

2025 年度 夏学期 25L1007 素粒子特論

濱口幸一

ここまでのあらすじ

- § 1 標準模型と標準模型を超える物理についての概要 (4/15 + 4/22、スライドで)
- § 2 今後の予定
- § 3 場の量子論入門 (5/13~)
 - § 3.1 はじめに
 - § 3.2 自由スカラー場 (5/20)
 - § 3.3 相互作用するスカラー場 (5/27~)
 - § 3.3.1 概略
 - § 3.3.2 S 行列と散乱振幅 $\mathcal{M}$
 - § 3.3.3 遷移確率：一般論
 - § 3.3.4 $n = 2$ の場合、散乱断面積 σ
 - § 3.3.5 散乱振幅 $\mathcal{M}$ の計算の概要
- § 4 標準宇宙論入門 ←
- § 5 暗黒物質
- ...

ココから
6/3 後半

4. 標準宇宙論入門

よむとく。 { Einstein 方程式 (結果 7-11)
熱力学 (19)

4-1. FLRW 宇宙

Friedmann - Lemaitre
- Robertson - Walker

▶ 一様. 等方宇宙の仮定 (@ large scale / early universe)

▶ Einstein eq.

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R}_{\text{Einstein eq.}} = \underbrace{8\pi G}_{\text{Newton const.}} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{Energy-momentum tensor}} \quad (1)$$

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

(左辺) $g_{\mu\nu} \propto a^2(t)$

(右辺)

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \rho(t) & & & \\ & -p(t) & & \\ & & -p(t) & \\ & & & -p(t) \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

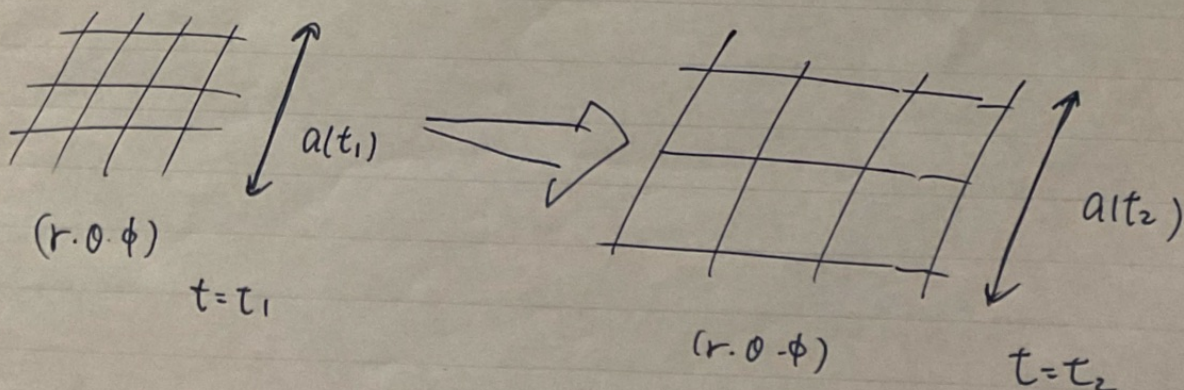
FLRW metric

$$= dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\} \quad (2)$$

$k \begin{cases} > 0 & \text{closed universe.} \\ = 0 & \text{flat} \\ < 0 & \text{open} \end{cases}$

$\rho(t)$: エネルギー密度
 $p(t)$: 圧力

$a(t)$: scale factor



$$\textcircled{1} \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

一股相打端 8)

metric $g_{\mu\nu}$ is a 2-tensor...

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &\equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} [\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}] \\ R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} &\equiv \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} \\ &\quad + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} \\ R_{\mu\nu} &\equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \\ R &\equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}\end{aligned}$$

FLRW metric の $g_{\mu\nu}$ ② より (計算大変!!)

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{0i} = 0 \\ R_{ij} = - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{R^2} \right] g_{ij} \\ R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{R^2} \right] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \dot{a} = \frac{d}{dt} a(t) \\ \ddot{a} = \frac{d^2}{dt^2} a(t) \end{array}$$

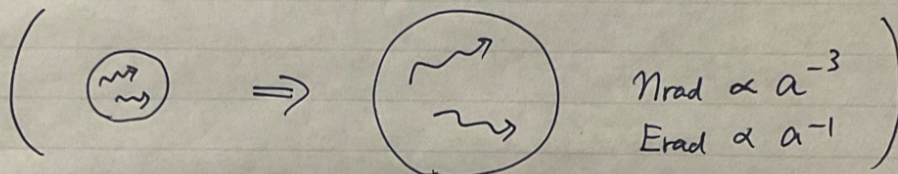
$\hookrightarrow$ ① $1 = 1 \cdot x^0 \leq 2 \dots$

2つの独立方程式
 (0.0) 成り立つ
 (i.i) 成り立つ

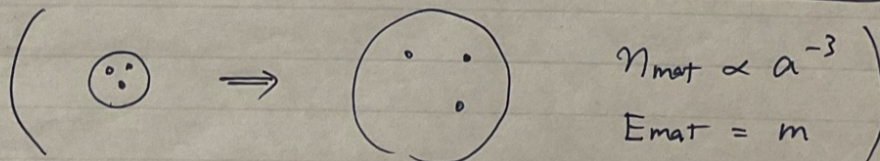
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt}(a^3) & \text{--- (A)} \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho & \text{--- (B)} \end{cases} \quad (dE = -p dV)$$

① 5)

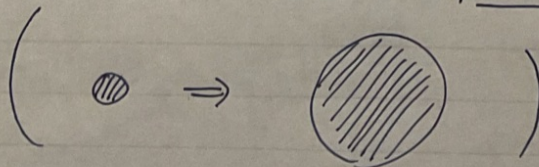
"radiation" ($E \gg \text{mass}$) $p_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{rad}}$ $\rightarrow \boxed{\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4}}$



