const}, \quad \frac{n_B}{n_\gamma} \neq \text{const} \quad (232)$$

なので、 n_B/s のほうが便利である。

(ii) $T > M_1$ では

$$\left. \frac{n_{N_{R1}}}{s} \right|_{\text{eq}} = \frac{\frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} g_{N_{R1}} T^3}{\frac{2\pi^2}{45} g_*(T) T^3} \sim \frac{1}{250} \quad (233)$$

► 実際には、逆プロセス ($\ell + \phi \rightarrow N$) や L -violation による wash-out (lepton asymmetry を減らす効果)

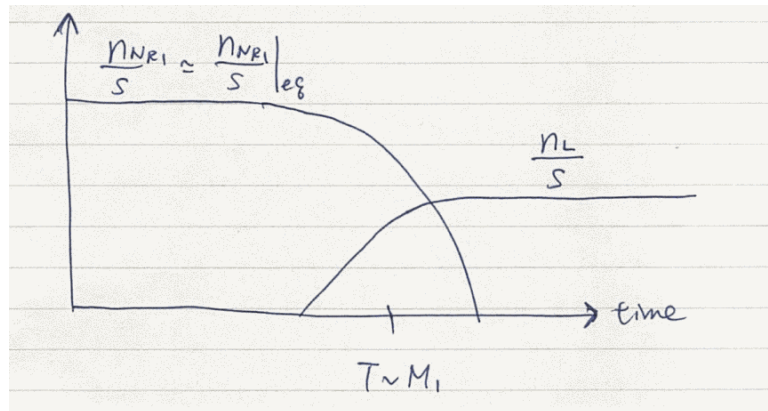


などを取り入れた Boltzmann 方程式 を解く必要がある：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} n_L = \dots \\ \frac{d}{dt} n_{N_{R1}} = \dots \end{cases} \quad \text{を連立させる} \quad (234)$$

詳しくはレビュー論文 [[arXiv:0802.2962](#)]などを参照。(この講義で扱っていない flavor effect などの要素もある。さらに Boltzmann 方程式ではなく density matrix equation での扱いが必要な場合もある。)

► 時間発展の例 (パラメータ次第でもっと複雑な時間発展も)



► 今は便利な public code 「ULYSSES」 もある。

– 2007.09150 (v1)~2605.16540 (v3)

– [GitHub](#)

► 数値計算によると、naive な式 (230) より減って

$$\frac{n_B}{s} = \underbrace{\kappa}_{\text{suppression factor}} \times \underbrace{\left. \frac{n_{N_{R1}}}{s} \right|_{\text{eq}}}_{\simeq 1/250} \times \underbrace{\frac{n_L}{n_{N_{R1}}}}_{= \epsilon_1} \times \underbrace{\frac{n_B}{n_L}}_{\simeq 0.35} \quad (235)$$

となる。 κ は数値計算で求まり、

$$\left. \frac{\Gamma_{N_{R1}}}{H} \right|_{T=M_1} \begin{cases} \simeq 1 & \text{のとき最大値をとり} \\ \gg 1 \text{ または } \ll 1 & \text{のとき} \end{cases} \quad \kappa \lesssim 0.2 \quad (236)$$

► § 6.4 で求めた ϵ_1 ((228)) を代入すると、thermal leptogenesis では ($M_1 \ll M_2, M_3$ 、かつ flavor effect など除くと)

$$\frac{n_B}{s} \simeq 3 \times 10^{-11} \underbrace{\left(\frac{\kappa}{0.2} \right)}_{\lesssim 1} \left(\frac{M_1}{10^9 \text{ GeV}} \right) \underbrace{\left(\frac{m_{\nu_3}}{0.05 \text{ eV}} \right)}_{\simeq 1} \underbrace{\delta_{\text{eff}}}_{\leq 1} \quad (237)$$

となる。

観測値 $n_B/s|_{\text{obs}} \simeq 9 \times 10^{-11}$ を説明するには、

$$\begin{aligned} M_1 &\gtrsim O(10^9) - O(10^{10}) \text{ GeV} \quad \text{が必要} \\ \Rightarrow N_{R1} &\text{が熱浴に入るには } T > M_1 \gtrsim 10^{9 \sim 10} \text{ GeV} \\ \Rightarrow \text{reheating 温度 } T_R &\gtrsim 10^{9 \sim 10} \text{ GeV} \quad \text{が必要} \end{aligned} \quad (238)$$

§ 7 大統一理論 (GUT)

ここでは、大統一理論 (Grand Unified Theory, GUT)について紹介する。

予備知識：non-Abelian ゲージ理論、群論（少し）、標準模型。

§ 7.1 標準模型の復習

§ 7.2 GUT

§ 7.3 $SU(5)$ の表現

§ 7.4 ゲージボソン

§ 7.5 ゲージ結合定数の統一

§ 7.6 その他のコメント

参考文献：

- ▶ 教科書：S. Raby, “Supersymmetric Grand Unified Theories” (Springer)
- ▶ レビュー：R.N. Mohapatra, [arXiv:hep-ph/9911272](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9911272)

§ 7.1 標準模型の復習

標準模型のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \sum_{\text{matters}} \bar{\Psi} i \gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{1}{4} \sum_{\text{gauge bosons}} F_{\mu\nu}^{(a)} F^{(a)\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Higgs, Yukawa}} \quad (239)$$

という形をしている。共変微分は

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu - ig A_\mu^{(a)} T^{(a)} \right) \Psi, \quad T^{(a)} : \text{生成子 (行列)} \quad (240)$$

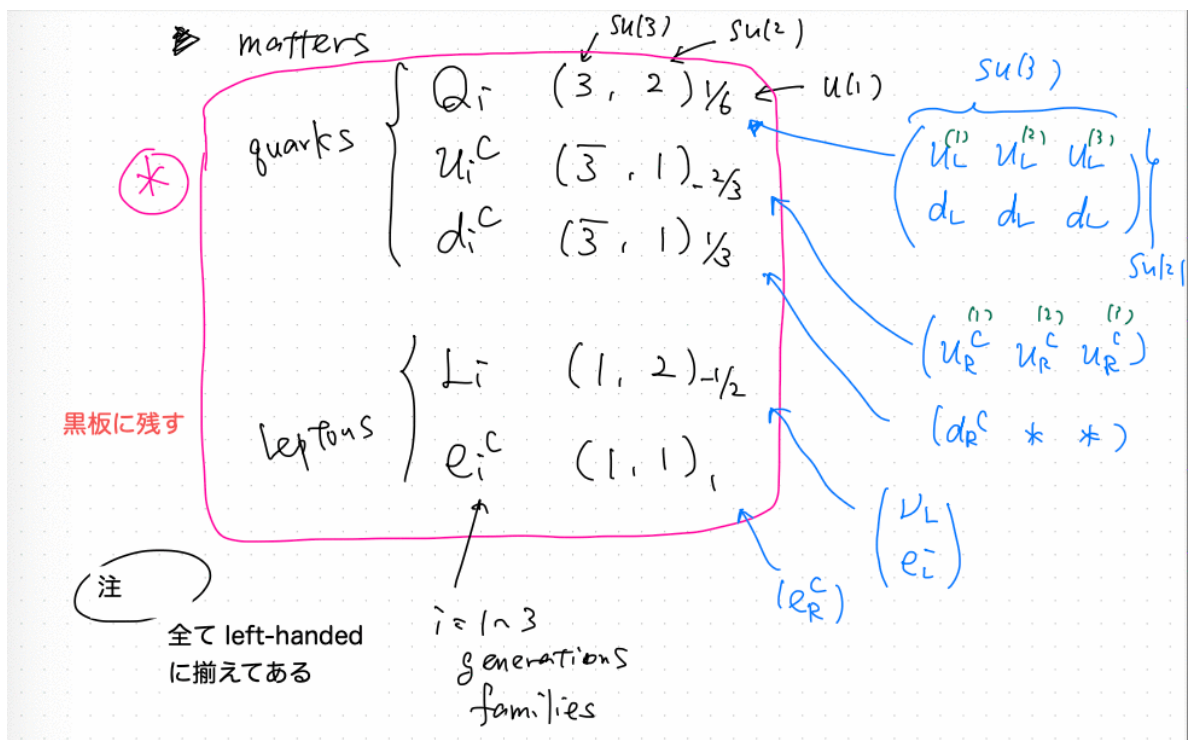
- ▶ ゲージ群は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ で、対応するゲージボソンは

ゲージ群	ゲージボソン	
$SU(3)$	$G_\mu^{1\sim 8}$	グルーオン
$SU(2)$	$W_\mu^{1\sim 3}$	} Higgs 機構 $\rightarrow W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu$ (光子)
$U(1)$	B_μ	

- ▶ matter (フェルミオン) の量子数は、全て left-handed に揃えて書くと

		$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)_Y$
quarks	Q_i	3	2	$1/6$
	u_i^c	$\bar{3}$	1	$-2/3$
	d_i^c	$\bar{3}$	1	$1/3$
leptons	L_i	1	2	$-1/2$
	e_i^c	1	1	1

表1 標準模型フェルミオンの量子数



ただし $i = 1 \sim 3$ は世代 (generations, families) のラベル。 (u_i^c, d_i^c, e_i^c は、右巻き場の荷電共役をとって左巻きにしたもの。)

§ 7.1.1 ゲージ変換と共変微分の例

具体的に、標準模型の3つのゲージ群それぞれについて、ゲージ変換とそこから出てくる相互作用を見ておこう。

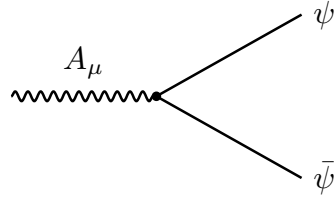
例①：U(1) ゲージ変換

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi \quad (241)$$

このとき

$$\mathcal{L} \supset i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \supset e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (242)$$

という相互作用が出てくる。



例②：SU(2) ゲージ変換

SU(2) なので $2^2 - 1 = 3$ 個の生成子と3つのゲージボソンがいる。

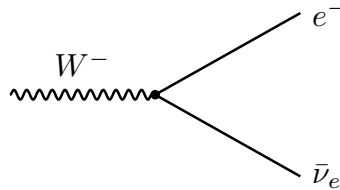
$L_1 = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$ に対する SU(2) ゲージ変換は

$$L_1 \xrightarrow{\text{SU(2) ゲージ変換}} \exp \left[-i \sum_{a=1}^3 \lambda^a(x) \left(\frac{1}{2} \sigma^a \right) \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad (243)$$

(σ^a は 2×2 の Pauli 行列、 $\lambda^a(x)$ は変換パラメータ。)。このとき

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset i\bar{L}_1\gamma^\mu D_\mu L_1 &= i(\bar{\nu}_e, \bar{e})\gamma^\mu \left[\partial_\mu - ig_2 \sum_{a=1}^3 W_\mu^a \left(\frac{1}{2} \sigma^a \right) \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \\ &\supset \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 (W_\mu^- \bar{e}\gamma^\mu \nu_e + W_\mu^+ \bar{\nu}_e\gamma^\mu e), \quad W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \end{aligned} \quad (244)$$

という相互作用が出てくる。



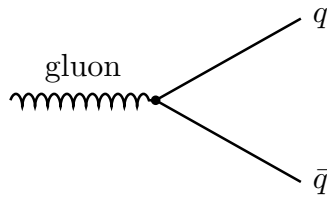
例③： $SU(3)$ ゲージ変換

$SU(3)$ なので $3^2 - 1 = 8$ 個の生成子と 8 つのゲージボソンがいる。

クォーク $q = (q_G, q_B, q_R)^T$ (色 G, B, R の 3 成分) に対する $SU(3)$ ゲージ変換から

$$\mathcal{L} \supset i\bar{q}\gamma^\mu D_\mu q = i(\bar{q}_G, \bar{q}_B, \bar{q}_R)\gamma^\mu \left[\partial_\mu - ig_3 \sum_{a=1}^8 G_\mu^a T^a \right] \begin{pmatrix} q_G \\ q_B \\ q_R \end{pmatrix} \quad (245)$$

