Orientifold Planes, Type I Wilson Lines and Non-BPS D-branes *

杉本 茂樹 (京大基研) †

1 はじめに

今年の Summer Institute では、論文 [1] にまとめた事柄から重要そうな話題を選んでお話しました。特に、長いこと謎だった orientifold に関する基本的なパズルに対する我々の解答を Type I や Type II 弦理論の non-BPS な D-brane 系の議論を絡めながら説明しました。ここでは、そのパズルと結論を簡単に紹介し、その結論に至る議論を駆け足で説明します。より詳しい議論は [1] を参照しください。

2 Orientifold plane の復習

良く知られているように、orientifold plane には、いくつかの種類があります。摂動論的に構成できるものには、少なくとも Op^--plane と Op^+-plane の 2 種類があり、これに平行に Dp-brane を n 枚重ねると、ゲージ群がそれぞれ $O(2n)$ と $USp(2n)$ になります。この Op^--plane と Op^+-plane とは、R-R charge の符号が異なりますが、その違いは、string の world-sheet の cross cap に対して割り当てられる符号の違いからきています。別の言葉で言うと、 orientifold plane を囲む $\mathbf{RP}^2$ に対して次式で b を定義し、

$$b \equiv \exp\left(i\int_{\mathbf{RP}^2} B_2\right) = \begin{cases} +1 & (\mathrm{O}p^-\text{-plane}) \\ -1 & (\mathrm{O}p^+\text{-plane}) \end{cases} \tag{2.1}$$

のようにして b の符号が Op^--plane と Op^+-plane とを区別している、と言い直すことができます。ここで、B_2 は NS-NS 2-form field です。

同様のことを R-R field についても考えることができます。結果だけ言うと、$p \le 5$ の場合には R-R $(5-p)$-form field C_{5-p} に対しても

$$c \equiv \exp\left(i\int_{\mathbf{RP}^{5-p}} C_{5-p}\right) = \begin{cases} +1 & (\mathrm{O}p\text{-plane}) \\ -1 & (\widetilde{\mathrm{O}p}\text{-plane}) \end{cases} \tag{2.2}$$

のような符号をとる自由度があり、これらを組み合わせることによって、少なくとも 4 種類の orientifold plane が出来ます。それらを表にまとめると

	Op^-	Op^+	$\widetilde{\mathrm{O}p}^-$	$\widetilde{\mathrm{O}p}^+$
(b,c)	$(+,+)$	$(-,+)$	$(+,-)$	$(-,-)$
R-R charge	$n-2^{p-5}$	$n+2^{p-5}$	$n+1/2-2^{p-5}$	$n+2^{p-5}$
gauge group	$SO(2n)$	$USp(2n)$	$SO(2n+1)$	$USp(2n)$

表 1: 4 種類の Op-planes

* 2000 年 8 月 12 日に Summer Institute 2000 で行ったセミナーの報告です。

† e-mail: sugimoto@yukawa.kyoto-u.ac.jp

のようになります。ここで n は平行に重ねた Dp-brane の枚数です。

この表の Op^--plane と $\widetilde{\mathrm{O}p}^-$-plane を良く見比べると、O$p^-$-plane で n を $n+1/2$ に置き換えれば $\widetilde{\mathrm{O}p}^-$-plane が得られることが分かります。つまり、$\widetilde{\mathrm{O}p}^-$-plane は O$p^-$-plane に 1/2 D$p$-brane を重ねたものであるという解釈をすることができます。 1/2 Dp-brane は、orientifold を定義する $\mathbb{Z}_2$ の作用での移り先が自分自身であるような Dp-brane のことで、これは orientifold plane に stuck されていて離れられないものです。

