2012年度夏学期　量子力学 II （浜口）期末テスト

2012年7月17日（火）

- 問題は全部で**４ページ（２枚）**ある。
- **解答用紙２枚、４ページ全てに氏名、学籍番号**を明記する事。
- 講義中に導いた関係式や、配布したプリントの内容は既知として用いても構わない。
- 問題に不適切な設定があると思われる場合は適宜訂正して解いて下さい。

問題【１】角運動量の合成

２つの角運動量演算子 $\hat{j}_{A,k}$, $\hat{j}_{B,k}$（$k=1,2,3$）を考える。これらは以下の関係式を満たすとする。

$$\left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{A,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{A,m} \tag{1}$$

$$\left[\hat{j}_{B,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{B,m} \tag{2}$$

$$\left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = 0 \tag{3}$$

また $\hat{j}_A^2 = \sum_k (\hat{j}_{A,k})^2$、$\hat{j}_B^2 = \sum_k (\hat{j}_{B,k})^2$ とする。今、$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{j}_{A,3}$, $\hat{j}_{B,3}$ の同時固有状態 $|m_1, m_2\rangle$ があり、

$$\begin{aligned}
\hat{j}_A^2 |m_1, m_2\rangle &= 2\hbar^2\, |m_1, m_2\rangle && (4)\\
\hat{j}_B^2 |m_1, m_2\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2\, |m_1, m_2\rangle && (5)\\
\hat{j}_{A,3} |m_1, m_2\rangle &= m_1\hbar\, |m_1, m_2\rangle \quad (m_1 = -1, 0, 1) && (6)\\
\hat{j}_{B,3} |m_1, m_2\rangle &= m_2\hbar\, |m_1, m_2\rangle \quad (m_2 = \pm\frac{1}{2}) && (7)
\end{aligned}$$

が成立しているとする。合成角運動量を $\hat{J}_k = \hat{j}_{A,k} + \hat{j}_{B,k}$（$k=1,2,3$）とし、$\hat{J}^2 = \sum_k (\hat{J}_k)^2$ とするとき、$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_3$ の同時固有状態を $|m_1, m_2\rangle$ の線形結合として表せ。答だけでよい。６つの独立な状態ベクトルについて具体的に係数を書くこと。

（２ページ目に続く）

問題【2】2次元空間での Schrödinger 方程式

講義の前半では3次元空間での Schrödinger 方程式（特に球対称ポテンシャル中の粒子）について扱った。ここでは**2次元空間での Schrödinger 方程式**（特に回転対称ポテンシャル中の粒子）について考える。以下の問いに答えよ。

【2-1】 空間2次元を (x, y) で表すとき、2次元空間での Schrödinger 方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,t) \quad = \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+V(x,y)\right]\psi(x,y,t) \tag{8}$$

で表される。以下ではエネルギー E のエネルギー固有状態として

$$\psi(x,y,t) \quad = \quad \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)\varphi(x,y) \tag{9}$$

を考えることにする。$\varphi(x,y)$ の満たすべき方程式を $E, V(x,y)$ などを用いて表せ。答だけでよい。

【2-2】 $x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とし、座標を (r,θ) で極座標表示する。以下ではポテンシャルが回転対称で r だけにしかよらない場合を考え、$V = V(r)$ とする。波動関数を

$$\varphi(x,y) \quad = \quad R(r)Y(\theta) \tag{10}$$

と変数分離しよう。波動関数の一価性 $Y(\theta+2\pi) = Y(\theta)$ から角度方向の波動関数は

$$Y(\theta) \quad = \quad \exp(\pm i\ell\theta) \qquad (\ell = 0, 1, 2, \cdots) \tag{11}$$

と表される。$R(r)$ の満たすべき方程式を $E, V(r), \ell$ などを用いて表せ。答だけでよい。必要なら以下の関係式を用いてよい。（$1/r$ の係数や θ 微分項が3次元の場合との違うので注意。）

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad = \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{12}$$

【2-3】 以下ではポテンシャルの具体形として、2次元の調和振動子

$$V(r) \quad = \quad \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \tag{13}$$

を考える。まず、波動関数の原点近くでのふるまいを見るために、

$$R(r) \sim r^k \qquad (r \to 0) \tag{14}$$

とおいてみよう。これを [2-2] で得られた方程式に代入し、原点近くのふるまいを見ることで、k を ℓ で表せ。ただし複数の可能性がある場合、最も大きい k を採用することとする。

（３ページ目に続く）

【2-4】変数を無次元化するために

$$r = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \times \rho \tag{15}$$

とする。また [2-3] より原点近くのふるまい $R(r) \sim r^k \sim \rho^k$ であることも分かっているので、

$$R(r) = \rho^k f(\rho) \tag{16}$$

とおこう。$f(\rho)$ の満たすべき方程式を書け。答だけでよい。

【2-5】$R(r)$ を求めよ。ただし規格化は気にしなくてよい。答だけでよい。
ただし必要なら以下の事実を使っても構わない。微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + (2\gamma - 1)\frac{1}{x}\frac{d}{dx} - x^2 + (2\gamma - 4\alpha)\right] f(x) = 0 \tag{17}$$

の解（のうち $\gamma \geq 1$ のときに $x \to 0$ で正則な方）は

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) F\left(\alpha, \gamma; x^2\right) \tag{18}$$

で与えられる。ただし $F(\alpha, \gamma; z)$ は合流型超幾何関数である。

【2-6】[2-5] で得られた解において、合流型超幾何関数 $F(\alpha, \gamma; z)$ が有限級数となり波動関数が規格化出来るためには、$-\alpha = n = 0, 1, 2, \cdots$ が必要である。このことから、エネルギーが離散的になる。エネルギー固有値を n, ℓ を用いて表せ。

【2-7】[2-6] の結果を用いて、基底状態および第１、第２、第３励起状態のエネルギー固有値と、それぞれの縮退度を求めよ。（$\ell \geq 1$ のとき、式 (11) で得られる２つの状態があることに注意せよ。）

【2-8】上記の２次元調和振動子の問題を、波動関数を

$$\varphi(x, y) = \varphi_x(x)\varphi_y(y) \tag{19}$$

と x 方向と y 方向に変数分離することで解き、エネルギー固有値を n_x, n_y を用いて表せ。答だけでよい。（ただし $n_x, n_y = 0, 1, 2, \cdots$ は $\varphi_x(x)$, $\varphi_y(y)$ をラベルする量子数である。１次元の調和振動子の知識は既知として用いてよい。）

【2-9】[2-8] の結果を用いて、基底状態および第１、第２、第３励起状態のエネルギー固有値と、それぞれの縮退度を求め、[2-7] で得られたものと一致することを確認せよ。

（４ページ目に続く）

問題【３】摂動論

【3-1】 1 次元中の以下のハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \tag{20}$$

$$\text{where} \qquad V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \infty & (x > a) \end{cases} \tag{21}$$

のエネルギー固有状態を考える。

$$\hat{H}_0\varphi_n(x) = \varepsilon_n\varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{22}$$

$$\int |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 \tag{23}$$

特に基底状態は

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \tag{24}$$

で与えられる。<u>基底エネルギー ε_1 を求めよ。答だけで良い。</u>

【3-2】 上のハミルトニアンに、摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}' = \lambda\varepsilon_1\frac{x}{a} \tag{25}$$

を加えたとき、<u>基底状態のエネルギーを λ の 1 次までで求めよ。答だけで良い。</u>
必要であれば以下の積分の式を用いてよい。

$$\int_0^\pi x\sin^2 x\, dx = \frac{\pi^2}{4} \tag{26}$$

以上です。