2013 年度夏学期　量子力学 II （浜口）期末テスト

2013 年 7 月 23 日（火）

- 問題は全部で**３ページ（２枚）**ある。
- **解答用紙２枚ともに氏名、学籍番号**を明記する事。
- 講義中に導いた関係式や、配布したプリントの内容は既知として用いても構わない。
- 問題に不適切な設定があると思われる場合は適宜訂正して解いて下さい。

問題【1】角運動量の行列表示

$\hat{J}_k$ $(k=1,2,3)$ は交換関係 $[\hat{J}_j,\hat{J}_k]=i\hbar\epsilon_{jk\ell}\hat{J}_\ell$ をみたす角運動量演算子であるとする。

まず角運動量の大きさが $j=1/2$ のときを考える。$\hat{J}_3$ の固有状態は次の２つの状態をとる。

$$\hat{J}_3\,|m\rangle = m\hbar\,|m\rangle \quad \left(m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

このとき、角運動量演算子 $\hat{J}_k$ を以下のように行列表示すると ⋯

$$\left[J_k^{(j=1/2)}\right]=\begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2}|\hat{J}_k|\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2}|\hat{J}_k|-\frac{1}{2}\rangle \\ \langle-\frac{1}{2}|\hat{J}_k|\frac{1}{2}\rangle & \langle-\frac{1}{2}|\hat{J}_k|-\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix}$$

これはパウリ行列に比例する。

$$\left[J_k^{(j=1/2)}\right]=\frac{\hbar}{2}\sigma_k, \qquad \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

⋯ というのは講義でやった。ここでは角運動量の大きさが $j=3/2$ のときを考えよう。$\hat{J}_3$ の固有状態は次の４つの状態をとる。

$$\hat{J}_3\,|m\rangle = m\hbar\,|m\rangle \quad \left(m=\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

このとき、角運動量演算子 $\hat{J}_k$ の行列表示

$$\left[J_k^{(j=3/2)}\right]=\begin{pmatrix} \langle\frac{3}{2}|\hat{J}_k|\frac{3}{2}\rangle & \langle\frac{3}{2}|\hat{J}_k|\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{3}{2}|\hat{J}_k|-\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{3}{2}|\hat{J}_k|-\frac{3}{2}\rangle \\ \langle\frac{1}{2}|\hat{J}_k|\frac{3}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2}|\hat{J}_k|\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2}|\hat{J}_k|-\frac{1}{2}\rangle & \langle\frac{1}{2}|\hat{J}_k|-\frac{3}{2}\rangle \\ \langle-\frac{1}{2}|\hat{J}_k|\frac{3}{2}\rangle & \langle-\frac{1}{2}|\hat{J}_k|\frac{1}{2}\rangle & \langle-\frac{1}{2}|\hat{J}_k|-\frac{1}{2}\rangle & \langle-\frac{1}{2}|\hat{J}_k|-\frac{3}{2}\rangle \\ \langle-\frac{3}{2}|\hat{J}_k|\frac{3}{2}\rangle & \langle-\frac{3}{2}|\hat{J}_k|\frac{1}{2}\rangle & \langle-\frac{3}{2}|\hat{J}_k|-\frac{1}{2}\rangle & \langle-\frac{3}{2}|\hat{J}_k|-\frac{3}{2}\rangle \end{pmatrix} \quad (k=1,2,3)$$

を求めよ。

（２ページ目に続く）

問題【２】角運動量の合成

２つの角運動量演算子 $\hat{j}_{A,k}$, $\hat{j}_{B,k}$（$k = 1, 2, 3$）を考える。これらは以下の関係式を満たすとする。

$$\left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{A,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{A,m}$$

$$\left[\hat{j}_{B,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{B,m}$$

$$\left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = 0$$

また $\hat{j}_A^2 = \sum_k (\hat{j}_{A,k})^2$、$\hat{j}_B^2 = \sum_k (\hat{j}_{B,k})^2$ とする。今、$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{j}_{A,3}$, $\hat{j}_{B,3}$ の同時固有状態 $|m_1, m_2\rangle$ があり、

