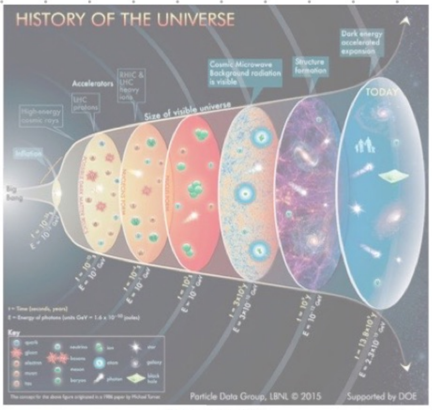


Figure credit;
Particle Data Group
at Lawrence Berkeley National Lab.

素粒子特論

浜口幸一 (東京大学 理学系研究科 物理学専攻)

@お茶の水女子大学, 2023年夏学期

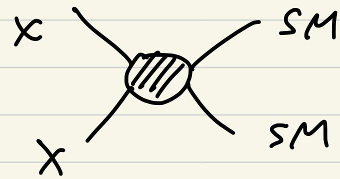
§F 暗黒物質 (つづき)

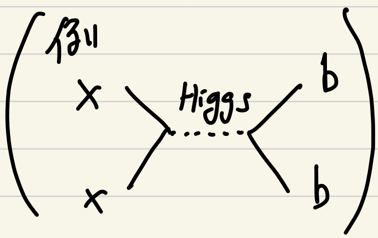
thermal relic

熱的残存量 の計算

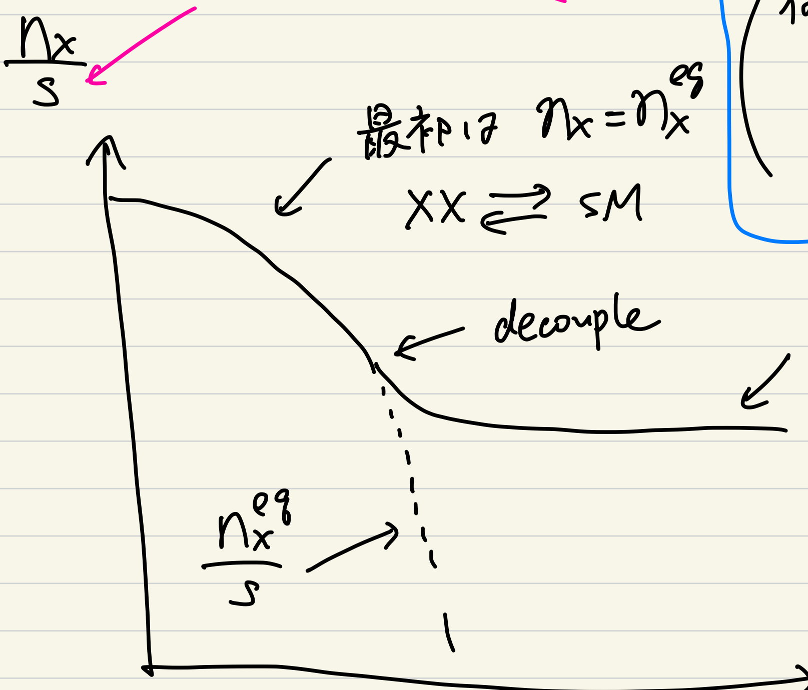
DM relic

仮定
- DM χ
- mass m
- 安定
- SM粒子に対消滅できる





s: エントロピー密度



X-number が保存すれば…

$$\begin{cases} n_X \propto a^{-3} \\ s \propto a^{-3} \end{cases}$$

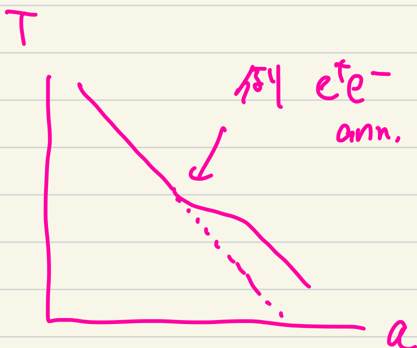
$$\frac{n_X}{s} = \text{const}$$

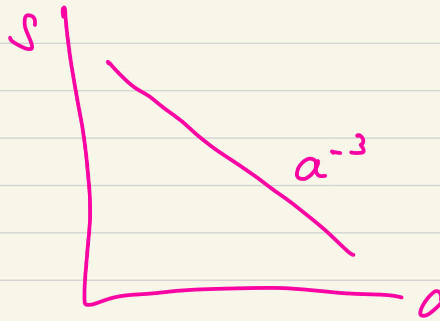
(comoving vol. あたりの数)

$\frac{n_X}{T^3}$?

$T \sim a^{-1}$

$$s = \frac{2\pi^2}{45} \underbrace{g_*}_{g_*(T)} T^3 \propto a^{-3}$$





現在の密度

$$\rho_{x,0} = m_x n_{x,0} = m_x s_0 \left(\frac{n_{x,0}}{s_0}\right)$$

現在

$$= m_x s_0 \left(\frac{n_x}{s}\right)_{\text{decouple}}$$

これを計算する。

$$\rho_{x,0} = \rho_{DM,obs}$$ となる条件は？

▶ Xの分布関数 $f_x(p_x, t)$

（カンタンのため Xの自由度はムシ
（スピン 粒子／反粒子）
real scalar なら 自由度 1.）

［もし熱浴に入っていれば

$$f_x = f_x^{eq} = \frac{1}{e^{E_x/T} \pm 1}$$
］

momentum space で $\mathbb{P}_x \sim \mathbb{P}_x + d\mathbb{P}_x$ にいる

Xの数密度