"matter" ($E \simeq \text{mass}$) $p_{\text{mat}} \simeq 0$ $\rightarrow \boxed{\rho_{\text{mat}} \propto a^{-3}}$



"vacuum" ($p_{\text{vac}} = -\rho_{\text{vac}}$) $\boxed{\rho_{\text{vac}} = \text{const}}$



$\frac{6}{3}$
 $\uparrow$
 $\downarrow$
 $\frac{6}{5}$

④ 現在の宇宙

$$\rho_{\text{rad}} : \rho_{\text{mat}} : \rho_{\text{vac}} \approx 5 \times 10^{-5} : 0.32 : 0.68$$

ρ
 σ, ν

baryon
+ DM

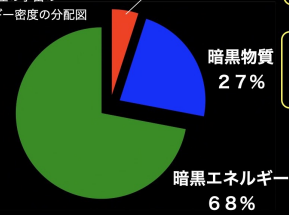
起源謎

Dark Energy

正体謎

宇宙に残された謎

現在の宇宙の
エネルギー密度の分配図

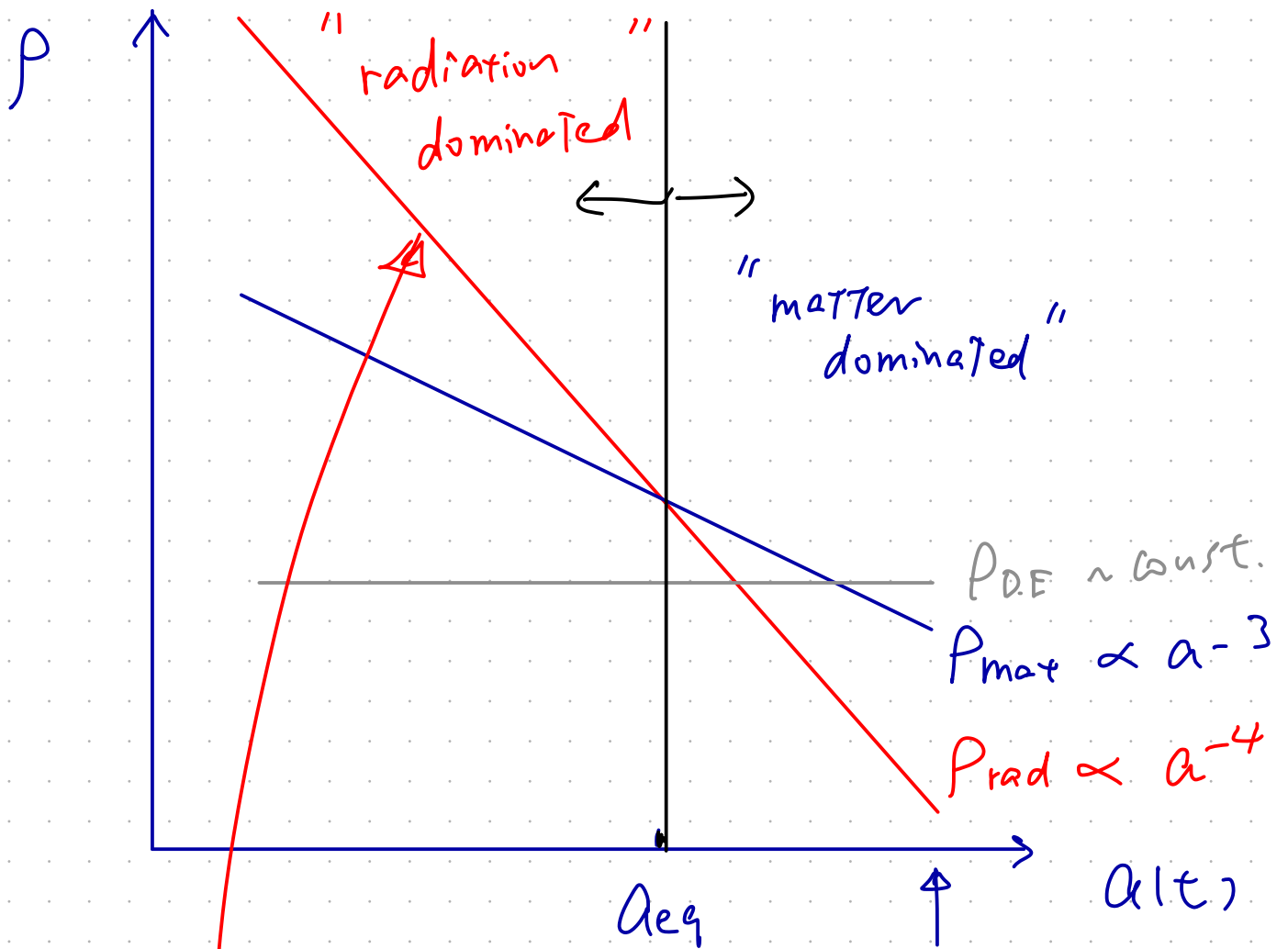


消えた
反物質の謎

暗黒物質
の正体は？

暗黒エネルギー
の正体は？

というとは、時間)でエの割合と...



