2012 年度夏学期　量子力学 II （浜口）追レポート

- 追レポート対象者は物理学科掲示板（理学部１号館２階）に掲載。
- 以下の問題全てに解答し提出すること。部分的な解答は認めない。
  期末試験の問題（似ているが微妙に違う）とその解答例が参考になるはずである。
  期末試験の問題および解答例は以下の講義のホームページに掲載されている。
  `http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~hama/lectures/lecture.html`
  その他、講義ノートや適当な量子力学の教科書・参考書を参考にせよ。
  問題に不適切な設定があると思われる場合は適宜訂正して解くこと。
- レポートには**名前と学籍番号**を忘れずに明記する事。
- 提出期限：２０１２年８月２０日（月）１２：００ 厳守
- 提出先：物理学科教務係（理学部１号館２０８号室）
  または**メールで浜口（ hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp ）まで送ってもよい。**
- 追レポートに関する問い合わせは浜口（ hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp ）まで。

問題【１】角運動量の合成

２つの角運動量演算子 $\hat{j}_{A,k}$, $\hat{j}_{B,k}$ （$k=1,2,3$）を考える。これらは以下の関係式を満たすとする。

$$\left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{A,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{A,m} \tag{1}$$

$$\left[\hat{j}_{B,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{B,m} \tag{2}$$

$$\left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = 0 \tag{3}$$

また $\hat{j}_A^2 = \sum_k (\hat{j}_{A,k})^2$、$\hat{j}_B^2 = \sum_k (\hat{j}_{B,k})^2$ とする。今、$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{j}_{A,3}$, $\hat{j}_{B,3}$ の同時固有状態 $|m_1, m_2\rangle$ があり、

$$\hat{j}_A^2|m_1,m_2\rangle = \hat{j}_B^2|m_1,m_2\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\, |m_1,m_2\rangle \tag{4}$$

$$\hat{j}_{A,3}|m_1,m_2\rangle = m_1\hbar\, |m_1,m_2\rangle \quad (m_1 = \pm\frac{1}{2}) \tag{5}$$

$$\hat{j}_{B,3}|m_1,m_2\rangle = m_2\hbar\, |m_1,m_2\rangle \quad (m_2 = \pm\frac{1}{2}) \tag{6}$$

が成立しているとする。合成角運動量を $\hat{J}_k = \hat{j}_{A,k} + \hat{j}_{B,k}$ （$k=1,2,3$）とし、$\hat{J}^2 = \sum_k (\hat{J}_k)^2$ とするとき、$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_3$ の同時固有状態を $|m_1, m_2\rangle$ の線形結合として表せ。
４つの独立な状態ベクトルについて具体的に係数を書くこと。

（２ページ目に続く）

問題【２】３次元空間での Schrödinger 方程式

講義の前半では３次元空間での Schrödinger 方程式（特に球対称ポテンシャル中の粒子）について扱った。それについて復習しよう。以下の問いに答えよ。

【2-1】 空間３次元を (x, y, z) で表すとき、３次元空間での Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z,t) \quad = \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\right]\psi(x,y,z,t) \qquad (7)$$

で表される。以下ではエネルギー E のエネルギー固有状態として

$$\psi(x,y,z,t) \quad = \quad \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)\varphi(x,y,z) \qquad (8)$$

を考えることにする。$\varphi(x, y, z)$ の満たすべき方程式を $E, V(x, y, z)$ などを用いて表せ。

【2-2】 $x = r\sin\theta\cos\phi$、$y = r\sin\theta\sin\phi$、$z = r\cos\theta$ とし、座標を (r, θ, ϕ) で球座標表示する。以下ではポテンシャルが球対称で r だけにしかよらない場合を考え、$V = V(r)$ とする。波動関数を

$$\varphi(x,y,z) \quad = \quad R(r)Y(\theta,\phi) \qquad (9)$$

と変数分離しよう。さらに角度方向の解は既知であるとし、

$$Y(\theta,\phi) \quad = \quad Y_{\ell m}(\theta,\phi) \qquad (\ell=0,1,2,\cdots,m=-\ell,-\ell+1,\cdots\ell-1,\ell) \qquad (10)$$