$$dn_x = \underbrace{\frac{d^3\mathbb{P}_x}{(2\pi)^3}}_{[d\mathbb{P}_x]} f_x(\mathbb{P}_x, t)$$

▶ 対消滅

$$\chi(\mathbb{P}_1)+\chi(\mathbb{P}_2) \to \overbrace{a+b}^{SM}$$

の断面積

$$\sigma_{ann}(P_1P_2\to a.b) = \frac{1}{2E_1\cdot 2E_2\, v_{rel}}$$

$$\times\int\frac{[dP_a]}{2E_a}\frac{[dP_b]}{2E_b}(2\pi)^4\delta^4(P_1+P_2-P_a-P_b)$$

$$\times|\mathcal{M}(P_1P_2\to P_aP_b)|^2 \quad (1)$$

▶ momentum $\mathbb{P}_1$ の χ が対消滅する time scale

$$(\Delta t)^{-1} = \underbrace{\int[d\mathbb{P}_2]f_\chi(\mathbb{P}_2,t)}_{\text{target の momentum で積分}}\times\sigma_{ann}(P_1P_2\to ab)\times v_{rel}$$

$$\left(\underset{m.f.p}{\ell^{-1}}\sim n\sigma v\right)$$

よって

$$\left.\frac{d}{dt} f_X(p_1,t)\right|_{ann} = -\underbrace{(\Delta t)^{-1}\cdot f_X(p_1\ t)}_{対消滅の効果}$$

▶ 両辺 $\int [dp_1]$ として

$$\left.\frac{d}{dt} n_X(t)\right|_{ann} = -\int [dp_1][dp_2]\ f_X(p_1, t)\ f_X(p_2\ t)\ \sigma_{ann}(p_1 p_2 \to ab)\ v_{rel}$$

―――― ②

▶ 次に <u>逆過程 $a+b \to X.X$</u> を考える

$$\sigma(a(p_a) + b(p_b) \to XX)$$

$$= \frac{1}{2E_a 2E_b v_{rel}} \int \frac{[dp_1]}{2E_1} \frac{[dp_2]}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_1 - p_2) |\mathcal{M}(p_a p_b \to p_1 p_2)|^2$$

