2013年度夏学期　量子力学 II （浜口）期末テスト

解答例

[1]

$$\hat{J}_{\pm}\left|m\right\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\cdot\hbar\left|m\pm 1\right\rangle$$

より

$$[J_+] = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [J_-] = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\hat{J}_1 = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2}, \quad \hat{J}_2 = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i}$$

より

$$[J_1] = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[J_2] = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ i\sqrt{3}/2 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[J_3] = \hbar\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

[2] 求める同時固有状態を $|J,M\rangle\rangle$ と表し

$$
\begin{aligned}
\hat{j}^2_{A/B}|J,M\rangle\rangle &= 2\hbar^2 \, |J,M\rangle\rangle \\
\hat{J}^2|J,M\rangle\rangle &= J(J+1)\hbar^2 \, |J,M\rangle\rangle \quad (J=0,1,2) \\
\hat{J}_3|J,M\rangle\rangle &= M\hbar \, |J,M\rangle\rangle \quad (M=-J,0,J)
\end{aligned}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
|2,2\rangle\rangle &= |1,1\rangle \\
|2,1\rangle\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\,|1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|0,1\rangle \\
|1,1\rangle\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\,|1,0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|0,1\rangle \\
|2,0\rangle\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}}\,|1,-1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|0,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{6}}\,|-1,1\rangle \\
|1,0\rangle\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\,|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|-1,1\rangle \\
|0,0\rangle\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|0,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|-1,1\rangle \\
|2,-1\rangle\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\,|0,-1\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|-1,0\rangle \\
|1,-1\rangle\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}\,|0,-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|-1,0\rangle \\
|2,-2\rangle\rangle &= |-1,-1\rangle
\end{aligned}
$$

---

[3] [3-1] $$\varphi_{1,0,0}(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_B^3}}e^{-r/a_B} \qquad a_B = \frac{\hbar^2}{mA}$$

[3-2] $$
\begin{aligned}
\int 4\pi r^2 dr |\varphi_{1,0,0}(r,\theta,\phi)|^2 &= \frac{1}{\pi a_B^3} 4\pi \int r^2 dr e^{-2r/a_B} \\
&= \frac{1}{\pi a_B^3} 4\pi \left(\frac{a_B}{2}\right)^3 \int x^2 dx e^{-x} \\
&= \frac{1}{\pi a_B^3} 4\pi \left(\frac{a_B}{2}\right)^3 2 \quad = 1
\end{aligned}
$$

[3-3] $$
\begin{aligned}
\int 4\pi r^2 dr |\varphi_{1,0,0}(r,\theta,\phi)|^2 \cdot r &= \frac{1}{\pi a_B^3} 4\pi \left(\frac{a_B}{2}\right)^4 \int x^3 dx e^{-x} \\
&= \frac{1}{\pi a_B^3} 4\pi \left(\frac{a_B}{2}\right)^4 6 \quad = \frac{3}{2}a_B
\end{aligned}
$$

[3-4] $$
\begin{aligned}
\int 4\pi r^2 dr |\varphi_{1,0,0}(r,\theta,\phi)|^2 \cdot r^2 &= \frac{1}{\pi a_B^3} 4\pi \left(\frac{a_B}{2}\right)^5 \int x^4 dx e^{-x} \\
&= \frac{1}{\pi a_B^3} 4\pi \left(\frac{a_B}{2}\right)^5 24 \quad = 3a_B^2
\end{aligned}
$$

[4] [4-1] $\dfrac{1}{2}\hbar\omega$

[4-2] $\lambda = \widetilde{\lambda}\sqrt{\dfrac{\hbar^3\omega}{m}}$ とすれば $\widetilde{\lambda}$ は無次元量

[4-3] $\langle 0|\hat{H}'|0\rangle = \displaystyle\int dx\ \ \varphi_0(x)^* \cdot \lambda\delta(x) \cdot \varphi_0(x)$

$$\left(\text{where}\ \ \varphi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\xi^{1/2}}e^{-(x/\xi)^2/2}, \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right)$$

$$= \int dx \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi}e^{-x^2/\xi^2}\lambda\delta(x)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}\xi} \quad = \lambda\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \quad = \widetilde{\lambda}\frac{\hbar\omega}{\sqrt{\pi}}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega + \lambda\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\widetilde{\lambda}\right)$$

---

[5] **（・・・ [5] は難しい問題を並べてみました。）**

[5-1] $\hbar = 1$ とする。$\vec{\theta}$ 方向の単位ベクトルを $\vec{n}$ とし、$\theta = |\vec{\theta}|$ とおくと、$\vec{\theta} = \vec{n}\theta$。このとき

$$e^{-i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}}\ \hat{\vec{x}}\ e^{i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}} = (1-\cos\theta)(\vec{n}\cdot\hat{\vec{x}})\vec{n} + (\cos\theta)\hat{\vec{x}} - (\sin\theta)\vec{n}\times\hat{\vec{x}} \quad\text{————}\quad (*)$$

