N=4 Super-Yang-Mills Correlation Functions from the AdS/CFT Correspondence

— What have we learned about the field theory?—

Daniel Z. Freedman

Center for Theoretical Physics

and

Department of Mathematics

Massachusetts Institute of Technology

講義ノート作成

森山 翔文

京都大学理学研究科

山口 哲

京都大学人間環境学研究科

Lecture Note Series

目 次

導入 **3**

第 I 部　AdS/CFT 対応と protected な相関関数 4

1　場の理論：$\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang-Mills 理論 4
1.1 場と Lagrangian 4
1.2 ゲージ不変な演算子 5

2　超重力理論：$AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 超重力理論 5
2.1 場 5
2.2 Lagrangian 6
2.3 対称性および Yang-Mills 理論との演算子の対応 6
2.4 AdS/CFT 対応の要素 7

3　AdS 空間の基本：幾何学的性質と isometry 8
3.1 幾何学的性質 8
3.2 連続的な isometry 9
3.3 反転 10
3.4 AdS/CFT 対応を使った相関関数の計算 11

4　2 点および 3 点関数の結果の抜粋 12
4.1 共形対称性からの制限 12
4.2 反転を使った積分の計算 13
4.3 2 点関数に関する微妙な部分 14
4.4 超共形対称性に関する非繰り込み定理と protected な相関関数 15
4.5 Princeton グループの protected な 3 点関数とその場の理論からのチェック 16
4.6 extremal な 3 点関数 17

5　double trace 演算子の分解 18
5.1 OPE と double trace 演算子 18
5.2 protected な double trace 演算子の相関関数 19

6　[14] の非常に短いまとめ 20

7　Extremal な n 点関数 $(n>4)$ 20
7.1 共形対称性からの 4 点関数への制限 20
7.2 extremal な 4 点関数の超重力理論からの計算 21
7.3 extremal な 4 点関数が protected であることの証明 21
7.4 場の理論からのチェック 22

8 まとめ **22**

第 II 部 一般の 4 点関数の計算と場の理論の対応 **24**

9 予備知識 **24**
9.1 共形対称性 $SO(d,2)$ による制限 24
9.2 超重力理論から得られる結果と共形場理論を比べる道具 OPE 25

10 AdS 超重力理論における計算 **27**
10.1 4 点関数 $\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}\mathcal{O}_{\Delta_2}\mathcal{O}_{\Delta_3}\mathcal{O}_{\Delta_4}\rangle$ の超重力理論における図 28
10.2 各図の $1/N$ 展開形 28
10.3 bulk-to-bulk 伝搬関数 30
10.4 4 点 exchange 図に対する技術 32
10.5 w 積分の計算と漸近形 35
10.6 IIB 超重力理論の dilaton-axion-graviton の 4 点関数 37

11 まとめ **42**

導入

AdS/CFT 対応 [1, 2, 3] を使うと、d 次元の Minkowski 空間を $(d+1)$ 次元の Anti-de Sitter 空間 (AdS 空間) と呼ばれる空間の境界と思うことで、d 次元の興味ある場の理論の量を計算することが可能になる。多くの場合境界上の場の理論は、超対称ゲージ理論で重力を含まない。一方、内部の理論は超重力理論である。

驚くべきことに、この対応においては弱結合の重力理論を使って、ほかの方法では求めるのが難しい強結合極限のゲージ理論の量を計算できる。

この対応の最も代表的な例は、bulk の理論が 10 次元の IIB 超重力理論を $AdS_5 \times S^5$ に dimensional reduction したものであり、境界上の理論は 4 次元の $\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang-Mills 理論である。この境界上の理論は昔から共形不変であることが知られている。

より解析が進んでいる 2 次元の場の理論においては次のような方法を用いることが便利であった。まず、純粋な共形場理論を考え、これを relevant 演算子で変形すると結合定数に関して繰り込み群の流れが生じる。同じように 4 次元の理論に関しても、relevant な変形として質量項を Lagrangian に加えたりすると、繰り込み群の流れのあるような理論が得られる。このようにいろいろな相がある。

1. 共形相 (厳密な共形対称性が成り立つ相)
2. relevant な変形 (繰り込み群の流れがある理論)
3. Higgs 相 (Higgs 場が真空期待値をもつ相)

これら 3 つの相の強結合極限はいずれも古典的な超重力理論によって定量的に記述されることがたくさんの証拠からわかってきている。共形相を調べるには古典的な真空である $AdS_5 \times S^5$ のまわりのゆらぎを考えればよく、非共形相の場合は、超重力理論のソリトンや domain wall のまわりのゆらぎを考えればよい。

私の研究はこの 3 つのいずれの相も含んでいるが、今回の講義では重力理論との関係が最も詳細に調べられている共形相にのみ注目する。

超重力理論から様々な場の理論の量を計算してみて、なにか新しいことがわかれば、場の理論にもどってそれをテストするというのがこの研究の基本的なやりかたである。

第 I 部
AdS/CFT 対応と protected な相関関数

1　場の理論：$\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論

1.1　場と Lagrangian

ここでは、境界の場の理論について話す。

場の理論は $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ 超対称 Yang-Mills 理論である。簡単な組み合わせ論的考察から結合定数としては、

$$g_{\rm YM}^2 N, \tag{1.1}$$

を考えるべきであることが 't Hooft によって言われた。ここで $g_{\rm YM}$ は通常の Yang-Mills 結合定数である。

この理論に含まれる場は、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} &X^i, \quad i = 1, \cdots, 6, \\ &\lambda^a, \quad a = 1, \cdots, 4, \\ &A_\mu. \end{aligned} \tag{1.2}$$

すべての場は $SU(N)$ の adjoint 表現、つまり $N \times N$ の Hermite で traceless な行列になっている。例えば、scalar 場 X^i は $N \times N$ の行列で、flavor 群 $SU(4) = SO(6)$ の vector 表現になっている。また、spinor 場 λ^a は flavor 群の基本表現であり、vector 場 A_μ は普通の Yang-Mills 場で flavor 群の 1 重項になっている。

Lagrangian は、これらの場を使って次のような簡単な形に書ける。

$$\mathcal{L} = (F_{\mu\nu})^2 + (D_\mu X)^2 + \bar{\lambda} \not{D} \lambda + g_{\rm YM} \bar{\lambda} X \lambda + g_{\rm YM}^2 X^4. \tag{1.3}$$

1.2 ゲージ不変な演算子

この理論はゲージ理論なのでゲージ不変な量が観測量である。特に共形相では、ゲージ不変な演算子の間の相関関数が重要な観測量である。

ゲージ不変な演算子の中でも重要なのは、次の chiral primary 演算子である。

$$\mathrm{Tr}\, X^k \equiv \mathrm{Tr}\,[X^{i_1}\cdots X^{i_k}] - (\text{traces}). \tag{1.4}$$

これは、$SO(6)$ の traceless 対称 k 階 tensor、つまり Dinkin index で書けば、$SU(4) = SO(6)$ の $(0,k,0)$ 表現になっている。$k = 2,\cdots,5$ に対してはそれぞれ $20', 50, 105, 196$ 次元表現になっている。

この理論には、超対称性の代数が作用している。この代数は共形変換の代数 $SO(4,2) = SU(2,2)$ とあわせて超代数 $SU(2,2|4)$ を成す。chiral primary 演算子はそれぞれ $SU(2,2|4)$ の short 表現の最低ウェイト状態になっている。この表現の詳細は話さないが、事実として、short 表現の最低ウェイト状態のスケーリング次元 Δ は、

$$\Delta = k, \tag{1.5}$$

に固定される。したがって、これらの演算子には異常次元はない。

chiral primary 演算子に super charge を掛けていくことによって、descendant 演算子が得られる。super charge は固定されたスケーリング次元 $1/2$ を持っているので chiral primary の descendant 演算子のスケーリング次元もまた量子化され、固定される。

ここで最低のスケーリング次元をもつ chiral primary 演算子 $\mathrm{Tr}\, X^2$ を考えよう。この演算子の descendant 演算子の中には、次のような重要な演算子、flavor current および stress tensor が含まれる。

$$J_\mu{}^a = \mathrm{Tr}\,(\bar\lambda\gamma_\mu T^a\lambda + \cdots), \tag{1.6}$$

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,(\partial_\mu X^i \partial_\nu X^i + \cdots). \tag{1.7}$$

ほかにも dilaton などの重要な演算子が含まれる。

2 超重力理論：$AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 超重力理論

2.1 場

さて、 bulk の理論は 10 次元の IIB 超重力理論を $AdS_5 \times S^5$ に dimensional reduction したものである。AdS_5 の isometry は $SO(4,2)$ で 4 次元 Minkowski 空間の共形群と同じであり、S^5 の対称性は $SO(6)$ で境界理論の flavor 群と同じである。

この理論に含まれる場は 2 つのグループに分けることができる。1 つは graviton 多重項であり、計量 tensor $g_{\mu\nu}$ 、$4+4$ 個の gravitino ψ_μ^α 、12 個の反対称 tensor $B_{\mu\nu}$ 、$SO(6)$ を

ゲージ化している 15 個の vector 場 A^a_{mu} 、48 個の spinor 場 λ 、42 個の scalar 場 φ^i がある。

場	$g_{\mu\nu}$	ψ^α_μ	$B_{\mu\nu}$	A^a_{mu}	λ	φ^i
$SO(6)$ の表現	1	$4+\bar{4}$	$6+6$	15	$4+\bar{4}+20+\overline{20}$	$20'+10+\overline{10}+1_c$

この graviton 多重項はそれだけで閉じた理論 — 5 次元 $\mathcal{N}=8$ ゲージ化超重力理論 — をなすことが知られている。この理論は Gunaydin、Romans、Warner [4] によって 1985 年に完成された。

gravity multiplet 以外の場は KK(Kaluza-Klein) モードであり、10 次元の場を S^5 の球面調和関数で次のように展開することで得られる。

$$\varphi(z,y)=\sum_{\Delta=2}^{\infty}\varphi_\Delta(z)Y^\Delta(y). \tag{2.1}$$

ここで、y は S^5 の座標、z は AdS_5 の座標、$Y^\Delta(y)$ は S^5 の球面調和関数である。このとき $\varphi_\Delta(z)$ の質量は

$$m^2=\Delta(\Delta-d),\quad d=4, \tag{2.2}$$

で、SO(6) の Casimir 演算子の固有値になる。この関係はあとで非常に重要になる。

2.2 Lagrangian

Yang-Mills 理論の Lagrangian が非常に簡単であったのに対して、超重力理論の Lagrangian は非常に複雑であって大部分は知られていない。

graviton multiplet に対する Lagrangian は、知られていて非常に複雑なものである [4]。

一方 KK モードについては知られている部分は非常に少ない。運動項と質量項については、Kim、Romans、van Nieuwenhuizen [5] によって 1985 年に調べられた。しかし KK モードの相互作用項は知られているのはごく一部である。

1 つの証明されていない問題は、5 次元 $\mathcal{N}=8$ ゲージ化超重力理論は 10 次元理論の無矛盾な truncation であるかということである。このことは、別の KK 超重力理論においては証明されているものがある。問題を言い換えると、「重い KK モードは軽いソースを持つか？」ということである。つまり、

$$\Box(\text{重い } KK \text{ 場})=(\text{軽い場のみの項})+\cdots, \tag{2.3}$$

となっている場合、理論を truncate して、 KK モードを 0 にすることはできない。ここでは詳しく議論しないが、これは、わかっていない問題の 1 つである。

2.3 対称性および Yang-Mills 理論との演算子の対応

さて、bulk の超重力理論の対称性について考えよう。bulk の理論も境界の理論と同じ $SU(2,2|4)$ の対称性をもつことがわかり、超重力理論の場は境界の場と同じ short 表現に

属していることがわかる。したがって、 bulk 理論の場と境界理論の演算子の対応は、非常に詳しくわかっていて、$SO(6)$ の量子数とスケーリング次元について完全に対応している。

例えば、次のような対応がある。

$$\mathrm{Tr}\, X^k \quad \leftrightarrow \quad \varphi_{\Delta=k} \tag{2.4}$$

$$J^a_\mu \quad \leftrightarrow \quad A^a_\mu \tag{2.5}$$

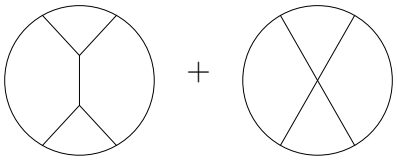
$$T_{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

境界上の chiral primary 演算子 $\mathrm{Tr}\, X^k$ のそれぞれに対して bulk の scalar 場があり、その質量は正しくスケーリング次元 k を出すものになっている。また、境界上の flavor current には bulk の $SO(6)$ のゲージ場が対応し、境界上の stress tensor には bulk の計量のゆらぎが対応している。descendants に関してもすべて正しく対応している。

2.4 AdS/CFT 対応の要素

AdS/CFT 対応の 2 つの要素は、(1) 今話した演算子の対応と (2) Witten 図による相関関数の計算のやりかた [3] である。

例えば 4 点関数であれば、Witten 図として、間に様々な超重力理論の場が走る「exchange 図」と超重力理論の 4 点結合が入った「contact 図」を含む。

$\langle \mathcal{O}(x_1)\mathcal{O}(x_2)\mathcal{O}(x_3)\mathcal{O}(x_4)\rangle =$  $+$

Witten 図は Feynman 図と似ている。境界上の点は 4 次元 Minkowski 空間の点で Yang-Mills 理論の演算子が挿入されている点である。bulk の点は AdS の内部の点である。Witten 図の計算の規則についてはあとで詳しく述べる。

AdS/CFT 対応が有効である範囲について述べよう。古典的な超重力理論が有効になるためには次の 2 つの条件が必要である。

1. AdS の長さのスケール $L^2 = \alpha'(g^2_{\mathrm{YM}}N)^{1/2}$ が弦の長さのスケール α' に対して、$L^2 \gg \alpha'$ でなければならない。ここから 't Hooft 結合定数 $\lambda = g^2_{\mathrm{YM}}N$ が大きくなければならない。

2. 超重力理論のループ補正を小さくするために、N は大きくなければならない。(5 次元 Newton 定数 $G_5 \sim L^3/N^2$ 。)

これらのことから、 Witten 図は強結合、large N の超対称 Yang-Mills 理論で有効である。一方、 Feynman 図は弱結合のとき有効である。

ところで、AdS_{d+1} の isometry 群は $SO(d,2)$ であり、これは d 次元 Minkowski 空間の共形群と同じであるから、Witten 図から計算できる振幅は、いつも共形共変である。したがって、共形共変な相関関数が得られるのは当たり前である。驚くべきことは、 IIB 超

重力理論と$\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang-Mills 理論の対応においては、定量的な一致があることである。

今日これから話すことは、MIT と UCLA のグループで行ってきた長い研究の成果である [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]。我々が行ったのは、これらの図を計算する技術を開発し、物理的な解釈を試みることである。

これらのことをしようとして直面する事実は、超重力理論からの計算が有効な領域と通常の場の理論の摂動論的な計算が有効な領域に重なりがないことである。したがって、

1. 最初の段階でやることは対応そのものが正しいかどうかをチェックすることである。そのためには、まず、超重力理論を使った方法で protected な量 (非繰り込み定理を満たす量) を計算し、それを弱結合の場の理論の結果と比較する。protected な量は、輻射補正を受けないので比較することに意味がある。このようにして、対応が正しいことの証拠を得ることができた。

2. 第 2 段階では、我々は 4 点関数を計算した。このことにより境界の理論の非摂動的な情報を得ることができた。

3. 第 3 段階では、新しい protected な量を見つけ出した。

この講義では、歴史的順序に沿わないで、第 2 段階を後回しにして、次の講義の時に話す。今日やることは、protected な相関関数を計算し、 Ward 恒等式を確かめることである。また、新しい protected な相関関数についても重点を置く。つまり、今日話すのは、第 1 段階と第 3 段階である。