今の宇宙は
radiation 2. 満ちていて
($E \gg m$ の粒子たち)

▶ - ③ 21)

$$\frac{(\dot{a})^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

Friedmann Eq
宇宙のつぎに支配する式

$\frac{\dot{a}}{a} \equiv H(t)$
Hubble parameter

$$\left(8\pi G \equiv \frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \right) \quad \begin{matrix} \text{プランク質量} \\ M_{\text{pl}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV} \end{matrix}$$

現在値 $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
 $\uparrow h \approx 0.67$

$\times M_{\text{pl}} = \frac{1}{\sqrt{G}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$
 プランク質量
 2.4倍はともある

$$\Leftrightarrow H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2} \rho$$

$3M_{\text{pl}}^2 H^2 \equiv \rho_{\text{crit}}$
critical density

現在値 $\rho_{\text{crit},0} \sim 5 \text{ GeV}^4 / \text{m}^3$
 $\sim (2 \times 10^{-3} \text{ eV})^4$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}$$

$\frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} \equiv \Omega$

$$\Leftrightarrow \Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad \text{③}$$

$\Omega > 1$	$k > 0$	closed
$\Omega = 1$	$k = 0$	flat
$\Omega < 1$	$k < 0$	open

1 m^3 あたり
 水素原子 5個
 (2020)

現在値 $\Omega_0 = 0.999 \pm 0.002$ 22% flat.

★ flatness (problem)

$$\left| \frac{\Omega - 1}{\Omega} \right| = \left| \frac{\frac{k}{a^2 H^2}}{\frac{\rho}{3M_{Pl}^2 H^2}} \right| \propto \frac{1}{\rho a^2}$$

定義

$$\propto \begin{cases} a^2 & (\text{rad. dom: } \rho \propto a^{-4}) \\ a & (\text{mat. dom } \rho \propto a^{-3}) \end{cases}$$

増え続ける!!

過去にさかのぼると

$$\left| \frac{\Omega - 1}{\Omega} (t) \right| \approx \left| \frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right| \times \frac{a_{eq}}{a_0} \times \left(\frac{a(t)}{a_{eq}} \right)^2 \lll 1$$

$$\lesssim 0.01 \quad \int_{10^{-4}}^1 \lll 1$$

現在の宇宙は

可観測宇宙 < flat 領域 (why? → inflation)

→ 初期宇宙を考えると

$$\Omega = 1 + \frac{k}{a^2 H^2} \iff \boxed{3M_{Pl}^2 H^2 = \rho} \quad \text{Einstein}$$

Friedmann eq in flat Univ.

Hubble
10¹⁷倍の H
宇宙の年齢 t
の
c = ct

→ 可観測

$$\frac{\dot{a}}{a} = H \propto \rho^{1/2}$$

$$\begin{cases} \text{rad. dom} \\ \propto a^{-2} \quad \therefore \quad a \propto t^{1/2}, \quad H = \frac{1}{2t} \\ \text{mat. dom} \\ \propto a^{-3} \quad \therefore \quad a \propto t^{2/3}, \quad H = \frac{2}{3t} \\ \text{vac. dom} \\ \propto a^0 \quad \therefore \quad a \propto e^{Ht}, \quad H = \sqrt{\frac{\rho_{vac}}{3M_{Pl}^2}} = \text{const} \end{cases}$$

4-2.

※ おまけ

現在、宇宙年齢を計算してみよう

▶ 宇宙の初期には、 ρ は matter dominated
 $\rho \propto a^{-3}$, $t \approx \frac{2}{3H}$

したがって、 t_0 と ρ_0 と

$$t_0 \sim \frac{2}{3H_0} = \frac{1}{3 \times 67 \text{ km/s Mpc}^{-1}}$$

~ 97 億年

▶ 宇宙の年齢を計算してみよう...

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{a(t)}{a_0} = x \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{a}}{a_0} = \frac{a}{a_0} \frac{\dot{a}}{a} = xH \\ \begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow t_0 \\ \hline x & 0 \rightarrow 1 \end{array} \end{array} \right)$$

$$t_0 = \int_0^1 \frac{dt}{dx} dx = \int_0^1 \frac{1}{xH} dx \quad \text{--- } \star$$

$H \propto x^{2/3}$ と仮定

$p = \rho c^2 \propto \rho \propto f(\text{at Univ. } (k=0)) \propto a^{-2}$

$$3 M_p^2 H^2 = \rho$$

$$= \rho_\Lambda + \rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{rad}}$$

$$= \rho_{\Lambda,0} + \rho_{\text{mat},0} x^{-3} + \rho_{\text{rad},0} x^{-4}$$

$$\left(\because \rho_\Lambda \sim \text{const} \right.$$

$$\rho_{\text{mat}} \propto a^{-3} \propto x^{-3}$$

$$\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4} \propto x^{-4} \left. \right)$$

$$= \frac{\rho_{\text{crit},0}}{3 M_p^2 H_0^2} \left(\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{mat},0} x^{-3} + \Omega_{\text{rad},0} x^{-4} \right)$$

//

$$\left(\Omega_{x,0} \equiv \frac{\Omega_{x,0}}{\rho_{\text{crit},0}} \right)$$

2.2

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_0} \times \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{mat},0} x^{-3} + \Omega_{\text{rad},0} x^{-4}}}$$

$$H \propto a^{-\frac{7}{6}} \propto t^{-\frac{7}{6}} \quad !!$$

★ 1211λ12

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{mat,0} x^{-3} + \Omega_{rad,0} x^{-4}}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \Omega_{rad,0} x^{-4} \sim 2 \times 10^{-4} \text{ at } x=1 \\ \therefore x \ll 1 \text{ at } x \lesssim 10^{-4} \text{ at } x=10^{-4} \\ \therefore \int_{10^{-4}}^1 \frac{dx}{x \sqrt{x^{-4}}} \sim \int_{10^{-4}}^1 x dx \sim 10^{-8} \\ \therefore \Omega_{m,0} \simeq 1 - \Omega_{\Lambda,0} \text{ at } x=1 \end{array} \right)$$

$$\simeq \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{\Lambda,0}) x^{-3}}}$$

$$\stackrel{\text{Mathematica}}{=} \frac{1}{H_0} \frac{2}{3 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}{\sqrt{1 - \Omega_{\Lambda,0}}} \right)$$

$$\simeq \frac{1}{H_0} \times 0.951 \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0.685 \pm 0.014 \quad \text{at } x=1 \quad \text{at } x=1$$

= 138 億年

宇宙年齡的計算 2.370 !!

