2012 年度夏学期　量子力学 II （浜口）期末テスト

解答例

[1] 求める同時固有状態を $|J,M\rangle\rangle$ と表し

$$
\begin{aligned}
\hat{j}_A^2|J,M\rangle\rangle &= 2\,|J,M\rangle\rangle && (1)\\
\hat{j}_B^2|J,M\rangle\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2\,|J,M\rangle\rangle && (2)\\
\hat{J}^2|J,M\rangle\rangle &= J(J+1)\hbar^2\,|J,M\rangle\rangle \quad (J=\frac{1}{2},\frac{3}{2}) && (3)\\
\hat{J}_3|J,M\rangle\rangle &= M\hbar\,|J,M\rangle\rangle \quad (M=-J,0,J) && (4)
\end{aligned}
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle\rangle &= |1,\frac{1}{2}\rangle && (5)\\
|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|0,\frac{1}{2}\rangle && (6)\\
|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|0,-\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}|-1,\frac{1}{2}\rangle && (7)\\
|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle\rangle &= |-1,-\frac{1}{2}\rangle && (8)\\
|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}|1,-\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}|0,\frac{1}{2}\rangle && (9)\\
|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}}|0,-\frac{1}{2}\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|-1,\frac{1}{2}\rangle && (10)
\end{aligned}
$$

[2-1]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+V(x,y)\right]\varphi(x,y) \quad = \quad E\varphi(x,y) \tag{11}$$

[2-2]

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(r))-\frac{\ell^2}{r^2}\right]R(r) \quad = \quad 0 \tag{12}$$

[2-3] $R(r)\sim r^k$ を代入すると

$$\left[k(k-1)+k+O(r^2)-\ell^2\right]r^{k-2} \quad = \quad 0 \tag{13}$$

より、$k=\pm\ell$。大きい方を採用して、$k=\ell$。

[2-4] まず素直に代入して

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}+\frac{2E}{\hbar\omega}-\rho^2-\frac{\ell^2}{\rho^2}\right]\left(\rho^\ell f(\rho)\right) \quad = \quad 0 \tag{14}$$

整理して

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+(2\ell+1)\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\rho^2+\frac{2E}{\hbar\omega}\right]f(\rho) \quad = \quad 0 \tag{15}$$

[2-5] $2\gamma-1=2\ell+1,\ 2\gamma-4\alpha=2E/\hbar\omega$ より $\gamma=\ell+1,\ \alpha=(\ell+1-E/\hbar\omega)/2$。よって

$$f(\rho) \quad = \quad e^{-\rho^2/2}F\left(\frac{1}{2}(\ell+1-\frac{E}{\hbar\omega}),\ell+1;\rho^2\right) \tag{16}$$

よって

$$R(r) \quad = \quad r^\ell\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)F\left(\frac{1}{2}(\ell+1-\frac{E}{\hbar\omega}),\ell+1;\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right) \tag{17}$$

[2-6]

$$\frac{1}{2}(\ell+1-\frac{E}{\hbar\omega})=-n$$

より

$$E=(2n+\ell+1)\hbar\omega$$

[2-7] エネルギースペクトルは以下のようになる。

E	$\hbar\omega$	$2\hbar\omega$	$3\hbar\omega$	$4\hbar\omega$
$(n,\ell)_{縮退度}$	$(0,0)_1$	$(0,1)_2$	$(1,0)_1$ $(0,2)_2$	$(1,1)_2$ $(0,3)_2$
縮退度	1	2	3	4

[2-8] 1次元調和振動子の知識より（中略）

$$E = (\frac{1}{2} + n_x)\hbar\omega + (\frac{1}{2} + n_y)\hbar\omega = (1 + n_x + n_y)\hbar\omega$$

よってエネルギースペクトルは以下のようになる。

E	$\hbar\omega$	$2\hbar\omega$	$3\hbar\omega$	$4\hbar\omega$
(n_x, n_y)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)
		(0,1)	(1,1)	(2,1)
			(0,2)	(1,2)
				(0,3)
縮退度	1	2	3	4

[3-1]

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \tag{18}$$

[3-2]

$$\begin{aligned}
E_1^{(1)} &= \int \varphi_1(x)^* \hat{H}' \varphi_1(x) dx && (19)\\
&= \lambda\epsilon_1 \int \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{x}{a} dx && (20)\\
&= \lambda\epsilon_1 \int \frac{2}{a} \sin^2 y \cdot \frac{1}{\pi} y \cdot \frac{a}{\pi} dy && (21)\\
&= \lambda\epsilon_1 \frac{2}{\pi^2} \int \sin^2 y \cdot y dy && (22)\\
&= \lambda\epsilon_1 \frac{2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4} && (23)\\
&= \frac{1}{2} \lambda\varepsilon_1 && (24)
\end{aligned}$$

よって

$$E = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_1 + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{25}$$