$$\begin{aligned}
\hat{j}_A^2 |m_1, m_2\rangle &= 2\hbar^2\, |m_1, m_2\rangle \\
\hat{j}_B^2 |m_1, m_2\rangle &= 2\hbar^2\, |m_1, m_2\rangle \\
\hat{j}_{A,3} |m_1, m_2\rangle &= m_1 \hbar\, |m_1, m_2\rangle \quad (m_1 = -1, 0, 1) \\
\hat{j}_{B,3} |m_1, m_2\rangle &= m_2 \hbar\, |m_1, m_2\rangle \quad (m_2 = -1, 0, 1)
\end{aligned}$$

が成立しているとする。合成角運動量を $\hat{J}_k = \hat{j}_{A,k} + \hat{j}_{B,k}$（$k = 1, 2, 3$）とし、$\hat{J}^2 = \sum_k (\hat{J}_k)^2$ とするとき、$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_3$ の同時固有状態を $|m_1, m_2\rangle$ の線形結合として表せ。答だけでよい。
９つの独立な状態ベクトルについて具体的に係数を書くこと。

問題【３】水素原子の大きさ

３次元空間において、水素原子型ポテンシャル

$$V(r) = -\frac{A}{r} \qquad A > 0$$

中の、質量 m の粒子を考える。

【3-1】 このポテンシャル中の粒子のエネルギー基底状態（最低エネルギー状態）の波動関数 $\varphi_{1,0,0}(r, \theta, \phi)$ の具体形を書け。
（答だけでよい。ボーア半径 a_B を用いて表す場合は、a_B と A や m の関係も書くこと。）

【3-2】 $\varphi_{1,0,0}(r, \theta, \phi)$ が規格化されていることを確認せよ。

【3-3】 この基底状態において、粒子の動径方向の位置 r の期待値 $\langle r \rangle$ を求めよ。

【3-4】 この基底状態において、粒子の動径方向の位置 r の２乗の期待値 $\langle r^2 \rangle$ を求めよ。

（３ページ目に続く）

問題【4】摂動論

１次元中の調和振動子を考える。座標表示でハミルトニアンは

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

で与えられる。

【4-1】 基底エネルギーを書け。（答だけで良い。）

次に、上のハミルトニアンに、摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}' = \lambda\delta(x)$$

を加える。

【4-2】 λ を $m, \hbar, \omega$ を用いて無次元化せよ。

【4-3】 基底エネルギーを λ の１次までで求めよ。

問題【5】

【5-1】 ３次元空間で、$|\vec{a}\rangle$ を位置演算子の固有状態とする（$\hat{x}_k |\vec{a}\rangle = a_k |\vec{a}\rangle$, $k = 1, 2, 3$)。角運動量演算子 $\hat{\vec{L}}$ に対して、状態 $\exp(i\vec{\theta}\cdot\hat{\vec{L}})\,|\vec{a}\rangle$ が位置演算子の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。ただし $\vec{\theta}$ は微小ではない、z 軸に平行でもない、一般の実３次元ベクトルとする。

【5-2】 ３次元空間では回転に付随する角運動量演算子が３つあり、交換関係 $[\hat{J}_j, \hat{J}_k] = i\hbar\epsilon_{jk\ell}\hat{J}_\ell$ をみたしていた。空間が２次元や４次元の場合はどのようになるか、考察せよ。

【5-3】 水素原子型のポテンシャルに一様な電場をかけることを考える（Stark 効果）。実はこのポテンシャルには下限がない。（電場の方向に十分遠ざかるといくらでもポテンシャルエネルギーが下がる。）ということは、摂動で求めた束縛状態の最低エネルギー状態よりもさらに低いエネルギーの状態が存在することになる。

では摂動で求めた、束縛状態のエネルギー準位はいったい何だったのか？考察せよ。

以上です。