物理数学II　§4　超幾何関数

ノートのタイトル　2009/06/11

§4.1　確定特異点型 微分方程式

2階の常微分方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\cdot\frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \ (*)$$

において

① $p(z)$ が $z=z_0$ で 高々 1次の極を持つ
② $q(z)$ 〃 〃 2次 〃 〃

という条件をみたすとき $z=z_0$ を微分方程式 $(*)$ の
（以下 DE と略）
確定特異点 と呼ぶ。

$z=z_0$ のまわりで DE を次のように書く

$$(z-z_0)^2\frac{d^2u}{dz^2} + (z-z_0)P(z)\frac{du}{dz} + Q(z)u = 0 \quad \cdots\ (*)'$$

（ $p(z) = \frac{1}{z-z_0}P(z)$, $q(z) = \frac{1}{(z-z_0)^2}Q(z)$ とおいた.
$P(z)$, $Q(z)$ は $z=z_0$ で 正則
$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z-z_0)^n$, $Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z-z_0)^n$ ）

定理　DE $(*)$ は $z=z_0$ のまわりで 次の形の級数解を持つ

$$u(z) = (z-z_0)^{\alpha}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right) \quad (**)$$

ただし α は　$\alpha(\alpha-1) + p_0\alpha + q_0 = 0$

決定方程式と呼ぶ

（ただし 決定方程式の 解の形 で 制限がつく）

証明 簡単のため $z_0=0$ とする。

(**) を (*)' に代入

$$z^2\left(\alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)z^{\alpha+n-2}\right)$$

$$+\ z(p_0+p_1z+\cdots)\left(\alpha z^{\alpha-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\alpha+n)z^{\alpha+n-1}\right)$$

$$+\ (q_0+q_1z+\cdots)\left(z^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{\alpha+n}\right)=0$$

z^{α} の係数比較

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha p_0+q_0=:F(\alpha)=0 \quad (\text{決定方程式})$$

$z^{\alpha+1}$ の係数比較

$$(\underbrace{\alpha(\alpha+1)+(\alpha+1)p_0+q_0}_{F(\alpha+1)})a_1+\alpha p_1+q_1=0$$

もし $F(\alpha+1)\neq0$ であれば

$$a_1=\frac{-\alpha p_1-q_1}{F(\alpha+1)} \quad \Leftarrow a_1\text{決定}$$

$z^{\alpha+n}$ の係数比較

$$F(\alpha+n)a_n+\left(\sum_{m=1}^{n-1}((\alpha+n-m)p_m+q_m)a_{n-m}\right)+\alpha p_n+q_n=0$$

$F(\alpha+n)\neq0$ であれば

$$a_n=\frac{1}{F(\alpha+n)}(a_0,\cdots,a_{n-1}\text{の式}) \Leftarrow a_n\text{決定}$$

結論

$F(\alpha+n)\neq0$ $(n=1,2,3,4,\cdots)$ という条件の下に

級数解 (**) が存在する

場合わけ　$F(\alpha)=0$ の解を ρ_1, ρ_2 とするとき

(A) $\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数 の場合

$F(\rho_i + n) \neq 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$

となるので 2つの級数解が (**)の形で得られる.

(B) $\rho_1 - \rho_2 = n$ (整数) の場合　($n \geq 0$ と仮定)

$F(\rho_2 + n) = F(\rho_1) = 0$ となるので

ρ_2 に対する級数解は構成できない

(ρ_1 に対する級数解は可能)

(B)の場合は 2番目の解は級数展開可能でなく. ($\log z$ を含む)
別の方法で解く.　(Frobenius の方法)

$w'' + p(z)w' + q(z) = 0$ の一つの解を $w_1(z)$ とすると
もう一方の解は

$$w_2(z) = w_1(z) \cdot \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{w_1(\xi)^2} e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} p(\zeta)\, d\zeta}$$

となる.

⇒ 第2の解は

$$w_2(z) = w_1(z) \left(h_n \ln z + z^{-n} h(z) \right)$$

$$h(z) = \sum_{\substack{m=0 \\ (m \neq 0)}}^{\infty} h_m z^m$$

の形になる　(第2種超幾何関数)
など

無限遠点の取り扱い $(z=\infty)$

$w = \dfrac{1}{z}$ と変数変換 $(z=\infty \to w=0)$

$$\frac{d}{dz} = -w^2 \frac{d}{dw}, \quad \frac{d^2}{dz^2} = w^4 \frac{d^2}{dw^2} + 2w^3 \frac{d}{dw}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d^2u}{dw^2} + \underbrace{\left(\frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}p\left(\frac{1}{w}\right)\right)}_{\tilde{p}(w)}\frac{du}{dw} + \underbrace{\frac{1}{w^4}q\left(\frac{1}{w}\right)}_{\tilde{q}(w)}u = 0 \quad \cdots\cdots (**)$$