▶ よって 単位時間当たり 単位体積当たりに

ふえる X は

$$\left.\frac{d}{dt}n_X\right|_{\text{生成}} = \int[dP_a]f_a(P_a)\int[dP_b]f_b(P_b)$$

$$\sigma(P_a P_b \to XX)\, v_{rel.}$$

$$= \int\frac{[dP_a]}{2E_a}\int\frac{[dP_b]}{2E_b}\int\frac{[dP_1]}{2E_1}\int\frac{[dP_2]}{2E_2}\, f_a(P_a)\, f_b(P_b)$$

$$(2\pi)^4\delta^4(P_a+P_b-P_1-P_2)\left|\mathcal{M}(P_aP_b\to P_1P_2)\right|^2$$

③

▶ a, b は SM粒子なので熱浴に入っている

$$f_a = f_a^{eq} = \frac{1}{e^{E_a/T}\pm 1}$$

カンタンのため

$$\simeq e^{-E_a/T} \text{ と近似}$$

(ちゃんとやってもちゃんと出る)

$$-f\cdot f\,(1\pm f^{eq})(1\pm f^{eq})$$
$$+f^{eq}\cdot f^{eq}(1\pm f)(1\pm f)$$

すると $f_a^{eq}(E_a)\, f_b^{eq}(E_b)$

$$= e^{-E_a/T} e^{-E_b/T}$$

積分の中で
$\int^{(4)}(\cdots\cdots)$

$$= e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} \quad \text{---} \quad ④$$

$$= f_X^{eq}(\mathbb{P}_1) f_X^{eq}(\mathbb{P}_2)$$

▶ さらに（~~CP~~がない限り）

$$|\mathcal{M}(P_a, P_b \to P_1 P_2)|^2 = |\mathcal{M}(P_1 P_2 \to P_a P_b)|^2 \quad \text{---} \quad ⑤$$

④⑤を③に代入

$$\frac{d}{dt} n_X \Big|_{\text{生成}} = ③ = \int [dP_1][dP_2] f_X^{eq}(\mathbb{P}_1) f_X^{eq}(\mathbb{P}_2)$$

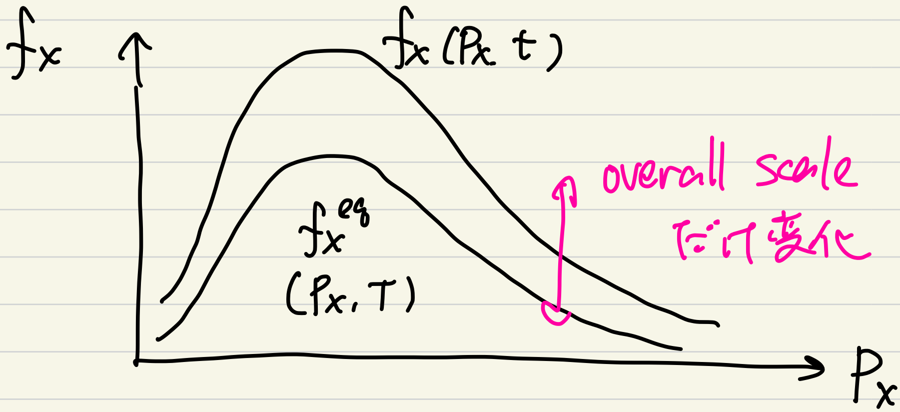
$$\underbrace{\times \frac{1}{2E_1 2E_2} \int \frac{[dP_a]}{2E_a} \frac{[dP_b]}{2E_b} (2\pi)^4 \int^{(4)} (\cdots\cdots) |\mathcal{M}(P_1 P_2 \to ab)|^2}_{①より \; = \sigma_{ann} v_{rel}}$$