ここでは結果だけを駆け足で説明しましたが、より詳しい解説は [2] 等にあるのでそちらを参照してください。

3　パズル

表 1 は $p \le 5$ の場合でしたが、$\widetilde{\mathrm{O}p}^-$-plane は O$p^-$-plane に 1/2 D$p$-brane を重ねたものであるという解釈が正しいとすると、p の値が 6,7 や 8 でも $\widetilde{\mathrm{O}p}^-$-plane は構成することができそうに思えます。例えば、naive に T-dual を取っても良いとすると、O5$^-$-plane と O5$^-$-plane + 1/2 D5-brane を平行に並べてこれに直交方向に T-dual を取ると、O6$^-$-plane + 1/2 D6-brane が得られるので、$\widetilde{\mathrm{O}5}^-$-plane が存在すれば、$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-plane は存在しそうです。さらに同様の操作で T-dual を取っていけば、$\widetilde{\mathrm{O}7}^-$-plane や $\widetilde{\mathrm{O}8}^-$-plane も得られるように思われます。

ところが、$p \ge 6$ の $\widetilde{\mathrm{O}p}^-$-plane は存在しないと思われる理由があります。まず、$p=7$ の場合を説明しましょう。仮に $\widetilde{\mathrm{O}7}^-$-plane があったとして、これに D3-brane を 1 枚重ねることを考えてみましょう。この D3-brane の上の理論は 4 次元の $SU(2)$ ゲージ理論になりますが、D3-brane と 1/2 D7-brane の間をつなぐ string から $SU(2)$ の基本表現に属する massless fermion が一つ生じます。よく知られているように、$SU(2)$ ゲージ理論で、doublet fermion が奇数個あるような理論は、Witten のアノマリー [3] のために inconsistent です。従って、$\widetilde{\mathrm{O}7}^-$-brane はあってはならない。

$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-brane の場合もよく似たことが起こります。$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-brane があったとして、これに D2-brane を重ねてみます。そうすると、D2-brane 上の理論は 3 次元の $SU(2)$ ゲージ理論で、doublet fermion が一つあるような理論になります。この理論では、fermion の 1-loop ダイアグラムから、次のような Chern-Simons 項が生じることが知られています。

$$S_{\mathrm{CS}}^{1-\mathrm{loop}} = \pm\frac{1}{2}\,I_{\mathrm{CS}}(A) \tag{3.1}$$

$$I_{\mathrm{CS}}(A) \equiv \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{tr}\left(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{3.2}$$

このとき、$\pi_3(SU(2))=\mathbb{Z}$ の non-trivial な元に対応する大きなゲージ変換のもとで理論が不変であるためには、(3.1) の右辺の I_{CS} の前の係数は整数でないとならないのですが、doublet fermion の数が奇数個のときには半奇数になってしまいます。したがって、$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-brane もあってはならないような気がしてきます。

このように、$p \ge 6$ の $\widetilde{\mathrm{O}p}^-$-plane には存在するであろう理由と存在しないであろう理由があり、互いに矛盾しています。これはいったいどうしたことでしょうか？上の議論のどこが間違っていたのでしょうか？果たして $\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-plane や $\widetilde{\mathrm{O}7}^-$-plane 等は存在するのでしょうか？気になりますね。

4　結論

それでは、途中の議論を後回しにして先に結論を述べます。まず、$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$ は Type IIA で cosmological constant が non-zero の時 (massive IIA theory) に存在します。もっと詳しく言うと、cosmological constant の最小単位が 1 であるような規格化をしたときに、$\mathrm{O}6^-$-plane は cosmological constant が偶数のときに存在し、$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-plane は cosmological constant が奇数のときに存在します。このとき、前節で述べたようなアノマリーは生じないことも分かります。一方、$\widetilde{\mathrm{O}7}^-$ や $\widetilde{\mathrm{O}8}^-$ はやはり存在しません。これらは T-duality によって得られることはなく、$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$ が存在することと矛盾しません。さらに、$\widetilde{\mathrm{O}p}^-$-plane は $\mathrm{O}p^-$-plane に 1/2 Dp-brane が重なったものというより、 $\mathrm{O}p^-$-plane に D$(p+2)$-brane が spherical に覆ったものとして捉えるべきであることが分かります。このように解釈したときに、1/2 Dp-brane の charge が正しく導出できることも示せます。

5　種明かし

まず、T-duality をもっと詳しく見ていきましょう。3 節で、$\mathrm{O}5^-$-plane と $\widetilde{\mathrm{O}5}^-$-plane とを平行に並べて T-dual をとると、$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-plane が得られるように思われると言いましたが、この様子をより精密に調べてみます。