4-2

radiation-dominated universe

→ 132億年前に宇宙は thermalized.

$$\rho_{\text{rad}} = \sum_i g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E \cdot \underbrace{f_i(p)}_{\text{thermal}}$$

↑
d.o.f
\$g_i = \text{number of degrees of freedom}\$

\$f_i(p) = \frac{1}{e^{E/T} \pm 1}\$

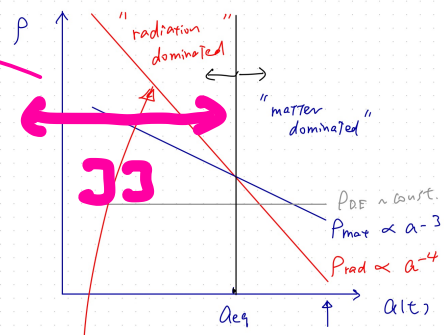
+ : fermion
- : boson

$$\therefore \boxed{\rho_{\text{rad}} \approx \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4}$$

$$g_*(T) = \sum_{\substack{i=\text{boson} \\ m_i \ll T}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\substack{j=\text{fermion} \\ m_j \ll T}} g_j$$

例) $g_*(T \sim 10 \text{ MeV}) (g_\gamma = 2, 3 \times g_\nu = 6, g_{e^\pm} = 4)$
 $= 10.75$

(注) $T < 1 \text{ MeV}$ のときは $T_\nu \neq T$ となるので注意。

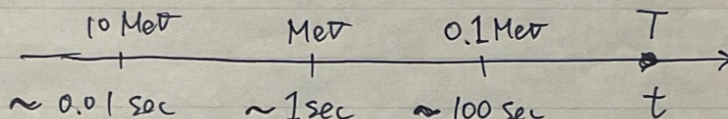


→ $t \leftrightarrow T$

$$\rho_{\text{rad}} = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 = 3 M_{\text{Pl}}^2 H^2 \approx 3 M_{\text{Pl}}^2 \left(\frac{1}{2t} \right)^2$$

↑
§ C-1

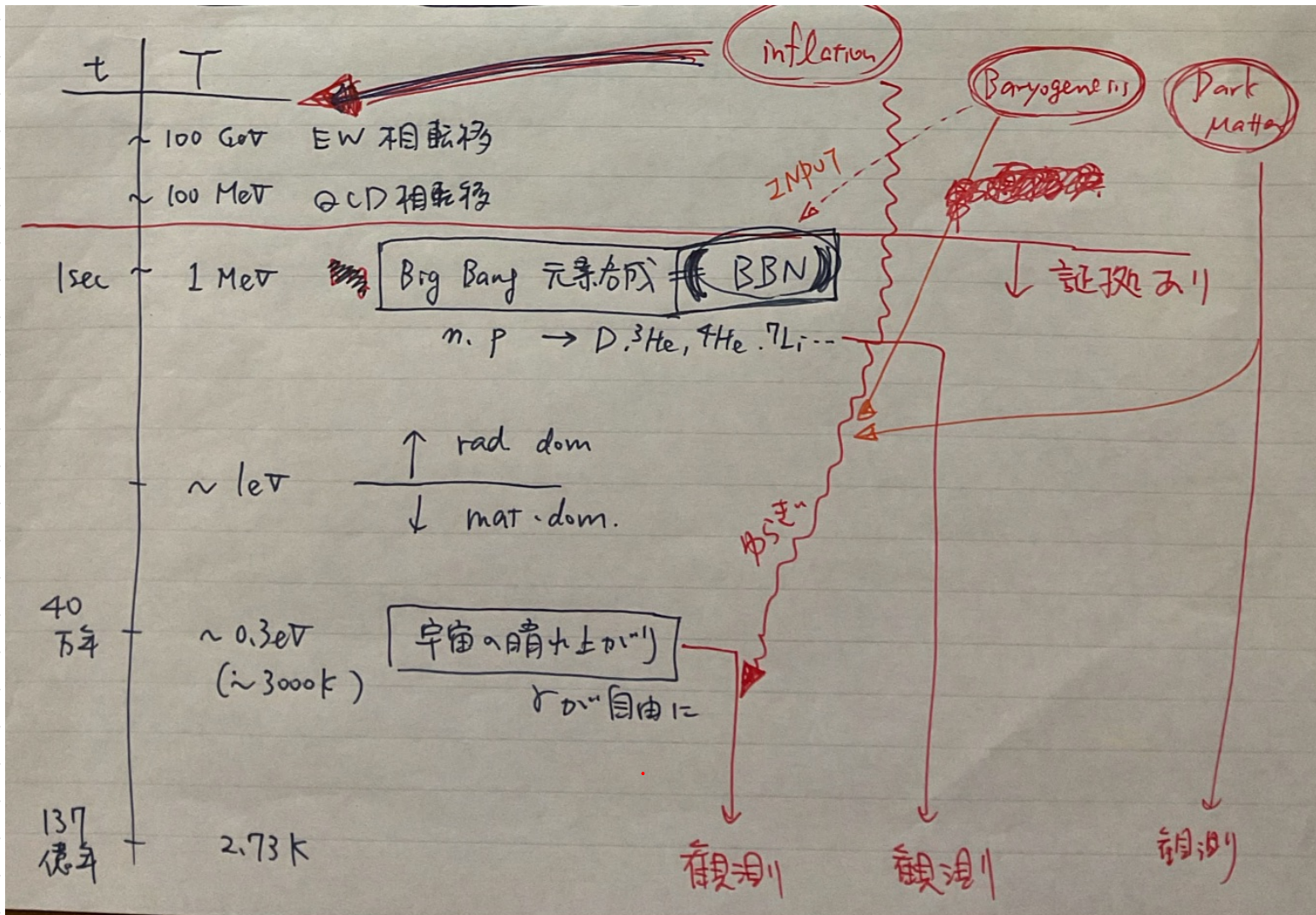
$$\therefore t = 2.4 \text{ sec} \cdot \frac{1}{g_*(T)^{1/2}} \left(\frac{\text{MeV}}{T} \right)^2$$