という相互作用が出てくる (T^a は 3×3 の Gell-Mann 行列)。



このように、標準模型では

→ 3 つの独立なゲージ群 $SU(3), SU(2), U(1)$

→ クォーク・レプトンの量子数がバラバラ

という状況になっている。

→ 何か統一的な見方はできないだろうか？

§ 7.2 GUT

► GUT の条件：大統一理論のゲージ群として、

① $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を部分群に持つ

② [表 1](#) を表現として含む

を満たすような群 G を考えよう。

► 条件①より、 G は少なくとも

$$\underbrace{T_3, T_8}_{SU(3)}, \quad \underbrace{\sigma_3}_{SU(2)}, \quad \underbrace{Y}_{U(1)} \quad (246)$$

の 4 つの可換な生成子 (カルタン部分代数の元) を含む必要がある。すなわち

$$\text{rank}(G) \geq 4. \quad (247)$$

- コンパクトな単純 Lie 群で rank = 4 のものは、以下の 5 つしかない：

$$SU(5), \quad SO(8), \quad SO(9), \quad Sp(8), \quad F_4. \quad (248)$$

このうち $SO(8), SO(9), Sp(8), F_4$ は複素表現を持たないため、(カイラルなフェルミオンを含む)条件②を満たせない。そこ最も単純な大統一理論の候補として $SU(5)$ を考える。

§ 7.3 $SU(5)$ の表現

- $SU(5)$ の基本表現 (fundamental representation) は $\mathbf{5}$ 表現である。まず、表 1 の matter のうち、 $SU(3) \times SU(2)$ 表現の次元が「足して 5」になる組み合わせを探すと、

$$u^c + L \quad \text{または} \quad d^c + L \quad (249)$$

の 2 通りしかない。

- $u^c + L$ の場合：

$$(\bar{\mathbf{3}}, 1)_{-2/3} \oplus (1, 2)_{-1/2} \quad (250)$$

の $U(1)$ 電荷を 5×5 行列で書くと

$$Y \begin{pmatrix} u^c \\ L \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} -\frac{2}{3} & & & & \\ & -\frac{2}{3} & & & \\ \hline & & -\frac{2}{3} & & \\ & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u^c \\ L \end{pmatrix} \quad (251)$$

これは traceless (トレースレス) でないので、 $SU(5)$ の生成子 (トレースレスな行列) としては使えない。 $SU(5)$ 表現に含まれない。

- $d^c + L$ の場合：

$$(\bar{\mathbf{3}}, 1)_{1/3} \oplus (1, 2)_{-1/2} = \bar{\mathbf{5}} \text{ rep in } SU(5) \quad (252)$$

これは実際に traceless になり、 $SU(5)$ の $\bar{\mathbf{5}}$ 表現として埋め込める：

$$\begin{pmatrix} d^c \\ L \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{gauge 変換}} \exp \left[-i \sum_{a=1}^{24} \lambda^a(x) \left(T_{SU(5)}^a \right)^* \right] \begin{pmatrix} d^c \\ L \end{pmatrix} \quad (253)$$

$SU(5)$ なので $5^2 - 1 = 24$ 個の生成子と 24 個のゲージボソンがいる。

ただし $T_{SU(5)}^a$ は

$$\begin{aligned}
T_{SU(5)}^a = & \underbrace{\begin{pmatrix} T_{SU(3)}^{1\sim 8} & \\ & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{SU(3)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{1}{2}\sigma_{SU(2)}^{1\sim 3} \end{pmatrix}}_{SU(2)} + \sqrt{\frac{3}{5}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & -\frac{1}{2} \\ & & & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{U(1)} \\
& + \underbrace{\begin{pmatrix} & & & * & * \\ & & & * & * \\ & & & * & * \\ * & * & * & & \\ * & * & * & & \end{pmatrix}}_{\text{残り 12 個の生成子 (X,Y)} \quad (254)
\end{aligned}$$

と分解できる。 ($U(1)$ 生成子の係数 $\sqrt{3/5}$ は規格化 $\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ による。)

► 残りの matter も、

$$Q + u^c + e^c = (3, 2)_{1/6} \oplus (\bar{3}, 1)_{-2/3} \oplus (1, 1)_1 = \mathbf{10} \text{ rep of } SU(5) \quad (255)$$

としてまとまる。すなわち

$$Q + u^c + d^c + L + e^c = \bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10} \text{ in } SU(5) \quad (256)$$

1 世代分の標準模型フェルミオンが、 $SU(5)$ の $\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$ 表現に過不足なくきれいに収まる（量子数がぴったり一致する）。

§ 7.4 ゲージボゾン

► $SU(5)$ なので $5^2 - 1 = 24$ 個のゲージボゾンがいる。 $SU(5)$ の随伴表現 (adjoint rep., ゲージボゾン) は $\mathbf{24}$ 次元で、

$$\underbrace{\mathbf{24}}_{A_\mu^{1\sim 24}} = \underbrace{(8, 1)_0}_{G_\mu^{1\sim 8}} \oplus \underbrace{(1, 3)_0}_{W_\mu^{1\sim 3}} \oplus \underbrace{(1, 1)_0}_{B_\mu} \oplus \underbrace{(3, 2)_{-5/6} \oplus (\bar{3}, 2)_{5/6}}_{X, Y \text{ bosons}} \quad (257)$$

つまり $SU(5)$ の 24 個のゲージボゾンは標準模型の $8 + 3 + 1$ 個のゲージボゾンを含む。
残り 12 個の

$$(3, 2)_{-5/6} \oplus (\bar{3}, 2)_{5/6} \quad (258)$$

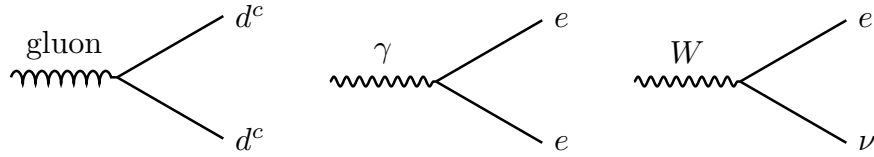
は新しいゲージボゾン (X, Y ボゾン) で、 $SU(5)$ の破れに伴って重くなる。

(GUT の破れの起源／機構についてはここでは議論しない。§ 7.6.2 の陽子崩壊や § 7.6.3 の Doublet-Triplet 問題と関連して、様々な模型／シナリオが提案されている。)

► 共変微分は例えば

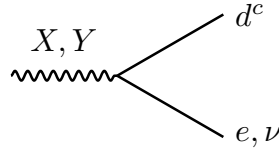
$$D_\mu \begin{pmatrix} d^c \\ L \end{pmatrix} = \left[\partial_\mu - ig_5 \sum_{a=1}^{24} A_\mu^a T_{SU(5)}^a \right] \begin{pmatrix} d^c \\ L \end{pmatrix} \quad (259)$$

であり、この中には



のように標準模型のゲージ相互作用が全て含まれている。

さらに重い X, Y ボゾンを介した



のようなクォークとレプトンを変換させる新しい相互作用も予言される。これは後述の陽子崩壊を引き起こす。

§ 7.5 ゲージ結合定数の統一

$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の運動項の規格化を、 $A_\mu \rightarrow \frac{1}{g}A_\mu$ の場の再定義によって $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ という形にとると、

$$\mathcal{L} \supset \frac{1}{g_{GUT}^2} \sum_{a=1}^{24} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = \frac{1}{g_3^2} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{g_2^2} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} + \frac{1}{g_1^2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (X, Y \text{ ボゾンの項}) \quad (260)$$

となり、GUT スケール (= $SU(5)$ が破れるスケール) では

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_{GUT} \quad @ \text{ unification scale} \quad (261)$$

となっているはずである。

実際に低エネルギーから繰り込み群方程式 (RGE) でゲージ結合定数を走らせて (running) 確認してみよう。1-loop の RGE は

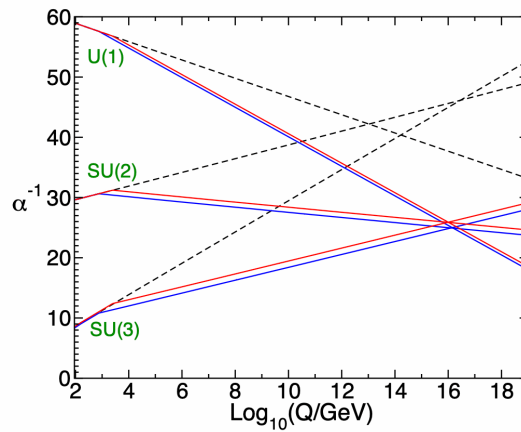
$$\frac{d}{d \ln \mu} \alpha_i^{-1}(\mu) = -\frac{1}{2\pi} b_i, \quad \alpha_i \equiv \frac{g_i^2}{4\pi} \quad (i = 1 \sim 3) \quad (262)$$

で与えられる。入力 ($\mu = M_Z$ での値) と、標準模型 (SM)・最小超対称標準模型 (MSSM) それぞれでの 1-loop 係数 b_i は

	INPUT $\alpha_i(\mu = M_Z)$	b_i^{SM}	b_i^{MSSM}
$SU(3)$	$\alpha_3(M_Z) \simeq 0.118$	-7	-3
$SU(2)$	$\alpha / \sin^2 \theta_W$	$-19/6$	$+1$
$U(1)$	$\frac{5}{3} \alpha_Y = \frac{5}{3} \frac{\alpha}{\cos^2 \theta_W}$	$+41/10$	$+33/5$

ただし $\alpha(M_Z) \simeq 1/128$, $\sin^2 \theta_W \simeq 0.231$ 。 ($U(1)$ の規格化に $5/3$ がかかっているのは、§ 7.3 節の $SU(5)$ への埋め込みでの $\sqrt{3/5}$ の規格化と対応している。)

これを使って RGE を解いて $\alpha_i^{-1}(\mu)$ をプロットすると、



S.P.Martin のレビュー hep-ph/9709356 より。

“Coupling Unification” → これは SUSY GUT の強い motivation の 1 つ。

§ 7.6 その他のコメント

§ 7.6.1 $SO(10)$ と右巻きニュートリノ

$SU(5)$ をさらに $SO(10)$ に拡張すると、

$$\underbrace{Q + u^c + d^c + L + e^c}_{\mathbf{\bar{5}} + \mathbf{10} \text{ in } SU(5)} + N_R = \mathbf{16} \text{ (spinor 表現) of } SO(10) \quad (263)$$

のように、 $SU(5)$ の singlet (= 標準模型の singlet) である右巻きニュートリノ N_R まで含めて、1 世代分のフェルミオンが $SO(10)$ のひとつのスピンル表現 $\mathbf{16}$ に統一される。

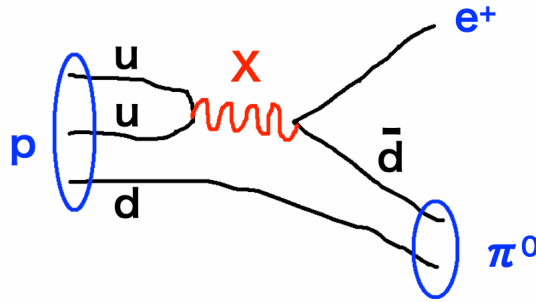
→ この右巻きニュートリノ N_R は seesaw 機構 (§ 5) や leptogenesis (§ 6) の主役。