$\mathrm{O}5^-$-plane と $\widetilde{\mathrm{O}5}^-$-plane とを区別するのは、(2.2) で $p=5$ を入れたもの、つまり

$$c \equiv \exp\left(i\,C_0\right) = \begin{cases} +1 & (\mathrm{O}5^-\text{-plane}) \\ -1 & (\widetilde{\mathrm{O}5}^-\text{-plane}) \end{cases} \tag{5.1}$$

でした。

今、O5-plane に垂直な方向の座標を一つ選んで、x と書くことにし、$x=0$ に $\mathrm{O}5^-$-plane, $x=a$ に $\widetilde{\mathrm{O}5}^-$-plane を置くことにします。そうすると、(5.1) により、

$$\left.\frac{C_0}{2\pi}\right|_{x=0} = k, \quad \left.\frac{C_0}{2\pi}\right|_{x=a} = l+\frac{1}{2} \qquad (k,l\in\mathbb{Z}) \tag{5.2}$$

なので、R-R 1-form field strength $G_1 = dC_0$ の x 方向の積分は、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^a G_1 = l-k+\frac{1}{2} \tag{5.3}$$

のようになります。この式の左辺の 2 倍は、x 方向に T-dual を取ったあとには R-R 0-form field strenght $G_0/2\pi$ と同一視されるので、T-dual を取ると $G_0/2\pi$ の値は奇数になります。$G_0/2\pi$ の 2 乗が cosmological constant なので、 massive IIA theory に移ったことになります。従って、T-duality と矛盾がないためには、$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-plane は cosmological constant が奇数であるような、massive IIA theory でのみ存在できると言うことができそうです。

では、3 節で述べたアノマリーはどのようにして回避されるのでしょうか？これは、次のように理解することができます。$\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-plane に D2-brane を重ねた場合を考えると、G_0 が non-zero の時には D2-brane の上の理論に

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{1}{2}\frac{G_0}{2\pi}\,I_{\mathrm{CS}}(A) \tag{5.4}$$

のような Chern-Simons 項が生じることが知られています [4]。ただし、右辺の係数は、D2-brane を $\widetilde{\mathrm{O}6}^-$-plane から引き離したときに、普通の D2-brane の action を再現するように決めました。今、$G_0/2\pi$ の値

が奇数だとするとき、(3.1) と (5.4) とを合わせると、$I_{\rm CS}$ の前の係数がちょうど整数になります。こうして 3 節で述べたアノマリーも正しく相殺されることが分かりました。

さて、$\widetilde{\rm O6}^-$-plane が存在するとなると、T-duality によって $\widetilde{\rm O7}^-$-plane が得られるような気がしてきます。しかし、これはできません。このことを説明しましょう。$\widetilde{\rm O7}^-$-plane を T-duality によって得るには、O6$^-$-plane と $\widetilde{\rm O6}^-$-plane を並べる必要があります。しかし、上の議論から分かるように、O6$^-$-plane と $\widetilde{\rm O6}^-$-plane は $G_0/2\pi$ がそれぞれ偶数、奇数の background でのみ存在できるので、この両方を並べたかったら、間に G_0 の値を変える domain wall が必要です。この役割を果たす domain wall は D8-brane です。例えば、O6$^-$-plane を D8-brane で spherical に覆うなどします。実は、この、O6$^-$-plane を D8-brane で spherical に覆ったものは $\widetilde{\rm O6}^-$-plane と解釈されるのです。実際、D8-brane の上のゲージ場の field strength F を O6$^-$-plane を覆う $S^2/\mathbb{Z}_2 = \mathbf{RP}^2$ の上で積分すると、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{RP}^2} F = \frac{1}{2} + n, \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{5.5}$$

のような量子化条件に従うことが知られており [5, 6, 1]、これによって、1/2 D6-brane charge が D8-brane の上の Chern-Simons 項を通じて誘導されることが分かります。従って、この系は、O6$^-$-plane と $\widetilde{\rm O6}^-$-plane を用意したつもりが、実は $\widetilde{\rm O6}^-$-plane が 2 つ並んだ系であるということになり、T-dual を考えても、$\widetilde{\rm O7}^-$-plane は得られません。

