2016年度夏学期
「基礎方程式とその意味を考える」
前半（量子力学）ノート*

浜口幸一

平成28年5月23日

目 次

*符号ミス、係数ミス、誤字脱字、その他なんでも、修正すべき箇所やコメントがあれば hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp まで連絡下さると嬉しいです。

§ 0　はじめに (4/11)

§ 0.1　内容

前半：量子力学（浜口）

後半：電磁気学（浅井さん）

§ 0.2　前半の予定

前半：4/11, 18, 25, 5/2, 9, 16, 23.　(5/30 はなし)

後半：6/6 以降。

§ 0.3　教科書、参考書

、、、は特にありません。色々と見てみましょう

§ 0.4　成績

前半、後半ともにレポートを提出してもらいます。

レポートについて
提出先：教養学部 教務課
提出期間：2016 年 7 月 11 日〜7 月 22 日 （7 月 22 日の 16:50 まで）
前半のレポート (担当：浜口) と後半のレポート (担当：浅井) を分けて作成し、それぞれに学生番号と氏名を明記すること。

前半のレポートは
`http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~hama/lectures/2016_Komaba.html`
にあります。

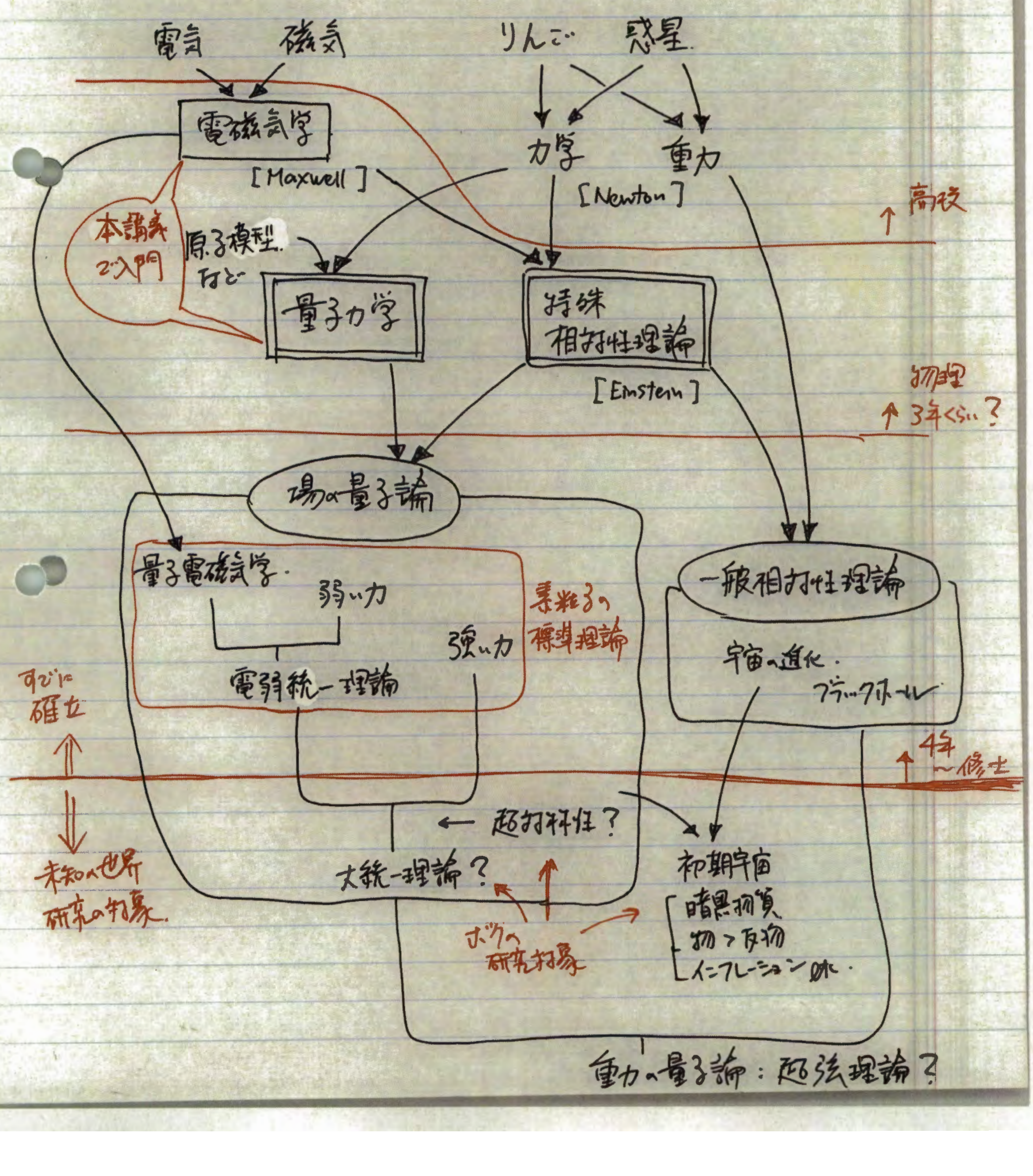
§ 0.5　自己紹介

- 浜口幸一（「浜」でも「濱」でもどっちでもいいです。）
- ホームページ
  `http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~hama/welcome.html`
- メール：hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp（いつでもメール下さい。）
- 部屋：本郷キャンパス　理学部１号館　916 号室（訪問歓迎。メール下さい。）
- 専門：素粒子論（＋初期宇宙論）
  素粒子 — 物質は何から出来ているのか？自然現象を記述する基本的統一理論は何か？
  $\Longleftrightarrow$ 宇宙 — どうやって始まったのか？暗黒物質の謎、物質 $>$ 反物質の謎、インフレーション

§ 0.6　余談「統一理論」の観点から見た電磁気学、相対論、量子力学

§0-6 余談「統一理論」の観点から見た電磁気学, 相対論, 量子力学.

統一理論への道 （ネタ元： IPMU 村山さんの[redacted] トーク ）



► 特殊相対論と光速 c

速さ v_1 の電車から速さ v_2 で（同じ方向に）ものを投げると、外から見た時の速さは？

$$v = v_1 + v_2$$

ではなく、

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \qquad \boxed{c \simeq 3 \times 10^8 \mathrm{m/s} \quad \text{光速}}$$