§ 7.6.2 陽子崩壊

§ 7.4 節で見た X, Y ボゾンを介した相互作用

$$(\bar{d}^c \bar{L}) D_\mu \begin{pmatrix} d^c \\ L \end{pmatrix} \supset (\bar{d}^c \bar{L}) \begin{pmatrix} X, Y \\ X, Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^c \\ L \end{pmatrix} \quad (264)$$

により、クォークとレプトンが直接転換できる。これによって、陽子の中のクォーク同士が X または Y ボゾンを交換して反応し、



$$p \rightarrow e^+ \pi^0 \quad (265)$$

のような陽子崩壊が引き起こされる。崩壊率は

$$\Gamma \sim \left(\frac{g^2}{m_X^2} \right)^2 m_p^5 \quad (266)$$

程度が予言となる。（陽子崩壊が観測されていないことから、GUT スケールや、GUT 模型（特に SUSY-GUT）に強い制限がついている。）

§ 7.6.3 Doublet-Triplet Splitting 問題

標準模型の Higgs 二重項 H ($SU(2)$ の $\mathbf{2}$) は、 $SU(5)$ では

$$\mathbf{5}_H = \begin{pmatrix} H_c \\ H \end{pmatrix} \quad (267)$$

という $\mathbf{5}$ 表現の一部として埋め込まれる。ここで H_c は colored Higgs ($SU(3)$ の $\mathbf{3}$ を持つ Higgs) である。

標準模型の Higgs 質量は $m_H \sim 100\text{GeV}$ だが、 H_c を介した陽子崩壊を避けるためには

$$m_{H_c} \gtrsim 10^{16} \text{ GeV} \quad (268)$$

程度に重くなければならない。同じ $SU(5)$ 表現 $\mathbf{5}_H$ に入っている H と H_c の質量が

$$m_H \sim 100 \text{ GeV} \ll m_{H_c} (\gtrsim 10^{16} \text{ GeV}) \quad (269)$$

と極端に違うことを説明するには、著しい fine-tuning が必要になる。これを Doublet-Triplet Splitting 問題 と呼ぶ。(SUSY, non-SUSY とともに、様々な模型が提案されている...。)

付録 A 場の量子論入門

A.1 はじめに

ここでは、場の量子論の基礎的な内容について紹介します。内容としては、2019 年の私の講義から一部を抜粋して講義を行っていく予定です。

A.1.1 色々な場、標準模型

		スピン	自由場の運動方程式	
スカラー場	$\phi(x)$	0	$(\square + m^2)\phi = 0$	Klein-Gordon eq.
フェルミオン場	$\psi_\alpha(x)$	1/2	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$	Dirac eq.
ゲージ場 (ベクトル場)	$A_\mu(x)$	1	$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ $(F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$	Maxwell eq. (の一部)

素粒子の標準模型も場の量子論で記述されている。

- ▶ クォーク (u, d, s, c, b, t) とレプトン (e, μ, τ, ν_i)... フェルミオン場
- ▶ γ (光子), $W^\pm, Z$ (weak bosons), g (グルーオン) ... ゲージ場 (ベクトル場)
- ▶ H (Higgs) ... スカラー場

この節では、主にスカラー場について扱う。

A.1.2 量子力学と場の量子論

場の量子論は、量子力学の一種。場に対して量子力学を適用したもの。

- ▶ 量子力学: $q_i(t)$ ラベル $i = 1, 2, \dots$ は離散的
- ▶ 場の量子論: $\phi(\vec{x}, t)$ ($\phi_{\vec{x}}(t)$ と書いても良い。) $\vec{x}$ は連続的 (自由度が無限個)

	量子力学	場の量子論
演算子 (ハイゼンベルグ描像)	$q_i(t), p_i(t)$ or $q_i(t), \dot{q}_i(t)$ $i = 1, 2, \dots$ 離散的 $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$	$\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}, t)$ or $\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t)$ $\vec{x} \dots$ 連続的 $[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
状態	(例: 調和振動子) $ 0\rangle$: 基底状態 $a^\dagger 0\rangle, a^\dagger a^\dagger 0\rangle, \dots$ $a^\dagger$ は q と p で書かれている	$ 0\rangle$: 基底状態 $a_{\vec{p}}^\dagger 0\rangle, a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger 0\rangle, \dots$ $a_{\vec{p}}^\dagger$ は ϕ と π で書かれている
観測量 (期待値)	$\langle \cdot \vec{p} \cdot \rangle, \langle \cdot H \cdot \rangle, \dots$	$\langle \cdot \vec{p} \cdot \rangle, \langle \cdot H \cdot \rangle, \dots$
遷移確率	$P(i \rightarrow f) = \langle f i \rangle ^2$	$P(i \rightarrow f) = \langle f i \rangle ^2$

ここでは相対論的な場の量子論を考える。

(場の量子論自体は、物性で非相対論的な系でも広く使われている。)

相対論的な場の量子論は、量子力学と特殊相対論に基づいている

▶ 量子力学: $\hbar \neq 0$ (空間的に小さなスケールで重要)

▶ 特殊相対論: $c < \infty$ (速度が大きいときに重要)

▶ 場の量子論: $\hbar \neq 0$ and $c < \infty$

(スケールが小さくかつ速度が大きいような状況で重要: 素粒子物理、初期宇宙...)

A.1.3 Notation, convention

▶ 自然単位系を用いる。

$$\hbar = c = 1, \quad \begin{cases} \hbar & \simeq 1.055 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1}, \\ c & = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}. \end{cases} \quad (270)$$

例えば

– $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ ではなく $E^2 = p^2 + m^2$ 、とか

– $[x, p] = i\hbar$ ではなく $[x, p] = i$ 、

のように書く。

► 以下の計量 (metric) を用いる

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (271)$$

$g_{\mu\nu}$ は 4×4 行列で、 $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ 。それ以外はゼロ。

符号は教科書によって違うので注意。 $g_{\mu\nu}(\text{here}) = g_{\mu\nu}^{\text{Peskin}} = -g_{\mu\nu}^{\text{Srednicki}}$

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}) \quad (272)$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\vec{x}) \quad (273)$$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \vec{p}) \quad (274)$$

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = (E, -\vec{p}) \quad (275)$$

$$\begin{aligned} p \cdot x &= p_\mu x^\mu = p^\mu x_\mu \\ &= p^0 x^0 - p^1 x^1 - p^2 x^2 - p^3 x^3 \\ &= p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x} \end{aligned} \quad (276)$$

$$= Et - \vec{p} \cdot \vec{x} \quad (277)$$

(繰り返しの足は和を取る。したがって $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ と書いたときは $x_\mu = \sum_{\nu=0,1,2,3} g_{\mu\nu}x^\nu$

という意味。例えば $\mu = 1$ とすると、 $x_1 = \sum_{\nu=0,1,2,3} g_{1\nu}x^\nu = g_{11}x^1 = -x^1$ となる。)

p^μ が質量 m を持つ粒子の 4 元運動量であるとき、

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 \quad (278)$$

$$= m^2. \quad (279)$$

A.1.4 (無限に) 多い粒子のヒルベルト空間とハミルトニアン

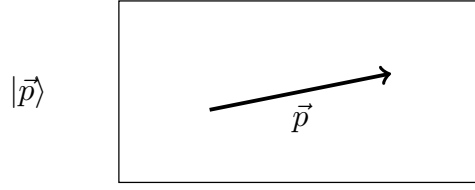
► 質量 m を持つスカラー粒子を考える。



運動量 $\vec{p}$

$$\text{エネルギー } E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

► 運動量 $\vec{p}$ を持つ 1 粒子状態を考えよう。



これはエネルギーが一定の状態で、ハミルトニアンの固有状態。

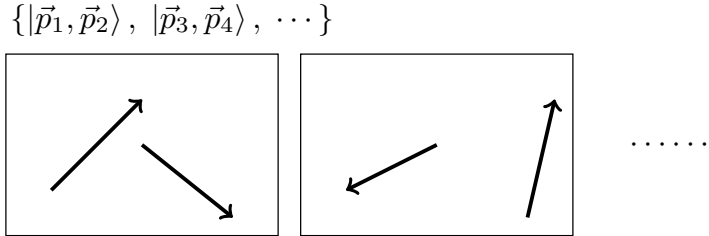
$$H |\vec{p}\rangle = E_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} |\vec{p}\rangle. \quad (280)$$

► もっとたくさんの（無限の）1 粒子状態をヒルベルト空間（状態空間）に含めたい。

$$\begin{aligned} & \{|\vec{p}_1\rangle, |\vec{p}_2\rangle, |\vec{p}_3\rangle, \dots\} \\ & H |\vec{p}_i\rangle = E_i |\vec{p}_i\rangle, \quad E_i = \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (281)$$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & H & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\vec{p}_1\rangle \\ |\vec{p}_2\rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\vec{p}_1\rangle \\ |\vec{p}_2\rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (282)$$

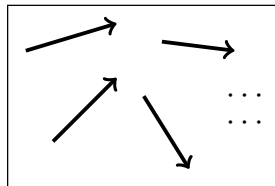
► さらに 2 粒子状態も含めたい。



$$\begin{aligned} H |\vec{p}_i, \vec{p}_j\rangle &= (E_i + E_j) |\vec{p}_i, \vec{p}_j\rangle \\ &= \left(\sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m^2} + \sqrt{|\vec{p}_j|^2 + m^2} \right) |\vec{p}_i, \vec{p}_j\rangle. \end{aligned} \quad (283)$$

► さらに 3 粒子、4 粒子、、、 n 粒子状態も。

$$\begin{aligned} & \{|\vec{p}_i, \vec{p}_j, \vec{p}_k\rangle, \dots |\vec{p}_1, \dots \vec{p}_n\rangle, \dots\} \\ & H |\vec{p}_1, \dots \vec{p}_n\rangle = (E_1 + \dots + E_n) |\vec{p}_1, \dots \vec{p}_n\rangle \end{aligned} \quad (284)$$



- これら全ての状態を同じヒルベルト空間で扱いたい。

$$\begin{pmatrix} H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\vec{p}_1\rangle \\ \vdots \\ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \\ \vdots \\ |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_1 + E_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sum_i^n E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\vec{p}_1\rangle \\ \vdots \\ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \\ \vdots \\ |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (285)$$

相互作用があると、この行列の非対角成分がゼロでなくなって、状態どうしの遷移（粒子どうしの散乱とか、粒子の崩壊とか）が起きる。

- このヒルベルト空間と (285) 式のハミルトニアンは、以下のように生成消滅演算子を用いるとずっと簡単に記述できる。

$$|\vec{p}\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle, \quad (286)$$

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle, \quad (287)$$

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger \cdots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle, \quad (288)$$

$$H = \int \widetilde{d\vec{q}} E_q a_q^\dagger a_{\vec{q}}, \quad \text{where } \boxed{\widetilde{d\vec{q}} = \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q}}. \quad (289)$$

