2013 年度夏学期　量子力学 II （浜口）第１回レポート：4/16(火) 出題

- 締切：2013 年５／１５（水）１７：００
- 提出先：物理教務（理学部１号館 208 号室）**入口横　レポートボックス４**
- **レポートには科目名、氏名、学籍番号、学年**を明記し提出する事。
- 成績は、２回のレポートと期末試験（7/23（火）予定）の結果を総合して評価する。
  レポートは以下の講義のウェブページでも公開している。
  http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~hama/lectures/lecture.html

---

【問題１】 $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3)$ と $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ の交換関係 $[\hat{r}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$ を用いて、
$\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/(2m)$ と $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ $(\hat{L}_k = \sum_{\ell m} \epsilon_{k\ell m} \hat{r}_\ell \hat{p}_m)$ が次の交換関係をみたすことを示せ。

(1) $[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0,$　　(2) $[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = 0,$　　(3) $[\hat{L}_k, \hat{L}_\ell] = i\hbar \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{k\ell m} \hat{L}_m.$

【問題２】 以下のことを示したい。

> $\hat{A}$, $\hat{B}$ がエルミート演算子で、$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ とする。このとき、
> $\hat{A}$, $\hat{B}$ の共通の固有ベクトルのセット
>
> $$|n, m\rangle \quad : \quad \begin{cases} \hat{A}\,|n, m\rangle = a_n\,|n, m\rangle \\ \hat{B}\,|n, m\rangle = b_m\,|n, m\rangle \end{cases}$$
>
> があって、任意の $\hat{A}$ の固有ベクトルは $|n, m\rangle$ の線形結合で表せる。— $(\star)$

まず $\hat{A}$ の固有値に縮退がない場合、以下のように示せる。

(i) 任意の $\hat{A}$ の固有ベクトル $|n\rangle$ を考える。つまり $\hat{A}\,|n\rangle = a_n\,|n\rangle$.

(ii) $\hat{B}\,|n\rangle$ というベクトルを考えると、

$$\hat{A}\left(\hat{B}\,|n\rangle\right) = \hat{B}\hat{A}\,|n\rangle = \hat{B}a_n\,|n\rangle = a_n\left(\hat{B}\,|n\rangle\right)$$

よって $\hat{B}\,|n\rangle$ も $\hat{A}$ の固有ベクトルであり、その固有値は a_n である。

(iii) $\hat{A}$ の固有値には縮退がないと仮定したので、$\hat{B}\,|n\rangle \propto |n\rangle$.
適当な比例係数を置いて $\hat{B}\,|n\rangle = b_n\,|n\rangle$.

(iv) したがって $\hat{A}$ の任意の固有ベクトル $|n\rangle$ は $\hat{B}$ の固有ベクトルにもなっている。
よって $(\star)$ が示せた。

問題： $\hat{A}$ の固有値に縮退がある場合に $(\star)$ を示せ。

以上