3 AdS 空間の基本 : 幾何学的性質と isometry

3.1 幾何学的性質

さて、ここで、AdS 空間の幾何学的性質と isometry について話そう。まず、Euclidean の符号で宇宙項を含んだ重力の作用は、次のようになる。

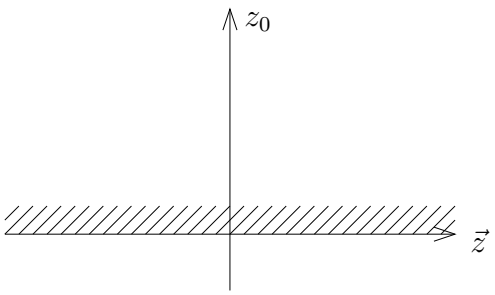
$$S_g = -\frac{1}{\kappa^2}\int d^{d+1}z\sqrt{g}(R-\Lambda). \tag{3.1}$$

宇宙定数 Λ は、AdS 空間の長さのスケール L と次のような簡単な関係になる。

$$\Lambda = -d(d-1)/L^2. \tag{3.2}$$

AdS 空間はこの作用 (3.1) から導かれる運動方程式の maximally symmetric な解になっている。この Euclid 版の AdS 空間は、数学では双曲面として知られている。

この空間のモデルとしては様々なものがあるが、便利なのは次のような上半空間のモデルである。



ここでは、水平方向の座標を $(z_1, \cdots, z_d) \in \mathbf{R}^d$ とし、垂直方向の座標を $z_0 > 0$ とする。すると、計量は次のような簡単なものになる。

$$ds^2 = \frac{L^2}{z_0^2}\left(dz_0^2 + \sum_{i=1}^{d} dz_i^2\right). \tag{3.3}$$

ここから、 Ricci tensor や scalar 曲率は、次のようになる。

$$R_{\mu\nu} = -\frac{d}{L^2}\bar{g}_{\mu\nu}, \qquad R = -\frac{d(d+1)}{L^2}. \tag{3.4}$$

共形共変な相関関数においては、スケール L は落ちてしまう。だから $L = 1$ として計算する。

3.2 連続的な isometry

AdS 空間は maximally symmetric な時空であると言ったが、その意味は、非常にたくさんの isometry を持つということである。実際、isometry 群は、$SO(d+1,1)$ である。この isometry が、今の座標の取り方においてどのように作用しているかを見ておくことは役に立つことであろう。それは次のようになる。

$$SO(d+1,1)\begin{cases} z_i\text{の回転} & d(d-1)/2 \\ z_i\text{の並進} & d \\ \text{スケール変換} & 1 \\ \text{特殊共形変換} & d \end{cases} \tag{3.5}$$

まず、z_i を回す回転が $d(d-1)/2$ 個ありこれは $SO(d)$ を成す。同じく水平方向の並進が d 個ある。また、次のような明らかなスケール変換が 1 つある。

$$\delta z_\mu = \varepsilon z_\mu. \tag{3.6}$$

また、それほど明らかでない変換として、次のような d 成分のパラメータ c_i による特殊共形変換がある。

$$\delta z_\mu = c_\mu (z)^2 - 2(c \cdot z) z_\mu, \quad c_{\mu=0} = 0. \tag{3.7}$$

ただしここで、

$$(z)^2 = \delta^{\mu\nu} z_\mu z_\nu, \quad (c \cdot z) = \delta^{\mu\nu} c_\mu z_\nu, \tag{3.8}$$

である。

3.3 反転

また、この時空には「反転」と呼ばれる離散的な isometry がある。これは、次のような変換である。

$$z_\mu = \frac{z'_\mu}{(z')^2}. \tag{3.9}$$

この反転は、相関関数の性質を推測すること、また特に実際に相関関数を求める際の積分の計算に非常に有効である。これからしばらくこの反転の性質について話す。

まず反転の Jacobian を調べてみよう [6]。Jacobian はベクトル場の変換性を示し、積分の計算をする場合に必要である。今の場合 Jacobian は次のようになる。

$$\frac{\partial z_\mu}{\partial z'_\nu} = \frac{1}{(z')^2} J_{\mu\nu}(z), \tag{3.10}$$

ここで、$J_{\mu\nu}(z)$ は

$$J_{\mu\nu}(z) = \delta_{\mu\nu} - \frac{2 z_\mu z_\nu}{(z)^2} = J_{\mu\nu}(z'). \tag{3.11}$$

であり、引数を z から z' に変えても形を変えない。この $J_{\mu\nu}(z)$ は、次のような興味深い性質を持つ。

1. まず $J_{\mu\nu} J_{\nu\rho} = \delta_{\mu\rho}$ だが、この $\det(J_{\mu\nu}) = 0$ の行列式は負であり、 $O(d+1,1)$ の improper な元である。

2. $J_{\mu\nu}(x-y)$ を考えると、これは AdS 空間の isometry の下で単純な変換性を示す。特に反転の下で、

$$J_{\mu\nu}(x-y) = J_{\mu\rho}(x') J_{\rho\sigma}(x'-y') J_{\sigma\nu}(y'), \tag{3.12}$$

となる。

$J_{\mu\nu}$ は isometry の下で共変な tensor なので、CFT の tensor 同士の相関関数には次のように $J_{\mu\nu}$ が出てくる。

$$\langle J_i(x) J_j(y) \rangle = \frac{c J_{ij}(x-y)}{(x-y)^{2(d-1)}}, \tag{3.13}$$

$$\langle T_{ij}(x) T_{k\ell}(y) \rangle = (\text{同様}), \tag{3.14}$$

$$\langle J_i(x) J_j(y) S_{\Delta=2+h}(z) \rangle = \frac{c'(1-h/2) J_{ij}(x-y) - \frac{1}{2}(1+h/2) J_{ik}(x-z) J_{kj}(z-y)}{(x-y)^{4-h}(x-z)^{2+h}(y-z)^{2+h}}. \tag{3.15}$$

たとえば、 flavor current 同士の相関関数を見ると、$J_{\mu\nu}$ の性質により、ちゃんと保存則が成り立っていることがわかる。stress tensor 同士の相関関数や、flavor current の入った 3 点関数は、これからの私の講義で登場する。

これらの課題についての研究しようと思うなら、反転と馴染んでおくのがよいと思う。

3.4 AdS/CFT 対応を使った相関関数の計算

さて、bulk の理論として重力場、ゲージ場、scalar 場が入ったおもちゃのモデルを用いて超重力理論から相関関数を計算する方法を説明しよう。 作用を次のようにする。

$$S = \int d^{d+1}z\sqrt{g}\left\{\frac{-R-d(d-1)}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\left[(D\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right] + \frac{1}{4e^2}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{3!}h\varphi^3 + \frac{1}{4!}\tilde{h}\varphi^4\right\} \tag{3.16}$$

相関関数を求めるための一般的な処方は次のとおりである [2, 3]。

1. まず古典的な (非線型な) 場の方程式を解く。例えば scalar 場に対する古典的な方程式は、

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi} = (-\Box + m^2)\varphi + \frac{1}{3}h\varphi^2 + \frac{1}{6}\tilde{h}\varphi^2 = 0. \tag{3.17}$$

   ただし次のような境界条件を課す。

$$\varphi(z_0, \vec{z}) \overset{z_0\to 0}{\longrightarrow} z_0^{d-\Delta}\bar{\varphi}(\vec{z}). \tag{3.18}$$

   この時 Δ は次の質量とスケーリング次元の関係を満たす。

$$\Delta = \frac{d}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + 4m^2}. \tag{3.19}$$

   これは一種の変形された境界値問題であり、$z_0^{d-\Delta}$ という比率は、偏微分方程式の特異点解析からきめることができる。この比率を求めることは難しくない。

2. さて、非線型な運動方程式を解くことはそれ自体難しいので、逐次近似の解を使うしかない。逐次近似の 0 次の解は、bulk-to-boundary 伝搬関数に境界のデータを掛けたものであり、残りの補正項は、結合定数の次数ごとに系統的に求めることができる。

   この bulk-to-boundary 伝搬関数は 19 世紀に Poisson 核と呼ばれていたものであり、Witten の論文 [3] の中で使われた。これは、今使っている座標においては、非常に簡単な形になる。数値係数については今日は話さないが、ガンマ関数や 4π を掛けたものであり完全に知られている。

3. 次にやることは、今求めた古典解を元の作用に代入することである。すると、境界のデータ $\bar{\varphi}$ の汎関数としての作用 $S[\bar{\varphi}]$ が得られる。この on-shell の作用が次のように境界の相関関数の生成汎関数になっている。

$$\langle\mathcal{O}(x_1)\cdots\mathcal{O}(x_n)\rangle = \frac{\delta}{\delta\bar{\varphi}(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\bar{\varphi}(x_n)}\exp(-S[\bar{\varphi}]). \tag{3.20}$$

4. 今は逐次近似解を使ったので、これを作用に代入し、各項の境界での振る舞いをよく調べると、Witten 図の計算の規則 [3] を導き出すことができる。

Witten 図の計算の規則は、次のとおりである。

- bulk と境界をつなぐ線には、bulk-to-boundary 伝搬関数をあてる。これは例えば scalar 場に関しては

$$K_\Delta(z_0, \vec{z}-\vec{x}) = c_\Delta \left[\frac{z_0}{z_0^2+(\vec{z}-\vec{x})^2}\right]^\Delta, \tag{3.21}$$

であり、vector 場に関しては

$$G_{\mu i}(z_0, \vec{z}-\vec{x}) = c^d \frac{z_0^{d-1}}{[z_0^2+(\vec{z}-\vec{x})^2]^{d-1}} J_{\mu i}(z-\vec{x}), \tag{3.22}$$

となる。これは boundary の transverse の伝搬関数 $\tilde{G},\ \partial\tilde{G}_{\mu i}/\partial x_i = 0$ と gauge equivalent $\tilde{G}_{\mu i} = G_{\mu i} + \partial\Lambda_i/\partial x_\mu$ であり、current を含む相関関数 $\langle J_\mu \cdots\rangle$ に関して離れた点のみ含む場合は、current の保存が成り立つ。同じ点を含む場合に Ward 恒等式が成り立つかどうかは、別に考えなければならない。

- exchange 図を考えるときには、bulk-to-bulk 伝搬関数が出てくる。これは boson 場についてはすべて知られている。これは、80 年代の AdS 空間に関する論文にも、最近の論文にも載っている。これらの bulk-to-bulk 伝搬関数は、私の 2 回目の講義の課題である。

- Witten 図の最後の規則は、頂点に関するものである。これは、通常の超重力理論の Feynman 則の頂点の規則と同じであり、超重力理論の作用から読み取ることができる。さらに通常の Feynman 図と同じ組み合わせ論的な考察を適用できることがわかる。

4 2点および3点関数の結果の抜粋

4.1 共形対称性からの制限

さて、2 点関数や 3 点関数の計算から得られた結果をいくつか示そう。まず、2 点関数および 3 点関数に関しては、共形対称性から時空の点への依存性が完全に決まっているので、計算すべきは定数の因子である。例えば、

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(x)\mathcal{O}_{\Delta'}(y)\rangle = \delta_{\Delta\Delta'}\frac{c}{|x-y|^{2\Delta}}, \quad \mathcal{O}_\Delta \text{は primary}, \tag{4.1}$$

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_3}(x_1)\rangle = \frac{a_{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}}{x_{12}^{k_{12}}x_{13}^{k_{13}}x_{23}^{k_{23}}}, \quad x_{12}=|x_1-x_2|,\ k_{12}=\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3,\ \text{etc}, \tag{4.2}$$

$$\langle J_i(z)\mathcal{O}_\Delta(x)\mathcal{O}_{\Delta'}(y)\rangle = \delta_{\Delta\Delta'}\frac{b}{|x-y|^{2\Delta-d+2}|x-z|^{d-2}|y-z|^{d-2}}\left[\frac{(x-z)_i}{(x-z)^2}-\frac{(y-z)_i}{(y-z)^2}\right], \tag{4.3}$$

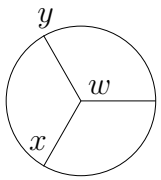
となる。ここでは、 c と $a_{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}$ と b が決定しなければならない定数である。場の理論でよく知られているように、Ward 恒等式によって current 1 つと primary 2 つの 3 点関数と primary の 2 点関数は結び付いている。したがって、 b と c は、Ward 恒等式で関係がついている。

4.2 反転を使った積分の計算

我々の最初の AdS/CFT 対応に関する論文 [6] の中で、 current と scalar を含む 3 点関数をすべて計算した。これを詳しく見ていくことにする。

まず、scalar の 3 点を計算する際には、次のような積分が現れる。

$$A(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = \int \frac{d^d w\, dw_0}{w_0^{d+1}} \left[\frac{w_0}{(w-\vec{x})^2}\right]^{\Delta_1} \left[\frac{w_0}{(w-\vec{y})^2}\right]^{\Delta_2} \left[\frac{w_0}{(w-\vec{y})^2}\right]^{\Delta_3}. \tag{4.4}$$

これは、 

の計算であり、bulk の点が w である。$1/w^{d+1}$ は、通常の AdS 空間の measure である。積分の中身は、境界の点 x, y, z から bulk の点 w に走っている 3 つの bulk-to-boundary 伝搬関数 (3.21) である。

これからこの積分のやり方について詳しく話す。それは反転の威力を示すためである。

1. まず、高校でやるような簡単な積分変数の変数変換

$$w_\mu \to w'_\mu, \qquad w_\mu = \frac{w'_\mu}{(w')^2}, \tag{4.5}$$

を行う。また、見やすいように境界の変数も反転して考える。

$$x_i = \frac{x'_i}{(x')^2}, \tag{4.6}$$

すると、bulk-to-boundary 伝搬関数は、

$$\left(\frac{w_0}{(w-\vec{x})^2}\right)^{\Delta} = |\vec{x}'|^{2\Delta} \left(\frac{w'_0}{(w'-\vec{x}')^2}\right)^{\Delta}, \tag{4.7}$$

となって、単にスケール因子が掛かっただけの形になり、しかもそのスケール因子は、境界の理論におけるスケーリング次元 Δ から判断して適切なものである。

2. したがって、この積分を実行すると、次のように元の積分と同じ形が出てきて、それにスケール因子が掛かったものになる。

$$A(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = |x'|^{2\Delta_1}|y'|^{2\Delta_2}|z'|^{2\Delta_3} A(\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}'). \tag{4.8}$$

これを見ると、式 (4.2) の形から考えて、正しく共形共変な振幅が得られたことがわかる。このようにして、AdS 空間の積分がいつも正しい共形共変な振幅を与えるこ

とがわかったわけだが、これはさらに複雑な状況 — 4 点関数や vector の添え字を持つ場合 — にも同様である。それは Witten 図の構成要素がいつも共形共変だからである。

3. さて、これまでは積分の形を別の変数で書き換えただけであって、積分を実行するという意味ではなんら進歩していない。これから実際に反転を使って積分を実行することを考える。

   まず並進不変性を使って $\vec{z}=0$ にする。すると、元の座標で bulk-to-boundary 伝搬関数は、$(w_0/w^2)^\Delta$ という比較的簡単な形になる。しかもこれは反転した座標で考えると、

$$\left(\frac{w_0}{w^2}\right)^\Delta = (w_0')^\Delta, \tag{4.9}$$

   となって、分母の因子がなくなって非常に簡単になる。結局積分は次のようになる。

$$A(\vec{x},\vec{y},\vec{z}=0) = \frac{1}{|\vec{x}|^{2\Delta_1}}\frac{1}{|\vec{y}|^{2\Delta_2}}\int \frac{d^dw'\,dw_0'}{(w_0')^{d+1}}\left(\frac{w_0'}{(w'-x')}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{w_0'}{(w'-y')}\right)^{\Delta_2}. \tag{4.10}$$

   この積分では、分母の因子が 2 つしかないので、Feynman パラメータを使った積分が非常に簡単になる。実際に積分を実行すると、通常の共形共変な座標依存性と比較的複雑なガンマ関数を含んだ係数 (これについては今日は話さない) が得られる。

4.3 2 点関数に関する微妙な部分

さて、我々は current や scalar やその他いろいろなものを含む 3 点関数を計算したが、そこではすべて Ward 恒等式が成り立っていることがわかった。