ここで、 $a_{\vec{p}}^\dagger$ and $a_{\vec{p}}$ は生成消滅演算子で、以下を満たすものとする。

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger - a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (290)$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = 0, \quad (291)$$

$$[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0, \quad (292)$$

$$|0\rangle : \text{真空状態 (基底状態)}, \quad a_{\vec{p}} |0\rangle = 0. \quad (293)$$

► 確認してみよう。

$$H |0\rangle = \int \widetilde{d\vec{q}} E_{\vec{q}} a_{\vec{q}}^{\dagger} \underbrace{a_{\vec{q}}}_{\text{blue}} |0\rangle = 0 \quad (294)$$

$$\begin{aligned} [H, a_{\vec{p}}^{\dagger}] &= \int \widetilde{d\vec{q}} E_{\vec{q}} [a_{\vec{q}}^{\dagger} a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}] \\ &= \int \widetilde{d\vec{q}} E_{\vec{q}} a_{\vec{q}}^{\dagger} [a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}] \\ &= \int \widetilde{d\vec{q}} E_{\vec{q}} a_{\vec{q}}^{\dagger} \cdot \underbrace{(2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p})}_{\text{blue}} \\ &= E_p a_{\vec{p}}^{\dagger} \end{aligned} \quad (295)$$

$$\therefore H a_{\vec{p}}^{\dagger} = a_{\vec{p}}^{\dagger} (E_p + H) \quad (296)$$

$$\begin{aligned} \therefore H (a_{\vec{p}_1}^{\dagger} a_{\vec{p}_2}^{\dagger} \cdots a_{\vec{p}_n}^{\dagger}) |0\rangle &= a_{\vec{p}_1}^{\dagger} (E_1 + H) a_{\vec{p}_2}^{\dagger} \cdots a_{\vec{p}_n}^{\dagger} |0\rangle \\ &= a_{\vec{p}_1}^{\dagger} a_{\vec{p}_2}^{\dagger} (E_1 + E_2 + H) a_{\vec{p}_3}^{\dagger} \cdots a_{\vec{p}_n}^{\dagger} |0\rangle \\ &= \cdots \\ &= a_{\vec{p}_1}^{\dagger} a_{\vec{p}_2}^{\dagger} \cdots a_{\vec{p}_n}^{\dagger} \underbrace{(H)}_{\rightarrow 0} + E_1 + \cdots + E_n |0\rangle \end{aligned} \quad (297)$$

$$H |\vec{p}_1, \cdots \vec{p}_n\rangle = (E_1 + \cdots + E_n) |\vec{p}_1, \cdots \vec{p}_n\rangle \quad (298)$$

► したがって、(285) 式の状態とハミルトニアンは、以下のようにずっと簡単に書ける。

$$|\vec{p}_1, \cdots \vec{p}_n\rangle = a_{\vec{p}_1}^{\dagger} \cdots a_{\vec{p}_n}^{\dagger} |0\rangle, \quad (299)$$

$$H = \int \widetilde{d\vec{q}} E_{\vec{q}} a_{\vec{q}}^{\dagger} a_{\vec{q}} \quad (300)$$

A.2 で見るように、これらの状態ベクトルとハミルトニアンは、自由スカラー場の場の量子論から導ける。

► ところで、、、この表式は量子力学の調和振動子のときと良く似ている！

$$H = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + a^{\dagger} a \right) \quad (301)$$

A.1.5 調和振動子と場の量子論

► 量子力学の調和振動子を思い出そう。以下のラグランジアンから始める。

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (\dot{q} = dq/dt). \quad (302)$$

共役運動量とハミルトニアンは

$$p = \frac{dL}{d\dot{q}} = m\dot{q}, \quad (303)$$

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p\dot{q} - L \\ &= \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \end{aligned} \quad (304)$$

q, p を演算子 $\hat{q}, \hat{p}$ と置き換えて、正準量子化する。

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (305)$$

演算子 $\hat{q}, \hat{p}$ とハミルトニアン $\hat{H}$ は生成消滅演算子を用いて表すこともできる。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \quad (306)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad (307)$$

とすると

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{q}^2 \\ &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (308)$$

さらに

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad \Longleftrightarrow \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (309)$$

基底状態、励起状態は

$$\text{基底状態: } |0\rangle, \quad \hat{a}|0\rangle = 0, \quad \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle, \quad (310)$$

$$\text{励起状態: } |n\rangle \propto (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \quad \hat{H}|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle. \quad (311)$$

► 複数の調和振動子があるときは

$$L = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 q_i^2 \right), \quad (312)$$

$$p_i = \frac{dL}{d\dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i, \quad (313)$$

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \iff [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (314)$$

$$\text{where } \hat{a}_i = \sqrt{\frac{m_i \omega_i}{2\hbar}} \left(\hat{q}_i + \frac{i}{m_i \omega_i} \hat{p}_i \right), \quad (315)$$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (316)$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_i \left(\frac{1}{2m} \hat{p}_i^2 + \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 \hat{q}_i^2 \right) \\ &= \hbar \omega \sum_i \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (317)$$

$$\text{基底状態: } |0\rangle, \quad \hat{a}_i |0\rangle = 0, \quad (318)$$

$$\text{励起状態: } |n_1, n_2, \dots\rangle \propto (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle, \quad (319)$$

$$\hat{H} |n_1, n_2, \dots\rangle = \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega. \quad (320)$$

► A.2 で見るように、場の量子論は無限に多い調和振動子の量子力学であるということもできる。

► ただし一つ大きな違いがあって、量子力学の調和振動子では

$$(a^\dagger)^n |0\rangle \quad (321)$$

は (1 粒子状態の) n 番目の励起状態であったが、場の量子論の

$$(a_{\vec{p}_1}^\dagger)^n |0\rangle \quad (322)$$

は n 粒子状態を表す。

一般に場の量子論での n 粒子状態は

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle \quad (323)$$

と表される。

A.2 自由スカラー場

実 スカラー 場 $\phi(x)$ を考える。

- ▶ 実: $\phi(x)^\dagger = \phi(x)$ (エルミート演算子)。
(エルミート演算子の定義は省略します。大雑把には複素共役みたいなもの。)
- ▶ スカラー: $\phi(x)$ のローレンツ変換は $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$
(ローレンツ変換についても省略します。例えば[こちらの講義ノート](#)に説明があります。)

A.2.1 自由スカラー場のラグランジアンと正準量子化

量子力学 (QM) ではラグランジアン

$$L = L(\dot{q}, q) \quad \dot{} = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (324)$$

を考えた。場の量子論 (QFT) でもラグランジアン

$$L = \int d^3x \underbrace{\mathcal{L}[\dot{\phi}(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}, t)]}_{\text{ラグランジアン密度}} \quad (325)$$

を考える。自由スカラー場の場合は

$$\begin{aligned} L = L_{\text{free}} &= \int d^3x \mathcal{L}[\dot{\phi}(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}, t)] \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \end{aligned} \quad (326)$$

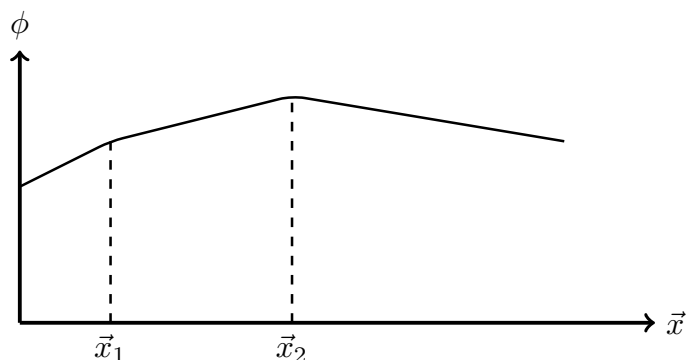
ここで m はスカラー粒子の質量であり、

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \left(\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (327)$$

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \phi \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \phi \right)^2 = \dot{\phi}^2 - \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi. \quad (328)$$

$\vec{x}$ を単なるラベルと思うと、、、

$$\phi(\vec{x}, t) = \{ \phi_{\vec{x}_1}(t), \phi_{\vec{x}_2}(t), \dots \} \quad (329)$$



無限自由度の QM

$$L = \sum_{\vec{x}} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}_{\vec{x}}(t)^2 + \dots \right)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_i \frac{1}{2} \dot{q}_i(t)^2 + \dots$$

	QM	QFT
共役運動量	$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} = \dot{\phi}(\vec{x}, t) \quad (\text{汎関数微分})$
ハミルトニアン	$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$	$H = \int d^3x \left(\pi(\vec{x}, t) \dot{\phi}(\vec{x}, t) - \mathcal{L} \right)$ $= \int d^3x \left(\pi^2 - \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$ $= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$
正準量子化 同時刻交換関係	$[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij}$ $[q_i(t), q_j(t)] = 0$ $[p_i(t), p_j(t)] = 0$	$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ $[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0$ $[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = 0$ ↑ 同時刻

コメント

(i) シュレディンガー表示とハイゼンベルグ表示

QFT では通常ハイゼンベルグ表示を用いる。

	状態	演算子
シュレディンガー表示	$ \Psi(t)\rangle_S$ 時間に依存する	$\mathcal{O}_S$ 時間に依存しない
ハイゼンベルグ表示	$ \Psi\rangle_H$ 時間に依存しない	$\mathcal{O}_H(t)$ 時間に依存する

シュレディンガー表示

$$i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle_S = H(p, q)|\Psi(t)\rangle_S \quad (330)$$

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi(t_0)\rangle_S \quad (331)$$

$$\text{演算子の期待値: } {}_S\langle\Psi(t)|\mathcal{O}_S|\Psi(t)\rangle_S \quad (332)$$

ハイゼンベルグ表示

$$\begin{cases} |\Psi\rangle_H & \equiv |\Psi(t_0)\rangle_S = e^{iH(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_S \\ \mathcal{O}_H(t) & \equiv e^{iH(t-t_0)}\mathcal{O}_S e^{-iH(t-t_0)} \end{cases} \quad (333)$$

$$\text{演算子の期待値: } {}_H\langle\Psi|\mathcal{O}_H(t)|\Psi\rangle_H = \cdots = {}_S\langle\Psi(t)|\mathcal{O}_S|\Psi(t)\rangle_S \quad (334)$$

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\mathcal{O}_H(t) &= \left(-He^{iH(t-t_0)}\right)\mathcal{O}_S e^{-iH(t-t_0)} + e^{iH(t-t_0)}\mathcal{O}_S \left(He^{-iH(t-t_0)}\right) \\ &= -H\mathcal{O}_H(t) + \mathcal{O}_H(t)H \\ &= [\mathcal{O}_H(t), H]. \quad \text{ハイゼンベルグ方程式} \end{aligned} \quad (335)$$

A.2.2 運動方程式 (Equation of Motion, EOM)

- ▶ 作用原理 $\delta S = \delta \int dt L = 0$ より、ラグランジアン $L = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$ に対して

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \phi)} - \frac{\delta L}{\delta \phi} = \partial_\mu (\partial^\mu \phi) + m^2 \phi = 0 \quad (336)$$

あるいは $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$ を用いて

$$\text{EOM} \quad \boxed{(\square + m^2) \phi(x) = 0 \quad \text{Klein-Gordon 方程式}} \quad (337)$$

- ▶ さらにこれを用いてハイゼンベルグ方程式 (335)

$$\begin{cases} i\dot{\phi} = [\phi, H] \\ i\ddot{\phi} = [\dot{\phi}, H] \end{cases} \quad (338)$$

が成り立っていることも確認できる。 (証明略)

A.2.3 運動方程式の解

- $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ (Klein-Gordon eq.) の解 $\phi(x)$ は

$$\phi(x) = \int \widetilde{d\vec{p}} \left(a(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_p=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} \quad (339)$$

で与えられる。ただし $\phi(x)$, $a(\vec{p})$, $a^\dagger(\vec{p})$ は演算子で、

$$\widetilde{d\vec{p}} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}, \quad p \cdot x = p_\mu x^\mu = p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x}.$$

- 実際、(339) を EOM $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ の左辺に代入すると

$$(\square + m^2)\phi(x) = \int \widetilde{d\vec{p}} \left(a(\vec{p}) [(\square + m^2)e^{-ip \cdot x}] + a^\dagger(\vec{p}) [(\square + m^2)e^{ip \cdot x}] \right) \Big|_{p^0=E_p} \quad (340)$$

