Duality Between String Junctions and D-Branes on Del Pezzo Surfaces

筑波大学 物理学系
梁 成吉

Minahan-Nemeschansky [1] および Seiberg [2] により、例外群 E_8, E_7, E_6 をグローバル対称性としてもつ強結合超対称共形場の理論の存在が指摘されて久しくなるが、未だこの理論についての十分な理解からは程遠い。そこで、本論では、よりいっそうの理解を得るために、D-brane 探索の方法を用いて E_N 型理論を系統的に把握し、E_N 対称性のアフィン化とその物理的意味付け、および del Pezzo 曲面を用いた幾何学的記述との関連について議論する。

1996 年に、Minahan と Nemeschansky は 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称 $SU(2)$ ゲージ理論についての Seiberg-Witten (SW) 解を拡張し、例外型グローバル対称性をもつ 4 次元超対称共形場の理論の幾何学を楕円ファイバーの特異型を与える小平分類を応用することにより定式化した [1]。この仕事の直後に、Seiberg は E_N 型グローバル対称性 ($E_8, E_7, E_6, E_5 = Spin(10), E_4 = SU(5), E_3 = SU(3) \times SU(2), E_2 = SU(2) \times U(1), E_1 = SU(2)$) をもつ非自明な 5 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称共形場の理論の存在を論じた [2]。フレーバー数 N_f とランク N は $N = N_f + 1$ の関係にある。Seiberg の考察は、I 型超弦とヘテロ弦の S 双対性に基づき、5 次元理論は背景 D-brane に対する探索 D-brane 上に実現される。このときバルクのゲージ対称性が探索 D-brane 上のグローバル対称性に転化する。すなわち、例外型グローバル対称性は、時空のゲージ群としての例外群が転化したものである。

5 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称ゲージ理論は、IIB 超弦の (p, q) 5-brane の成す web 上に実現されることも知られている。論文 [3] では、この 5-brane の web に $\mathcal{N} = 1$ 超対称性を保ちつつ 7-brane を導入することにより、5 次元 E_N 理論を構成した。興味深い結果として、背景の 7-brane 配位は、E_N 型リー環のみならず、そのアフィン版 $\widehat{E}_N$ をもたらすものであることが示された。しかし、バルク 5 次元ではアフィン対称性は明白ではない。それでも、グローバル対称性が何らかの理由により無限次元のアフィン対称性に格上げされるとすれば、これはたいへん面白い現象で是非とも理解しなくてはいけないと筆者は考えてきた。

アフィン対称性 $\widehat{E}_N$ に対応する 7-brane の配位は有理楕円曲面の幾何学として記述される。上述の IIB web 構成と照らし合わせると、この有理楕円曲面を表す 3 次曲線は、5

$\widetilde{E}_0$	E_1	$\widetilde{E}_1$, E_N $(2 \leq N \leq 8)$
$\mathbf{P}^2$	$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$	$\mathbf{P}^2$ with the N points blown up

Table 1: E_N 対称性と del Pezzo 曲面

次元 E_N 理論のうち 1 次元方向を S^1 にコンパクト化した理論のクーロン相を記述するための SW 曲線であると予想された。実際、論文 [4] で得られた $\widehat{E}_N$ 7-brane 配位に対応する 3 次曲線は、論文 [5, 6] で独立に導かれた S^1 上の E_N 理論の SW 曲線と完全に一致した。

論文 [5] では、M 理論の $\mathrm{CY}_3 \times S^1$ 上へのコンパクト化に基づき、S^1 上の E_N 理論の SW 曲線を導いた。ここに登場する CY_3 は、del Pezzo 曲面を 4-サイクルとしてもち、E_N 理論はこの 4-サイクルが消滅する極限で出現するというシナリオである。E_N 対称性と del Pezzo 曲面の対応を表 1 にまとめておく。ただし、$\widetilde{E}_1 = U(1), \widetilde{E}_0 = \emptyset$ で、これらは論文 [2] に続いて出た 2 つの論文 [7, 8] でその存在が明らかにされた。対応する 7-brane 配位も詳しく調べられている [9]。

以上のことから、S^1 コンパクト化した E_N 理論については、IIA 側および IIB 側の記述が存在し、IIA 側では 4-サイクルとしての del Pezzo 曲面が消滅する特異 CY_3 の幾何が用いられ、一方、IIB 側ではアフィン 7-brane を D3-brane によって探索するという記述になる。両者を結び付ける役割を局所ミラー対称性が担っている。ミラー写像を用いると、IIA 側の del Pezzo 曲面に巻き付く D-brane の RR チャージと IIB 側の対応するストリング接合 (junction) の運ぶチャージとの間に関係がつく。これより、D-brane 配位とストリング接合の配位を互いに結び付ける双対関係を示すことができる [10]。