6/5

4-3 thermal history

6%

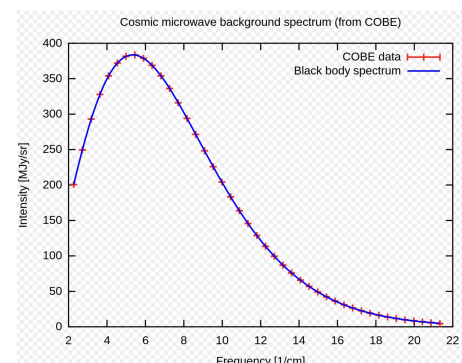


CMB

全天から同じ温度の
電磁波が来る

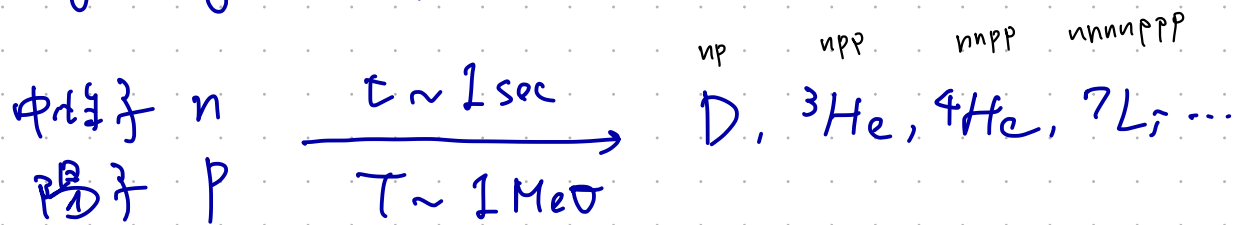
Cosmic Microwave Background
Radiation (CMBR 2.2 CMB)

宇宙背景放射



Nucleosynthesis

* Big Bang 元素合成 (BBN)



詳細略 (宇宙膨張
 ⊕ 原子核反応
 ⊕ 熱力学)

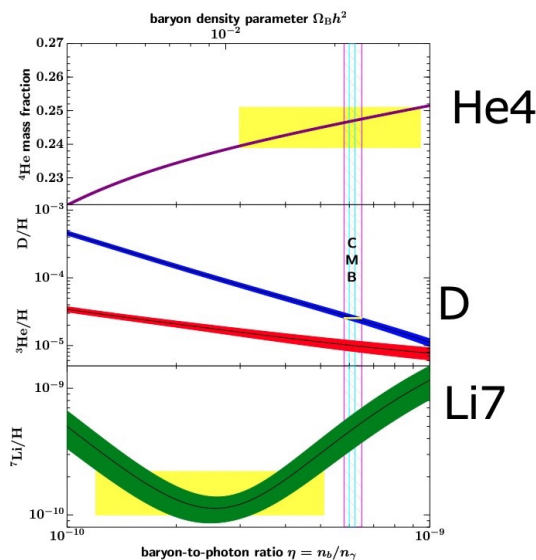
INPUT 宇宙のバリオン数

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \leftarrow \text{バリオン (陽子・中子) の数} / \text{光子の数}$$

$\eta \approx 6.1 \times 10^{-10}$ と決まる。

観測 $\longleftrightarrow$ 理論の予言
 見事に一致!!

D
 ${}^4\text{He}$
 $({}^7\text{Li})$



2.12 コレの起源は?

→ 謎の17. 4-4

4-4

標準宇宙論 (+ 素粒子の SM)

2" は説明 できていない

- Flatness 問題

- Horizon 問題

- やらばの種

温度やらの種 (CMB)

みづのやらの種 (銀河や星の種)

inflation

- Baryon Asymmetry 起源?

- Dark Matter

何? どう来的?

- Dark Energy

何? 何で加速的
expansion?

時間

空間

$R \propto t^{\frac{1}{3}}$

2"

4-A (テスト)

前回出た質問

$$\Omega_{\text{rad}} : \Omega_{\text{mat}} : \Omega_{\text{vac}} \approx 5 \times 10^{-5} : 0.32 : 0.68$$

これはどうやって決まるのか？

→ 良い質問!!