ただ 1 つだけ次のような微妙な点があることに注意しよう。それは、3 点関数 $\langle J_i\mathcal{O}\mathcal{O}^*\rangle$ と 2 点関数 $\langle\mathcal{O}\mathcal{O}^*\rangle$ の関係についてである。我々は 3 点関数の発散 $\partial_i\langle J_i\mathcal{O}\mathcal{O}^*\rangle$ から 2 点関数 $\langle\mathcal{O}\mathcal{O}^*\rangle$ を求めてみた。するとそれは、Gubser、Klebanov、Polyakov [2] の方法で求めた 2 点関数とは完全に一致していたが、Witten [3] の方法で求めたものとは一般に異なっていて、次のようになっていた。

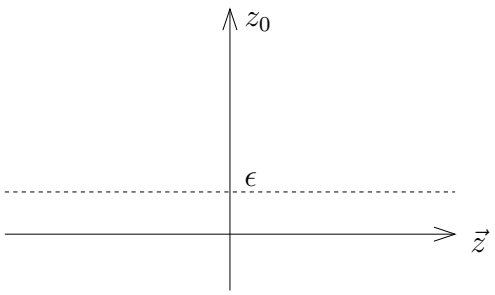
$$\langle\mathcal{O}\mathcal{O}^*\rangle_{\rm MIT} = \langle\mathcal{O}\mathcal{O}^*\rangle_{\rm GKP} = \frac{2\Delta-d}{\Delta}\langle\mathcal{O}\mathcal{O}^*\rangle_{\rm Witten}. \tag{4.11}$$

この微妙な点は、AdS/CFT 対応を使った 2 点関数の計算における 2 つの log 発散の相殺から来ていることがわかる。

Witten [3] の方法では、cutoff $z_0=\varepsilon$ を置くときに、bulk-to-boundary 伝搬関数 (3.21) を不変においた。

一方 GKP [2] の方法では、次のようにもっと用心深く取り扱われている。まず、$z_0=\varepsilon$ の cutoff 空間において Dirichlet 境界条件を満たす Poisson 核 K^ε_Δ を考える。Poisson 核については bulk-to-bulk 伝搬関数 G^ε_Δ との関係が次のようになることが知られている。

$$K^\varepsilon_\Delta(z_0,\vec{z}) = \lim_{w_0\to\varepsilon}\frac{\partial}{\partial w_0}G^\varepsilon_\Delta(z,w). \tag{4.12}$$



したがって、この cutoff 境界で Dirichlet 境界条件

$$G^{\varepsilon}_{\Delta}(z,w) \to 0,\ (z_0 \to \varepsilon \text{ or } w_0 \to \varepsilon), \tag{4.13}$$

を満たす bulk-to-bulk 伝搬関数を作ればよい。ただし、これは配位空間での形は知られていない。そこで、水平方向の並進対称性を利用して、運動量空間に移って考えると簡単になる。運動量空間では、 bulk-to-boundary 伝搬関数 (Poisson 核) は、次のような比較的簡単な変形 Bessel 関数を使った形に書ける。

$$K^{\varepsilon}_{\Delta}(z_0,\vec{p}) = \left(\frac{z_0^{\Delta}}{\varepsilon}\right)^{d/2} \frac{K_\nu(pz_0)}{K_\nu(p\varepsilon)}, \tag{4.14}$$

$$K_\nu : \text{変形 Bessel 関数},\ \nu = \Delta - d/2. \tag{4.15}$$

これに対して、 3 点関数やさらに多点関数は、後で話す 1 つの例外を除いて、発散はないことがわかる。したがって、 cutoff は必要なく、普通に反転の方法を用いた積分をすればよい。

4.4 超共形対称性に関する非繰り込み定理と protected な相関関数

さて、Yang-Mills 理論の flavor current の 2 点関数 $\langle JJ\rangle$ 3 点関数 $\langle JJJ\rangle$ に関して話そう。超重力理論から計算したこれらの相関関数は、Ward 恒等式をみたし、境界の理論とあっている。しかもここからは次のような非自明なチェックができる [6]。

共形対称性から決まる current の 3 点関数の形は 2 つの独立な tensor の線型結合を含んでいる。ところが、超重力理論から計算した current 3 点関数は、Yang-Mills 理論から計算したものと全く同じ線型結合になっているのである。

この事実に関連して、普通の Minkowski 空間の共形場理論には次のような興味深い性質がある。

> ある相関関数に関して共形共変な独立な tensor の数は、その相関関数を作ることができる、異なる自由場モデルの数と同じである。

つまり、まず自由場理論を考え (自由で massless な理論はいつも共形不変である。)、そこからの補正を考えればよいわけである。

例えば、純粋な spinor だけの自由場理論を考えると、current の 3 点関数は、 spinor の 3 角形の図だけから出てくるし、純粋な scalar だけの理論を考えれば、scalar の 3 角形の図から出てくる。これらはそれぞれ共形共変な tensor になっている。この 2 つが先に述べた 2 つの独立な共形共変な tensor である。

超重力理論から得られる current の 3 点関数は、$\mathcal{N}=4$ Yang-Mills 理論の場合と全く同じ組み合わせで得られ、しかもそれは、4 つの spinor と 6 つの scalar を自由場と考えて計算した結果と全く同じである。

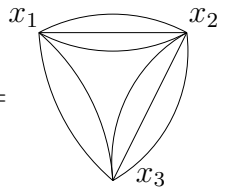
current の 3 点関数を自由場近似で計算してもよい理由は、境界の理論のある特別な相関関数 (current の 3 点関数を含む) に関して、超共形対称性に基づく非繰り込み定理が成り立つからである [16]。この非繰り込み定理が成り立つ理由については詳しく説明しないが、少しだけ言うと、超対称性によって trace anomaly と R-current anomaly は、結びついているからである。だから $\mathcal{N}=1$ 超対称性があれば非繰り込み定理が成り立つ。

前に説明したように、flavor current は $\mathrm{Tr}\, X^2$ の descendant である。したがって、$\mathrm{Tr}\, X^2$ の 2 点関数 $\langle \mathrm{Tr}\, X^2 \mathrm{Tr}\, X^2 \rangle$ および 3 点関数 $\langle \mathrm{Tr}\, X^2 \mathrm{Tr}\, X^2 \mathrm{Tr}\, X^2 \rangle$ も protected であることがわかる。2 点関数が不変な理由は、3 点関数と Ward 恒等式でつながっているからである。

4.5 Princeton グループの protected な 3 点関数とその場の理論からのチェック

さて、前に言ったように $AdS_5 \times S^5$ の IIB 超重力理論の KK モードについては、ほとんど知られていないが、例外的に、式 (2.4) のように chiral primary $\mathrm{Tr}\, X^k$ に対応するスカラー φ_k の 3 次の項 $g_{k_1 k_2 k_3} \varphi_{k_1} \varphi_{k_2} \varphi_{k_3}$ は知られている。したがって chiral primary の 3 点関数 $\langle \mathrm{Tr}\, X^{k_1} \mathrm{Tr}\, X^{k_2} \mathrm{Tr}\, X^{k_3} \rangle$ は超重力理論から計算できる。実はこれは、自由場の場合の Feynman 図の計算と完全に一致することがわかる。例えば、次のようなものである。

$$\Big\langle \mathrm{Tr}\, X^{k_1}(x_1) \mathrm{Tr}\, X^{k_2}(x_2) \mathrm{Tr}\, X^{k_3}(x_3) \Big\rangle =$$



各頂点は演算子が挿入された点であり、線は Wick 縮約を表す。

超重力理論からの計算が自由場の計算と完全に一致したということは、驚くべきことである。なぜなら、場の理論の超共形対称性に基づく非繰り込み定理は、$k_1 = k_2 = k_3 = 2$ の場合にしか期待できないからである。

Princeton のグループ [16] は、超重力理論に対する弦の補正の形を考えて、この結果は、N が大きい極限でのみ成り立つのではなく、すべての N に対して成り立つという予想を立てた。この結果は驚くべきことであり、対応の信頼性を高めるものである。したがって、これを場の理論のほうから証明することは、非常に重要なことである。

Princeton の結果が出たすぐ後、我々は D'Hoker たちと一緒に、摂動論による直接的な計算をしてみた [7]。その結果、$\langle \mathrm{Tr}\, X^k \mathrm{Tr}\, X^k \rangle$ および、$\langle \mathrm{Tr}\, X^k \mathrm{Tr}\, X^\ell \mathrm{Tr}\, X^m \rangle$ について g_{YM}^2

の位の補正が消えていることを示した。この証明は、すべての N に対して有効であり、さらには Skiba によって $SU(N)$ だけでなくすべてのゲージ群に関して有効であることが言われた。この証明は非常に簡単なものであり、難しい Feynman 積分はしていない。ここでは、組み合わせ論だけで一般の k, ℓ, m の 3 点関数を $k = \ell = m = 2$ の場合に帰着させることができ、この場合は非繰り込み定理が成り立つことを知っているので、$g_{\rm YM}^2$ の補正がないことが結論できた。

1 か月半ほど前に、イタリアのグループ、Penati、Santambrogio、Zanon [17] が $\langle \mathrm{Tr}\, X^3 \mathrm{Tr}\, X^3 \rangle$ の $g_{\rm YM}^4$ の位の輻射補正が消えていることを確かめた。これは、我々のものに比べてはるかに大変な計算で 7 つか 8 つの 4 ループ図が出てくる。この論文は、非常にわかりやすく、読んでみることをお勧めする。

これらの仕事は、実際の計算で確かめたわけで、Princeton のグループが予想したように chiral primary の 2 点関数と 3 点関数が、N の大きさおよび結合定数について protected だというのを支持している。

それでは、Princeton のグループの予想を場の理論の立場から「証明」できるだろうか。

この問題に最初に取り組んだのは Intriligator たち [18] だった。彼は、IIB 超重力理論に $U(1)$ 対称性 $(U(1)_Y)$ があることに注目した。次回の講義でさらに詳しく説明することだが、この $U(1)_Y$ 対称性は境界理論の相互作用によって破れているが、演算子を分類するのには便利である。例えば、 chiral primary 演算子は $Y = 0$ であり、また、$g_{\rm YM}$ を少しだけ変えることに対応する marginal 演算子 $\mathcal{O}^{(4)}_{g_{\rm YM}}$ は $Y = 4$ である。

彼は相関関数の結合定数による微分に関して次のような方程式を導き出した。

$$\frac{\partial}{\partial g_{\rm YM}} \left\langle \prod_i \mathcal{O}_i^{(q_i)}(x_i) \right\rangle = \int d^4 y \left\langle \mathcal{O}^{(4)}_{g_{\rm YM}}(y) \prod_i \mathcal{O}_i^{(q_i)}(x_i) \right\rangle . \tag{4.16}$$

このことから、上の式の右辺の相関関数が消えれば、結合定数への依存性が消える。

さらにこれに対して、Howe、Sokatchev、West ら [19] のアプローチがある。$\mathcal{N} = 2$ の harmonic superspace (off-shell) や $\mathcal{N} = 4$ の analytic superspace (on-shell) を使って、$\langle \mathrm{Tr}\, X^k \mathrm{Tr}\, X^\ell \mathrm{Tr}\, X^m \rangle$ に関して Intriligator の微分方程式の右辺の式に現れるはずの superspace の不変量が存在しないことを示すことにより、非繰り込み定理を証明できたと主張した。ただ彼らはこの結論にたどりつくのに、contact 項がないことを仮定している。また、$\mathcal{N} = 2$ superspace でやるか、$\mathcal{N} = 4$ superspace でやるかの違いも重要である。しかし私はこれらの論文を読んでみることを勧める。読んでみれば、あなたがこの手の議論をどれぐらい信頼できるか決められるだろう。

4.6 extremal な 3 点関数

ここで、Princeton の予想の非常に特別な場合して extremal な 3 点関数を考えてみよう。ここで extremal とは、$\langle \mathrm{Tr}\, X^{k_1} \mathrm{Tr}\, X^{k_2} \mathrm{Tr}\, X^{k_3} \rangle$ で、$k_1 = k_2 + k_3$ の場合である。これは、非常に特殊な場合だが、これを調べることによって様々な興味深い事実がわかる。

この場合に、 Princeton の仕事を調べていくと次のようになっている。bulk の結合定数を見ていくと $(k_1 - (k_2 + k_3))$ に比例していて、0 になっている。一方で、 我々 MIT のグループが計算した積分には、$1/(k_1 - (k_2 + k_3))$ が含まれていて、発散している。

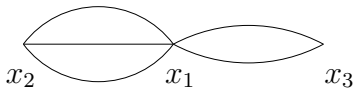
Princeton のグループは、これを処理するのに、解析接続を使っている。これをやってみると境界の理論を自由場近似したものに等しくなっている。

しかしここで解析接続をするのは問題があると思われる。それは、スケーリング次元 k は、整数だからである。k が整数である理由は、表現の Dinkin label だからであり、別の言い方をすると k が整数でない場合には、$SU(2,2|4)$ の short 表現でなくなってしまうからである。

今の場合には、もっと基本的な方法で extremal な相関関数を取り扱うべきであり、我々は、この夏にそれをやってみた [14]。すると思いがけない新たな発見があった。

とりあえず、共形対称性から予想される extremal な相関関数の形は、式 (4.2) で、$\Delta_1 = k_1 + k_2,\ \Delta_2 = k_2,\ \Delta_3 = k_3$ と置いたものであり、次のようになる。

$$\left\langle \mathrm{Tr}\, X^{k_2+k_3}(x_1)\mathrm{Tr}\, X^{k_2}(x_2)\mathrm{Tr}\, X^{k_3}(x_3)\right\rangle = \frac{a}{(x_{12})^{2k_2}(x_{13})^{2k_3}} =$$



この場合分母の因子は、2 つだけになってしまう。

5 double trace 演算子の分解

5.1 OPE と double trace 演算子

少しわき道にそれて、double trace 演算子について考えよう。次回の講義で、 OPE について詳しく説明するが、ここでは必要なところを少しだけ話す。

OPE とは、演算子の積を次のように $(x-y)$ の各次数の和に展開し、各項の演算子の引数を x にすることである。

$$\mathrm{Tr}\, X^k(x)\mathrm{Tr}\, X^\ell(y) \overset{y\to x}{\sim} \sum_\Delta \frac{a_{k\ell\Delta}}{(x-y)^{k+\ell-\Delta}}\mathcal{O}_\Delta(x). \tag{5.1}$$

例えば、簡単のために $\mathrm{Tr}\, X^2$ 同士の OPE を考える。OPE の $(x-y)^0$ の項を、

$$:\mathrm{Tr}\,(X^iX^j)\mathrm{Tr}\,(X^mX^n):(x), \tag{5.2}$$

と書き、double trace 演算子と呼ぶ。これは普通の場の理論で正規順序積と呼ばれているものである。これは、$SU(4)$ の表現としては 2 つの (0,2,0) 表現の対称積になっている。これを既約表現に分解すると、

$$20' \times 20'_{\text{対称}} = 1 + 20' + 84 + 105. \tag{5.3}$$

ここで $105 = (0,4,0)$ である。このように分解した各項を $\mathcal{O}_I(x)$ と書くことにする。各 $\mathcal{O}_I(x)$ のスケーリング次元は、自由場理論のときには 4 だが、一般には異常次元があって、

$$\Delta_I = 4 + O(g^2_{\mathrm{YM}}), \tag{5.4}$$

となっている。さて、これらの double trace 演算子の中で、 $\mathcal{O}_{105}$ だけが他のものと異なっている。$SU(2,2|4)$ の表現論から、(0,4,0) 表現の最高ウェイト状態の表現は、

1. $\Delta = 4$ で short 表現

2. $\Delta \geq 6$ で long 表現

のいずれかしかない。また、弱結合の極限では$\Delta = 4$ になることがわかっているので$\mathcal{O}_{105}$は、short 表現の chiral primary 状態であり、 BPS のような議論から 結合定数をだんだんと大きくしていっても状態の数は変わらないので short 表現のままである。したがって$\Delta = 4$ は固定され、異常次元はない。したがって、$\mathcal{O}_{105}$ は protected な演算子である。