となり

$$\begin{aligned} (\square + m^2)e^{\pm ip \cdot x} &= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)e^{\pm ip \cdot x} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) e^{\pm ip \cdot x} \\ &= (-E_p^2 + \underbrace{\vec{p}^2 + m^2}_{E_p^2}) e^{\pm ip \cdot x} = 0. \end{aligned} \quad (341)$$

なので、確かに $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ が成り立つ。

- (フーリエ変換を使うなどして、(339) 式が EOM $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ の一般解になっていることも示せる。ここでは証明略。)
- (339) 式より、 $\phi(x)$ を用いて $a(\vec{p})$ と $a^\dagger(\vec{p})$ を表すこともできる。

$$\begin{cases} a(\vec{p}) = \int d^3x e^{+ip \cdot x} [i\dot{\phi}(x) + E_p \phi(x)] \\ a^\dagger(\vec{p}) = \int d^3x e^{-ip \cdot x} [-i\dot{\phi}(x) + E_p \phi(x)] \end{cases} \quad (342)$$

- (339)→(342) が成立することを示そう。

$$(339) \text{ より } \phi(x) = \int \widetilde{d\vec{q}} \left(a(\vec{q})e^{-iq \cdot x} + a^\dagger(\vec{q})e^{+iq \cdot x} \right) \quad (343)$$

$$i\dot{\phi}(x) = \int \widetilde{d\vec{q}} \left(E_q a(\vec{q})e^{-iq \cdot x} - E_q a^\dagger(\vec{q})e^{+iq \cdot x} \right) \quad (344)$$

$$i\dot{\phi}(x) + E_p \phi(x) = \int \widetilde{d\vec{q}} \left((E_q + E_p)a(\vec{q})e^{-iq \cdot x} + (-E_q + E_p)a^\dagger(\vec{q})e^{-iq \cdot x} \right) \quad (345)$$

よって

$$\begin{aligned}
(342) \text{ の右辺} &= \int \underbrace{d^3x e^{+ip \cdot x}} \int \widetilde{d\vec{q}} \left((E_q + E_p) a(\vec{q}) \underbrace{e^{-iq \cdot x}} + (-E_q + E_p) a^\dagger(\vec{q}) \underbrace{e^{+iq \cdot x}} \right) \\
&\quad \int d^3x e^{iE_p x^0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \cdot e^{-iE_q x^0} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \\
&= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \cdot e^{i(E_p - E_q)x^0} \quad (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) \cdot e^{i(E_p + E_q)x^0} \\
&= \int \frac{d^3q}{2E_q} \left((E_q + E_p) a(\vec{q}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \underbrace{(-E_q + E_p)}_{\rightarrow 0} a^\dagger(\vec{q}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) e^{i(E_p + E_q)x^0} \right) \\
&= a(\vec{p}) = (342) \text{ の左辺} \quad \blacksquare
\end{aligned} \tag{346}$$

▶ (逆に (342) → (339) も示せる。証明略。)

A.2.4 a と $a^\dagger$ の交換関係

▶ A.2.1 の ϕ と $\pi (= \dot{\phi})$ の同時刻交換関係より a と $a^\dagger$ の交換関係も導ける。

$$\left\{ \begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] &= 0 \\ [\dot{\phi}(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] &= (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ [a(\vec{p}), a(\vec{q})] &= 0 \\ [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] &= 0 \end{aligned} \right. \tag{347}$$

- 右辺→左辺は (339) 式を用いて示せる。(省略。各自やってみましょう。)
- 左辺→右辺は (342) 式を用いて示せる。(省略。各自やってみましょう。)

A.2.5 ハミルトニアンを $a^\dagger$ と a で表す。

▶ ハミルトニアン

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \tag{348}$$

に (339) を代入して (頑張って) 計算すると、 (計算略、時間があれば講義中に概略を示すかも)

$$H = \int \widetilde{d\vec{q}} E_q a^\dagger(\vec{q}) a(\vec{q}) \quad (349)$$

が示せる。(ただし定数項は無視した。)

- ▶ これで、A.1.4 で予告した式のうちハミルトニアン (300) については再現できた。

A.2.6 $a^\dagger$ と a は生成消滅演算子

- ▶ この節では以下のことを見ていく。

$a(\vec{p})$ はエネルギー E_p で運動量 $\vec{p}$ の粒子を 1 つ消滅させる。

$a^\dagger(\vec{p})$ はエネルギー E_p で運動量 $\vec{p}$ の粒子を 1 つ生成する。

- ▶ まず最初に

$$\begin{cases} [H, a^\dagger(\vec{p})] &= E_p a^\dagger(\vec{p}) \\ [H, a(\vec{p})] &= -E_p a(\vec{p}) \end{cases} \quad (350)$$

を示す。

- ▶ ハミルトニアン (349) および $a, a^\dagger$ の交換関係 (347) より

$$\begin{aligned} [H, a^\dagger(\vec{p})] &= \left[\int \widetilde{d\vec{q}} E_q a^\dagger(\vec{q}) a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{p}) \right] \\ &= \int \widetilde{d\vec{q}} E_q a^\dagger(\vec{q}) [a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{p})] \\ &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2E_q} E_q a^\dagger(\vec{q}) (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ &= E_p a^\dagger(\vec{p}). \end{aligned} \quad (351)$$

$[H, a^\dagger(\vec{p})] = E_p a^\dagger(\vec{p})$ も同様に示せる。

- ▶ 同様にして運動量演算子 $\hat{\vec{P}}$ に対して

$$\begin{cases} [\hat{\vec{P}}, a^\dagger(\vec{p})] &= \vec{p} a^\dagger(\vec{p}) \\ [\hat{\vec{P}}, a(\vec{p})] &= -\vec{p} a(\vec{p}) \end{cases} \quad (352)$$

も示せる。ただし

$$\hat{\vec{P}} = - \int d^3 x \pi \vec{\nabla} \phi = \int \widetilde{d\vec{q}} \vec{q} a^\dagger(\vec{q}) a(\vec{q}) \quad (353)$$

である。(並進対称性のネーターカレントから示せる。省略。)

- ▶ さて、以上を用いて $a^\dagger$ と a は1粒子の生成消滅演算子であることを見ていこう。
まず、エネルギーが E_X 、運動量が $\vec{p}_X$ である状態 $|X\rangle$ を考える。

$$|X\rangle : \begin{cases} H |X\rangle = E_X |X\rangle \\ \hat{P} |X\rangle = \vec{p}_X |X\rangle \end{cases} \quad (354)$$

すると、状態 $a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle$ に対して、

$$H (a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle) = ([H, a^\dagger(\vec{p})] + a^\dagger(\vec{p}) H) |X\rangle \quad (355)$$

$$= (E_p a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p}) E_X) |X\rangle \quad (356)$$

$$= (E_p + E_X) (a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle), \quad (357)$$

$$\hat{P} (a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle) = ([\hat{P}, a^\dagger(\vec{p})] + a^\dagger(\vec{p}) \hat{P}) |X\rangle \quad (358)$$

$$= (\vec{p} a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p}) \vec{p}_X) |X\rangle \quad (359)$$

$$= (\vec{p} + \vec{p}_X) (a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle). \quad (360)$$

したがって、状態 $a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle$ はエネルギーが $E_p + E_X$ で運動量が $\vec{p} + \vec{p}_X$ になっている。
つまり $a^\dagger(\vec{p})$ はエネルギー E_p と運動量 $\vec{p}$ を加える演算子（生成演算子）である。

- ▶ 同様に

$$H (a(\vec{p}) |X\rangle) = (E_X - E_p) (a(\vec{p}) |X\rangle), \quad (361)$$

$$\hat{P} (a(\vec{p}) |X\rangle) = (\vec{p}_X - \vec{p}) (a(\vec{p}) |X\rangle). \quad (362)$$

が示せる。したがって $a(\vec{p})$ は消滅演算子である。

A.2.7 真空状態

消滅演算子 $a(\vec{p})$ はエネルギーを減らす。

$$\begin{array}{ccccccc} & |X\rangle & \rightarrow & a(\vec{p}) |X\rangle & \rightarrow & a(\vec{q}) a(\vec{p}) |X\rangle & \cdots \\ \text{エネルギー} & E_X & & E_X - E_p & & E_X - E_p - E_q & \end{array} \quad (363)$$

基底状態（真空状態） $|0\rangle$ は

$$a(\vec{p}) |0\rangle = 0 \quad (364)$$

を満たす状態。

A.2.8 1 粒子状態と多粒子状態

► 1 粒子状態は

$$|\vec{p}\rangle = a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle . \quad (365)$$

規格化

$$\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \langle 0 | a(\vec{q}) a^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle \quad (366)$$

$$= \langle 0 | \left(\underbrace{[a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{p})]}_{(2\pi)^3 2E_q \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})} + a^\dagger(\vec{p}) \underbrace{a(\vec{q})}_{\rightarrow 0} \right) | 0 \rangle \quad (367)$$

$$= (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) . \quad (368)$$

ただし真空状態は $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ と規格化されているとした。

► n 粒子状態は

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1) \cdots a^\dagger(\vec{p}_n) |0\rangle \quad (369)$$

で与えられ、

$$H |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = (E_1 + \cdots E_n) |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad (370)$$

$$\hat{P} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = (\vec{p}_1 + \cdots \vec{p}_n) |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad (371)$$

を満たす。これで A.1.4 で予告したもう 1 つの式 (299) が示せた！

A.3 相互作用するスカラー場

この節の目標：相互作用する場の量子論における 散乱断面積の計算の概要 を理解する。

► 例として、2 つのスカラー場 $\phi(x) = \phi(t, \vec{x})$ と $S(x) = S(t, \vec{x})$ に関する以下のラグランジアンを考える。

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad (372)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}}^\phi + \mathcal{L}_{\text{free}}^S + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (373)$$

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 \quad (374)$$

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^S = \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S - \frac{1}{2} m_S^2 S^2 \quad (375)$$

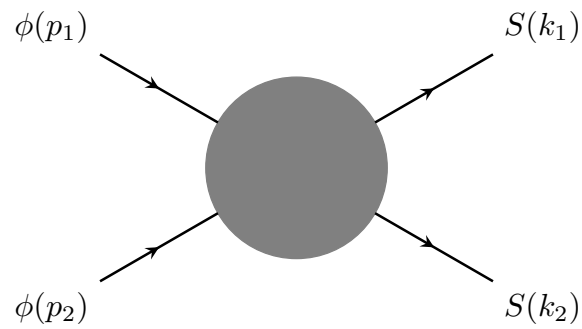
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4} S^2 \phi^2 \quad (376)$$

$\mathcal{L}_{\text{free}}^\phi$ と $\mathcal{L}_{\text{free}}^S$ はそれぞれ前の節でやった自由スカラー場のラグランジアン。
 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ が相互作用項で λ は結合定数。相互作用があると ϕ と S の反応が起きる。