$$\rho_{\text{rad}} \approx \rho_r + \rho_\nu$$

① ρ_r

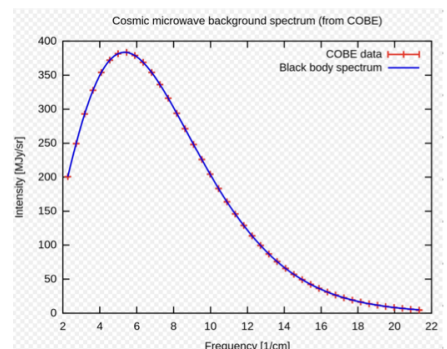
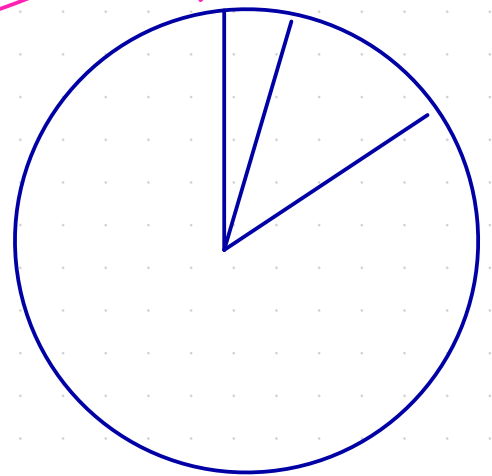
全方向から同じ温度の

電磁波が来る

Cosmic Microwave Background

Radiation (CMBR とは CMB)

宇宙背景放射



$$\rho_r = g_r \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E f(E)$$

$g_r = 2$ $d^3 p = 4\pi p^2 dp = 4\pi E^2 dE$ $f(E) = \frac{1}{e^{E/T} - 1}$

($E = |\vec{p}|$, massless)

$$= \frac{g_r}{2\pi^2} \int \frac{E^3}{e^{E/T} - 1} dE$$

$$= \frac{g_r}{2\pi^2} \cdot T^4 \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (E = Tx)$$

$\frac{\pi^4}{15}$

$$= \frac{\pi^2}{30} g_r T^4$$

$\left(\begin{array}{c} \text{radiation} \\ \text{density} \end{array} \right) \rho_{\text{rad}} = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$

今日2.2.3光の $T_0 = 2.73 \text{ K}$

$$\rho_{r,0} = \frac{\pi^2}{30} \times 2 \times (2.73 \text{ K})^4$$

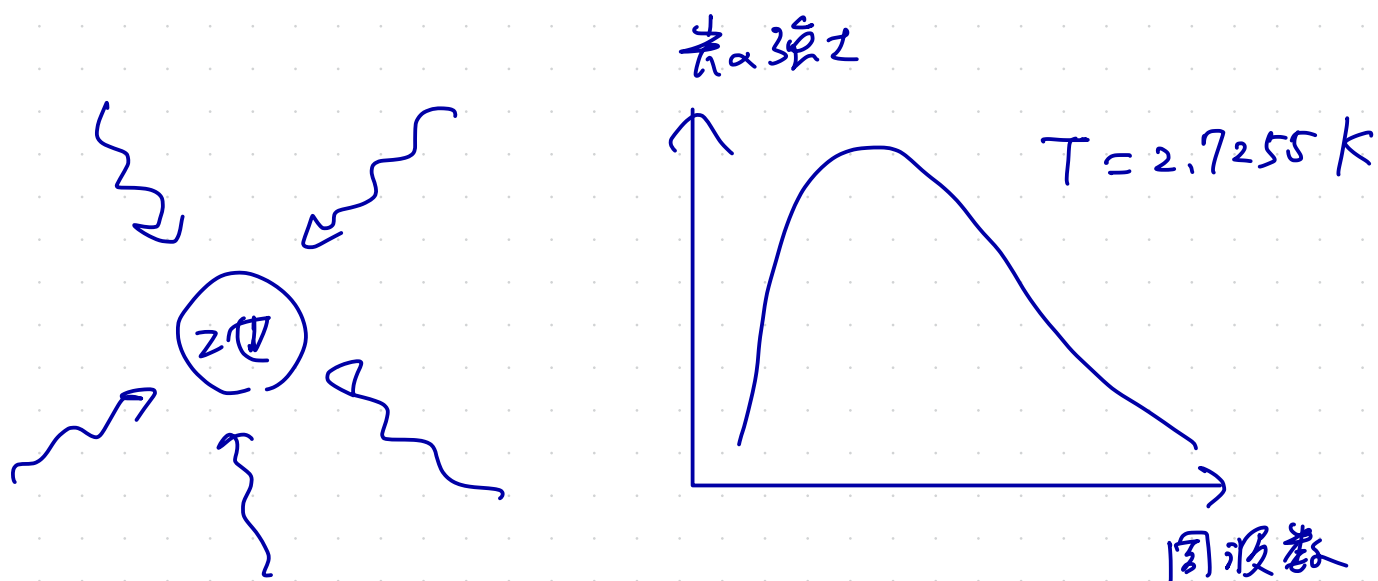
$$\approx 4.65 \times 10^{-34} \text{ g/cm}^3$$

③ $\rho_{r,0}$ 宇宙背景 = 2 - トリ /

また " 見たか、272 K の、 (見たか、272 K !!)