このことは Ferrara たちのグループ [20] によって強調されたが、彼らはまたこの夏の Strings '99 の発表 [21] において 84 表現の演算子もまた protected だと言った。一方、20 表現と 1 表現の演算子は long 表現に属し、$O(g_{\rm YM}^2)$ の異常次元があると思われる。

私の次回の講義で話すように、強結合極限では $1/N^2$ に比例するような異常次元があり、これは超重力理論から 4 点関数を求めることで計算できる。

さて、protected な double trace 演算子が存在することは、一般に次のようにして言える。次の正規順序積 $:\mathrm{Tr}\, X^k \mathrm{Tr}\, X^\ell:$ は、必ず最も高い表現として、$(0, k+\ell, 0)$ を含み、これは、 protected である。なぜならこれの弱結合でのスケーリング次元は、$k+\ell$ であり、short 表現の chiral primary 状態になっているからである。

5.2 protected な double trace 演算子の相関関数

この protected な double trace 演算子に焦点をあてて考える。
extremal な 3 点関数

$$\left\langle \mathrm{Tr}\, X^k(x) \mathrm{Tr}\, X^\ell(y) \mathrm{Tr}\, X^{k+\ell}(z) \right\rangle = \frac{a}{(x-z)^{2k}(y-z)^{2\ell}}. \tag{5.5}$$

これは、$y \to x$ としても有限である。したがって、

$$\left\langle :\mathrm{Tr}\, X^k \mathrm{Tr}\, X^\ell:(x)\, \mathrm{Tr}\, X^{k+\ell}(z) \right\rangle = \frac{a}{(x-z)^{2(k+\ell)}}. \tag{5.6}$$

ここに出てきたのは、protected な double trace 演算子と $\mathrm{Tr}\, X^{k+\ell}$ の 2 点関数であり、これら 2 つの演算子に対する、$SU(4)$ の表現は同じである。

この議論は、厳密な議論であり、なんら近似は入っていない。ここからわかったことは、まず single trace 演算子と double trace 演算子の 2 点関数は 0 でなく、この 2 つは混じりあっていることである。さらに重要なことは、係数 a は Princeton のグループの protected な 3 点関数の係数なのでこの double trace 演算子と single trace 演算子の 2 点関数も protected である。これから推測されることは、protected な double trace 演算子は、protected なスケーリング次元を持つだけでなく、相関関数も protected ではないかということである。このことは、この夏の中ごろに Skiba[22] によって $g_{\rm YM}^2$ の最低次まででですべての protected な double trace 演算子の 2 点関数および 3 点関数について確かめられた。こうして、輻射補正を受けない演算子の大量のリストができた。

6 [14] の非常に短いまとめ

さて、ここで我々がこの夏にやった仕事について簡単に話そう。ここでは、extremal な 3 点関数についてより基本的な取り扱いをして求めた。

我々は、超重力理論の descendant 部分、10 次元の IIB 超重力理論に現れる dilaton の KK モードを調べた。そして、$t\phi\phi$ の 3 点結合定数を求めた。ここで、ϕ は dilaton の任意の KK モードであり、t は S^5 部分の計量と 4-form のある特別な組み合わせの任意の KK モードである。

ここでは、descendant の部分を調べる方が簡単だったので descendant の部分を調べた。descendant 演算子には、 primary 演算子の情報が含まれているので、descendant 演算子の相関関数を調べれば、primary 演算子の 3 点関数を求めることができる。

まずやることは、10 次元からの KK dimensional reduction である。そこでは、かなり複雑な Lagrangian の取り扱い、つまり、部分積分したときの表面項が 0 になるかならないかの見極めをしなければならなかった。その結果、この 3 点結合は、次のような bulk の部分と境界の部分が求まった。

$$S_{\rm int} = \int_{AdS_5} f(k) t^{k_1}\phi^{k_2}\phi^{k_3} + \int_{\partial(AdS_5)} \xi g(k) n\cdot\nabla\phi^{k_3} D_\mu t^{k_1} D^\mu \phi^{k_2} + (\text{perms.}). \tag{6.1}$$

ここで、$f(k)$ と $g(k)$ は求まっていて、特に extremal な場合 $(k_1 = k_2 + k_3)$ は $f(k) = 0$ となり、Princeton のグループの結果を descendant に拡張したものになっている。

これから、相関関数を計算するのだが、extremal でない場合は簡単である。ちゃんと定義された bulk の 3 点結合定数から、前やったように相関関数を計算すればよい。 extremal な場合は、境界項からの寄与は消えることがわかった。

これの extremal な場合への解析接続もちゃんと定義されることがわかる。

より基本的な取り扱いにおいては、境界項からの寄与のみがある。これは、cutoff の仕方に敏感なので、注意深く取り扱う。我々は、よくやるように $z = \varepsilon$ で 4 つの Dirichlet cutoff をいれた。そして、運動量空間に移って計算した。

その結果は、解析接続した場合と完全に一致していた。これは、境界項を考えないで解析接続のみを考えて出した Princeton の結果を支持するものである。

7 Extremal な n 点関数 $(n > 4)$

7.1 共形対称性からの 4 点関数への制限

さて、今日の講義の最後の話題は、一連の新しい protected な 4 点以上の相関関数についてである [14]。

まず最初に説明することは、2 点関数、3 点関数 (4.1)-(4.3) と比べて、4 点関数の形は共形対称性からそんなに強く制限されないことである。このことについては次回の講義の 9 節でさらに詳しく説明する。例えば、scalar の 4 点関数は次のような形である。

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3)\mathcal{O}_{\Delta_4}(x_4)\rangle = \prod \frac{1}{(x_{ij})^{k_{ij}}} F(\xi,\eta). \tag{7.1}$$

ここで、ξ, η は、次のような cross ratio である。

$$\xi = \frac{x_{13}^2 x_{24}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2}, \qquad \eta = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2}. \tag{7.2}$$

ξ と η は共形不変量であり、4 点関数はこの 2 つの共形不変量の任意の関数によっている。

7.2 extremal な 4 点関数の超重力理論からの計算

さて、次のような extremal な chiral primary の 4 点関数を考えよう。

$$\langle \mathrm{Tr}\, X^{k_1}(x) \mathrm{Tr}\, X^{k_2}(y) \mathrm{Tr}\, X^{k_3}(z) \mathrm{Tr}\, X^{k_4}(w) \rangle. \tag{7.3}$$

ここでも、extremal とは、

$$k_1 = k_2 + k_3 + k_4, \tag{7.4}$$

のことである。許される exchange 図と contact 図を考えると、やはりこの場合も $0 \times \infty$ の形になっていることがわかる。この場合、解析接続を信じて extremal な 4 点関数を考えてみる。

解析接続をやってみると extremal な場合には、4 点関数の時空の座標への依存性は、非常に縮退していて、実際には式 (7.1) の中の $F(\xi, \eta)$ のような変な cross ratio の任意関数は出てこず、単に、

$$\langle \mathrm{Tr}\, X^{k_1}(x) \mathrm{Tr}\, X^{k_2}(y) \mathrm{Tr}\, X^{k_3}(z) \mathrm{Tr}\, X^{k_4}(w) \rangle_{\mathrm{extremal}} = \frac{A}{(x-y)^{2k_2}(x-z)^{2k_3}(x-w)^{2k_4}}, \tag{7.5}$$

の形になる。これは自由場の場合の 4 点関数の形と同じであり、この場合も非繰り込み定理が成り立ち、定数 A は protected ではないかと推測される。

7.3 extremal な 4 点関数が protected であることの証明

超重力理論からの制限を信じると extremal な 4 点関数が protected であることは、OPE を用いて次のように証明できる。

例えば、最も低い extremal な 4 点関数、つまり、次元 2 の chiral primary 3 つと、次元 6 の chiral primary 1 つの 4 点関数

$$\left\langle \mathrm{Tr}\, X^6(x) \mathrm{Tr}\, X^2(y) \mathrm{Tr}\, X^2(z) \mathrm{Tr}\, X^2(w) \right\rangle \tag{7.6}$$

を考えてみよう。

ここで、double OPE 極限をとってみる。double OPE 極限とは、9 節で詳しく説明するように、$y \to x, w \to z$ とすることである。こうすると、$\mathrm{Tr}\, X^6(x) \mathrm{Tr}\, X^2(y)$ の OPE、

$$\mathrm{Tr}\, X^6(x) \mathrm{Tr}\, X^2(y) \sim \sum_{\Delta} \frac{C_{62\Delta}}{(x-y)^{8-\Delta}} \mathcal{O}_{\Delta} \tag{7.7}$$

および、$\mathrm{Tr}\, X^2(w)\mathrm{Tr}\, X^2(z)$ の OPE、

$$\mathrm{Tr}\, X^2(w)\mathrm{Tr}\, X^2(z) \sim \sum_{\Delta'} \frac{C_{\Delta' 22}}{(w-z)^{8-\Delta'}} \mathcal{O}'_{\Delta'} \tag{7.8}$$

の 2 点関数を考えればよい。ここで、式 (4.1) のように、$\langle \mathcal{O}_\Delta \mathcal{O}'_{\Delta'} \rangle$ は、$\Delta = \Delta'$ 以外のところでは 0 である。したがって、double OPE 極限の 4 点関数 (7.6) は、

$$\langle \mathrm{Tr}\, X^6(x)\mathrm{Tr}\, X^2(y)\mathrm{Tr}\, X^2(z)\mathrm{Tr}\, X^2(w)\rangle = \sum_{\Delta} \frac{C_{62\Delta}}{(x-y)^{8-\Delta}} \frac{a_\Delta}{(x-z)^{2\Delta}} \frac{C_{\Delta 22}}{(z-w)^{4-\Delta}}, \tag{7.9}$$

この中で時空の点の依存性が超重力理論からの結果と合っているのは、$\Delta = 4$ の項だけである。ここで、$\Delta = 4$ の演算子として現れうるのは、$\mathrm{Tr}\, X^4$ および $:\mathrm{Tr}\, X^2 \mathrm{Tr}\, X^2:$ のみである。これらの間の 2 点関数、3 点関数の係数 $C_{62\Delta}, a_\Delta, C_{\Delta 22}$ はすべて protected であり、したがって、この 4 点関数の係数 $A = C_{62\Delta} a_\Delta C_{\Delta 22}$ も protected である。

我々は次のような予想をした。extremal な 4 点関数およびここでは話さなかったが、extremal な n 点関数は protected である。

7.4 場の理論からのチェック

さて、この予想に対して、超重力理論および場の理論からの様々なチェックが試みられた。

Skiba [unpublished] および Rome のグループ Bianchi、Kovacs [23] は、簡単な組み合わせ論から、場の理論において最低次の輻射補正が消えることを示した。さらに、Bianchi、Kogvacs [23] は、extremal な 4 点関数に関して、instanton 補正が消えることを示した。

Howe のグループ [24] は、extremal な n 点関数が輻射補正を受けないことを次のようにして示した。$\mathcal{N} = 2$ superspace (この場合最も効果的である) および $\mathcal{N} = 4$ superspace を使って、Intriligator 方程式の右辺に superspace の不変量が存在しないことを示すことにより示した。

したがって、今では、我々が超重力理論から学んだことに関して場の理論からのたくさんの証拠によって支持されている。

8 まとめ

今日の講義で話したことをまとめておく。

1. AdS/CFT 対応によって、境界の $\mathcal{N} = 4$ Yang-Mills 理論には、次のような非常にたくさんの protected な相関関数が存在することがわかった。
   - Princeton のグループの見つけた、chiral primary の 3 点関数。
   - さらに、double trace 演算子の 2 点および 3 点関数。
   - この夏に見つけた、extremal な 4 点関数。
   - extremal な n 点関数。

2. これらの相関関数が protected であることの場の理論からの確かな理由はわからないが、おそらく高い $\mathcal{N}$ に対する superspace の性質が関係あると思われる。一方で、場の理論からのいろいろな証拠によって、これらの量が protected であることは、すべての $g^2_{\rm YM}$、すべての N に対して確かなようである。

3. このことから $\mathcal{N}=4$ の Yang-Mills 理論はかなり自明であり、うまくやると自由場の理論に帰着できるのではと思うかもしれない。

   しかしこの推測は、絶対に正しくない。ある 4 点関数には、消えない log の補正があることがわかっている。このことについては次の講義で話す。したがって、protected でなく、異常次元が 0 でない double trace 演算子がある。これらの異常次元は、強い非摂動論的効果を表すパラメータであり、超重力理論から計算できる。

Q. AdS_3 の場合についてはどうか。
A. AdS_3 の場合には、詳しいことはよくわからないが、ここで開発された積分の計算のテクニックは一般に使えると思う。だから、AdS_3 での protected な相関関数を見つけることは、難しくないはずだ。

ただ、境界上の場の理論と比較するときには、困難があるかもしれない。それについてはよくわからない。

Q. topological field theory との関係は。
A. 私は topological field theory のことはよく知らないが、時空の積分で表される 2 つの global な量をもとめようとした。おそらく我々の計算した相関関数は、 local な場の理論のものであると思う。

あなたが言ってくれた方法は、非常面白いアプローチかもしれないが、今はよくわからない。

Q. 今求まった相関関数からもとの理論を構成することはできるか。
A. あなたが提案した研究の方向は非常に興味深い。それが出来て、超重力理論からの予言が場の理論の基礎的な要素を構成していることを示せたとしたら非常に興味深いことだと思う。

公理論的な方法を使う研究者が AdS/CFT 対応を使ってくれれば非常に面白い研究ができると思う。

Q. あなたは、たくさんの繰り込みを受けない相関関数を見つけたわけだが、これらに関して簡単な規則はあるか。
A. これらは、思いがけなく見つかったものである。簡単な規則は知らない。私が知っているのは、いくつかの事例だけである。それは、Princeton のグループの見つけたもの、protected な double trace 演算子の 2 点、3 点関数、それに、extremal な n 点関数である。

いくつかのルールから決めることは、まだ考えたことはない。時空の座標への依存性が非常に縮退している場合というのが 1 つの提案ではある。$0\times\infty$ の形になっているものがさらにたくさんの事例を含んでいるかもしれないが、 Princeton の通常の extremal でない 3 点関数は説明出来ない。4 点以上の場合はいつも $0\times\infty$ を含んでいる。

Q. 4 点関数はどのくらいの範囲まで求めることが出来たのか。

A.　次回の講義はすべて 4 点関数についてであり、超重力理論を使った一般の 4 点関数の詳しい計算のしかたについて話す。

今日話したのは、extremal という特別な場合だけである。この場合は、$0 \times \infty$ という形になり、時空の座標への依存性が、かなり縮退した形になる。この場合は、OPE からこれらの 4 点関数は、非繰り込み定理を満たすことが証明できる。

しかし、一般の 4 点関数は計算は出来るが、それは N や λ が非常に大きい近似で有効である。次回の講義に出るか、論文をみるかすればこれらの計算のしかたはわかるだろう。

第 II 部
一般の 4 点関数の計算と場の理論の対応

9　予備知識

では、この最後の講義の本題—4 点関数—に移ろう。ここでの話はよく知られた予備知識だが、大学院生向けの講義ということなので復習しておこう。その後、AdS 超重力理論側の伝搬関数と 4 点関数の計算法、場の理論側における解釈とその物理へと進んでいこう。

9.1　共形対称性 $SO(d,2)$ による制限

前回の講義で、2 点関数、3 点関数の時空依存性は共形対称性から決まることを話したが、4 点関数に関しても同様のことが言える。これを見るために、$x_{ij}^2 \equiv (x_i - x_j)^2$ が共形群の反転変換 $x_i^\mu = x_i'^\mu/(x_i')^2$ の下でどのように変換するかを見てみると、簡単な計算により、

$$(x_{ij})^2 = \frac{(x'_{ij})^2}{(x'_i)^2(x'_j)^2}, \tag{9.1}$$

となり、x_i と x_j の 2 点それぞれからくるスケール因子がつくことがわかる。つまり、共形不変な変数を作るためには、比を作ればいいことになる。4 点 x_1、x_2、x_3、x_4 に対して、2 つの独立な比

$$\xi = \frac{x_{13}^2 x_{24}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2}, \qquad \eta = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2}, \tag{9.2}$$