$\underline{c\ \text{が大きいので普段は気にならない。}\textbf{特殊相対論} \xrightarrow{c\to\infty} \text{Newton 力学}}$

$$\left(\begin{array}{l} \text{例えば } v_1 = v_2 = 100\mathrm{km}/\text{時のとき、} \\ \quad \text{分母} = 1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2} \\ \qquad\quad \simeq 1 + \underline{10^{-14}} \qquad \text{（第二項は小さすぎて普通は無視出来る）} \end{array}\right)$$

► 量子論とプランク定数 h

粒子の位置 x と運動量 p

量子論では x と p を同時に無限の精度で測定することは出来ない！
（§ 3でもう一度やります。）

$$\begin{cases} \Delta x & x \text{ の測定値のばらつき} \\ \Delta p & p \text{ の測定値のばらつき} \end{cases}$$

とすると

$$\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \frac{h}{2\pi} \qquad \boxed{h \simeq 6.6 \times 10^{-34} \mathrm{kg\ m^2 s^{-1}} \quad \text{プランク定数}}$$

$\underline{h\ \text{は小さいのでふつうは気にならない。}\textbf{量子論} \xrightarrow{h\to 0} \text{Newton 力学}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{相対論} \xrightarrow{c\to\infty} \\ \text{量子論} \xrightarrow{h\to 0} \end{array} \text{古典論、Newton 力学}}$$

§ 1　古典物理学の破綻

古典物理学：量子論以前の物理学。「古典論」とも言う。

古典論でどうしても 説明出来ない現象		1900年代〜 新しい原理や考え方で説明 （「前期量子論」とも呼ばれる）
黒体輻射	$\longleftarrow$	Planck (1900)
光電効果	$\longleftarrow$	Einstein (1905)
Compton 効果	$\longleftarrow$	Compton (1923)
電子回折	$\longleftarrow$	de Broglie (1923) ※予言が先
原子模型、原子スペクトル	$\longleftarrow$	Bohr (1913)

