

弦理論入門

松尾 泰

1. なぜ弦か

- 点粒子

通常のスピン量子論

標準模型 = $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージ理論

クォーク: 18個: レプトン: 6個

ゲージ粒子、ヒッグス粒子

ゲージ結合、クォークの質量、ヒッグス期待値
(+ 超対称パートナー?)

実験的には非常にうまくいっている。
標準模型を超える試み: 現在のチャレンジ

標準模型を越えて、

標準模型に残る不満な点

Naturalnessの問題

= Higgsの自己エネルギーの発散

超対称性の必要性

美的な問題

なぜこのように沢山の粒子、対称性、任意に与えられる結合定数があるのか？

大統一理論？

重力をどうするのか？

一般相対論 = 時空のダイナミクス

幾何学による統一理論 (Einstein, Weyl)

一般相対論: 曲がった時空の力学

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}$$

コンパクト化された余次元

非常に小さな次元からゲージ自由度を出す

例: $g_{\mu,4} = A_{\mu}$

U(1) ゲージ場しか出ない

無限個の粒子のタワー: Kaluza-Klein粒子

$$m = n/R, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

粒子描像の限界

一般相対論の量子化: くりこみ不可能

重力定数: 次元を持つ

摂動計算をすると各次数で新たな発散が生じる

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad h_{\mu\nu} \text{ について展開}$$

UV(紫外)カットオフが必要: 点粒子では不自然
広がったものを考える必要がある

弦理論における問題の回避

発散の問題: モジュラー双対性のため発散が生じない

ゲージ対称性: 非可換ゲージ対称性も作ることができる

ヘテロティック弦

開弦、Dブレーン

カイラルな理論の構成も可能

Calabi-Yau多様体

任意結合定数がない

Uniqueness: 全ての弦理論は一つの理論とされている

究極の統一理論? (Theory of Everything=TOE)

その他の可能性

膜 : M理論?
ブレーン
行列模型

弦の双対性を通じて弦理論の中に内包されてしまっている。
広がった対象を考える理論は基本的に弦理論に帰着するのでは？

弦理論の簡単な歴史

1975 ~ : QCDの弦として発見
ゲージ理論の発見により廃れる
Green-Schwarzらによる研究
統一理論としての弦理論

1984 ~ : 第一次革命
アノマリー、無限大の解消
Heterotic string の発見
CFT: 無限次元リー代数の表現論
Riemann面の幾何学
Calabi-Yau多様体: 代数幾何学との関係
低次元重力の可解性、行列模型

弦理論の簡単な歴史 (Part 2)

1995 ~ : 第2次革命

双対性

ソリトン(Dブレーン)

AdS/CFT対応

時空の非可換性

ブラックホールの理解

200? ~ : 第3次革命?

2. 弦理論の基礎

弦の作用 (第一量子化)

$$\begin{aligned} S &= \text{Area of world sheet} \\ &= \int \sqrt{-\det(g_{\mu\nu}^{ind})} \\ &= \int \sqrt{-\det(g)} g^{\mu\nu} \partial_\mu X^A \partial_\nu X^B G_{AB} \end{aligned}$$

$g_{\mu\nu}$: World sheet metric

G_{AB} : Target space metric

- ◇ 弦理論の構成には2次元重力を解かなくてはならない
- ◇ 弦理論はtarget空間の重力が含まれる

無限次元対称性

Virasoro 代数: 2次元のreparametrizationを表す代数

$$\delta_n z = z^{n+1} \quad n \in \mathbf{Z}$$

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}$$

c : central charge 時空の次元を表す

Kac-Moody 代数: 2次元のゲージ対称性を表す代数

$$[J_n^a, J_m^b] = if^{ab}_c J_{n+m}^c + k\delta^{ab}\delta_{n+m,0}$$

時空の幾何学: 無限次元代数の表現論に帰着
弦理論と可解性との関連

臨界次元

弦の量子化条件 (物質とゴーストのアノマリーの相殺条件)

$c = 26$: bosonic string

$c = 10$: superstring

現実の次元 ($d=4$) を得るためにはコンパクト化が必要

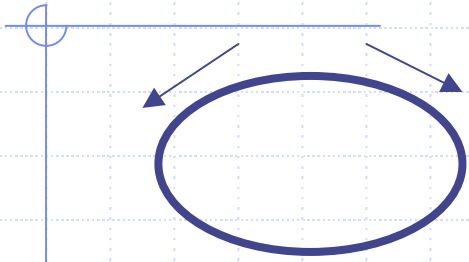
6次元空間: Calabi-Yau空間

$c=10$ 以外の次元も実は可能

非臨界弦理論 (toy模型として活用)