を作ると、反転変換に対して分母分子のスケール因子が相殺して、共形不変な量になる。後の超重力理論では異なった組み合わせを取ることになるが、これらの量は 4 点関数の基本的な変数である。具体的な 4 点関数の一般形は、共形不変性から

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1)\mathcal{O}_{\Delta_2}(x_2)\mathcal{O}_{\Delta_3}(x_3)\mathcal{O}_{\Delta_4}(x_4)\rangle = \frac{1}{x_{12}^{q_{12}} x_{13}^{q_{13}} x_{14}^{q_{14}} x_{24}^{q_{24}}} F(\xi,\eta), \tag{9.3}$$

のように次元合わせの kinematic な部分と上で定義した ξ と η の任意関数 $F(\xi,\eta)$ で書ける。ここでそれぞれの指数は反転変換の下での変換性から決まる。

$$2\Delta_1 = q_{12} + q_{13} + q_{14}, \qquad 2\Delta_2 = q_{12} + q_{24}, \tag{9.4}$$

それから別に後で必要になるわけではないが、演算子の次元の和と差を $\Sigma_{ij} \equiv \Delta_i + \Delta_j$ と $\Delta_{ij} \equiv \Delta_i - \Delta_j$ のように定義すれば、q_{ij} は Σ_{ij} と Δ_{ij} を用いて、

$$\begin{aligned} q_{12} &= \Delta_{13} + \Delta_{24}, \qquad q_{14} = \Delta_{13} - \Delta_{24}, \\ q_{13} &= \Sigma_{13} - \Delta_{13}, \qquad q_{24} = \Sigma_{24} - \Delta_{13}, \end{aligned} \tag{9.5}$$

のように書ける。

9.2 超重力理論から得られる結果と共形場理論を比べる道具 OPE

次に超重力理論での結果と場の理論から期待されることを比べる主な道具である OPE へ進もう。OPE は時空次元が 2 より大きいときに比較的簡単な形をしている。まずは前回の講義の復習から始めよう。supersymmetric な共形代数も重要だが、ここでは bosonic な共形代数 $SO(d,2)$ に限ることにしよう。共形場理論の演算子は共形代数 $SO(d,2)$ の表現を成していて、その表現の最低ウェイト状態が primary 演算子である。ここで興味がある primary 演算子は、前回の講義で出てきた chiral primary 演算子

$$\mathcal{O}_\Delta(x) = \mathrm{Tr}\, X^k, \tag{9.6}$$

flavor current J_i^a、stress tensor T_{ij} の他に、$N = 4$ ゲージ理論での marginal な結合定数を微小変換させる dilaton 演算子

$$\mathcal{O}_\phi = \mathrm{Tr}\,(F^2 + \cdots), \tag{9.7}$$

と位相角を微小変換させる axion 演算子

$$\mathcal{O}_C = \mathrm{Tr}\,(FF^* + \cdots), \tag{9.8}$$

がある。それぞれの primary 演算子 $\mathcal{O}$ に対して、共形代数の descendant 演算子 $\partial_i \mathcal{O}$ が存在して、並進演算子との交換関係 $[P_i, \mathcal{O}] \sim \partial_i \mathcal{O}$ によって得られる。

次に 2 つの primary 演算子の OPE を考えよう。

$$\mathcal{O}_{\Delta_i}(x)\mathcal{O}_{\Delta_j}(y) \xrightarrow{y\to x} \frac{c_{\Delta_i}\delta_{\Delta_i\Delta_j}}{(x-y)^{2\Delta_i}} + \sum_\Delta \frac{c_{\Delta_i\Delta_j\Delta}}{(x-y)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta}}\mathcal{O}_\Delta(x). \tag{9.9}$$

ここであらわにいうとき以外には、OPE は Taylor 展開によって得られる descendant 演算子の寄与を省くことにする。また後で他の tensor 構造も現れるが、ここでは簡単のため scalar 演算子のみ現れるとする。右辺第 1 項の c 数係数 c_Δ は後で見るように、相関関数と深く関係する量である。右辺第 2 項には様々な演算子からの寄与があり、演算子の次元によって決まる巾乗と c 数係数 $c_{\Delta_i\Delta_j\Delta}$ が現れる。これらの c 数係数 $c_{\Delta_i\Delta_j\Delta}$ は OPE 係数と呼ばれる。

この OPE の真空期待値をとると、右辺にある様々な演算子の寄与が消えて、2 点関数が現れる。

$$\left\langle \mathcal{O}_{\Delta_i}(x)\mathcal{O}_{\Delta_j}(y) \right\rangle \xrightarrow{y\to x} \frac{c_{\Delta_i}\delta_{\Delta_i\Delta_j}}{(x-y)^{2\Delta_i}}. \tag{9.10}$$

このように係数 c_{Δ_i} は 2 点の相関を意味するため、しばしば central charge と解釈される。もう少し頑張ると、もう 1 つの演算子を掛け合わせて真空期待値を取ることで、3 点関数を作ることができる。

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x)\mathcal{O}_{\Delta_2}(y)\mathcal{O}_{\Delta}(z)\rangle \xrightarrow{y\to x} \frac{c_{\Delta_1\Delta_2\Delta}c_{\Delta}}{(x-y)^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta}(x-z)^{2\Delta}}. \tag{9.11}$$

このように、3 点関数に対して近距離極限 $y \to x$ を取ると、OPE 係数 $c_{\Delta_1\Delta_2\Delta}$ と central charge c_Δ の積を決めることができる。

ここで、例として基本的な primary 演算子

$$\mathcal{O}_2(x) = \mathrm{Tr}\, X^{\{i}X^{j\}} \in 20', \tag{9.12}$$

の OPE を考えよう。この基本的な例を元にして、後で超重力理論の計算結果と比べるのに必要な OPE を調べよう。

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\left(X^i(x)X^j(x)\right)\cdot \mathrm{Tr}\,\left(X^k(y)X^l(y)\right)& \\ \sim \frac{(N^2-1)\delta_{ik}\delta jl}{(x-y)^4} + \frac{\delta_{jk}}{(x-y)^2}&\mathrm{Tr}\,\left(X^i(x)X^l(x)\right) \\ + :\mathrm{Tr}\,\left(X^i(x)X^j(x)\right)&\mathrm{Tr}\,\left(X^k(y)X^l(y)\right):.\end{aligned} \tag{9.13}$$

ここで、最初の c 数項はもっとも特異的な項で、2 回 Wick 縮約をすることによって得られる。係数は場の自由度を数えていて、adjoint 表現では (N^2-1) となる。その次の項は 1 回だけ Wick 縮約をして出てくるもので、ちゃんと計算すると Kronecker delta を持つ伝搬関数によって、2 つの color の trace がまとまって 1 つになることがわかる。$SO(6)$ の flavor 群で見れば、この項は 1 表現の Konishi 演算子

$$K(x) = \mathrm{Tr}\, X^iX^i, \tag{9.14}$$

と $20'$ 表現の元の演算子 $\mathcal{O}_2(x)$ に分解されることがわかる。最後に normal order された項の寄与もある。まとめると、

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_2(x)\mathcal{O}_2(y) \sim \frac{c}{(x-y)^4} + \frac{c_{22K}}{(x-y)^{4-\Delta_K}}K(x) + \frac{c_{222}}{(x-y)^2}\mathcal{O}_2(x)& \\ + \sum_I \frac{c_{22\Delta_I}}{(x-y)^{-\gamma_I}} :\mathcal{O}_2\mathcal{O}_2:_I,&\end{aligned} \tag{9.15}$$

になる。

ここで、Konishi 演算子 $K(x)$ に異常次元が発生する。この異常次元はちょっと昔の論文で計算されている。AdS/CFT 対応を論じた Gubser と Klebanov と Polyakov の論文 [2] によれば、Konishi 演算子は弦の状態に対応する演算子で AdS/CFT 対応では $\lambda \sim g^2N$ を十分に大きくとるので、超重力理論の計算には現れず、非常に大きい異常次元が発生している。

$$\Delta_K \sim \lambda^{1/4} = (g^2_{\mathrm{YM}}N)^{1/4} \gg 1. \tag{9.16}$$

それから、$\mathcal{O}_2$ の double trace 演算子 : $\mathcal{O}_2\mathcal{O}_2 :_I$ は、$SO(6)$ の表現で

$$20' \times 20'_{\text{対称}} = 1 \oplus 20' \oplus 84 \oplus 105, \tag{9.17}$$

と分解された各既約表現 I でラベルされる。前回の講義で触れたように、これらの演算子は BPS 条件の議論から、105 表現には異常次元が発生せず、またもう少し曖昧な議論 [21] から、84 表現も異常次元が発生しないと言われている。しかし、一般に 1 表現も $20'$ 表現も異常次元が発生すると期待できる。

$$\begin{aligned} \Delta_1 = 4 + \gamma_1, \qquad \Delta_{20'} = 4 + \gamma_{20'}, \\ \Delta_{84} = 4, \qquad \Delta_{105} = 4, \end{aligned} \tag{9.18}$$

次の OPE の例として、dilaton 演算子 $\mathcal{O}_\phi$ と axion 演算子 $\mathcal{O}_c$ を考えよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(y) \sim \frac{c}{(x-y)^8} + \frac{1}{(x-y)^4} T_{ij} + \cdots \\ + c_{\phi\phi\phi} : \mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_\phi : + c_{\phi\phi C} : \mathcal{O}_C\mathcal{O}_C : + c_{\phi\phi T} : T_{ij}T_{ij} : + \cdots . \end{aligned} \tag{9.19}$$

このとき OPE では stress tensor $T_{ij} = \mathrm{Tr}\,(F_{ik}F_{jk} - \delta_{ij}F^2/4 + \cdots)$ が入ってくることに注意しよう。最初の項はもっとも特異的な振る舞いを示す central charge による寄与で、次の項は stress tensor による寄与であり、それから dilaton 演算子、axion 演算子、stress tensor の double trace 演算子による寄与が続き、複雑な演算子混合と異常次元が現れることがわかる。超重力理論の計算で得られる非摂動的な情報はまさにこのような形のものである。

最後に 4 点関数に進もう。4 点関数に対して、2 点 x_1 と x_3、2 点 x_2 と x_4 がそれぞれ近づく "double OPE 極限"

$$x_{13}, x_{24} \ll x_{12}, \tag{9.20}$$

を考えると、4 点関数の t-channel の両側で OPE が使えて、

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(x_1) \cdots \mathcal{O}_{\Delta_4}(x_4) \rangle \sim \sum_\Delta \frac{c_{\Delta_1\Delta_3\Delta}}{(x_{13})^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta}} \frac{c_\Delta}{(x_{12})^{2\Delta}} \frac{c_{\Delta_2\Delta_4\Delta}}{(x_{24})^{\Delta_2+\Delta_4-\Delta}}, \tag{9.21}$$

中間状態において様々な primary 演算子が交換する寄与に分解する。この式は超重力理論の計算結果を解釈するときに重要な役割を果たす。

10 AdS 超重力理論における計算

ここで超重力理論に目を向けて、

- これらの計算から OPE の一般的な描像 (9.21) をどのように再現するか、
- $AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 超重力理論から 't Hooft 極限の $\mathcal{N} = 4$ SYM における新たな非摂動的な情報をどのように引き出すか

を調べよう。

10.1 4 点関数 $\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}\mathcal{O}_{\Delta_2}\mathcal{O}_{\Delta_3}\mathcal{O}_{\Delta_4}\rangle$ の超重力理論における図

超重力理論の 4 点関数に対する図を考える。まずは自明なものとして、disconnected 図がある。これはすべての非自明性が消え、単なる 2 点関数の積となる。また $\mathcal{O}_{\Delta_1} = \mathcal{O}_{\Delta_2}$ と

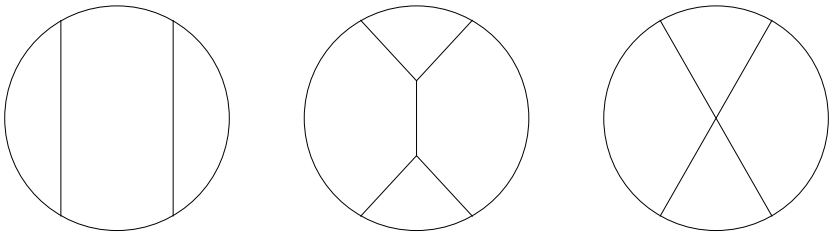


図 1: 左から disconnected 図、exchange 図、contact 図の順

$\mathcal{O}_{\Delta_3} = \mathcal{O}_{\Delta_4}$ のときのみ現れる。それから exchange 図がある。それを考えるためには、次のものを用意しなければならない。

- 超重力理論の 3 点結合定数
- bulk-to-boundary 伝搬関数

$$K_\Delta(x,z) = c_\Delta \left(\frac{z_0}{z_0^2 + (\vec{z}-\vec{x})^2}\right)^\Delta, \tag{10.1}$$

- bulk-to-bulk 伝搬関数 $G(z,w)$

最初の 2 つは前回の講義で既に出てきたので、今回は最後の 1 つの焦点を当てる。それから contact 図もある。

10.2 各図の $1/N$ 展開形

超重力理論の計算の詳細に進む前に、各図の $SU(N)$ の N に関する order について考えよう。もっとも興味深い primary 演算子の場合、既に知っているように、2 点関数

$$\left\langle \mathrm{Tr}\, X^k(x) \mathrm{Tr}\, X^k(y) \right\rangle = \frac{c_k}{(x-y)^{2k}}, \tag{10.2}$$

が protect されているので、central charge c_k を求めればよい。これは場の理論の Wick 縮約を用いて color の trace から計算できて、$O(N^k)$ の多項式として書ける。

$$c_k = P_k(N) = aN^k + bN^{k-1} + \cdots. \tag{10.3}$$

この演算子を $N^{k/2}$ で割って

$$\mathrm{Tr}\, X^k \to \frac{1}{N^{k/2}} \mathrm{Tr}\, X^k, \tag{10.4}$$

のように規格化し直すと、2 点関数はすべて $O(1)$ の量となる。

$$\left\langle \mathrm{Tr}\, X^k \mathrm{Tr}\, X^k \right\rangle = \frac{1}{(x-y)^{2k}}. \tag{10.5}$$

また、超重力理論の作用

$$S = -\frac{1}{2\kappa_5^2}\int d^5z\sqrt{g}(-R+\cdots), \tag{10.6}$$

は分母に Planck 定数

$$\kappa_5^2 = 8\pi G_5 \sim L^3/N^2, \tag{10.7}$$

があるので、primary 演算子の 3 点関数で測られる OPE 係数 $c_{\Delta_1\Delta_3\Delta}$ は κ に比例する 3 点頂点を 1 つ含み、$O(1/N)$ になる。

$$c_{\Delta_1\Delta_3\Delta} \sim 1/N. \tag{10.8}$$

しかし、double trace 演算子の場合は後で見るように少し違ってくる。また、4 点関数の exchange 図の場合や contact 図の場合は κ の次数勘定から $O(1/N^2)$ になることがわかる。

double trace 演算子の OPE 係数 $c_{\Delta_1\Delta_3:\mathcal{O}\mathcal{O}:}$ の order は、disconnected 図に対して double OPE 極限をとることによって、

$$\frac{1}{(x_{12})^{2(\Delta_1+\Delta_3)}} \sim \frac{(c_{\Delta_1\Delta_3:\mathcal{O}\mathcal{O}:})^2}{(x_{12})^{2(\Delta_1+\Delta_3)}}, \tag{10.9}$$