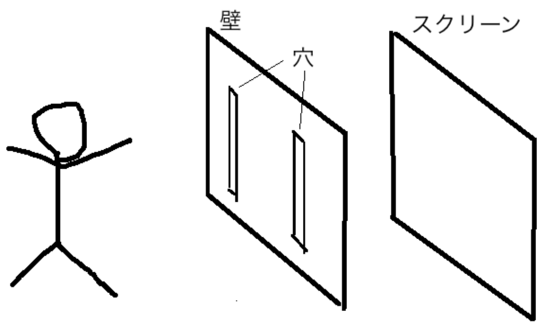
現在では全て、量子力学で説明出来ている。

このうちいくつかを紹介する。

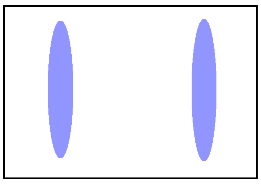
（ **コメント**　別に前期量子論を知らなくても量子力学は学べる。知っていても量子力学が「導ける」わけではない。

古典物理学じゃダメだ！
粒子は波、波は粒子 } という感じをつかんでほしい。 ）

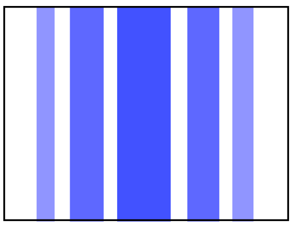
§ 1.1　電子回折 (4/11)



(1) ボールをたくさん投げる。



(2) 光を当てる。



波の干渉（光＝電磁 **波**）

(3) 電子ではどうか？

$\to$ (2) と同じような干渉縞が !!

（たくさんの電子が集まって波のようにふるまうのではなく、
一つ一つの電子が波のようにふるまう。）

日立の外村氏の実験が有名：
http://www.hitachi.co.jp/rd/portal/highlight/quantum/doubleslit/

$\boxed{\text{電子} \approx \text{波}}$

ちょうど $\boxed{\textbf{波長}\ \lambda = \frac{h}{p}}$ の波を当てた時と同じ干渉縞になる。

$h \simeq 6.6 \times 10^{-34}\mathrm{kg\ m^2 s^{-1}}$

§ 1.2　光電効果 (4/11)

金属などの物質に光を当てると、表面から電子がとび出す。

- 電子がとび出すかどうかは（光の強さに依らず）振動数 ν のみに依存。
- １つ１つの電子のエネルギーも（光の強さに依らず）振動数 ν のみに依存。

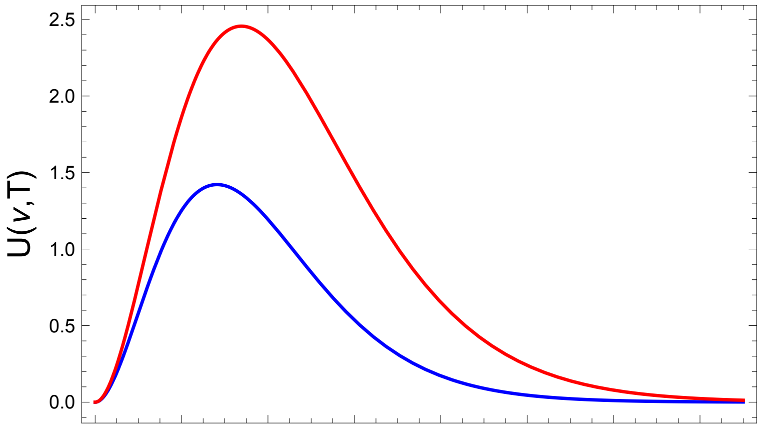
$$E_e = h\nu - W \quad (W\ \text{は物質固有の定数})$$

- 出てくる電子の数は光の強さに比例。

$\longrightarrow$ 振動数 ν の光は $\boxed{\textbf{エネルギー}\ E = h\nu}$ をもつ粒子（光子）の集まり。

§ 1.3　黒体輻射（黒体放射）(4/11)

ある温度の黒体から出される光の（電磁波）のスペクトラムは温度のみに依存している。



振動数 $[\nu, \nu + d\nu]$ の間にある光のエネルギー　$= \quad U(\nu, T)d\nu$

► Planck (1900)

$$\boxed{U(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}}$$

とすれば観測と合う。

$$h \simeq 6.6 \times 10^{-34}\mathrm{kg\ m^2 s^{-1}} \quad \text{プランク定数}$$
$$k \simeq 1.4 \times 10^{-23}\mathrm{kg\ s^{-2} K^{-1}} \quad \text{ボルツマン定数}$$