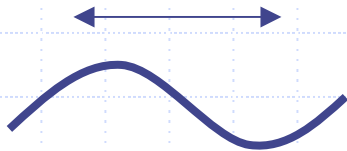
$c \leq 1$ の場合は可解

開弦と閉弦



閉弦: 右向きの波と左向きの波が存在する
零質量モード: 重力子、2階反対称テンソル
ディラトン

$$\alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0\rangle \rightarrow G_{\mu\nu}(x), B_{\mu\nu}(x), \Phi(x)$$



開弦: 定常波
零質量モード: ゲージ粒子

$$\alpha_{-1}^{\mu} |0\rangle \rightarrow A_{\mu}(x)$$

AdS/CFT 対応



シリンダー振幅

開弦の1-ループ振幅
= 閉弦のtree振幅

ゲージ理論のループ振幅が重力理論のtreeから
計算可能になる！

行列模型と超重力の散乱公式の対応

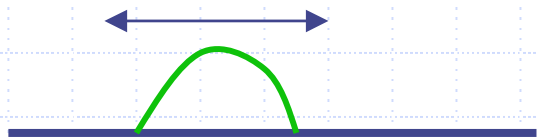
AdS空間の重力とその境界上の4次元CFT (N=4 SYM)の
対応 (AdS/CFT対応)

Dブレーン = 弦理論のソリトン

開弦が持ちうる境界条件: Dirichlet or Neumann

$\mu = 0, \dots, p$: Neumann

$\mu = p + 1, \dots, d - 1$: Dirichlet



時空に $p+1$ 次元の壁を定義
D p ブレーン

*RR charge*を運ぶ

ブレーンのダイナミクス: 開弦が運んでいる

$A_\mu(x)$ ブレーン上のゲージ自由度

$\phi_i(x)$ ブレーンの変動を表す集団座標

コンパクト化の問題

6次元空間のコンパクト化をどうするか
弦が住めるためにはRicci平坦性が必要

Einstein方程式に対応

4次元空間に超対称性を残すためには

Covariantly constant spinorが必要

ホロノミーに条件が付く



Ricci flat, ケーラー多様体: Calabi-Yau空間

T^6 : *trivial* N=4 SUSY

$T^2 \times K3$: $SU(2)$ N=2 SUSY

$CY3$: $SU(3)$ N=1 SUSY

ブレーンワールド

もう一つの可能性:

5次元の中に浮かぶ3ブレーン上に世界がある



ブレーンワールド

ワープ因子 $b(y) = e^{-|y|/\ell}$

コンパクト化された空間が有る程度大きくできる
(通常はプランク長さ程度)

ゲージHierarchy問題の解消

= 大統一スケールと電弱スケールの比 10^{16}

実験 (LHC) でextra dimensionが観測される可能性もある

T-双対性

S^1 コンパクト化 半径 R

Kaluza-Kleinモード: $m = n/R$

巻き付きモード: $m = n'R/\alpha'$

対称性: $R \leftrightarrow \alpha'/R$

弦から見ると小さい半径の空間は
半径が大きい空間と同じ性質を持つ！



点粒子の幾何学(リーマン幾何学)と弦理論の幾何学は違う！

拡大される対称性

通常のゲージ粒子 $\alpha_{-1}^{\mu}|0\rangle$ U(1) ゲージ対称性

半径を $\sqrt{\alpha'}$ 程度にすると巻き付きモードが零質量になる

ゲージ対称性が拡大されてSU(2)になる
(コンパクト化次元が1の場合)

Heterotic 弦

右向きをBoson弦(26次元)、左向きを超弦(10次元)
余った16次元でゲージ群を作る

$$SO(32) \quad \text{or} \quad E_8 \times E_8$$

S-双対性

弱結合領域と強結合領域の双対性

$$g \leftrightarrow 1/g$$

$$\text{particle} \leftrightarrow \text{soliton}$$

SUSY Yang-Mills

$$\text{quark} \leftrightarrow \text{monopole}$$

String (e.g. IIB superstring)

$$\text{string} \leftrightarrow \text{D-brane}$$

強結合領域を双対理論の摂動論で議論可能に！

T-双対性+S-双対性
U-双対性

M 理論

$$M/S^1 \sim \text{IIA}$$

$$M/(S^1/Z_2) \sim E_8 \times E_8 \text{ Hetero}$$

11次元超重力理論

$G_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho}$ membraneと結合

重力子、membrane、5-braneからなる

IIA型超弦理論の強結合領域として存在する

一次元コンパクト化

M5-brane D4 brane, NS 5 brane

M2-brane D2-brane, f string

KK 運動量 D0-brane, D6-brane

今のところ確立された定式化がない！

行列模型の提案 (BFSS): 光円錐ゲージ

ブラックホールエントロピーの計算

Hawking輻射

$T_H \sim$ surface gravity

Beckensteinエントロピー

$S_B = A/4G$

Extremal BH solution

D1-D5 系

チャージを持つブラックホール解でHorizon
の表面積を計算

エントロピーの計算: 超対称な開弦状態の数え上げに帰着
Beckensteinエントロピーの導出

まとめ

第2次革命以降の弦理論の変化

D-braneも含めた様々な構成要素が出てきた。
双対性を通してこれらが弦の代わりを果たすこともあり得る。どれが基本的かはどの結合領域で物理を考えるかに依存する。