まず、S^1 上の $E_{N=8,7,6}$ 理論の SW 解をみておこう。SW 曲線は

$$\begin{aligned} \widehat{E}_8 : &\qquad y^2 = x^3 + R^2 u^2 x^2 - 2u^5, \\ \widehat{E}_7 : &\qquad y^2 = x^3 + R^2 u^2 x^2 + 2u^3 x, \\ \widehat{E}_6 : &\qquad y^2 = x^3 + R^2 u^2 x^2 - 2Riu^3 x - u^4, \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる。$(x, y, u) \in \mathbf{C}^3$ として、これらは $u-$ 平面を底空間とする有理楕円曲面である。物理的には、$u \in \mathbf{C}$ は複素スカラー場 ϕ の期待値 $\langle \mathrm{Tr}\, \phi^2 \rangle$ で、R は S^1 の半径である。brane の観点では、u-平面は 7-brane に垂直な面であり、SW 曲線の判別式のゼロ点

が 7-brane の位置である。例えば、$\widehat{E}_8$ 曲線の判別式は

$$\Delta_{\widehat{E}_8}(u) = -4u^{10}(2R^6u - 27) \tag{2}$$

となり、$\widehat{E}_8$ の 11 枚の 7-brane のうち $u = 0$ に 10 枚が重なり、$u = \frac{27}{2R^6}$ に 1 枚が位置していることを示している。一般の $\widehat{E}_{N=8,7,6}$ の場合、互いに重なる $(N+2)$ 枚の 7-brane が有限次元リー環 E_N を生成し、それらとは重なることのできない 1 枚の 7-brane (それを $\mathbf{X}_{aff}$ と書こう) の導入により虚ルート δ が生成され、E_N ルート系が $\widehat{E}_N$ のアフィン・ルート系に拡張される。(1) の $\widehat{E}_N$ 曲線に付随する SW 微分 λ_{SW} は対数型で、x-平面上に単純極をもつので、SW 周期積分は 3 つの成分 $(s, a(u), a_D(u))$ からなる。s は λ_{SW} の単純極の留数で決まる。周期積分は、この場合 3 階の常微分方程式である Picard-Fuchs 方程式を解くことにより計算される。

さて、1 枚の D3-brane と 7-brane 達をつなぐ (p, q) ストリング接合は、

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \vec{\omega}_i + p\vec{\omega}^p + q\vec{\omega}^q + n\vec{\delta} \tag{3}$$

と表される。ここでは、ストリングの作る接合格子の基底を適当にとることにより、E_N の基本ウェイトに対応する $\vec{\omega}_i$、(p, q) チャージを運ぶ $\vec{\omega}^p, \vec{\omega}^q$、そして虚ルート $\vec{\delta}$ を定めた。また、$\{\lambda_i\}$ は表現のウェイトベクトルを表すディンキン・ラベル、$n \in \mathbf{Z}$ は $\widehat{E}_N$ のカルタン部分環の derivation の固有値で grade とよばれる量である。このストリング接合が BPS 条件を満たすとき、その中心電荷は

$$Z_{BPS}(u) = pa(u) - qa_D(u) + \frac{n}{R}s \tag{4}$$

である。これを (3) と見比べると、$\vec{\omega}_i$ に対応する項がないことに気づく。これは、今考えている $\widehat{E}_N$ 7-brane 配位では $(N+2)$ 枚が重なっているからである。クォークの質量に相当するパラメータ m_i を入れて SW 曲線を変形すれば、それに応じて SW 微分 λ_{SW} が単純極をもち、中心電荷は、

$$Z_{BPS}(u) = pa(u) - qa_D(u) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i m_i + \frac{n}{R}s \tag{5}$$

と書き表せることになろう。

ここで $R \to 0$ での振る舞いを調べる。このとき 7-brane $\mathbf{X}_{aff}$ は、互いに重なる $(N+2)$ 枚の 7-brane 達から無限に遠去かる。すなわち、$R \to 0$ で $\mathbf{R}^4 \times S^1$ 上の E_N 理論が 4 次元

の E_N 理論に帰着することを意味する。この様子を見るために、探索 D3-brane を $u=0$ の近傍に置いてみる。周期は $a(u),\ a_D(u) \simeq \mathrm{const}\cdot u^\alpha$、$\alpha = \frac{1}{6}\,(\widehat{E}_8), \frac{1}{4}\,(\widehat{E}_7), \frac{1}{3}\,(\widehat{E}_6)$ となる。したがって、中心電荷 (4) の $\frac{n}{R}s$ 項は、S^1 コンパクト化に伴う KK モードの寄与であることがわかる。さらに、ストリング接合 (3) との比較から KK 電荷 n はアフィン・リー環 $\widehat{E}_N$ の grade に同定される。また、$\widehat{E}_N$ のレベル k はストリング接合 $\vec{J}$ によって決まり、$k(\vec{J}) = -q$ となる。

中心電荷を IIA 側で計算するには、del Pezzo 曲面がスピン多様体ではないことに注意して、一般化された向井ベクトル

$$v_S(V) = \mathrm{ch}(V)\sqrt{\frac{\mathrm{td}(T_S)}{\mathrm{td}(N_S)}} \tag{6}$$