► 具体例として

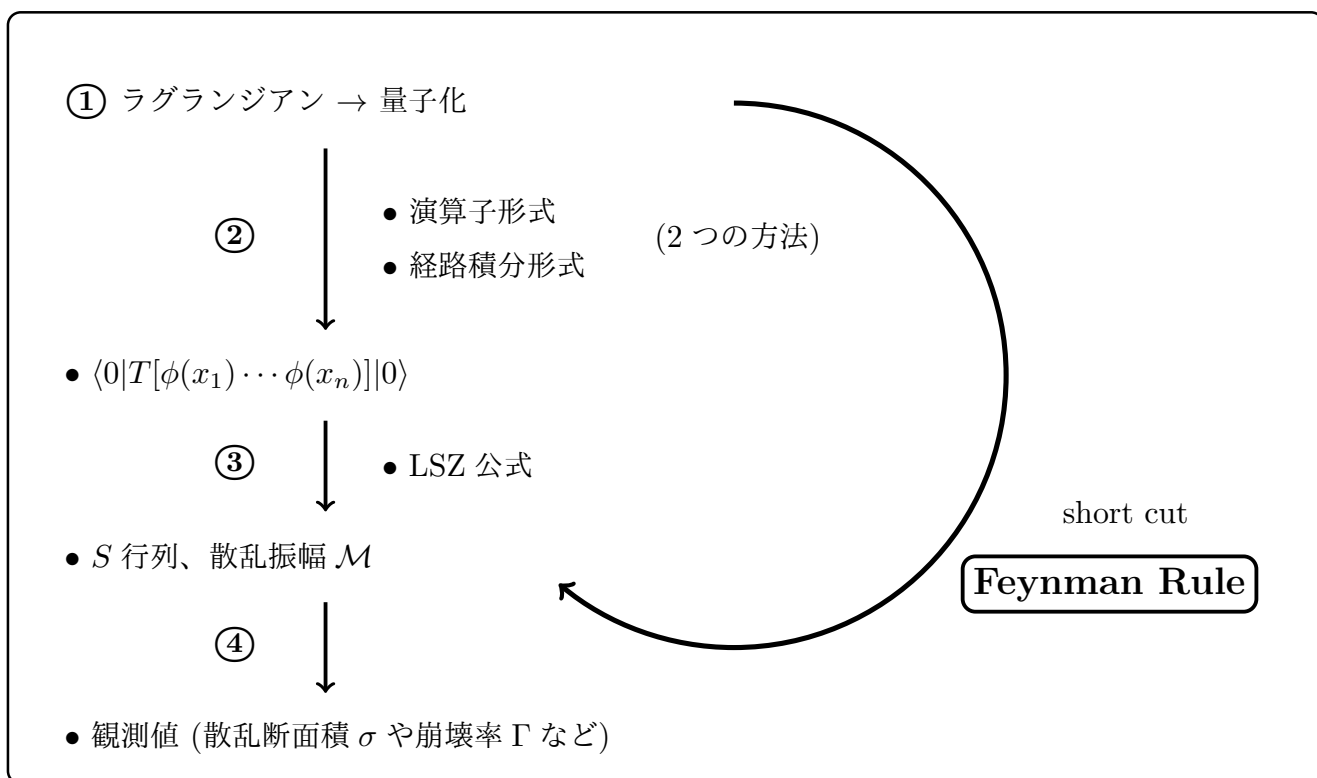
$$\phi + \phi \rightarrow S + S \quad (377)$$

という、2つの ϕ 粒子が2つの S 粒子に対消滅するプロセスを考える。



A.3.1 概略

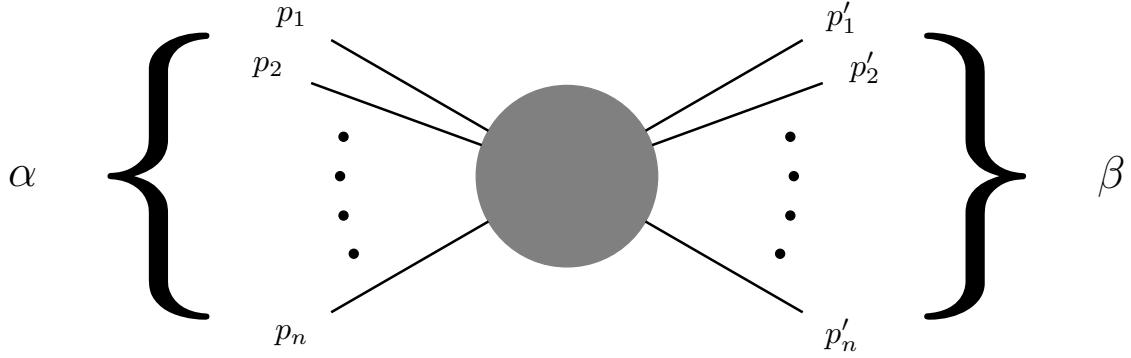
一般に、場の量子論において、散乱断面積 σ や崩壊率 Γ などの計算は、摂動論では **Feynman Rule** と呼ばれる計算方法で計算される。以下に概略図を示す。



- ▶ この講義では、①～③の詳細は省略して、概要だけ説明します。→ [A.3.5 節](#)。
(より詳細については場の量子論の教科書や[こちらの講義ノート](#)を参照して下さい。)
- ▶ その前にまず次の [A.3.2～A.3.4 節](#)で ④ をやる。

A.3.2 S 行列と散乱振幅 $\mathcal{M}$

以下のようなプロセス $P(\alpha \rightarrow \beta)$ を考えたい。



► 始状態と終状態の間の振幅

$$\langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_m ; \text{out} | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n ; \text{in} \rangle = \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle \quad (378)$$

を S 行列という。

(“in” と “out” の定義については省略。A.3.5 で少しコメントする。)

► エネルギーと運動量が保存すると仮定して

$$\langle \vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n \rangle \propto \delta\left(\underbrace{\sum_f E'_f}_{\text{final}} - \underbrace{\sum_i E_i}_{\text{initial}}\right) \times \delta^{(3)}\left(\sum_f \vec{p}'_f - \sum_i \vec{p}_i\right) \quad (379)$$

$$= \delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right) \quad (380)$$

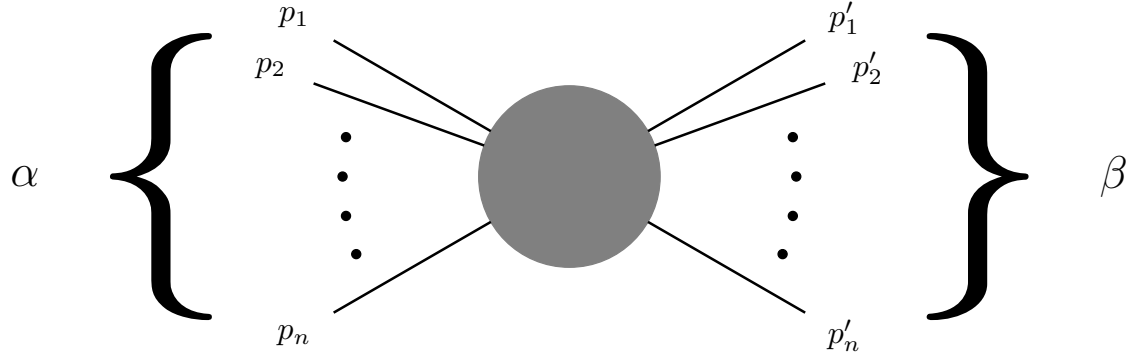
そこで以下のように散乱振幅（不変散乱振幅、不変行列要素などともいう） $\mathcal{M}$ を定義する。

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right) \cdot i\mathcal{M}(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_m) \end{aligned} \quad (381)$$

この散乱振幅 $\mathcal{M}$ は Feynman Rule で計算できる。(A.3.5 節で概要を説明する。)

A.3.3 遷移確率：一般論

- ▶ さて、今考えているプロセスの 確率 $P(\alpha \rightarrow \beta)$ を考えたい。



- ▶ もし始状態と終状態が $\langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ のように規格化されていたら

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |\langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle|^2 \quad (382)$$

となるはず。

- ▶ しかし、今考えたいのは

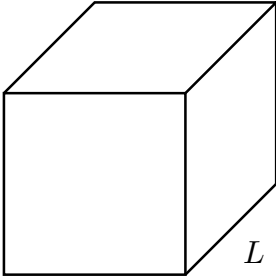
$$|\alpha\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle, \quad (383)$$

みたいな状態で、規格化は

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (384)$$

となっていた (A.2.8 参照)。

- ▶ そこで規格化のために、以下のような箱で考える。



$$V = L^3, \quad \vec{p} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$$

すると、(384) 式より

$$\begin{aligned}
\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle &= 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\
&= 2E_p \int d^3x e^{i(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{x}} \\
&= 2E_p \underbrace{\left(\int d^3x \right)}_V \underbrace{\delta_{\vec{p}, \vec{q}}}_{\text{離散的}}.
\end{aligned} \tag{385}$$

そこで

$$|\vec{p}\rangle_{\text{Box}} = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} |\vec{p}\rangle. \tag{386}$$

と定義すると、(385) と (386) より

$${}_{\text{Box}} \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle_{\text{Box}} = \delta_{\vec{p}, \vec{q}}. \tag{387}$$

よって $|\vec{p}\rangle_{\text{Box}}$ は確率を求めるために良い規格化になっている。例えば、もし何も相互作用がなければ

$$P(\vec{p} \rightarrow \vec{p}') = \left| {}_{\text{Box}} \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle_{\text{Box}} \right|^2 = \delta_{\vec{p}', \vec{p}} = \begin{cases} 1 & (\vec{p}' = \vec{p}) \\ 0 & (\vec{p}' \neq \vec{p}) \end{cases} \tag{388}$$

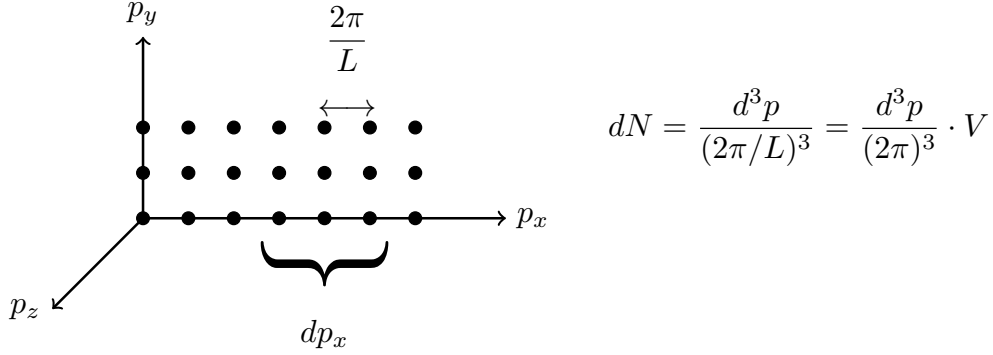
► したがって、求めたい確率は (386) を用いて

$$\begin{aligned}
&\text{確率 } P(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m) \\
&= \left| {}_{\text{Box}} \langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle_{\text{Box}} \right|^2 \\
&= \left(\prod_{f=1}^m \frac{1}{2E'_f} \right) \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2E_i} \right) \left(\frac{1}{V} \right)^{n+m} \left| \langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle \right|^2
\end{aligned} \tag{389}$$

► しかしこれは $V \rightarrow \infty$ でゼロになってしまう。

► そこで終状態が $[\vec{p}'_f, \vec{p}'_f + d\vec{p}'_f]$ にある微小確率はいくつかを考える。

$$dP = P(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m) \times \underbrace{dN}_{[\vec{p}'_f, \vec{p}'_f + d\vec{p}'_f] \text{ にある状態の数}} \quad (390)$$



終状態に m 個の粒子 $\vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m$ がある場合、

$$dN = \prod_{f=1}^m \left(\frac{d^3p'_f}{(2\pi)^3} \cdot V \right) \quad (391)$$

(389), (390), (391) より

$$\begin{aligned} dP &= P(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m) \times dN \\ &= \left(\prod_{f=1}^m \frac{d^3p'_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'_f} \right) \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2E_i} \right) \left(\frac{1}{V} \right)^n \left| \langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (392)$$

ここで (381) を思い出すと

$$\langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot i\mathcal{M}(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m)$$

これを二乗すると

$$\begin{aligned} \left| \langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle \right|^2 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot |\mathcal{M}|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot |\mathcal{M}|^2 \\ &\quad \left(\delta^{(4)}(0) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{i0 \cdot x} = \frac{V \cdot T}{(2\pi)^4} \quad T : \text{時間} (\rightarrow \infty) \right) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot V \cdot T \cdot |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (393)$$