重力の強結合領域の物理がわかるようになってきた

弦理論では様々な物理と数学が有機的に絡み合っている

ブラックホール、ビッグバン

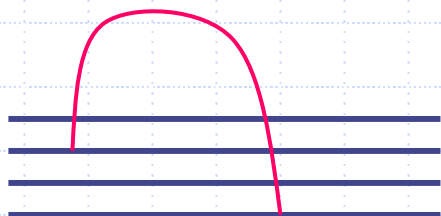
可解統計系

無限次元リー代数

代数幾何学

T-双対性: 弦から見た幾何学はRiemann幾何とは本質的に異なる

3. 最近の研究から



沢山のブレーンが重なっている場合
開弦の端に有限個の自由度が入る

$$\Phi_{ij}$$

開弦の連結により行列の構造を持つ $\sum_j \Phi_{ij} \Phi_{jk} \sim \Phi_{ik}$

開弦の零質量モード

ゲージ場: 非可換ゲージ場

集団座標: 非可換な埋め込み座標?

ブレーンの座標の非可換性: 非可換幾何学を示唆?

非可換幾何学

数学ではConnesらにより研究されてきた
弦理論: $B_{\mu\nu} \neq 0$ の場合の幾何学

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$$

Moyal積: $\star = \exp\left(\frac{i\theta^{\mu\nu}}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right)$

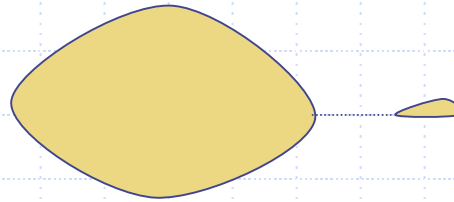
「点」に対応する概念: 射影演算子 $p \star p = p$

逆に非可換空間上の粒子の力学は
弦をどれだけ再現するか?

UV有限性、T-双対性など

M理論における非可換幾何学

超膜理論は不安定



無限に小さな面積要素がエネルギーゼロで分離可能
何らかの量子化が必要

$C_{\mu\nu\rho} \neq 0$: 一般化された非可換幾何学

$APD \rightarrow VPD$ $x^\mu \rightarrow X^\mu(\sigma)$

行列模型の共変化

弦の第2量子化と非可換幾何学

弦理論のoff-shell構造はまだ未解決

開弦の場の理論:
$$S = \frac{1}{2} \int \psi Q \psi + \frac{g}{3} \int \psi \star \psi \star \psi$$

開弦のsplitting/joining

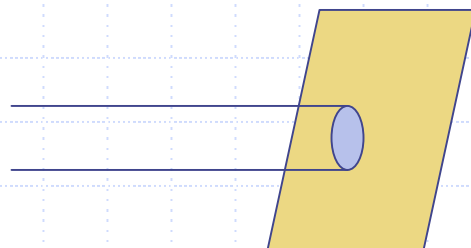
$$\begin{array}{c} \psi_1 \star \psi_2 \\ \hline \psi_1 \quad \psi_2 \end{array}$$

Moyal積を用いて表現可能

無限次元の弦自由度の空間に非可換性が
自然に導入できる
弦の相互作用を行列として表現可能か？

Dブレーンと非可換幾何学

境界状態 $|B\rangle$ Dブレーン記述している状態



普遍的に満たす非線形方程式

$$|B\rangle \star |B\rangle = |B\rangle$$

正しいoff-shellの構造
を与えているか？

弦理論の解: 与えられたcentral chargeをもつ

2次元CFT全体

表現全体がなす空間に位相を導入

一種の非可換幾何学か？

4. 弦理論の課題

弦理論のoff-shell定式化

off-shell構造 自発的対称性の破れ
ブレーンの生成崩壊
コンパクト化の決定

Hamiltonian, Lagrangian?

あまりにも多数のコンパクト化の存在
予言能力が無い、、、
統計的な処理？
人間原理？

課題

時間依存性の問題

宇宙初期・インフレーション

ブラックホールの蒸発

行列模型での解析

最大の課題

実験における検証、、、

宇宙論？ QCD？