を用いる。V は del Pezzo 曲面 S 上のベクトル束、T_S, N_S は、それぞれ、S を CY_3 に埋め込んだときの接束と法束である。$u\to\infty$ での中心電荷は古典公式

$$Z_{cl} = -\int_S e^{-tc_1(S)} v_S(V) \tag{7}$$

から求められる。ここで $c_1(S)$ は S の第 1 チャーン類、t はそれに付随するケーラーパラメータである。曲面 S の 0-、2-、および 4-サイクル (これは S 自身) のケーラーパラメータ $(1, t, t_d = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t})$ と SW 周期の関係がミラー写像で決まり、

$$\begin{pmatrix} s \\ a \\ a_D \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{\sin\pi\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sin^2\pi\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t_d \end{pmatrix} \tag{8}$$

により与えられる。$u\to\infty$ では $Z_{BPS} = Z_{cl}$ が成り立つことから、このミラー写像の下で、ストリング接合のチャージ (p,q,n) と del Pezzo 曲面に巻き付く D-brane 上のベクトル束のデータの間に

$$p = d(V), \qquad q = r(V), \qquad n = -\chi(V) \tag{9}$$

が成り立つことが示される。ただし、$d(V), r(V), \chi(V)$ はそれぞれベクトル束 V の次数、ランク、オイラー数である。この結果はベクトル束の交点数とストリング接合の交点数の比較より Hauer-Iqbal が得たものと一致する [11]。(9) を用いると、例えば、虚ルートの接合 $\vec{\delta}$ は、IIA 側では D0-brane に他ならないことがわかる。先の議論より、$\vec{\delta}$ は KK チャージを運ぶので、D0-brane が M 理論の S^1 コンパクト化に現れる KK モードである事実と整合する。

$\widehat{E}_N$ グローバル対称性のアフィン化を徹底的に理解するには、今後どのように攻めていったらいいのだろうか。上述の結果から、D2-brane は自明な表現以外のディンキン・ラベルをもてるので、D0-D2 の複合系で $\widehat{E}_N$ の表現が実現されると期待される。この複合系の BPS スペクトルを実際に $\widehat{E}_N$ の表現に関係づけられればよいのであるが、まだ判然としない。

なお、この講演は毛利健司氏、大竹由記子氏との共同研究の結果 (hep-th/0007243) に基づくものである。

References

[1] J.A. Minahan and D. Nemeschansky, An $\mathcal{N}$=2 Superconformal Fixed Point with E_6 Global Symmetry, Nucl. Phys. **B482** (1996) 142, hep-th/9608047; Superconformal Fixed Points with E_n Global Symmetry, Nucl. Phys. **B489** (1997) 24, hep-th/9610076.

[2] N. Seiberg, Five Dimensional SUSY Field Theories, Non-trivial Fixed Points and String Dynamics, Phys. Lett. **B388** (1996) 753, hep-th/9608111.

[3] O. De Wolfe, A. Hanany, A. Iqbal and E. Katz, Five-Branes, Seven-Branes and Five-Dimensional E_n Field Theories, JHEP **9903** (1999) 006, hep-th/9902179.

[4] Y. Yamada and S.-K. Yang, Affine 7-brane Backgrounds and Five-Dimensional E_N Theories on S^1, Nucl. Phys. **B566** (2000) 642, hep-th/9907134.

[5] W. Lerche, P. Mayr and N.P. Warner, Non-Critical Strings, del Pezzo Singularities and Seiberg–Witten Curves, Nucl. Phys. **B499** (1997) 125, hep-th/9612085.

[6] J.A. Minahan, D. Nemeschansky and N.P. Warner, Investigating the BPS Spectrum of Non-Critical E_n Strings, Nucl. Phys. **B508** (1997) 64, hep-th/9705237.

[7] D.R. Morrison and N. Seiberg, Extremal Transitions and Five-Dimensional Supersymmetric Field Theories, Nucl. Phys. **B483** (1997) 229, hep-th/9609070.

[8] M.R. Douglas, S. Katz and C. Vafa, Small Instantons, del Pezzo Surfaces and type I′ Theory, Nucl. Phys. **B497** (1997) 155, hep-th/9609071.

[9] O. De Wolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, Uncovering Infinite Symmetries on $[p,q]$ 7-branes: Kac-Moody Algebras and Beyond, hep-th/9812209; 日本語による解説として、特定領域研究 (B) 707 講義録シリーズ No.1 （1999 年 4 月）の中の「Seven-branes, String Junctions and Lie Algebras」(B. Zwiebach 述、大竹由記子・野口雅之 記）がある。

[10] K. Mohri, Y. Ohtake and S.-K. Yang, Duality Between String Junctions and D-Branes on Del Pezzo Surfaces, hep-th/0007243.

[11] T. Hauer and A. Iqbal, Del Pezzo Surfaces and Affine 7-Brane Backgrounds, JHEP **0001** (2000) 043, hep-th/9910054.