が得られ、$c_{\Delta_1\Delta_3:\mathcal{O}\mathcal{O}:} \sim 1$ となることがわかる。

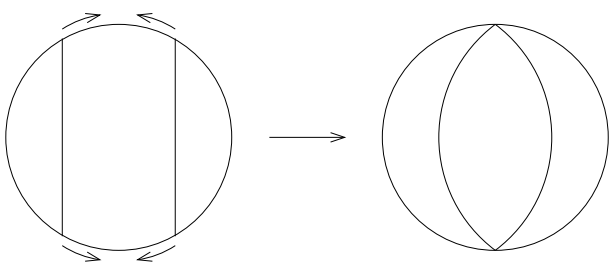


図 2: OPE

さらに、$:\mathcal{O}_{\Delta_1}\mathcal{O}_{\Delta_3}:$ が異常次元を持つことが期待される。

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_3 + \gamma_{:\mathcal{O}_{\Delta_1}\mathcal{O}_{\Delta_3}:}. \tag{10.10}$$

この異常次元は後の超重力理論の exchange 図と contact 図の計算から $\gamma_{:\mathcal{O}\mathcal{O}:} \sim 1/N^2$ となることがわかる。

10.3 bulk-to-bulk 伝搬関数

ここで、話題を変えて超重力理論の bulk-to-bulk 伝搬関数へ進もう。scalar の場合は AdS 空間のかなり古い文献 [25, 26, 27, 28] で見つけられる。scalar 伝搬関数は時空の高い対称性のため、単なる一変数の関数になっている。この変数を AdS 空間の双曲面表示の chordal 距離 u に取るのがもっとも便利である。

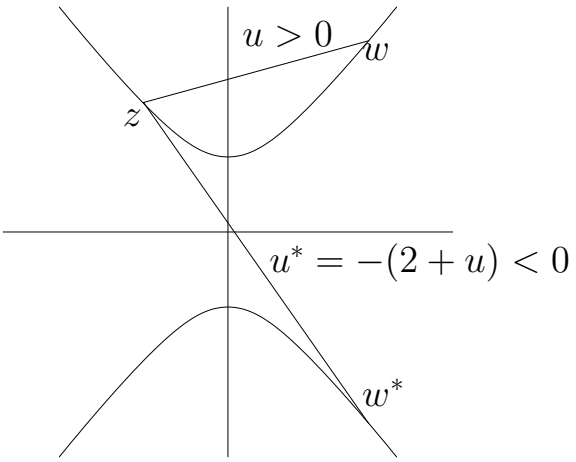


図 3: chordal 距離

$$G(z,w) = G(u). \tag{10.11}$$

この chordal 距離 u に関して少し説明を加えよう。Euclid 化した $d+1$ 次元 AdS 空間は、$d+2$ 次元 Minkowski 空間内の 2 枚の双曲面として見なせる。chordal 距離 u とは AdS 空間の距離を埋め込んでいる Minkowski 空間の距離として定義したものである。もし 2 点 z と w がとも同じシートの上のあるならば chordal 距離は正 $u > 0$ になるのだが、片方 w を虚像 w^* に移すと chordal 距離は負の量 $u^* = -(2+u) < 0$ に変わる。このように定義された chordal 距離 u に対して、埋め込み空間に言及しない AdS 空間の計量

$$ds^2 = \frac{1}{z_0^2}(d\vec{z}^2 + dz_0^2), \tag{10.12}$$

を用いて表わすと、

$$u = \frac{(z-w)^2_{\text{flat}}}{2z_0 w_0}, \tag{10.13}$$

となる。

scalar 伝搬関数に関する一般的な結果により、scalar 伝搬関数は chordal 距離 u の超幾何関数で書けることがわかる。

$$G_\Delta(u) = N_\Delta \left(\frac{1}{u}\right)^\Delta F\left(\Delta, \Delta - \frac{d-1}{2}, 2\Delta - d + 1, -\frac{2}{u}\right). \tag{10.14}$$

しかし、特に IIB 超重力理論のように場の次元 Δ が整数であるときには簡単になる。もっとも簡単な場合は場の次元が $\Delta = d-1$ のときである。

$$G_{\Delta=d-1}(u) \sim \frac{1}{[u(u+2)]^{\frac{d-1}{2}}} \overset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{|z-w|^{d-1}}. \tag{10.15}$$

このとき虚像変換すると、u と $u+2$ が入れ替わることがわかる。また、この伝搬関数の短距離極限 $u \to 0$ を取ると、$d+1$ 次元時空における scalar 伝搬関数の普遍的な短距離の振る舞いになっていることがわかる。これは計算の非自明な確認になっている。

scalar 伝搬関数のほかに、gauge boson や graviton といった他の場の伝搬関数も必要になるので、次にそれらに進もう。過去の文献で de Sitter 空間と AdS 空間における gauge boson 伝搬関数 [29] と de Sitter 空間における graviton 伝搬関数 [30] が扱われているが、ここでは全く新しい方法で計算することにしよう [11]。この方法の方が遥かに簡潔で、gauge boson と graviton の他に、任意の rank の tensor 場にもすぐに応用できる。それをこれから紹介しよう。もっとも簡単な例として、gauge boson 伝搬関数の場合で説明して、他の場合への拡張に関しては簡単に触れるだけにしよう。

普通 gauge boson 伝搬関数を知りたいときには、kinetic 項と source 項だけでなく、ゲージ固定項を入れる必要がある。

$$S_{A_\mu} = \int dz \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu + \frac{1}{2} \xi (\partial_\mu A^\mu)^2 \right\}. \tag{10.16}$$

ここで保存 current J に対する波動方程式

$$(\text{Maxwell 演算子}) A = J, \tag{10.17}$$

の解だけが必要であることに注意すれば、もっと簡単に解を見つけることができる。Green 関数の方法を用いれば、解は

$$A_\mu(z) = \int dw \sqrt{g} G_{\mu\nu'}(z,w) J^{\nu'}(w), \tag{10.18}$$

と形式的に書くことができる。ここで Green 関数は微分方程式

$$D^\mu \partial_{[\mu} G_{\nu]\nu'}(z,w) = g_{\nu\nu'} \delta(z,w) + \partial_{\nu'} \Lambda_\nu, \tag{10.19}$$

に従う。この形を仮定することによって、波動方程式 (10.17) が再現できる。具体的に見るためには、Maxwell 演算子を積分の中にいれて δ 関数に置き換えればよい。このとき物理を変えない pure gauge の自由度を考慮に入れなければならないので、最後の項の自由度を持つが、この自由度は current 保存則のために積分に効かない。

一方、Green 関数は bitensor であり、2 点 z と w においてともに共変的に振舞わなければならなく、AdS 空間の対称性から次の基底を用いて展開できる。

$$G_{\nu\nu'}(z,w) = -(\partial_\nu \partial_{\nu'} u) F(u) + \partial_\nu \partial_{\nu'} S(u). \tag{10.20}$$

第 2 項は pure gauge であり、保存 current を考える限り興味がない。一方、ゲージ関数 Λ_ν もやはり vector である必要があるので、

$$\Lambda_\nu = (\partial_\nu u) \Lambda(u), \tag{10.21}$$

と書ける。この ansatz(10.20) と (10.21) を Green 関数の波動方程式 (10.19) に代入すると、pure gauge である Green 関数 $G_{\nu\nu'}(z,w)$ の第 2 項は、Maxwell 演算子を作用させると消えることがわかる。物理に関係する第 1 項だけが残って、Λ を消去すると、

$$u(2+u)F'' + (d+1)(1+u)F' + (d-1)F = 0, \tag{10.22}$$

となる。これを書き換えると、質量 $m^2 = -(d-1)$ を持つ scalar 伝搬関数

$$(\Box + (d-1))F = 0, \tag{10.23}$$

に帰着できる。ここで AdS 空間では負の質量が許されることに注意しよう。その解は前述の超幾何関数を用いて書ける。特に今の場合、

$$F(u) = G_{d-1}(u) \sim \frac{1}{[u(2+u)]^{\frac{d-1}{2}}}, \tag{10.24}$$

と簡単になる。まとめると、gauge boson 伝搬関数は

$$G_{\nu\nu'}(z,w) = -(\partial_\nu \partial_{\nu'} u) G_{d-1}(u) + \text{gauge term}, \tag{10.25}$$

で与えられる bitensor で、ゲージ項は物理と関係ないことがわかる。

graviton 伝搬関数に対しても全く同様だが、bitensor の基底は物理的なモードが 2 つで pure gauge に吸収されるモードが 3 つもあるので、解析がもっと複雑である。結局、対称化した bitensor の積と trace 部分の和

$$G_{\mu\nu_j\mu'\nu'}(z,w) = (\partial_\mu \partial_{\mu'} u \partial_\nu \partial_{\nu'} u + \mu \leftrightarrow \nu) G_d(u) + g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} H(u), \tag{10.26}$$

と書けることがわかる。ここで、G_d は次元 $\Delta = d$ の scalar 伝搬関数で、その具体形は

$$G_d(u) = -\frac{1}{8\pi^2} \left\{ \frac{(1+u)[2(1+u)^2 - 3]}{[u(2+u)]^{3/2}} - 2 \right\}, \tag{10.27}$$

で与えられる。また、$H(u)$ は $G_d(u)$ で書かれている。

この方法は今や様々な次元の AdS/CFT 対応のすべての bosonic な場に拡張されている [31, 32]。massive な場に対しては、基底が多くて複雑である。

Q. $H(u)$ はどのように決まるか？

A. $G_d(u)$ と $H(u)$ に対する方程式がいっぱい出てきて、それを解けばよい。詳しくは [11] に書いてある。

10.4 4 点 exchange 図に対する技術

では、4 点 exchange 図の積分を評価する技術に進むことにしよう。歴史的には、MIT/UCLA では、contact 図、gauge boson exchange 図、一般的な scalar exchange 図、graviton exchange 図の順に進んできた。ほかにも 4 点関数に関していろいろな研究がされてきて、spinor exchange 図に関してはうまい扱いが [33] にあるようだ。

$$\left\langle \mathrm{Tr}\, X^{k_1}(x_1)\mathrm{Tr}\, X^{k_2}(x_2)\mathrm{Tr}\, X^{k_3}(x_3)\right\rangle =$$

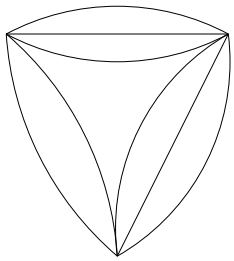


図 4: 特別な k_i のときのみ図が描ける。

まずは予備知識として、AdS/CFT 対応で primary 演算子の 3 点関数は、protect されていて自由場の Feynman 図で与えられるのが驚きだったことを思い出そう。自由場の Feynman 図においては、x_1 と x_2、x_2 と x_3、x_3 と x_1 の間の一定の数の scalar 伝搬関数の交換が引けた。ちょっとした組み合わせを考えることで、x_1 と x_2 の間の scalar 伝搬関数の交換は

$$k_{12} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 - k_3), \tag{10.28}$$

で与えられ、k_{23} と k_{31} についても同様な関係が成り立つことがわかる。また、これもちょっとした自明な組み合わせの話だが、この図が描け、3 点関数の自由場近似が消えていないのは

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 - k_3 &= 2n_3 \geq 0, \\ k_2 + k_3 - k_1 &= 2n_1 \geq 0, \\ k_3 + k_1 - k_2 &= 2n_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{10.29}$$

の 3 つの量が非負な偶数のときに限ることもわかる。

当然のことだが、このことは flavor 対称性と無矛盾である。実際、場の理論の flavor 対称性 $SO(6)$ の $(0, k, 0)$ 表現に属している $\mathrm{Tr}\, X^k$ は、$AdS_5 \times S^5$ 空間上の IIB 超重力理論側では ϕ_k に対応し、その 3 点相互作用は S^5 上の球面調和関数の積分

$$\int_{S^5} Y^{k_1} Y^{k_2} Y^{k_3}, \tag{10.30}$$

で書ける。そして、この球面調和関数の積分が消えていない条件がまさに上に並べた自由場近似が消えていない条件に一致する。この事実は、AdS/CFT 対応がうまくいっていることを示唆する。以後、$n_i > 0$ と仮定しよう。$n_i = 0$ の場合は extremal な 3 点関数、4 点関数のときで、前回の講義で既に説明した。

では次に scalar exchange 積分に進もう。

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int \frac{d^{d+1}w}{w_0^{d+1}} \int \frac{d^{d+1}z}{z_0^{d+1}} K_{\Delta_1}(x_1, z) K_{\Delta_3}(x_3, z) G_{\Delta}(z, w) K_{\Delta_2}(x_2, w) K_{\Delta_4}(x_4, w). \tag{10.31}$$

ここには 4 つの bulk-to-boundary 伝搬関数と 1 つの bulk-to-bulk 伝搬関数が現れる。まずは 2 つの bulk-to-boundary 伝搬関数と 1 つの bulk-to-bulk 伝搬関数を z 積分した後に、その結果と残りの 2 つの bulk-to-boundary 伝搬関数をさらに w 積分をする必要がある。いつもの簡単化をする技術で、並進対称性を使って $x_1 = 0$ として、反転させてまた並進対称性 $w' \to w = w' - x_3$ を使って、z 積分の部分を

$$I(w) = \int \frac{d^{d+1}z}{z_0^{d+1}} G_\Delta(u) z_0^{\Delta_1} \left(\frac{z_0}{z^2}\right)^{\Delta_3}, \tag{10.32}$$

と書き変えることができる。この操作によって bulk-to-boundary 伝搬関数が簡単な形になった。

これを評価するには、少し難しいが次の方法がある。

- まず bulk-to-bulk 伝搬関数を $\xi = 1/(1+u)$ で級数展開する。
- 級数を項別に積分する。
- もし IIB 超重力理論で条件 $\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta = 2n > 0$ が成り立てば、この級数は二項級数の形になって簡単にまとまり、最後の Feynman パラメータ積分を実行することができる。

その積分の結果、z 積分の部分 $I(w)$ は $t = w_0^2/w^2$ の簡単な多項式になる。このように複雑な方法を経て簡単な結果にたどり着くことは、簡単な方法があることを強く示唆する。実際ちょっとひらめけば、次の方法があることがわかる [13]。

この同じ z 積分を評価する新しい方法は、積分を w または t の簡単に解ける微分方程式にすり替えるという一般的な技術である。そうすることによって微分方程式を帰納的な方法で簡単に解くことができる。

- まずは変数 w と積分変数 z の scale 対称性 ($w_\mu \to \lambda w_\mu$ と $z_\mu \to \lambda z_\mu$) と d 次元 Poincaré 対称性を用いて、積分は適当な次元を持つ w_0 の巾乗と不変量 t の関数 $f(t)$ の積として書ける。

$$I(w) = (w_0)^{\Delta_{13}} f(t) \tag{10.33}$$

- 次に波動演算子 $(-\Box + m^2)$ の伝搬関数に対する作用 $(-\Box + m^2)G_\Delta(u) = \delta(w,z)$ に注意して、波動演算子を $I(w)$ の積分の中に入れる。

$$(-\Box + m^2) I(\omega) = \int dz \delta(z,\omega) z_0^{\Delta_1} \left(\frac{z_0}{z^2}\right)^{\Delta_3} = \omega_0^{\Delta_{13}} t^{\Delta_3}. \tag{10.34}$$

- 対称性から決まった ansatz(10.33) を (10.34) の左辺に代入する。

$$4t^2(t-1)f'' + 4t\left[(\Delta_{13}+1)t - \Delta_{13} + \frac{d}{2} - 1\right] f' + [\Delta_{13}(d-\Delta_{13}) + m^2] f(t) = t^{\Delta_3}. \tag{10.35}$$

- ここで微分方程式の解 $f(t)$ に対して、巾級数の形

$$f(t) = \sum a_k t^k, \tag{10.36}$$

を仮定して、a_k に対する漸化式を見つける。この漸化式は IIB 超重力理論の結合定数が消えない条件

$$\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta = 2n > 0, \tag{10.37}$$

を満たすとき、巾級数 $f(t)$ はどこかで止って、

$$k_{\max} = \Delta_3 - 1 \text{ から} \qquad k_{\min} = \frac{\Delta - \Delta_{13}}{2} \text{まで} \tag{10.38}$$