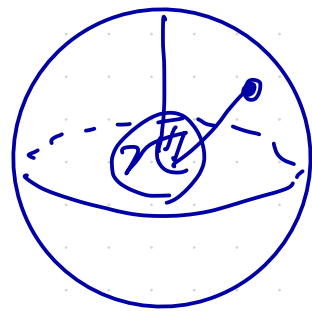
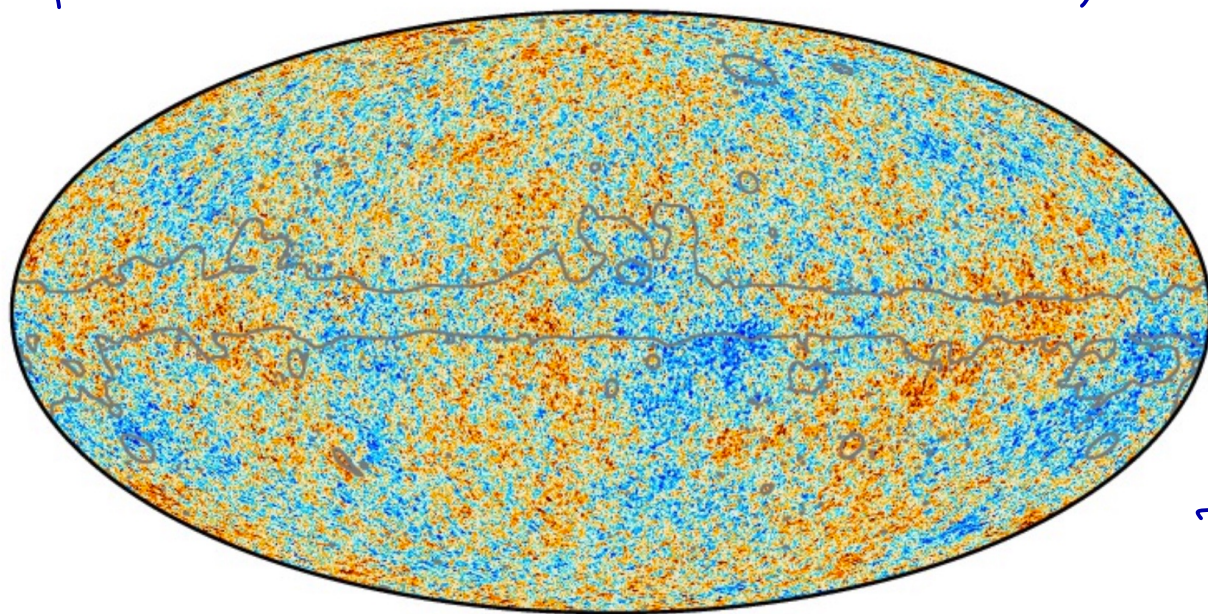
標準宇宙論から $\rho_{r,0} \sim \rho_{r,0}$
と見て、272 K

▶ CMB の非等価性について



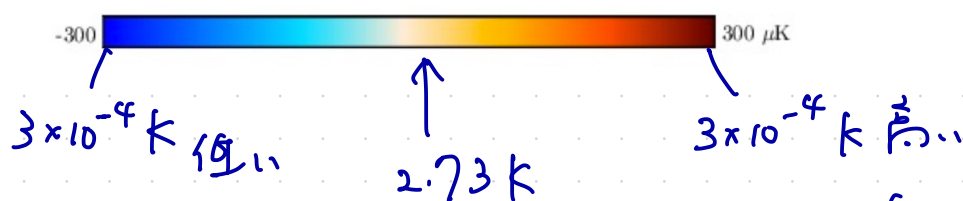
ほぼ等価的だが

わずかな非等価性がある



全天

$T(l, \phi)$



(0.1% < ΔT
温度ゆがみ)

$$T(l, \phi) = \sum_{lm} a_{lm} \underbrace{Y_{lm}(l, \phi)}_{\text{球面調和関数}}$$

球面調和関数

の値

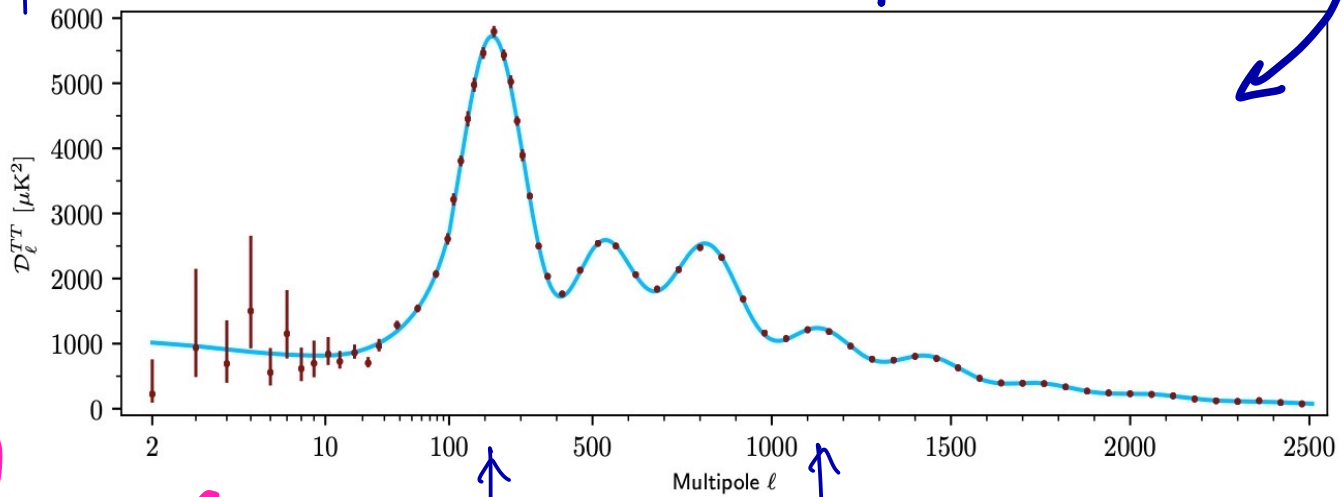
$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_{1,\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\ \vdots \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \text{球面上の} \\ \text{7-12変数} \\ \text{変数} \end{array} \right)$$

$$C_\ell = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell+1} \sum_m |a_{\ell m}|^2$$