このような考察から、$\widetilde{\rm O6}^-$-plane が存在し、$\widetilde{\rm O7}^-$-plane や $\widetilde{\rm O8}^-$-plane が存在しないことが T-duality と矛盾しないことが分かり、3 節で述べたパズルに対するすっきりした理解が得られました。

6 Non-BPS D-brane によるアプローチ

前節で説明したことを、non-BPS D-brane を用いて考察しなおしてみます。まず、Type I 理論の Dp-brane charge は、$\widetilde{\rm KO}(S^{9-p}) = \pi_{8-p}(O(32))$ で分類されることを思い出します [7]。今、

$$\pi_{8-p}(O(32)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 1, 5 \\ \mathbb{Z}_2 & p = -1, 0, 7, 8 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.1}$$

なので、特に、$p = -1, 0, 7, 8$ に対応した安定な non-BPS Dp-brane charge が存在することが分かります。

さて、Type I 理論を T^2 にコンパクト化して、その上に non-BPS D7-brane を一つ置いてみます。あとで言うように、non-BPS D7-brane の charge は T^2 上で cancel していないといけないのですが、仮にこのような配位を考えてみるとどうなるのかを見てみましょう。

Non-BPS D7-brane を置くことは、T^2 の座標 x^1, x^2 に関する Wilson lines $g_1, g_2 \in O(32)$ を次のように取ることと同じです。

$$g_1 = \mathrm{diag}(- + - + + \cdots +) \tag{6.2}$$

$$g_2 = \mathrm{diag}(- - + + + \cdots +) \tag{6.3}$$

実際、これらを spinor 表現で表現すると、$g_1 = \Gamma^1\Gamma^3$, $g_2 = \Gamma^1\Gamma^2$ のようになるので、

$$g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1 = \begin{cases} +1 & (\text{vector 表現}) \\ -1 & (\text{spinor 表現}) \end{cases} \tag{6.4}$$

を満たし、$\pi_1(O(32))=\mathbb{Z}_2$ の非自明な元に対応していることが分かります。

ここで、x^1, x^2 方向に T-dual を取ることを考えましょう。Type I の non-BPS D7-brane は Type IIB の D7-$\overline{\mathrm{D7}}$ pair を $\mathbb{Z}_2$ (unoriented projection の操作) で割った系だと解釈されるので、2 方向について T-dual を取ると、Type IIB の D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ pair を $T^2/\mathbb{Z}_2$ の orientifold に置いた系になります。このとき、$T^2/\mathbb{Z}_2$ の 4 つの fixed point にある orientifold plane は O7$^-$-plane です。

一方、同じ系を D9-brane の上の Wilson lines (6.2), (6.3) で考えることにすると、これは T-dual を 2 回取ると 1/2 D7-brane が 4 つの fixed point にあることを意味しているので、$\widetilde{\mathrm{O7}}^-$-plane が 4 つある系に移ります。従って、上と合わせると、

$$(\mathrm{O7}^-\text{-plane})\times 4+(\mathrm{D9}\text{-}\overline{\mathrm{D9}}\text{ pair})\simeq(\widetilde{\mathrm{O7}}^-\text{-plane})\times 4 \qquad (\mathrm{mod}\quad \mathrm{D7}\text{-branes}) \tag{6.5}$$

のような関係が得られたことになります。この系をさらに T-dual を取っていくと、より一般に

$$(\mathrm{O}p^-\text{-plane})\times 4+(\mathrm{D}(p+2)\text{-}\overline{\mathrm{D}(p+2)}\text{ pair})\simeq(\widetilde{\mathrm{O}p}^-\text{-plane})\times 4 \qquad (\mathrm{mod}\quad \mathrm{D}p\text{-branes}) \tag{6.6}$$