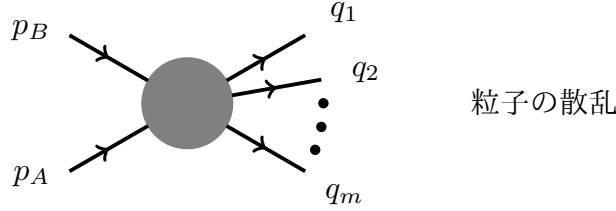
▶ よって (392) を時間 T で割ると

$$\frac{dP}{T} = V^{1-n} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2E_i} \right) \underbrace{\left(\prod_{f=1}^m \widetilde{dp'_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p'_f - \sum p'_i) \cdot |\mathcal{M}(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m)|^2}_{\equiv d\Phi_m} \quad (394)$$

▶ 一般論はここまで。次に始状態が 2 粒子の場合、 $n = 2$ を考える。

($n = 1$ の場合は粒子の崩壊率が計算できる。ここでは省略。)

A.3.4 $n = 2$ の場合、散乱断面積 σ

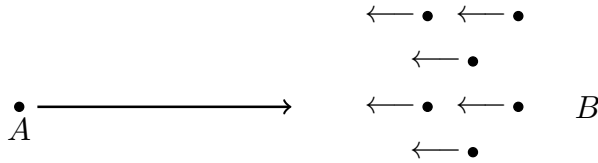


▶ (394) 式より、単位時間あたりに終状態の粒子が運動量 $[\vec{q}_f, \vec{q}_f + d\vec{q}_f]$ に遷移する確率は

$$\frac{dP(p_A, p_B \rightarrow q_1 \cdots q_m)}{T} = \frac{1}{V} \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B} d\Phi_m |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \cdots q_m)|^2 \quad (395)$$

▶ 始状態が 2 粒子の場合、散乱断面積（あるいは単に断面積）という物理量を考える。

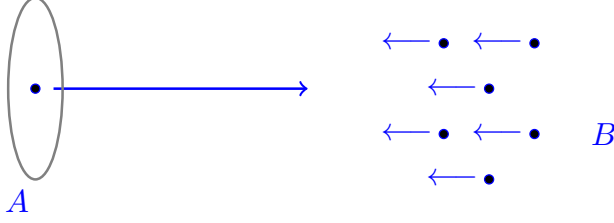
▶ 粒子 A が多くの粒子 B （数密度 n_B ）と相対速度 v_{rel} で衝突することを考える。



単位時間あたりに散乱 $A, B \rightarrow 1, 2 \cdots$ が起こる確率は

$$\frac{P(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \cdots)}{T} = n_B \cdot v_{\text{rel}} \cdot \underbrace{\sigma(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \cdots)}_{\text{散乱断面積}} \quad (396)$$

なぜ「断面積」なのか？



面積 σ の円盤を考えると、時間 T の間にこの円盤を通る粒子 B の数は

$$N_B = \sigma \cdot v_{\text{rel}} \cdot T \cdot n_B. \quad (397)$$

これは (396) と整合している。(時間 T が短いとき、 $N_B < 1$ は確率を与える。)

- いま考えている状況では、粒子 B は1つしかないから、 $n_B = 1/V$ 。したがって、終状態が $[p'_f, p'_f + dp'_f]$ となる散乱断面積 (微分散乱断面積) は

$$\begin{aligned} d\sigma(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \cdots) &= \frac{1}{v_{\text{rel}}} V \frac{dP(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \cdots)}{T} \quad [\because (396)] \\ &= \frac{1}{v_{\text{rel}}} \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B} d\Phi_m |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \cdots q_m)|^2 \quad [\because (395)] \end{aligned} \quad (398)$$

終状態の運動量で積分して

散乱断面積

$$\begin{aligned} \sigma(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \cdots) &= \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B \cdot v_{\text{rel}}} \int d\Phi_m |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \cdots q_m)|^2 \\ &= \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B \cdot v_{\text{rel}}} \left(\prod_{f=1}^m \int \widetilde{dq_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_f q_f) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \cdots)|^2 \end{aligned} \quad (399)$$

コメント

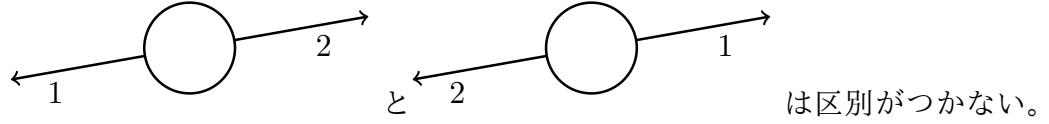
- (i) 次元の確認： σ の次元は (エネルギー) $^{-2} \sim$ (長さ) $^2 \sim$ (面積)。
- (ii) 相対速度 v_{rel} は

$$v_{\text{rel}} = \left| \frac{\vec{p}_A}{E_A} - \frac{\vec{p}_B}{E_B} \right| \quad (400)$$

(光速で正面衝突する場合は $v_{\text{rel}} = 2$.)

(iii) 終状態に同種粒子がある場合は対称因子で割る必要がある。

(例) 粒子 1 と粒子 2 が同種粒子のとき

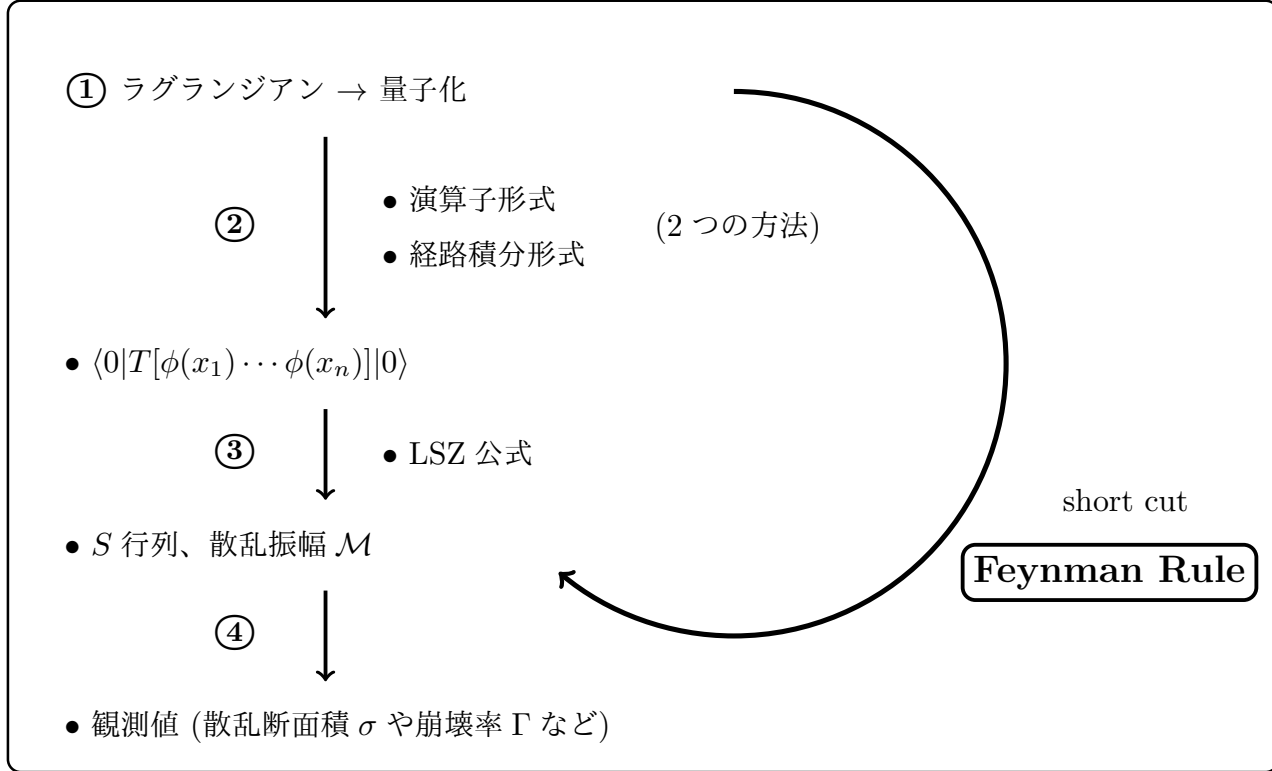


よって

- ① 積分範囲を半分にする ($\theta = [0, \pi] \rightarrow [0, \pi/2]$) か、
- ② 積分したあとで対称因子 ($= 2$) で割る。

A.3.5 散乱振幅 $\mathcal{M}$ の計算の概要

▶ ここまでで、以下の概略図の ④ を見てきた。



▶ 前回の最後、(399) 式で見たように、断面積は

$$\sigma(p_A, p_B \rightarrow 1, 2, \dots) = \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B \cdot v_{\text{rel}}} \int d\Phi_m |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \cdots q_m)|^2$$

$$d\Phi_m = \left(\prod_{f=1}^m \int \widetilde{dq_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_f q_f)$$

$$= \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \cdots \frac{d^3 q_m}{(2\pi)^3 2E_{q_m}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_f q_f) \quad (401)$$

で与えられた。

▶ あとは散乱振幅 $\mathcal{M}$ が計算できれば良い。... が、これをラグランジアンからちゃんと導くのは大変。

② には (演算子形式の場合) 相互作用表示、Wick の定理... などが必要

③ には A.3.2 で出てきた “in” “out” 状態の定義、LSZ 公式などが必要。

この講義ではこれらの詳細は省略して、概要のみ説明する。

(より詳細については場の量子論の教科書やこちらの講義ノートを参照して下さい。)

► 具体例として、A.3 の冒頭で導入した

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}}^{\phi} + \mathcal{L}_{\text{free}}^S + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (402)$$

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^{\phi} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} m_{\phi}^2 \phi^2 \quad (403)$$

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^S = \frac{1}{2} \partial_{\mu} S \partial^{\mu} S - \frac{1}{2} m_S^2 S^2 \quad (404)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4} S^2 \phi^2 \quad (405)$$

という模型における $\phi + \phi \rightarrow S + S$ という散乱を考える。

► 量子力学のときと同様、散乱振幅は

$$\langle \text{終} | e^{-iHt} | \text{始} \rangle \quad (406)$$

のような量で与えられる。(始状態・終状態の定義とか時間 t の扱いが曖昧なのでとごまかした書き方をしています...。)

► $H = H_{\text{free}} + H_{\text{int}}$ として、 H_{int} での摂動を考える。今の模型の場合は

$$H_{\text{int}} = -L_{\text{int}} = - \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^3x = \int \left(\frac{\lambda}{4} S^2 \phi^2 \right) d^3x \quad (407)$$

なので、摂動展開は λ での展開となる。

$$\text{散乱振幅} \sim \mathcal{O}(\lambda) \text{ の項} + \mathcal{O}(\lambda^2) \text{ の項} + \dots \quad (408)$$

相互作用表示を用いて展開すると (詳細は省略、、、) 摂動の 1 次では

$$\langle \text{終} | (-i) \int H_{\text{int}} dt | \text{始} \rangle \quad (409)$$

を計算することになる。時間積分の範囲は (ここも詳細は省くが、、、始状態と終状態を $t \rightarrow \pm\infty$ の漸近状態で定義して、、、) $t = -\infty \rightarrow \infty$ 。(407) 式を代入すると

► したがって、相互作用ハミルトニアンは $H_{\text{int}} = -L_{\text{int}}$ なので、

$$(-i) \int H_{\text{int}} dt = i \int L_{\text{int}} dt = i \int \left(\int \mathcal{L}_{\text{int}} d^3x \right) dt = i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x. \quad (410)$$