さらに上の $U(\nu, T)$ の式を、

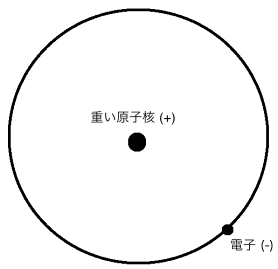
エネルギー量子仮説

振動数 ν の光（= 電磁波）のエネルギーは $h\nu$ の整数倍しか取れない

と仮定して、導いた。→ レポート

§ 1.4　原子模型 (4/11, 18)

長岡-Rutherford の原子模型



► 困難 [1]

古典電磁気学によると、加速運動する電子は電磁波を放出し、単位時間当たり

$$-\frac{dE}{dt} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{2}{3}\frac{1}{c^3}a^2 \qquad \text{———— (1)}$$

のエネルギーを失う。ただし

$$\begin{aligned}(e^2/4\pi\varepsilon_0) &\simeq 2.307\times 10^{-28}\mathrm{kg\ m^3 s^{-2}}\\ c &\simeq 3\times 10^8 \mathrm{m/s}\\ a &= \text{加速度}\end{aligned}$$

(導出はやらない。電磁気学で。)

すると電子はどんどんエネルギーを失って原子核に落ちていってしまう ?!

どのくらい速く落ちるか？やってみよう。まず力のつり合いから、電子の速さを v として

$$\begin{aligned}f = ma &= \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2} \quad \text{クーロン力}\\ &= \frac{mv^2}{r} \quad \text{遠心力} \qquad \text{———— (2)}\end{aligned}$$

また

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{運動エネルギー}} \underbrace{-\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r}}_{\text{位置エネルギー}} \quad \text{———} \ (3)$$

これらを $r(t)$ だけの式にしたい。以下面倒なので $(e^2/4\pi\varepsilon_0) = k$ とおく。

$$\begin{aligned} (2)\text{ より} \quad & mv^2 = k\frac{1}{r} \\ (3)\text{ に代入} \quad & E = \frac{k}{2}\frac{1}{r} - k\frac{1}{r} = -\frac{k}{2}\frac{1}{r} \\ \text{時間微分して} \quad & \frac{dE}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{dE}{dr} = \frac{dr}{dt}\frac{k}{2}\frac{1}{r^2} \quad \text{———} \ (4) \end{aligned}$$

一方 (2) より

$$a = \frac{k}{m}\frac{1}{r^2} \quad \text{———} \ (5)$$

(4)(5) を (1) に代入

$$\begin{aligned} -\frac{dr}{dt}\frac{k}{2}\frac{1}{r^2} &= k\frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\left(\frac{k}{m}\right)^2\frac{1}{r^4} \\ \therefore -\frac{dr}{dt}r^2 &= \frac{4}{3}\frac{k^2}{c^3m^2} \end{aligned}$$

半径 $r = r_0$ の状態から時間 τ で落ちるとして $\begin{array}{c|c} t & 0 \to \tau \\ \hline r & r_0 \to 0 \end{array}$

$$\begin{aligned} \int_0^\tau -\frac{dr}{dt}r^2 dt &= \int_0^\tau \frac{4}{3}\frac{k^2}{c^3m^2}dt \\ (\text{左辺}) &= \int_{r_0}^0 -r^2 dr = \frac{1}{3}r_0^3 \\ (\text{右辺}) &= \frac{4}{3}\frac{k^2}{c^3m^2}\tau \end{aligned}$$

よって

$$\tau = \frac{1}{4}\frac{c^3m^2}{k^2}r_0^3$$

ここに

$$
\begin{aligned}
c &\simeq 3 \times 10^{8}\mathrm{m/s} \\
m &\simeq 9 \times 10^{-31}\mathrm{kg} \\
k &\simeq 2 \times 10^{-28}\mathrm{kg\ m^3 s^{-2}} \\
r_0 &\simeq 5 \times 10^{-11}\mathrm{m} \quad (\text{ボーア半径} \sim \text{原子の大きさ})
\end{aligned}
$$

を代入すると

$$\tau \simeq 2 \times 10^{-11}\mathrm{s}$$

あっという間に落ちる！

何故落ちないのか？（古典論では説明出来ない）

▶ 困難 [2]

水素原子から放出される光の振動数はとびとびの値

$$\nu = Rc\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \quad n_1, n_2 \text{は自然数}$$