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell$$

power spectrum

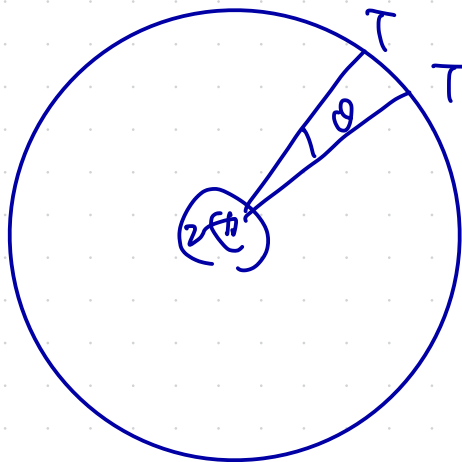
Planck 2018



$$\theta \sim 1^\circ$$

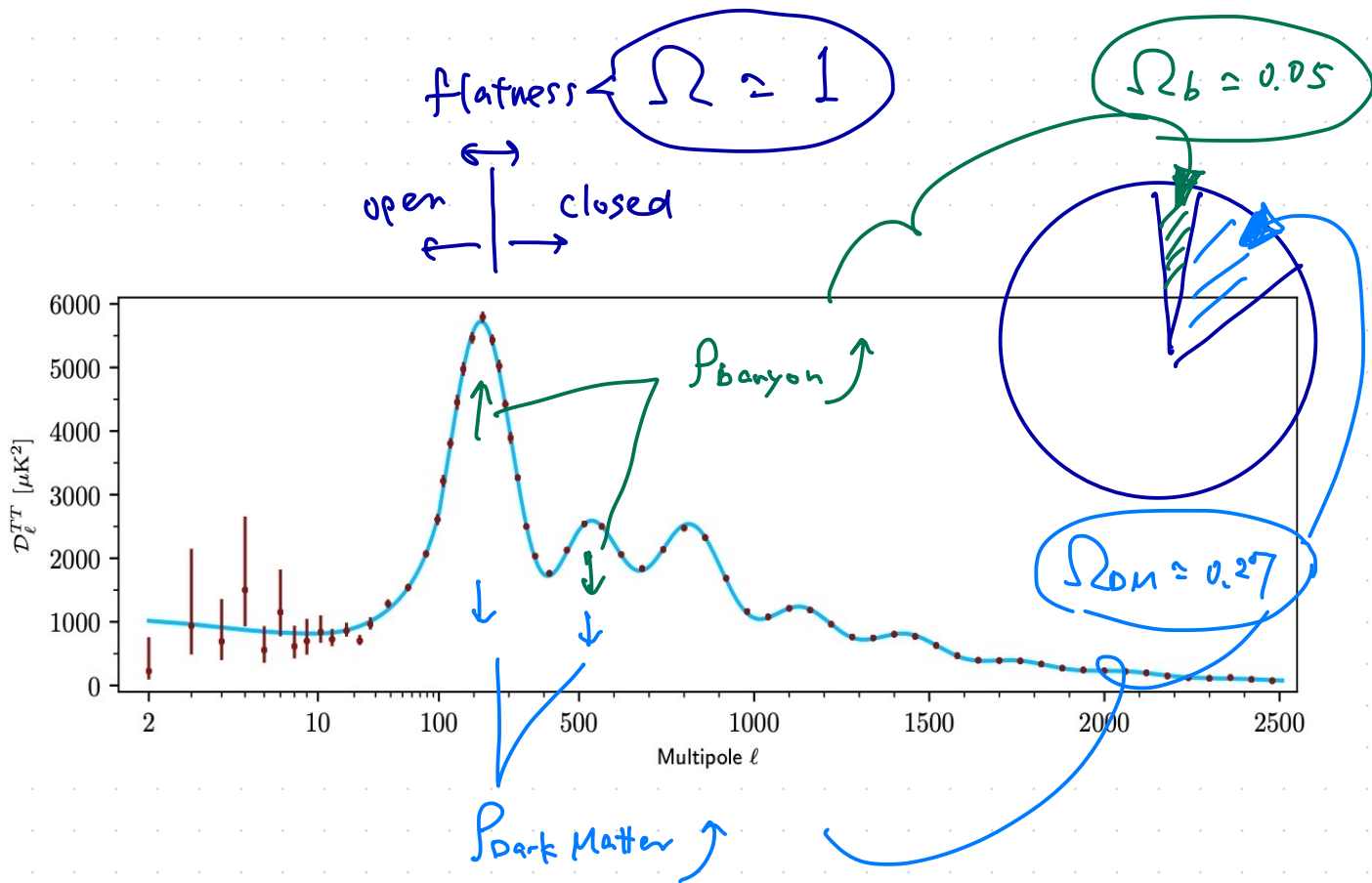
$$\theta \sim 0.1^\circ$$

$$\theta \approx \frac{180^\circ}{\ell}$$



∴ a power spectrum から
得るのは宇宙論パラメータのみ
とわかる

($\therefore$ 2.12 結果 $\Omega \approx 1$ 導出はやりた...))



▶ CMB 以外にも独立に

$\Omega_b \approx 0.05 \leftarrow$ BBN p/s
($\rightarrow$ § 4-3)

$\Omega_{DM} \approx 0.27 \leftarrow$ 宇宙の構造形成
($\therefore$ $\Omega_{DM} \approx 0.27$ 観測)

$$\Omega_{\text{vac}} = 0.68 \quad \text{宇宙は「うしろ」へ膨張している}$$

↪ (1...) "ル 膨張"

$$H \simeq H_0 \sqrt{\Omega_{\text{vac},0} + \Omega_{\text{mat},0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^3}$$

(§4-1)

膨張は天体の距離に比例する。超新星
 $H \propto a$ 依存性から
 $\Omega \propto$ 割合に比例する

長 $\propto$ red-shift
 2... 距離

光子の伝播
 $\Omega \propto$ 距離に比例する

$$4 - A \simeq 2 \dots$$

(天体の距離に

長さは比例関係にある...