したがって摂動の 1 次で、振幅は

$$\langle \text{終} | i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x | \text{始} \rangle \quad (411)$$

を計算することで与えられる。

► 積分はあとで考えることにして

$$\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle \quad (412)$$

を考えよう。始状態と終状態は

$$| \text{始} \rangle = | \phi(\vec{p}_1) \phi(\vec{p}_2) \rangle \sim a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \quad (413)$$

$$| \text{終} \rangle = | S(\vec{k}_1) S(\vec{k}_2) \rangle \sim a_S^\dagger(\vec{k}_1) a_S^\dagger(\vec{k}_2) | 0 \rangle \quad (414)$$

(本当は漸近状態としての $|\text{in}\rangle$ と $|\text{out}\rangle$ を考える必要があるが、詳細は略。)

ただし $a_\phi^\dagger(\vec{p})$ と $a_S^\dagger(\vec{k})$ はそれぞれ粒子 ϕ と S の生成演算子で、

$$[a_\phi(\vec{p}), a_\phi^\dagger(\vec{p}')] = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (415)$$

$$[a_S(\vec{k}), a_S^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (416)$$

$$\text{それ以外の交換子} = 0 \quad (417)$$

を満たす。

► したがって $\langle \text{終} | = (| \text{終} \rangle)^\dagger \sim \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2)$ を用いて

$$\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle \sim \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) \mathcal{L}_{\text{int}} a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \quad (418)$$

► ここで、例えば $a_S(\vec{k}_2)$ に注目する。もし $\mathcal{L}_{\text{int}}$ に $a_S^\dagger(\vec{k}_2)$ が含まれていないと、

$$[a_S(\vec{k}_2), \mathcal{L}_{\text{int}} |_{a_S^\dagger(\vec{k}_2) \text{ がない場合}}] = 0 \quad (419)$$

なので

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) \underbrace{a_S(\vec{k}_2)}_{\rightarrow} \left(\mathcal{L}_{\text{int}} |_{a_S^\dagger(\vec{k}_2) \text{ がない場合}} \right) a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) \left(\mathcal{L}_{\text{int}} |_{a_S^\dagger(\vec{k}_2) \text{ がない場合}} \right) \underbrace{a_S(\vec{k}_2)}_{\rightarrow} a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) \left(\mathcal{L}_{\text{int}} |_{a_S^\dagger(\vec{k}_2) \text{ がない場合}} \right) a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) \underbrace{a_S(\vec{k}_2)}_{=0} | 0 \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (420)$$

同様に、 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ に $a_S^\dagger(\vec{k}_1)$ がないとゼロになってしまう。

► また

$$\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle \sim \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) \mathcal{L}_{\text{int}} a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \quad (421)$$

の $a_\phi^\dagger(\vec{p}_1)$ に注目すると、もし $\mathcal{L}_{\text{int}}$ に $a_\phi(\vec{p}_1)$ が含まれていないと

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) (\mathcal{L}_{\text{int}}|_{a_\phi(\vec{p}_1) \text{ がない場合}}) \underbrace{a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2)}_{\leftarrow} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) \underbrace{a_\phi^\dagger(\vec{p}_1)}_{\leftarrow} (\mathcal{L}_{\text{int}}|_{a_\phi(\vec{p}_1) \text{ がない場合}}) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \\ &= \underbrace{\langle 0 | a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2)}_{=0} (\mathcal{L}_{\text{int}}|_{a_\phi(\vec{p}_1) \text{ がない場合}}) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (422)$$

$a_\phi^\dagger(\vec{p}_2)$ も同様。

► したがって、相互作用 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ の中に、ちょうど 1 回ずつ

$$a_S^\dagger(\vec{k}_1), a_S^\dagger(\vec{k}_2), a_\phi(\vec{p}_1), a_\phi(\vec{p}_2) \quad (423)$$

を含む項がないと $\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle$ はゼロになってしまう。

► さて、ここで

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4} S(x)^2 \phi(x)^2 \quad (424)$$

を思い出すと、自由場のところで見たとように

$$\phi(x) \sim \int \widetilde{d\vec{q}} (a_\phi(\vec{q}) e^{\cdots} + a_\phi^\dagger(\vec{q}) e^{\cdots}) \quad (425)$$

$$S(x) \sim \int \widetilde{d\vec{q}} (a_S(\vec{q}) e^{\cdots} + a_S^\dagger(\vec{q}) e^{\cdots}) \quad (426)$$

なので、積分範囲が全運動量を取ると考えると、 $\mathcal{L}_{\text{int}}$ の中に $a_S^\dagger(\vec{k}_1), a_S^\dagger(\vec{k}_2), a_\phi(\vec{p}_1), a_\phi(\vec{p}_2)$ を 1 回ずつ含む項があるとわかる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &\sim -\frac{\lambda}{4} \int \widetilde{d\vec{q}} (\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}) e^{\cdots}) \int \widetilde{d\vec{q}'} (\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}') e^{\cdots}) \\ &\quad \times \int \widetilde{d\vec{q}''} (a_\phi(\vec{q}'') e^{\cdots} + \cdots) \int \widetilde{d\vec{q}'''} (a_\phi(\vec{q}''') e^{\cdots} + \cdots) \end{aligned} \quad (427)$$

► よって

$$\begin{aligned} \langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle &\sim -\frac{\lambda}{4} \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) \int \left(\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}) e^{\cdots} \right) \left(\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}') e^{\cdots} \right) \\ &\quad \times \left(a_\phi(\vec{q}'') e^{\cdots} + \cdots \right) \left(a_\phi(\vec{q}''') e^{\cdots} + \cdots \right) a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (428)$$

例えば $a_S(\vec{k}_2)$ は

$$\begin{aligned} &\cdots a_S(\vec{k}_2) \int \widetilde{d\vec{q}} \left(\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}) e^{iq \cdot x} \right) \cdots \\ &= \cdots \int \widetilde{d\vec{q}} \left(\cdots + \underbrace{a_S(\vec{k}_2) a_S^\dagger(\vec{q})}_{[a_S(\vec{k}_2), a_S^\dagger(\vec{q})] + a_S^\dagger(\vec{q}) a_S(\vec{k}_2)} e^{iq \cdot x} \right) \cdots \\ &= \cdots \int \widetilde{d\vec{q}} \left(\cdots + (2\pi)^3 2E_{k_2} \delta^{(3)}(\vec{k}_2 - \vec{q}) e^{iq \cdot x} + a_S^\dagger(\vec{q}) a_S(\vec{k}_2) e^{iq \cdot x} \right) \cdots \\ &= \cdots e^{ik_2 \cdot x} \cdots \end{aligned} \quad (429)$$

のようになって、ゼロでない項が残る。

► $| \text{始} \rangle$ と $\langle \text{終} |$ の4つの生成消滅演算子を全て同様にやると

$$\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle = -\lambda \cdot e^{ik_1 \cdot x} \cdot e^{ik_2 \cdot x} \cdot e^{-ip_1 \cdot x} \cdot e^{-ip_2 \cdot x} \quad (430)$$

係数の $1/4$ は、

- (始状態の $a_\phi^\dagger$ 2つが ϕ^2 の中のどちらの a と交換するかの場合の数) = 2
 - (終状態の a_S 2つが S^2 の中のどちらの $a^\dagger$ と交換するかの場合の数) = 2
- とキャンセルする。 (ここでキャンセルするように、最初に $1/4$ をかけておいた。)

► 積分があったことを思い出すと、(411) と上の式より

$$\begin{aligned} \langle \text{終} | i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x | \text{始} \rangle &= -i\lambda \int d^4x e^{i(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \cdot x} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \end{aligned} \quad (431)$$

► A.3.2 の S 行列と散乱振幅 $\mathcal{M}$ の一般論で出てきた関係式 (381)

$$\langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot i\mathcal{M}(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m)$$

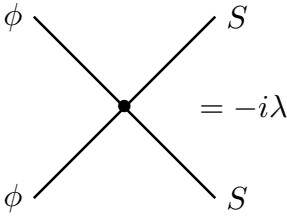
の通り、エネルギー・運動量保存則のデルタ関数が出てきた。

- 以上が散乱振幅 $\mathcal{M}$ の計算の概要。(概略図にあった LSZ 公式などなどをちゃんとやると... 略) 最終的には λ に関する摂動の 1 次で

$$i\mathcal{M}(\phi(p_1) + \phi(p_2) \rightarrow S(k_1) + S(k_2)) = -i\lambda \quad (432)$$

となる。

- 最終結果はとてもシンプル！これは「Feynman Rule (Feynman 図)」では以下のように表される。

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4} S^2 \phi^2$$


- より一般には、Feynman Rule には「propagator」という重要な量が出てくるが、ここでは省略。
- 最後に、 $\mathcal{M}$ を断面積の公式 (401) に代入すると、、、

$$\sigma(\phi(p_1)\phi(p_2) \rightarrow SS) = \frac{1}{2E_{p_1} \cdot 2E_{p_2} \cdot v_{\text{rel}}} \int d\Phi_2 \underbrace{|\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow k_1, k_2)|^2}_{=\lambda^2} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{対称因子}} \quad (433)$$

- 以下、重心系 ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$) で考える。すると終状態の位相積分 $d\Phi_2$ は

$$\begin{aligned} \int d\Phi_2 &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &= \dots \text{(頑張って計算すると、、、略)} \\ &= \frac{\beta_S}{8\pi}, \quad \beta_S = \sqrt{1 - \frac{m_S^2}{E_{p_1}^2}} \end{aligned} \quad (434)$$

β_S は S の速さ。($m_S = 0$ だと $\beta_S = 1$ となり光速。)

(433) 式に代入して

$$\begin{aligned} \sigma(\phi(p_1)\phi(p_2) \rightarrow SS) &= \frac{1}{4E_{p_1}^2 \cdot v_{\text{rel}}} \cdot \frac{\beta_S}{8\pi} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\lambda^2}{64\pi} \cdot \frac{\beta_S}{E_{p_1}^2 \cdot v_{\text{rel}}}, \quad \beta_S = \sqrt{1 - \frac{m_S^2}{E_{p_1}^2}} \end{aligned} \quad (435)$$

ついに計算できた！

- ▶ せっかく式が出たので、試しに具体的な数字を入れてみよう。粒子の質量を $m_\phi = m_S = 100 \text{ GeV}$ として、結合定数を $\lambda = 0.1$ としてみる。
- 重心系で、始状態のエネルギー $E_{p_1} = E_{p_2} = 200 \text{ GeV}$ で対消滅することを考えると、終状態も $E_{k_1} = E_{k_2} = 200 \text{ GeV}$ となるので、

$$\beta_S = \sqrt{1 - \frac{(100)^2}{(200)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad v_{\text{rel}} = 2\beta_S. \quad (436)$$

よって、

$$\begin{aligned} \sigma(\phi(p_1)\phi(p_2) \rightarrow SS) &= \frac{\lambda^2}{128\pi} \cdot \frac{1}{E_{p_1}^2} \\ &\simeq 2.5 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2} \left(\frac{\lambda}{0.1}\right)^2 \left(\frac{100 \text{ GeV}}{E_{p_1}}\right)^2 \\ &\simeq \underbrace{1.0 \times 10^{-36} \text{ cm}^2}_{=1 \text{ pb}} \left(\frac{\lambda}{0.1}\right)^2 \left(\frac{100 \text{ GeV}}{E_{p_1}}\right)^2 \end{aligned} \quad (437)$$

この 1 pb という断面積の大きさは、WIMP 暗黒物質シナリオで出てくる典型的な値。→ § 3 で見る。