のような関係が得られます。これらの関係は後で用います。

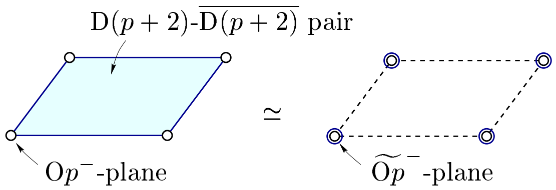

図 1: Non-BPS 系と Orientifold

さて、前節で $\widetilde{\mathrm{O7}}^-$-plane は存在しないと言いました。これを non-BPS D-brane の観点から議論してみます。Type I の non-BPS D0-brane は、 Sen が議論したように、ゲージ群 $O(32)$ の spinor 表現に属します [8]。そうすると、(6.4) によって、この non-BPS D0-brane にとっては、x^1 方向の Wilson line (6.2) と x^2 方向の Wilson line (6.3) とは可換ではなくなります。一般に、2 方向の Wilson line は互いに可換であるべきなので、これらの Wilson lines は許されないことが分かります。Type I の摂動論的な spectrum には、 $O(32)$ の spinor 表現に属するものは存在しないので、Wilson lines (6.2), (6.3) は一見許されそうなのですが、非摂動的な spectrum まで考慮に入れると許されなくなるという訳です。

では、non-BPS D0-brane の存在と矛盾しない Wilson line の入れ方はどのようなものでしょうか？Type I の T^n コンパクト化を考え、この T^n に沿った x^i 方向の Wilson line を $g_i\in O(32)$ と書くことにすると、

$$(a)\quad \det g_i=1 \quad (\text{for }\ {}^\forall i) \tag{6.7}$$

$$(b)\quad g_i^{-1}g_j^{-1}g_ig_j=1\ \text{ in spinor rep.} \quad (\text{for }\ {}^\forall i,j) \tag{6.8}$$

という 2 つの条件が必要であることが分かります。(6.7) は、non-BPS D0-brane が $O(32)$ の chiral な spinor であるために、$\det g_i=-1$ である g_i のように chirality をひっくり返すような作用は理論の対称性ではなくなるからです。これらの条件から、Wilson line として許されるものが大きく制限され、特に、T-duality によって $\widetilde{\mathrm{O7}}^-$-plane や $\widetilde{\mathrm{O8}}^-$-plane が得られるような Wilson line は許されなくなります。

では、$\widetilde{\mathrm{O6}}^-$-plane はどうでしょうか？Type I を T^3 コンパクト化し、Wilson lines

$$g_1 = \mathrm{diag}(----+++++\cdots+) \tag{6.9}$$

$$g_2 = \mathrm{diag}(--++--+++\cdots+) \tag{6.10}$$

$$g_3 = \mathrm{diag}(-+-+-+-++\cdots+) \tag{6.11}$$

を考えてみましょう。ここで、T^3 の全ての方向に T-dual を取ると、$T^3/\mathbb{Z}_2$ の 8 つの fixed point が全て $\widetilde{\mathrm{O6}}^-$-plane であるような orientifold が得られます。$\widetilde{\mathrm{O6}}^-$-plane が得られる Wilson line で (6.7) と (6.8) を正しく満たすものは本質的に (連続変形を除いて) これが unique であり、特に、O6$^-$-plane と $\widetilde{\mathrm{O6}}^-$-plane が共存するような配位は得られないことも分かります。これは、前節で得られた結果と同じですね。

さらに、(6.6) の関係によると、

$$(\mathrm{O6}^-\text{-plane}) \times 4 + (\mathrm{D8}\text{-}\overline{\mathrm{D8}}\ \text{pair}) \simeq (\widetilde{\mathrm{O6}}^-\text{-plane}) \times 4 \qquad (\mathrm{mod} \quad \mathrm{D6}\text{-branes}) \tag{6.12}$$

ですが、ここで D8-brane と $\overline{\mathrm{D8}}$-brane とを図 2 のように連続変形し、O6$^-$-plane から離れた所で D8-brane と $\overline{\mathrm{D8}}$-brane を対消滅させると、ちょうど O6$^-$-plane を D8-brane が spherical に覆っているような図になります。