の巾を持つ多項式にまとまってしまう。

- この特殊解が一意的であることをみるには、この微分方程式の斉次解を超幾何関数で解いて、$I(w)$ の積分の中にない特異点が存在することを見ればよい。

この方法は graviton と massless と massive の両方の場合の gauge boson に応用できて、これらの場合もやはり伝搬関数のあらわな形は必要がなく、伝搬関数が従う方程式を知っているだけで十分である。もちろんこの新しい方法で得られる結果はどの場合も昔の方法で得られる結果と一致する。しかし、巾級数が無限級数になる場合 $(\Delta \geq \Delta_1 + \Delta_3)$ には、昔の方法を使わねばならない。このとき 4 点関数は病的な $\ln^2 s$ の特異性を示す。$\ln s$ の特異性は異常次元として解釈することが可能だが、$\ln^2 s$ を境界の共形場理論として解釈することはできそうにない。

Q. なぜ巾級数が多項式にならないときにうまくいかないか？

A. その簡単な理由はまだない。

こうして大変な計算だったが、最終結果は 4 つの bulk-to-boundary 伝搬関数の積分形を適当な係数 a_k で足し合わせたもの

$$S(x_i) = \sum_{k_{\min}}^{k_{\max}} a_k \frac{1}{(x_{13})^{2(\Delta_3+k)}} \int \frac{d^{d_1} w}{w_0^{d+1}} K_{\Delta_{13}+k}(x_1, w) K_k(x_3, w) K_{\Delta_2}(x_2, w) K_{\Delta_4}(x_4, w), \tag{10.39}$$

になっていることがわかる。これは演算子の次元を多少変更した contact 図の有限和として見なせる。巾級数が多項式に帰着するときなら、もっと高い spin の場合でも起きる現象である。

10.5 w 積分の計算と漸近形

ここでもともとの興味を思い出すと、double OPE と比べるために積分の漸近形が必要だった。それを得るためにはさらに w 積分を実行する必要がある。それはやや複雑で、ここでは簡単にまとめるだけにしよう。表示を簡単にするために前述の共形不変量 ξ と η の代わりに s と t を

$$s = \frac{1}{2} \frac{x_{13}^2 x_{24}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2}, \qquad t = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2 - x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2}, \tag{10.40}$$

と定義する。すぐに証明できるように、新しい変数 s と t は $0 \leq s \leq 1$ と $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動く。ここで残念ながら Feynman パラメータ積分を実行するのにちょっと苦労しなければならないが、最終的にはかなり簡単で、しかも、多くの場合、異常次元と spin に依らない普遍的な形が導かれる。

$$W_{\Delta_i}(x_i) = C(\Delta_i) \left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \left\{ s^{p-1} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right) I(s,t) \right\}. \tag{10.41}$$

ここで $C(\Delta_i)$ は規格化定数でガンマ関数で書けるが、その具体形は少し複雑なのでここでは書かないことにする。また関数 $I(s,t)$ は

$$I(s,t) = \int_0^\infty d\mu \int_{-1}^1 d\lambda \frac{1}{\mu + s(1-\lambda^2)} \frac{1}{1+\mu+\lambda t}, \tag{10.42}$$

で与えられ、驚くべきことに多くの場合で共通である。ここで double OPE と比べるために double OPE 極限をとることにしよう。この極限を s と t で書けば、

$$s \to 0 \quad t \to 0 \quad \text{with} \quad s/t \to 0, \tag{10.43}$$

である。この極限の下で $I(s,t)$ は

$$I(s,t) \xrightarrow{s \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} [-(\ln s) a_k(t) + b_k(t)] s^k, \tag{10.44}$$

になることがわかる。ここで $a_k(t)$ は

$$a_k(t) = \int_{-1}^1 d\lambda \frac{(1-\lambda^2)^k}{1+\lambda t}, \tag{10.45}$$

で与えられる。

これらの情報をまとめて、4 点関数の最終的な漸近公式が得られる。簡単のため $\Delta_1 = \Delta_3$ で $\Delta_2 = \Delta_4$ の場合に限ると、

$$S(x_i) \sim \frac{1}{x_{13}^{2\Delta_1} x_{24}^{2\Delta_2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\Delta_1 - \frac{\Delta}{2} - 1} s^{\frac{\Delta}{2}+n} A_n(t) + s^{\Delta_1} \sum_{m=0}^{\infty} s^m (\ln s B_n(t) + C_n(t)) \right\}, \tag{10.46}$$

となる。ここで $A_n(t)$ と $B_n(t)$ と $C_n(t)$ は t に関する既知の巾級数である。括弧の中の第 1 項は最初の数項が巾級数的な特異性を示し、第 2 項は $\ln s$ の特異性を示す。これらの特異性の解釈をこれから与えよう。

まずは 4 点関数の exchange 図の巾級数特異性の解釈に移ろう。簡単のために巾級数が多項式に帰着する scalar exchange の場合に限ろう。$d > 2$ の共形場理論のときは、70 年代に調べられて、「共形部分波展開」という技術が確立されている [34]。primary 演算子とその descendant という 1 つの共形 block の 4 点関数に対する寄与は高次の超幾何級数のようなものを駆使することによって、

$$S(x_i) = \frac{1}{x_{13}^{2\Delta_1} x_{24}^{2\Delta_2}} \sum_{n=0}^{\infty} s^{\frac{\Delta}{2}+n} A_n(t), \tag{10.47}$$

と得られた。その一般的な構造は再び、次元を持つ因子と s の無限級数と解析関数 $A_n(t)$ の積で書ける。ここでわかることは、超重力理論の exchange 図から得られる特異的な巾級数

$$\frac{1}{(x_{13})^{2\Delta_1-\Delta-n}}, \tag{10.48}$$

に対応する $A_n(t)$ は [34] の共形部分波展開に完全に一致している。これは少なくとも巾級数が多項式に帰着する場合において示されているが、おそらく一般的に成り立つと思われる。このことは少なくとも巾級数が多項式に帰着する条件が成り立つときに対して、超重力理論における massless な scalar 場の exchange と次元 Δ の演算子の共形部分波展開が完全に一致していることを示していることになる。このことはおそらく対称性以上に AdS/CFT 対応の確認になっていると思われる。

級数のレベル n において $2\Delta_1 - \Delta - n \leq 0$ が成り立ち、対応が成立しなくなる。これはまさに、超重力理論側の図に [34] で考えなかった新しい normal order された double trace 演算子が現れる場合に相当し、対応が成り立たなくなると期待されるときである。double trace 演算子は 2 粒子状態に対応していて、正しく扱わなければならない。

また、他の channel の exchange 図でも contact 図でも double OPE 極限 $x_{13}, x_{24} \to 0$ において、同じような $\ln s = \ln\left(x_{13}^2 x_{24}^2 / x_{12}^4\right)$ の特異性が現れることがわかる。

Q. 対応が成り立つ深い理由はあるか？

A. 今のところない。

10.6 IIB 超重力理論の dilaton-axion-graviton の 4 点関数

では、おもちゃの振幅でなく boundary のゲージ理論として解釈できる IIB 超重力理論の振幅に進もう。ここでは比較的簡単な dilaton-axion-graviton の部分に限ろう [8]。

$$S = \frac{1}{2\kappa_5^2}\int_{\mathrm{AdS}_5} d^5z\sqrt{g}\left(-R + \Lambda + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}e^{2\phi}g^{\mu\nu}\partial_\mu C\partial_\nu C\right). \tag{10.49}$$

ここで κ は Planck スケールで、AdS 空間のスケール L と $\kappa_5^2 = 8\pi^2 L^3/N^2$ で関係している。また Λ は宇宙定数項で、d 次元では $\Lambda = -d(d-1)/L^2$ になる。ϕ は指数関数的に axion の運動項にも結合している。

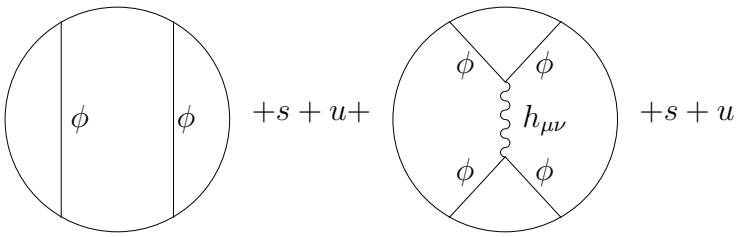
ここで超重力理論の dilaton、axion、計量の揺らぎに対応する演算子はそれぞれ $\mathrm{Tr}\, F^2$、$\mathrm{Tr}\, FF^*$、stress tensor に対称性から決まる補正をつけたものである。

$$\mathcal{O}_\phi = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\, F^2 + \cdots \quad \longleftrightarrow \quad \phi(z), \tag{10.50}$$

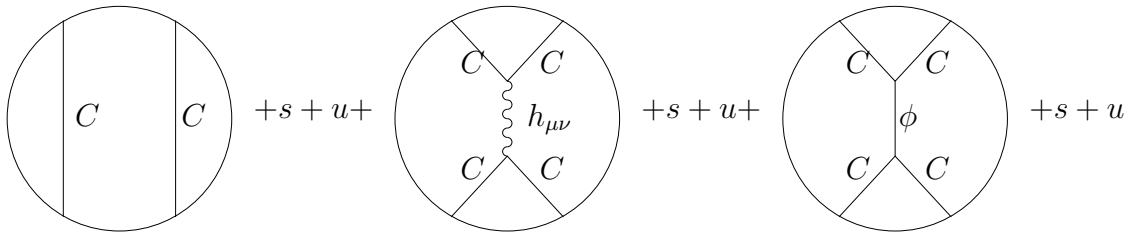
$$\mathcal{O}_C = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\, FF^* + \cdots \quad \longleftrightarrow \quad C(z), \tag{10.51}$$

$$\mathcal{O}_h = \frac{1}{N}T_{ij} \quad \longleftrightarrow \quad h_{\mu\nu}(z). \tag{10.52}$$

これからいろいろな演算子の 4 点関数を計算することにしよう。dilaton 場の 4 点関数 $\langle\mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_\phi\rangle$ は作用の形から、3 つの channel の disconnected 図と graviton exchange 図があることがわかる。



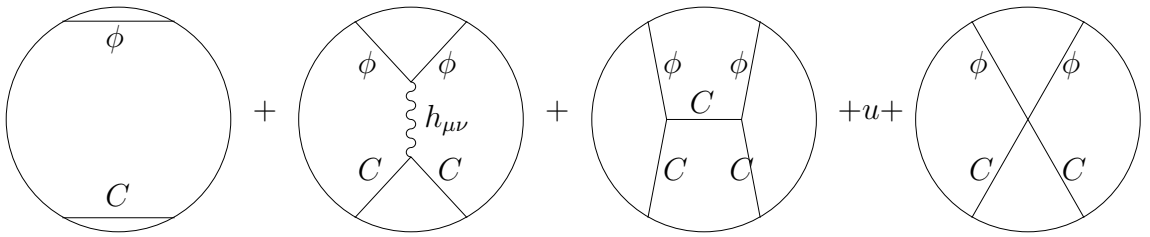
また axion 場の 4 点関数 $\langle \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \rangle$ は dilaton 場の 4 点関数に対応するもののほかに、dilaton 場との相互作用によって、3 つの channel の微分が入った dilaton exchange 図がある。



しかし後の例でわかるように、10 次元の部分積分をすればこれらの寄与が消えていることがわかるので、axion 場の 4 点関数は dilaton 場の 4 点関数と完全に同じ結果を与えることがわかる。

$$\langle \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_\phi \rangle = \langle \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \rangle \,. \tag{10.53}$$

それから、dilaton 場と axion 場の両方が入った 4 点関数 $\langle \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_C \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_C \rangle$ も考えなければならない。これには、s-channel だけの disconnected 図、t-channel の graviton exchange 図、s-と u-channel の axion exchange 図と微分が入った contact 図がある。



ここで s-channel の axion exchange 図に注目して少し細かく見ていこう。この図を素直に見て OPE による解釈を思い出すと、中間状態の axion 演算子 $\mathcal{O}_C$ による巾級数の特異性が現れることを期待するであろう。だが微分のために事情は一転する。これを説明するためにこの図に対応する振幅を考えよう。

$$A(x_i) \sim \int dw \sqrt{g} \int dz \sqrt{g} K(x_1, z) \partial^\mu K(x_2, z) \partial_\mu \partial_{\nu'} G(z, w) K(x_3, w) \partial^{\nu'} K(x_4, w). \tag{10.54}$$

ここで dilaton 場と axion 場は両方とも $d = \Delta = 4$ なので、massless $m^2 = \Delta(\Delta - d) = 0$ であり、

$$\Box K(x_2, z) = 0 \tag{10.55}$$

を満たすことに注意して、z 積分に対して部分積分をすれば、

$$\int dz\sqrt{g}\partial_\mu K(x,z)\partial^\mu K(x_2,z)\partial_{\nu'}G(z,w), \tag{10.56}$$

となることがわかる。ただし部分積分をしているときには必ず境界項が消えていることに注意しなければならない。さらに簡単な形にするため、$\Box K=0$ を使いこなして、

$$\partial_\mu K(x_1,z)\partial^\mu K(x_2,z)=\frac{1}{2}\Box(K(x_1,z)K(x_2,z)), \tag{10.57}$$

と書き変えて、d'Alembertian $\Box$ を bulk-to-bulk 伝搬関数 $G(z,w)$ の方に部分積分して、$\Box\partial_{\nu'}G(z,w)=\partial_{\nu'}\delta(z,w)$ を使う。すると、bulk-to-bulk 伝搬関数が消えて、振幅がほとんど contact 図の形

$$A\sim\int dw\sqrt{g}K(x_1,w)K(x_2,w)\partial_{\nu'}K(x_3,w)\partial^{\nu'}K(x_4,w), \tag{10.58}$$

に書き換えられる。ここには OPE の巾乗の特異性は出てこない。

このような結果から、OPE

$$\mathrm{Tr}\,F_{ij}(x)F_{ij}(x)\mathrm{Tr}\,F_{kl}(y)F^*_{kl}(y)\overset{y\to x}{\sim}\frac{c_{\phi CC}}{(x-y)^4}\mathrm{Tr}\,F_{mn}F^*_{mn}, \tag{10.59}$$

において、OPE 係数 $c_{\phi CC}$ は消えていることが期待できる。しかし対称性のみからでは一見何の制限を与えないように見える。そこでこれらの演算子の 2 点関数、3 点関数は protect されていることを知っているので、自由場で OPE を考えて場の理論側からこの予言を調べてみよう。ここで tensor 構造を注意深く扱うと、ϵ tensor のために、

$$\mathrm{Tr}\,F_{ij}(x)F_{ij}(x)\mathrm{Tr}\,F_{kl}(y)F^*_{kl}(y)=0, \tag{10.60}$$

となることがわかる。超重力理論からの予言がこうして確かめられた。

次に、すべての 4 点関数で現れる graviton exchange 図について考えよう。ここで 10 次元積分はとても複雑であるが、z 積分を微分方程式に持ち込む第二の方法を使えば評価できる。このとき double OPE 極限をとると、変数 s と t は

$$s\sim\frac{x_{13}^2x_{24}^2}{4x_{12}^2},\qquad t\sim-\frac{x_{12}\cdot J(x_{12})\cdot x_{24}}{x_{12}^2}, \tag{10.61}$$

となり、s は短距離の長距離に対する比になり、t は反転の Jacobian を使って与えられ、初期状態と終状態の角度相関または交換した演算子の spin という解釈が与えられる。したがって、4 点関数の double OPE 極限におけるもっとも特異的な項に注目すれば

$$A(x_i)_{\text{singularity}}\sim\frac{1}{x_{13}^6}\frac{4(x_{13}\cdot J(x_{12})\cdot x_{24})^2-x_{13}^2x_{24}^2}{x_{12}^8}\frac{1}{x_{24}^6}. \tag{10.62}$$

となることがわかる

これを場の理論側の結果と比べる。2 つの scalar 演算子の OPE に stress tensor が現れることに注意しよう。

$$\mathcal{O}_\Delta(x_1)\mathcal{O}_\Delta(x_3)\sim\frac{(x_{13})_i(x_{13})_j}{(x_{13})^{2\Delta+2-d}}T_{ij}(x_1). \tag{10.63}$$