しか取らない。($R \simeq 1.1 \times 10^{7}\mathrm{m}^{-1}$, Rydberg 定数)

何故 ν は特定の値しか取らないのか？（古典論では説明出来ない）

▶ **Bohr の仮説**

仮説１：電子の角運動量は $n\hbar$（$n = 1, 2, 3 \cdots, \hbar = h/2\pi$）というとびとびの値のみ許される。[1]

仮説２：電子が状態 n_2（エネルギー E_{n_2}）から状態 n_1（エネルギー E_{n_1}）に飛び移るとき、エネルギー $\boxed{h\nu = E_{n_2} - E_{n_1}}$ （振動数 $\nu = \dfrac{E_{n_2} - E_{n_1}}{h}$）の光子が放出される。

以下、これらの仮説によって 困難 [1]、困難 [2] がどう解決されるか見てみよう。

[1] 後半の授業で「角運動量は高校の物理の範囲外です。」という指摘をしてくれた学生さんがいました。というわけで 1 年生の学生さんは講義中この辺で「???」となっていたかもしれません。すいません、、、。ここでは (6) 式の左辺が角運動量を表す、ということだけしか使っていないので、角運動量についての詳しい解説は省きたいと思います。

まず仮説 1 より[2]

$$\underbrace{r \times mv}_{\text{角運動量}} = n\hbar \quad \text{————} \ (6)$$

これと、困難 [1] の説明のところに出てきた (2)(3) 式を用いると

$$E_n = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{n^2}$$

さらに仮説 2 より

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{E_{n_2} - E_{n_1}}{h} \\ &= \underbrace{\frac{m}{4\pi\hbar^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2}_{=Rc}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \end{aligned}$$

$\to$ 困難 [2] が説明出来た！

さらに、$n = 1$ からそれ以上落ちることが出来ないことから、$n = 1$ の状態は安定（基底状態）。$\to$ 困難 [1] も説明。

---

[2](6) 式は変形すると

$$\text{運動量}\ p = mv = \frac{nh}{2\pi r} = \frac{h}{\lambda}$$

とも書けます。ただし、最右辺では円周上の波を考えて、波長 $\lambda = 2\pi r/n$ としました。これはちょうど、§ 1.1の電子回折のところで出てきた関係式 $\boxed{\lambda = h/p}$ と一致していますね。（どちらも電子の波動性を示しています。）

§ 1.5　まとめ：粒子性と波動性 (4/18)

	波動性	粒子性
光（電磁波）	ふつう § 1.1 電子回折 (2)	$\boxed{\textbf{光子１つのエネルギー} = h\nu}$ § 1.2 光電効果 § 1.3 黒体輻射 § 1.4 原子模
電子	$\boxed{\textbf{波長}\ \lambda = h/p}$ § 1.1 電子回折 (3) § 1.4 原子模型	ふつう

これ以降は、シュレディンガー方程式を通して粒子の波動性をみていく。

もう一方の、光の粒子性については、ちゃんと定式化するには電磁場の量子化が必要。この講義ではやらない。

§ 2　数学的準備 (4/18)

§ 2.1　復習

- 指数関数

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

性質

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$
$$e^{xy} = (e^x)^y$$

微分

$$\frac{d}{dx}(e^x) = (e^x)' = e^x$$
$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = a\cdot e^{ax}$$

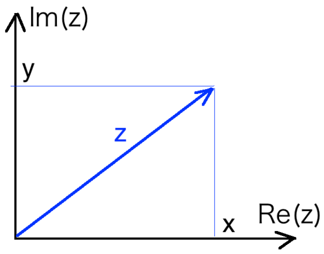
- 複素数

$$z = x + iy \qquad i = \sqrt{-1} \quad (x, y \text{ は実数})$$

絶対値

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

複素平面



§ 2.2　テイラー展開

関数 $f(x)$ を、$\underline{x=0\text{ の近くで展開する。}}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{———————}(\star)
\end{aligned}
$$

と書けたとする。（注：必ずしもこう書けるとは限らない。）

$x=0$ を代入すると

$$f(0) = 0$$

微分してから $x=0$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots \\
f'(0) &= c_1
\end{aligned}
$$

２回微分してから $x=0$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 2c_2 + 6c_3 x + \cdots \\
f''(0) &= 2c_2
\end{aligned}
$$

n 回微分してから $x=0$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= n!c_n + (n+1)!c_{n+1} x + \cdots \\
f^{(n)}(0) &= n!c_n
\end{aligned}
$$