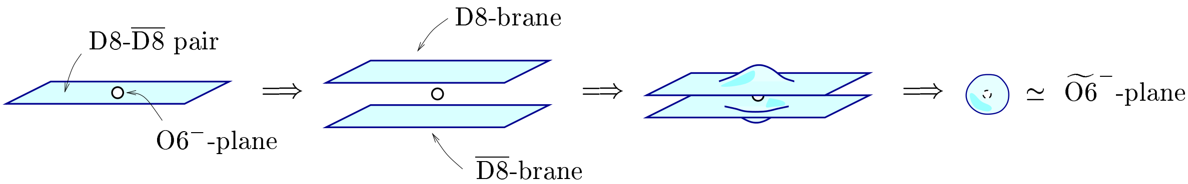

図 2: 変形の様子

図 1 の関係を思い出すと、O6$^-$-plane を D8-brane が spherical に覆ったものが $\widetilde{\mathrm{O6}}^-$-plane に他ならないことが分かります。これも前節で述べたことです。

この対消滅の様子をもう少し詳しく見てみましょう。orientifold $T^3/\mathbb{Z}_2$ で、 $\mathbb{Z}_2$ で割る前の T^3 の座標を x^1, x^2, x^3 とし、O6$^-$-plane の一つが $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ にあり、 D8-brane と $\overline{\mathrm{D8}}$-brane は x^1, x^2 方向に広がっているとします。このとき、D8-brane と $\overline{\mathrm{D8}}$-brane をつなぐ open string から生じるタキオン場 T は、

$$T(-x^1, -x^2) = -T(x^1, x^2) \tag{6.13}$$

を満たすことが分かります。特に、$T(0,0) = 0$ であることに注意してください。O6$^-$-plane を離れたところで対消滅を起こさせるために、$T(x^1, x^2) \neq 0$ であるとしましょう。そうすると、(6.13) によって、(x^1, x^2) 平面で原点のまわりを一周するときに T の phase は奇数回まわることになります。つまり、奇数個の vortex が生じます。従って、 Sen の議論 [9] によって、奇数個の 1/2 D6-brane charge が誘導されることが分かります。これは、(5.5) で説明したことに他なりません。

7 おわりに

さて、矛盾が解決されて、すっきりしましたね？また、一見、全然関係なさそうな Orientifold plane と Type I non-BPS D-brane とが実は深い仲にあることも分かりました。非常に駆け足になってしまったので、分かりにくかったかも知れません。これに懲りずに、是非、[1] を参照してみてください。

今回の Summer Institute は僕にとって大変貴重な経験になりました。このような機会を与えてくださった世話人の皆さんと辛抱強く話を聞いてくださった参加者の皆さんに感謝したいと思います。

参考文献

[1] Y. Hyakutake, Y. Imamura and S. Sugimoto, JHEP **0008** (2000) 043, `hep-th/0007012`, *"Orientifold Planes, Type I Wilson Lines and Non-BPS D-branes."*

[2] A. Hanany and B. Kol, JHEP **0006** (2000) 013, `hep-th/0003025`, *"On Orientifolds, Discrete Torsion, Branes and M Theory."*

[3] E. Witten, Phys. Lett. **117B** (1982) 324, *"An SU(2) Anomaly."*

[4] E. Bergshoeff and P. K. Townsend, Nucl. Phys. **B490** (1997) 145, `hep-th/9611173`, *"Super D-branes."*

[5] O. Aharony and A. Rajaraman, `hep-th/0004151`, *"String Theory Duals for Mass-deformed SO(N) and USp(2N) N=4 SYM Theories."*

[6] D. S. Freed and E. Witten, `hep-th/9907189`, *"Anomalies in String Theory with D-Branes."*

[7] E. Witten, JHEP **9812** (1998) 019, `hep-th/9810188`, *"D-branes and K-theory."*

[8] A. Sen, JHEP **9809** (1998) 023, `hep-th/9808141`, *"$SO(32)$ Spinors of Type I and Other Solitons on Brane - Antibrane pair."*

[9] A. Sen, `hep-th/9904207`, and references therein. *"Non-BPS States and Branes in String Theory,"*