▶ よって ② と合わせて

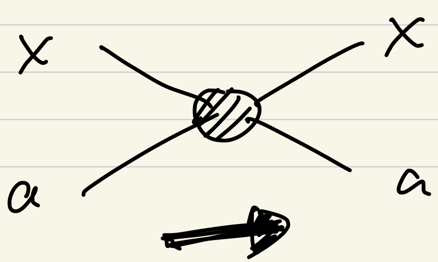
$$\frac{d}{dt}n_x = -\int [dp_1][dp_2]\Big(f_x(p_1)f_x(p_2) - f_x^{eq}(p_1)f_x^{eq}(p_2)\Big) \times \sigma_{ann}(p_1 . p_2 \to a . b)\, v_{rel}$$

▶ さらに

$$f_x(p_1, t) = f_x^{eq}(p_1)\frac{n_x(t)}{n_x^{eq}(t)}$$



(※ kinetic eq.



数は変わらないが
エネルギーのやりとり)

(→ cf. セミナー by 阿部さん 10/5)

すると

$$\frac{d}{dt} n_X = - \boxed{\frac{\int [dP_1][dP_2] f_X^{eq}(P_1) f_X^{eq}(P_2)\, \sigma_{ann} v_{rel}}{(n_X^{eq})^2}} \times \left(n_X^2 - {n_X^{eq}}^2\right)$$

P_1, P_2

/// $\langle \sigma_{ann} v_{rel} \rangle (T)$

thermally averaged cross section

$$= - \langle \sigma_{ann} v_{rel} \rangle \left(n_X^2 - {n_X^{eq}}^2\right)$$

▶ 宇宙膨張の効果を入れる

(何もしなくても $n_X \propto a^{-3}$

$\dot{n}_X = -3 H n_X$)

$\left(H = \frac{\dot{a}}{a}\right)$

$$\boxed{\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = -\langle\sigma_{ann}v\rangle\left(n_\chi^2 - n_\chi^{eq\,2}\right)}$$

DM の Boltzman eq

▶ 計算

無次元化

$$\begin{cases} Y_\chi = \dfrac{n_\chi}{s} \\ z = \dfrac{m_\chi}{T} \end{cases}$$

$$\left(H = \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{rad. dom} \quad a \propto t^{1/2} \right)$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{2H} \\ 3M_p^2 H^2 = \rho_{rad} = \dfrac{\pi^2}{30} g_* T^4 \end{cases}$$

↑

reduced Planck

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_* T^3$$

($g_* \simeq$ const として)

コレが残存量を決める.

$$\frac{d}{dz} Y_\chi = -\sqrt{\frac{8\pi^2 g_*}{45}}\, m_\chi M_{pl} \langle\sigma v\rangle \times \frac{1}{z^2}\left(Y_\chi^2 - Y_\chi^{eq\,2}\right)$$

$$Y_\chi^{eq} \simeq 0.14 \frac{1}{g_*} z^{3/2} e^{-z}$$

これを解くと

$$Y_x(z \to \infty) \simeq \frac{1}{m_x M_{pe} \langle \sigma v \rangle} \left(+ \begin{matrix} \log \\ \text{corr.} \end{matrix} \right)$$

よって

$$\Omega_{x,0} = \frac{\rho_{x,0}}{\rho_{crit,0}} = \frac{m_x n_{x,0}}{\rho_{crit,0}}$$

$$= m_x \left(\frac{n_x}{s} \right)_0 \frac{1}{(\rho_{crit}/s)_0}$$

$$\simeq \frac{1}{M_{pl}\langle\sigma v\rangle}\,\frac{1}{1.8\times10^{-9}\,\mathrm{GeV}}$$

$$\simeq 0.2\left(\frac{1\,\mathrm{pb}}{\langle\sigma v\rangle}\right)$$

つまり

$$\Omega_{X,0} \simeq \Omega_{DM}^{obs} \simeq 0.3$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\langle\sigma_{ann} v\rangle \sim 1\,\mathrm{pb}}$$