が成り立つ。

（証明）

$$\text{左辺} = \hat{\vec{f}}(\theta), \quad \text{右辺} = \hat{\vec{g}}(\theta), \quad \text{とすると}$$

$$\hat{\vec{f}}(0) = \hat{\vec{g}}(0) = \hat{\vec{x}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\hat{\vec{f}}(\theta) &= e^{-i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}}\ \ [-i\vec{n}\cdot\hat{L}, \hat{\vec{x}}]\ \ e^{i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}} \\
&= e^{-i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}}\left(-\vec{n}\times\hat{\vec{x}}\right)e^{i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}} \\
&= -\vec{n}\times\hat{\vec{f}}(\theta) \\
\frac{d}{d\theta}\hat{\vec{g}}(\theta) &= (\sin\theta)(\vec{n}\cdot\hat{\vec{x}})\vec{n} - (\sin\theta)\hat{\vec{x}} - (\cos\theta)\vec{n}\times\hat{\vec{x}} \\
&= -\vec{n}\times\hat{\vec{g}}(\theta)
\end{aligned}$$

よって両辺、同じ初期条件と同じ微分方程式を満たすので、等しい。（証明終）

したがって (*) より

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{x}}\left(e^{i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}}\,|\vec{a}\rangle\right) &= e^{i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}}\left[(1-\cos\theta)(\vec{n}\cdot\hat{\vec{x}})\vec{n} + (\cos\theta)\hat{\vec{x}} - (\sin\theta)\vec{n}\times\hat{\vec{x}}\right]|\vec{a}\rangle \\
&= e^{i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}}\left[(1-\cos\theta)(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n} + (\cos\theta)\vec{a} - (\sin\theta)\vec{n}\times\vec{a}\right]|\vec{a}\rangle \\
&= \underbrace{\left[(1-\cos\theta)(\vec{n}\cdot\vec{a})\vec{n} + (\cos\theta)\vec{a} - (\sin\theta)\vec{n}\times\vec{a}\right]}_{\text{固有値}}\left(e^{i\theta\vec{n}\cdot\hat{L}}\,|\vec{a}\rangle\right)
\end{aligned}$$

[5-2]

２次元の時は回転軸が１つなので、角運動量演算子は１つだけ。交換関係はない。（群は U(1)。）

４次元の時は回転軸が６つあるので、角運動量演算子も６つ。$i-j$ 平面に対する回転を生成する角運動量を $\hat{L}_{ij}=\hat{x}_i\hat{p}_j-\hat{x}_j\hat{p}_i$ とすると（$i,j=1,2,3,4$）

$$[\hat{L}_{ij},\hat{L}_{k\ell}]=i\hbar\left(\delta_{ik}\hat{L}_{j\ell}-\delta_{i\ell}\hat{L}_{jk}-\delta_{jk}\hat{L}_{i\ell}+\delta_{j\ell}\hat{L}_{ik}\right)$$

にしたがう。

（オマケ） ４次元回転を表す群は $SO(4)$ であり、$SO(4)\sim SU(2)\times SU(2)$ なので、交換関係はさらに規約分解できる。具体的には

$$\begin{aligned}\hat{J}_i&=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{L}_{jk}\quad(i,j,k=1,2,3)\\ \hat{K}_i&=\hat{L}_{4i}\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}[\hat{J}_i,\hat{J}_j]&=\frac{1}{4}\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}\cdot i\hbar\left(\delta_{ac}\hat{L}_{bd}-\delta_{ad}\hat{L}_{bc}-\delta_{bc}\hat{L}_{ad}+\delta_{bd}\hat{L}_{ac}\right)=i\hbar\hat{L}_{ij}=i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{J}_k\\ [\hat{K}_i,\hat{K}_j]&=i\hbar\hat{L}_{ij}=i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{J}_k\\ [\hat{J}_i,\hat{K}_j]&=\frac{1}{2}\epsilon_{iab}\cdot i\hbar[\hat{L}_{ab},\hat{L}_{4j}]=i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_{4k}=i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{K}_k\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\hat{A}_i&=\frac{1}{2}\left(\hat{J}_i+\hat{K}_i\right)\\ \hat{B}_i&=\frac{1}{2}\left(\hat{J}_i-\hat{K}_i\right)\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}[\hat{A}_i,\hat{A}_j]&=i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{A}_k\\ [\hat{B}_i,\hat{B}_j]&=i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{B}_k\\ [\hat{A}_i,\hat{B}_j]&=0\end{aligned}$$

と分解出来る。

（オマケのオマケ）　４次元時空（時間＋空間３次元）中でのローレンツ変換も上記のものと良く似ている。そこでの議論でも（講義で扱ったのとは違う文脈で）粒子のスピンが出てきたりする。調べてみよう。

[5-3]

（参考文献）現代物理学の基礎 3「量子力学 I 」の §6.1。（岩波書店／監修・湯川秀樹）

全ハミルトニアンの固有値は連続スペクトルとなり、厳密な意味での束縛状態は存在しない。

しかし摂動で求めた近似的な束縛状態は「準安定状態」となっており、その寿命（トンネル効果で無限遠方へ飛んで行ってしまう単位時間当たり確率、の逆数）は非常に長い。

「準安定状態」はハミルトニアンの厳密なエネルギー固有状態ではないので、エネルギーを測定するとばらつきが出るが、そのばらつきは非常に小さく、摂動で求めたエネルギーのところに鋭いピークを持つ分布となる。(「エネルギーのばらつき」と上の「寿命」は逆数の関係にある。)

結局、摂動で求めたハミルトニアンの固有状態、固有値は厳密には全ハミルトニアンの固有値、固有状態にはなっていないが、非常に安定な「準安定状態」と、そのエネルギー（の期待値）になっている。