ここで stress tensor は traceless $\delta_{ij}T_{ij}=0$ であるため、このように tensor 構造が簡単になっていることに注意しよう。このようにして、4 点関数の double OPE が stress tensor の 2 点関数を使って評価できる。

$$A(x_i)|_{\text{field theory}} \sim \frac{(x_{13})_i(x_{13})_j}{(x_{13})^{2\Delta+2-d}} \langle T_{ij}(x_1)T_{kl}(x_2)\rangle \frac{(x_{24})_k(x_{24})_l}{(x_{24})^{2\Delta+2-d}}. \tag{10.64}$$

一方、stress tensor の 2 点関数は共形対称性から完全に

$$\langle T_{ij}(x_1)T_{kl}(x_2)\rangle = \frac{c}{2}\frac{J_{ik}J_{jl}+J_{il}J_{jk}-\frac{2}{d}\delta_{ij}\delta_{kl}}{(x_{12})^{2d}}, \tag{10.65}$$

と決められるので、代入することにより場の理論側の結果がわかる。これと超重力理論の結果 (10.62) を比べると、完全に一致していることがわかる。

Q. central charge はどのように決まるか？

A. graviton の 2 点関数から (N^2-1) に比例する。具体的には [2] にある。

これからの議論を構成するために、IIB 超重力理論 (10.49) が $U(1)_Y$ 対称性を持っていることを紹介しよう。これは dilaton と axion の上では

$$\begin{cases} \delta\phi = 2\epsilon C, \\ \delta C = \epsilon\left(e^{-2\phi}-1-C^2\right) \sim -2\epsilon(\phi + \text{non-linear}), \end{cases}$$

のように作用する。この非線形変換は Killing 場をつくって積分できるので、非線形のレベルでも積分曲線が閉じることがわかる。線形化して微小変換を考えると、ϕ と C は $SO(2)\sim U(1)_Y$ の 2 重項をなしていることがわかるので、ここでは 2 重項らしく

$$\begin{pmatrix} \phi \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \tag{10.66}$$

と書き表わすことにもある。境界においては非線形性が無視できるので、場の理論の演算子に対しては線形に働く。

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}_\phi \\ \mathcal{O}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Tr} F^2 \\ \operatorname{Tr} F F^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 \\ \mathcal{O}_2 \end{pmatrix}. \tag{10.67}$$

この $U(1)_Y$ 対称性は境界の場の理論に対しては完全な対称性ではない。しかしながら、Intriligator が強調していたように、この対称性を使って演算子を分類することができる。特に、演算子 $\mathcal{O}_\phi + i\mathcal{O}_C$ は演算子次元が $\Delta=4$ で、Intriligator の規格化で $U(1)_Y$ 対称性の charge が $Y=4$ である唯一の演算子で、double trace 演算子

$$:(\mathcal{O}_\phi + i\mathcal{O}_C)^2:, \tag{10.68}$$

は $\Delta = 8+\gamma$ で、$Y=8$ である唯一の演算子である。よって、この $U(1)_Y$ 対称性から double trace 演算子の実部

$$:(\mathcal{O}_\phi^2 - \mathcal{O}_C^2):, \tag{10.69}$$

と虚部

$$: (\mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_C + \mathcal{O}_C \mathcal{O}_\phi) :, \tag{10.70}$$

は同じ演算子次元 $\Delta = 8 + \gamma$ をもつことがわかる。それから前の超重力理論の計算から得られた $\langle \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_\phi \rangle = \langle \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \rangle$ も $c_{\phi CC} = 0$ もこの $U(1)_Y$ 対称性の結論であることがわかる。

Q. $\langle \mathcal{O}_C \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_\phi \rangle$ や $\langle \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \mathcal{O}_C \rangle$ も消えているか？

A. そのとおりである。強調しなかったが、それは重要な点である。

さらに OPE を $SO(2)$ 共変な形に書くこともできる。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(y) \overset{y\to x}{\sim} \; & \delta_{ij} \left\{ \frac{1}{(x-y)^8} + \frac{T}{(x-y)^4} + \text{power singularity} \right\}_{Y=0} \\ & + \delta_{ij} \Big\{ A(x-y) : \mathcal{O}_k \mathcal{O}_k : + B(x-y) : T_{ij} T_{ij} : + C \mathcal{O}_8(y) \Big\}_{Y=0} \\ & + \frac{1}{(x-y)^{-\gamma}} : \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathcal{O}_i \mathcal{O}_j :_{Y=8} . \end{aligned} \tag{10.71}$$

この形を見てすぐにわかるように $\mathcal{O}_\phi$ や $\mathcal{O}_C$ はそれ自身右辺に現れないことがわかる。また $\mathcal{O}_8$ はすぐ後に出てくる。

まずは charge $Y = 8$ の部分に限ろう。

$$\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y) \sim \frac{C_{\phi C:\phi C:}}{(x-y)^{-\gamma}} : \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(x) :, \tag{10.72}$$

となる。ここで $: \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(x) :$ が 4 点関数 $\langle \mathcal{O}_\phi(x_1)\mathcal{O}_C(x_2)\mathcal{O}_\phi(x_3)\mathcal{O}_C(x_4) \rangle$ のもっとも特異的な部分になることがわかるので、double OPE で

$$A(x_i) \sim \frac{c_{\phi C:\phi C:}}{x_{12}^{-\gamma}} \frac{1}{(x_{13})^{16+2\gamma}} \frac{c_{\phi C:\phi C:}}{x_{34}^{-\gamma}}, \tag{10.73}$$

となる。ここで前に説明したように、$N \gg 1$ のとき、OPE 係数 $c_{\phi C:\phi C:}$ と異常次元 γ が

$$c_{\phi C:\phi C:} = 1 + \frac{q}{N^2} \qquad \gamma = \frac{\delta}{N^2}, \tag{10.74}$$

で与えられていたことを思い出すと、今の振幅は $1/N^2 \ll 1$ 展開の結果、

$$A(x_i) \sim \frac{1}{(x_{13})^{16}} \left\{ 1 + \frac{\delta}{N^2} \ln \frac{x_{12} x_{34}}{(x_{13})^2} + \frac{q}{N^2} \right\}, \tag{10.75}$$

となることがわかる。一方超重力理論の計算で s-channel の特異性はまさにこのような形をしているので、OPE と比べて、

$$\gamma = \frac{\delta}{N^2} = -\frac{16}{N^2}, \tag{10.76}$$

となることがわかる。このように $: \mathcal{O}_\phi \mathcal{O}_C :$ の異常次元が $\gamma = -16/N^2$ となることは AdS/CFT 対応の非摂動的な結果であることになる。

次に $U(1)_Y$ 対称性で 90° 回した演算子 $\mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(y) - \mathcal{O}_C(x)\mathcal{O}_C(y)$ について考えよう。

$$\mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(y) - \mathcal{O}_C(x)\mathcal{O}_C(y) \sim C_{\phi C:\phi C:} : \mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_\phi - \mathcal{O}_C\mathcal{O}_C : . \tag{10.77}$$

この演算子で作った 4 点関数

$$\langle (\mathcal{O}_\phi(x_1)\mathcal{O}_\phi(x_2) - \mathcal{O}_C(x_1)\mathcal{O}_C(x_2))(\mathcal{O}_\phi(x_3)\mathcal{O}_\phi(x_4) - \mathcal{O}_C(x_3)\mathcal{O}_C(x_4)) \rangle \,, \tag{10.78}$$

の double OPE 極限は同じ ln の特異性

$$\gamma \ln \left(\frac{x_{12}x_{34}}{(x_{13})^2} \right), \qquad \gamma = -\frac{16}{N^2}, \tag{10.79}$$

を持つはずで、この事実も実際の計算によって確かめられる。

最後に、前の OPE の charge $Y = 0$ の部分に着目しよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(y) + \mathcal{O}_C(x)\mathcal{O}_C(y) \sim & \left\{ \frac{1}{(x-y)^8} + \frac{T}{(x-y)^4} + \text{power singularity} \right\} \\ & + A(x-y) : \mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_\phi + \mathcal{O}_C\mathcal{O}_C : + B(x-y) : T_{ij}T_{ij} : + 2c_{\phi\phi 8}\mathcal{O}_8. \end{aligned} \tag{10.80}$$

ここで演算子 $\mathcal{O}_8$ は $\mathrm{Tr}\, X^4$ の descendant で $\Delta = 8$ を持つもので、extremal な 3 点関数の結果から $c_{\phi\phi 8} \neq 0$ とわかるので、この演算子は必ず OPE に現れることがわかる。しかしながら、$\mathcal{O}_8$ の双対である t_8 は $g_{8\phi\phi} = 0$ であるので、OPE には現れない。演算子次元 $8 + \delta/N^2$ を持ち、互いに mix する演算子は、$: \mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_\phi + \mathcal{O}_C\mathcal{O}_C :$ と $: T_{ij}T_{ji} :$ と他にもあるかもしれないが、ここで計算した超重力理論の 4 点関数はたった 1 つの $Y = 0$ の部分の情報しか与えないので、この mixing の詳細を決めることはできない。そのためには $\langle \mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_T\mathcal{O}_\phi\mathcal{O}_T \rangle$ や $\langle \mathcal{O}_T\mathcal{O}_T\mathcal{O}_T\mathcal{O}_T \rangle$ を調べる必要がある。

11 まとめ

最後にやったことをまとめよう。

- AdS/CFT 対応で 4 点関数を評価する技術はかなりよく整備された。
- 超重力理論の exchange 図の特異性と対応する OPE に驚くべき一致が見られた。これはきっと共形対称性だけでなく、dynamical に AdS/CFT 対応を確認したことになると思う。
- 特に結果から非摂動的な効果を読み取れるところもあった。
- 次に何を考えるべきかを概観した。

講義録作成者からの謝辞

この講義録を作成するにあたって、我々の基本的な質問に丁寧に答えてくださったDaniel Freedman氏に感謝します。また、京都大学理学研究科の野口達也氏、京都大学人間環境学研究科の栗田泰生氏にも多大な協力をいただきました。あわせて感謝します。

参考文献

[1] J. M. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231, `hep-th/9711200`.

[2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory", *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105. `hep-th/9802109`.

[3] E. Witten, "Anti De Sitter Space And Holography", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1991) 253, `hep-th/9802150`.

[4] M. Gunaydin, L. J. Romans and N. P. Warner, "Compact and Noncompact Gauged Supergravity Theories in Five-Dimensions", *Nucl. Phys.* **B272** (1986) 598.

[5] H. J. Kim, L. J. Romans and P. van Nieuwenhuizen, "The Mass Spectrum of Chiral N=2 D = 10 Supergravity on S^5", *Phys. Rev.* **D32** (1985) 389.

[6] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, "Correlation functions in the CFT_d/AdS_{d+1} correspondence", *Nucl. Phys.* **B546** (1999) 96, `hep-th/9804058`.

[7] E. D'Hoker, D. Z. Freedman and W. Skiba, "Field Theory Tests for Correlators in the AdS/CFT Correspondence", *Phys. Rev.* **D59** (1999) 045008, `hep-th/9807098`.

[8] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, "Comments on 4-point functions in the CFT/AdS correspondence", *Phys. Lett.* **B452** (1999) 61, `hep-th/9808006`.

[9] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, "Gauge Boson Exchange in AdS_{d+1}", *Nucl. Phys.* **B544** (1999) 612, `hep-th/9809179`.

[10] E. D'Hoker and D. Z. Freedman, "General Scalar Exchange in AdS_{d+1}", *Nucl. Phys.* **B550** (1999) 261, `hep-th/9811257`.

[11] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, "Graviton and gauge boson propagators in AdS_{d+1}", *Nucl. Phys.* **B562** (1999) 330, `hep-th/9902042`.

[12] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis, L. Rastelli, "Graviton exchange and complete 4-point functions in the AdS/CFT correspondence", *Nucl. Phys.* **B562** (1999) 353, hep-th/9903196.

[13] E. D'Hoker, D. Z. Freedman and L. Rastelli, "AdS/CFT 4-point functions: How to succeed at z-integrals without really trying", *Nucl. Phys.* **B562** (1999) 395, hep-th/9905049.

[14] E. D'Hoker, D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, "Extremal Correlators in the AdS/CFT Correspondence", hep-th/9908160.

[15] E. D'Hoker, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, "The Operator Product Expansion of N=4 SYM and the 4-point Functions of Supergravity", hep-th/9911222.

[16] S. Lee, S. Minwalla, M. Rangamani and N. Seiberg "Three-Point Functions of Chiral Operators in D=4, $\mathcal{N} = 4$ SYM at Large N", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 697, hep-th/9806074.

[17] S. Penati, A. Santambrogio and D. Zanon "Two-point functions of chiral operators in $\mathcal{N} = 4$ SYM at order g^4", *JHEP* **9912** (1999) 006, hep-th/9910197.

[18] K. Intriligator, "Bonus Symmetries of N=4 Super-Yang-Mills Correlation Functions via AdS Duality", *Nucl. Phys.* **B551** (1999) 575, hep-th/9811047.
K. Intriligator and W. Skiba, "Bonus Symmetry and the Operator Product Expansion of N=4 Super-Yang-Mills", *Nucl. Phys.* **B559** (1999) 165, hep-th/9905020.

[19] B. Eden, P. S. Howe and P. C. West, "Nilpotent invariants in N=4 SYM", *Phys. Lett.* **B463** (1999) 19, hep-th/9905085.
P. S. Howe, C. Schubert, E. Sokatchev and P. C. West, "Explicit construction of nilpotent covariants in N=4 SYM", hep-th/9910011.

[20] L. Andrianopoli and S. Ferrara, "On short and long SU(2,2/4) multiplets in the AdS/CFT correspondence", *Lett. Math. Phys.* **48** (1999) 145, hep-th/9812067.

[21] S. Ferrara and A. Zaffaroni, "Superconformal Field Theories, Multiplet Shortening, and the $AdS_5/SCFT_4$ Correspondence", hep-th/9908163.

[22] W. Skiba, "Correlators of Short Multi-Trace Operators in N=4 Supersymmetric Yang-Mills", *Phys. Rev.* **D60** (1999) 105038, hep-th/9907088.

[23] M. Bianchi and S. Kovacs, "Non-renormalisation of extremal correlators in N=4 SYM theory", *Phys. Lett.* **B468** (1999) 102, hep-th/9910016.

[24] B. Eden, P. S. Howe, C. Schubert, E. Sokatchev and P. C. West, "Extremal correlators in four-dimensional SCFT", hep-th/9910150.

[25] C. Fronsdal, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 589.

[26] C. P. Burgees and C. A. Lutken, "Propagators and Effective Potentials in Anti-de Sitter Space", *Nucl. Phys.* **B272** (1986) 661.

[27] T. Inami and H. Ooguri, "One Loop Effective Potential in Anti-de Sitter Space", *Prog. Theo. Phys.* **73** (1985) 1051.

[28] C. J. C. Burges, D. Z. Freedman, S. Davis and G. W. Gibbons, "Supersymmetry in Anti-de Sitter Space", *Ann. Phys.* **167** (1986) 285.

[29] B. Allen and T. Jacobson, "Vector Two Point Functions in Maximally Symmetric Spaces", *Commun. Math. Phys.* **103** (1986) 669.

[30] L. Antoniadis and E. Mottola, "Graviton fluctuations in de Sitter Space", *J. Math. Phys.* **32** (4) (1991).

[31] I. Bena, "The antisymmetric tensor propagator in AdS", `hep-th/9910059`.

[32] A. Naqvi, "Propagators for massive symmetric tensor and p-forms in AdS(d+1)", *JHEP* **9912** (1999) 025, `hep-th/9911182`.

[33] T. Kawano and K. Okuyama, "Spinor Exchange in AdS_{d+1}", `hep-th/9905130`.

[34] S. Ferrara, A. F. Grillo and R. Gatto, *Lett. Nuovo Cimento* **2** (1971) 1363.
S. Ferrara, A. F. Grillo and G. Parisi, *Nuovo Cimento* **19** (1974) 667.
S. Ferrara, A. F. Grillo and G. Parisi, *Nucl. Phys.* **B49** (1972) 77.