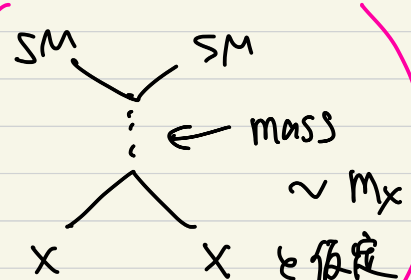
weak scale mass

weak coupling

$$\sigma_{ann} v \simeq \frac{\mathcal{O}(\alpha^2)}{m_X^2} \sim 1\,\mathrm{pb}$$

α^2 ← 10^{-4}

m_X ↑ 100 GeV ~ TeV



と仮定

ちょうど良い!!

"WIMP ミラクル"

※

const とすると

$$\frac{d}{dz} Y_x = -\sqrt{\frac{8\pi^2 g_*}{45}} m_x M_{pl} \langle \sigma v \rangle \times \frac{1}{z^2} \left(Y_x^2 - Y_x^{eq\,2} \right)$$

$\gg 1$

$\sim \frac{M_{pl}}{\alpha^2 m_x}$

$$Y_x \sqrt{\frac{8\pi^2 g_*}{45}} \left(m_x M_{pl} \langle \sigma v \rangle \right) \equiv \tilde{Y}_x$$

$$\frac{d}{dz} \tilde{Y}_x = -\frac{1}{z^2} \left(\tilde{Y}_x^2 - \tilde{Y}_x^{eq\,2} \right)$$

$\uparrow$

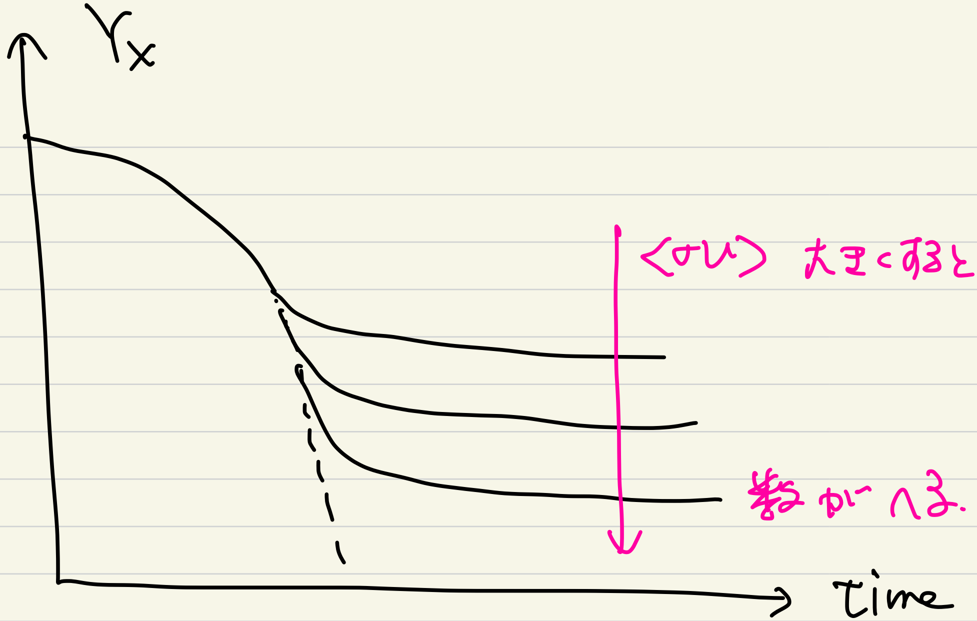
$\int m_x M_{pl} \langle \sigma v \rangle$

$\boxed{e^{-m_x/T}}$

$$\tilde{Y}_x (z \to \infty) \sim \mathcal{O}(1)$$

$$Y_x (z \to \infty) \sim \frac{1}{m_x M_{pl} \langle \sigma v \rangle}$$

e^{-10}


Y_x
⟨σv⟩ 大きくすると
数がへる.
time