（ただし $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 回微分を表します。）よって

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

（ただし $0! = 1$ とします。）これを $(\star)$ 式に代入すると

テイラー展開

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

例：

$$
\begin{aligned}
f(x) = e^x \quad &\to f^{(n)}(x) = e^x \quad \therefore f^{(n)}(0) = 1 \\
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{———} \ (1) \\
f(x) = \cos x \quad &\to f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & (n = 0, 4, \cdots) \\ -\sin x & (n = 1, 5, \cdots) \\ -\cos x & (n = 2, 6, \cdots) \\ \sin x & (n = 3, 7, \cdots) \end{cases} \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \quad \text{———} \ (2) \\
f(x) = \sin x \quad &\to f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n = 0, 4, \cdots) \\ \cos x & (n = 1, 5, \cdots) \\ -\sin x & (n = 2, 6, \cdots) \\ -\cos x & (n = 3, 7, \cdots) \end{cases} \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \quad \text{———} \ (3)
\end{aligned}
$$

§ 2.3　複素指数関数

$$
f(x) = \cos x + i \sin x
$$

という関数を考える。

性質は

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f(x + y) &= \cos(x + y) + i \sin(x + y) \\
&= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i \sin x \cos y + i \cos x \sin y \\
&= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\
&= f(x) f(y) \\
\frac{d}{dx} f(x) &= -\sin x + i \cos x \\
&= i(\cos x + i \sin x) \\
&= i f(x)
\end{aligned}
$$

これらの性質を見ると

$$\boxed{\cos x + i\sin x = e^{ix} \quad \text{（オイラーの公式）}}$$

と定義して良さそうだ。

<u>チェック１</u> $f(x) = e^{ix}$ とすると、$f(0) = 1$ かつ $f'(x) = if(x)$ なので、これは $\cos x + i\sin x$ と同じ微分方程式、同じ初期条件をみたす。したがって両者は同じ関数。[3]

<u>チェック２</u> テイラー展開で見てみる。(1) より

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots$$

に $y = ix$ を代入すると

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{1}{2}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \cdots \\
&= 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) \\
&= \cos x + i\sin x \qquad \text{（(2)(3) より）}
\end{aligned}$$

性質は

$$\begin{aligned}
|e^{ix}| &= |\cos x + i\sin x| \\
&= \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1 \\
e^{i(x+2\pi)} &= \cos(x + 2\pi) + i\sin(x + 2\pi) \\
&= \cos x + i\sin x \\
&= e^{ix}
\end{aligned}$$

x, y を実として

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

[3] １階の微分方程式と初期条件が等しければ成り立つ。微分方程式が２階の場合は、もう１つ初期条件（境界条件）が必要。

§ 2.4　偏微分

微分：

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}$$

偏微分：複数の変数をもつ関数、例えば 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon,y)-f(x,y)}{\epsilon}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x,y+\epsilon)-f(x,y)}{\epsilon}$$

例：

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^3$$
$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 2x + y$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = x + 3y^2$$
$$f(x,y) = e^{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = ye^{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = xe^{xy}$$

§ 3　シュレディンガー方程式

以下、手書きノートを順次こちらに移行しています。少々お待ち下さい、、、。

平成 28 年 5 月 23 日

去年の汚い手書きのノートがこちらにあります。
http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~hama/lectures/2015_Komaba.html
パスワードかかってますが、数字４桁で「0408」です。

§ 3.1　波動、振動 (4/18)

§ 3.2　シュレディンガー方程式（自由粒子） (4/25)

§ 3.3　シュレディンガー方程式（ポテンシャルがある場合） (4/25)

§ 3.4　確率解釈 (4/25, 5/2)

§ 3.5　波束 (5/2)

§ 3.6　物理量と期待値 (5/2, 9)

§ 3.7　不確定性関係 (5/9)

§ 4　エネルギー固有状態／具体例

§ 4.1　エネルギー固有状態 (5/16)

§ 4.2　例：井戸型ポテンシャル

§ 4.3　例：調和振動子

§ 4.4　（おまけ）トンネル効果のアニメ

おしまい。お疲れさまでした。

§ 5　オマケ

5/23(月) の補講はここまでの講義の話と関係ないオマケの講義です。