2015年度夏学期「基礎方程式とその意味を考える」前半（浜口担当）レポート

2015年5月１３日（水）出題

- **<u>提出期限：2015年　６月３０日（火）</u>**
- 提出先：メールで浜口（　hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp　）まで送って下さい。
  １、２日たっても返信のメールが来ない場合は再度メールを下さい。
  (それでも返信がなければ教務などを通して連絡して下さい。)
  メールでのレポート提出が難しい場合はその旨連絡下さい。
- **<u>レポートには科目名、氏名、学生番号、学年を忘れず明記</u>**すること。
- レポート問題に関する質問などがある場合もメール下さい。
- 成績は前半の量子力学（浜口担当、このレポートで評価）と後半の電磁気学（安東先生担当）の２つを合わせて評価します。
- このレポートや講義ノートは以下の講義のウェブページにも載っています。
  `http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~hama/lectures/2015_Komaba.html`

以下のレポート問題【1】～【3】のうち<u>１つ以上</u>に答えて提出すること。

教科書・参考書・ネット・友人など何でも参考にして良いです。(参考文献などを明記して下さい)。他の受講者などと議論・相談する事も構いませんが、レポートの作成は各自で行い、自分の言葉で記述して下さい。極端に類似したレポートがあった場合には口頭試問を追加する事があります。

【1】(1-1) エネルギー量子仮説からプランク分布

$$U(T,\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)-1} \tag{1}$$

を導いて下さい。

(1-2) 前問 (1-1) をまとめるにあたって良く分からなかったところを挙げ、「どこがどう分からなかったか」を分かりやすく説明して下さい。

【2】 講義の 3-3 節で

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix} \tag{2}$$

という式を紹介しました。そこでも少し言及しましたが、この式の両辺の対数（log）を取ると一見おかしな式（$x+2\pi = x$？）が出て来るように見えます。いったい何が起きているのでしょう？調べて簡潔にまとめて下さい。

（次ページに続く）

【3】１次元中の自由粒子を考える。平面波の重ね合わせの式

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) \exp\left[i(kx - \omega(k)t)\right], \quad \omega(k) = \frac{\hbar}{2m}k^2 \tag{3}$$

に

$$A(k) = \sqrt{\frac{1}{2\pi^{3/2}\sigma_k}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(k-k_0)^2}{\sigma_k^2}\right] \tag{4}$$

を代入して得られる波動関数（波束）について、以下の問いに答えよ。ただし必要なら以下の式を用いてよい。

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{\sigma_k}{\sqrt{\pi}(1+i\epsilon t)}} \exp\left[\frac{\sigma_k^2(k_0/\sigma_k^2 + ix)^2}{2(1+i\epsilon t)} - \frac{k_0^2}{2\sigma_k^2}\right], \quad \epsilon = \frac{\hbar\sigma_k^2}{m} \tag{5}$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{\sigma_k}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+\epsilon^2 t^2}} \exp\left[-\sigma_k^2 \frac{(x-(\hbar k_0/m)t)^2}{1+\epsilon^2 t^2}\right] \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} = \sqrt{\pi} \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, y\, e^{-y^2} = 0 \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^2\, e^{-y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{9}$$

(3-1) $\psi(x,t)$ が１次元中の自由粒子のシュレディンガー方程式を満たすことを示せ。

(3-2) $\psi(x,t)$ が規格化されていることを示せ。

(3-3) 粒子の位置の期待値 $\langle x \rangle$ を求めよ。

(3-4) 粒子の運動量の期待値 $\langle p \rangle$ を求めよ。

(3-5) $(\Delta x)^2 \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ を求めよ。

(3-6) $(\Delta p)^2 \equiv \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$ を求めよ。

(3-7) (3-5)(3-6) より $\Delta x \cdot \Delta p$ の下限値を求めよ。

以上です。