とおいてしまおう。ただし $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ は球面調和関数である。
$R(r)$ の満たすべき方程式を $E, V(r), \ell$ などを用いて表せ。
必要なら３次元のラプラシアンや球面調和関数に関する知識を既知として用いてよい。

【2-3】 以下ではポテンシャルの具体形として、３次元の調和振動子

$$V(r)=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2 \qquad (11)$$

を考える。まず、波動関数の原点近くでのふるまいを見るために、

$$R(r)\sim r^k \qquad (r\to 0) \qquad (12)$$

とおいてみよう。これを [2-2] で得られた方程式に代入し、原点近くのふるまいを見ることで、k を ℓ で表せ。ただし複数の可能性がある場合、最も大きい k を採用することとする。

（３ページ目に続く）

【2-4】 変数を無次元化するために

$$r = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \times \rho \tag{13}$$

とする。また [2-3] より原点近くのふるまい $R(r) \sim r^k \sim \rho^k$ であることも分かっているので、

$$R(r) = \rho^k f(\rho) \tag{14}$$

とおこう。$f(\rho)$ の満たすべき方程式を書け。

【2-5】 $R(r)$ を求めよ。ただし規格化は気にしなくてよい。
また必要なら以下の事実を使っても構わない。微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + (2\gamma - 1)\frac{1}{x}\frac{d}{dx} - x^2 + (2\gamma - 4\alpha)\right] f(x) = 0 \tag{15}$$

の解（のうち $\gamma \geq 1$ のときに $x \to 0$ で正則な方）は

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) F\left(\alpha,\, \gamma;\, x^2\right) \tag{16}$$

で与えられる。ただし $F(\alpha, \gamma; z)$ は合流型超幾何関数である。

【2-6】 [2-5] で得られた解において、合流型超幾何関数 $F(\alpha, \gamma; z)$ が有限級数となり波動関数が規格化出来るためには、$-\alpha = n = 0, 1, 2, \cdots$ が必要である。このことから、エネルギーが離散的になる。エネルギー固有値を n, ℓ を用いて表せ。

【2-7】 [2-6] の結果を用いて、基底状態および第１、第２、第３励起状態のエネルギー固有値と、それぞれの縮退度を求めよ。（$\ell \geq 1$ のとき、$m = -\ell, \cdots, \ell$ の $(2\ell + 1)$ 個の状態があることに注意せよ。）

【2-8】 上記の３次元調和振動子の問題を、波動関数を

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_x(x)\varphi_y(y)\varphi_z(z) \tag{17}$$

と x, y, z 方向に変数分離することで解き、エネルギー固有値を $n_x,\, n_y,\, n_z$ を用いて表せ。（ただし $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \cdots$ は $\varphi_x(x),\, \varphi_y(y),\, \varphi_z(z)$ をラベルする量子数である。１次元の調和振動子の知識は既知として用いてよい。）

【2-9】 [2-8] の結果を用いて、基底状態および第１、第２、第３励起状態のエネルギー固有値と、それぞれの縮退度を求め、[2-7] で得られたものと一致することを確認せよ。

（４ページ目に続く）

問題【3】摂動論

【3-1】 1次元中の以下のハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \tag{18}$$

$$\text{where} \qquad V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \infty & (x > a) \end{cases} \tag{19}$$

のエネルギー固有状態を考える。

$$\hat{H}_0 \varphi_n(x) = \varepsilon_n \varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{20}$$

$$\int |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 \tag{21}$$

基底状態の波動関数 $\varphi_1(x)$ と基底エネルギー ε_1 を求めよ。

【3-2】 上のハミルトニアンに、摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}' = \lambda \varepsilon_1 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \tag{22}$$

を加えたとき、基底状態のエネルギーを λ の1次までで求めよ。

以上です。