$(*)$ が $z=\infty$ に確定特異点を持つ

$\Updownarrow$

$(**)$ が $w=\infty$ に 〃

$\tilde{p}(w)$ が $w=0$ に高々1位の極

$\tilde{q}(w)$ 〃 〃 〃 2 〃

§4.2 超幾何関数

hypergeometric function (HGF と略)

超幾何微分方程式 hypergeometric differential equation (HGDE と略)

3点に確定特異点を持つ微分方程式
(0, 1, ∞)

HGDE

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\{c-(a+b+1)z\}\frac{du}{dz}-abu=:L[u]=0$$

(cf. Jacobi 多項式の DE)

a, b, c : (複素) パラメータ

$$p(z)=\frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)},\quad q(z)=\frac{-ab}{z(1-z)}$$

確定特異点 ($z=0,1,\infty$)

- $z=0$ $\quad p(z)\sim\frac{c}{z}+\cdots,\quad q(z)\sim O\left(\frac{1}{z}\right)$

  $\to p_0=c,\quad q_0=0$

  決定方程式 $\quad \alpha(\alpha-1)+c\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0,\ 1-c$

- $z=1$ $\quad p(z)\sim\frac{a+b+1-c}{z-1}+\cdots,\quad q(z)\sim O\left(\frac{1}{z-1}\right)$

  $\to p_0=a+b+1-c,\quad q_0=0$

  決定方程式

  $$\alpha(\alpha-1)+(a+b+1-c)\alpha=0\Rightarrow \alpha=0,\ c-a-b$$

- $z=\infty$

$$\tilde{p}(w) = \frac{2}{w} - \frac{1}{w^2}p\left(\frac{1}{w}\right) \sim \frac{1}{w}(1-a-b) + O(1)$$

$$\tilde{q}(w) = \frac{1}{w^4}q\left(\frac{1}{w}\right) \sim \frac{ab}{w^2} + O\left(\frac{1}{w}\right)$$

決定方程式

$$\alpha(\alpha-1) + (1-a-b)\alpha + ab = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = a, b$$

$z=0$ のまわりの展開

$$u(z) = z^\rho \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k \quad (u_0 = 1) \quad を$$

$L[u]=0$ に代入

$$0 = z(1-z)\cdot\sum_{k=0}^{\infty} u_k (k+\rho)(k+\rho-1) z^{k+\rho-2}$$

$$+\{c-(1+a+b)z\}\sum_{k=0}^{\infty} u_k (k+\rho) z^{k+\rho-1} - ab\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{k+\rho}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\{\underbrace{-(k+\rho)(k+\rho-1) - (a+b+1)(k+\rho) - ab}_{-(k+\rho+a)(k+\rho+b)\ \equiv -G(k+\rho)}\} u_k z^{k+\rho}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\{\underbrace{(k+\rho)(k+\rho-1) + c(k+\rho)}_{(k+\rho)(k+\rho+c-1)\ =\ F(k+\rho)}\} u_k z^{k+\rho-1}$$

$$= \rho(\rho+c-1)z^{\rho-1}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k F(k+\rho) - u_{k-1}G(k+\rho-1)\right)z^{k+\rho-1} = 0$$

$$F(\rho) := \rho(\rho+c-1), \quad G(\rho) = (\rho+a)(\rho+b)$$

$z^{\rho-1}$ の係数 $=0 \rightarrow F(\rho)=0 \quad \rho=0,\ 1-c$

$z^{k+\rho-1}$ 〃 $=0 \rightarrow u_k F(k+\rho) = u_{k-1} G(k+\rho-1)$

$$\Leftrightarrow \quad u_k = \frac{G(k+\rho-1)}{F(k+\rho)} u_{k-1} = \cdots$$

$$= \frac{G(k+\rho-1)\cdots G(\rho)}{F(k+\rho)\cdots F(1+\rho)} u_0$$

$u_0=1, \quad F(k+\rho)\cdots F(1+\rho) = (\rho+1)_k (c+\rho)_k$

$$\left[(x)_k \equiv x(x+1)\cdots(x+k-1) = \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}\right]$$

$$G(k+\rho-1)\cdots G(\rho) = (a+\rho)_k (b+\rho)_k$$

$1-c \leq 0$ の場合 $\rho=0$ に対する級数解は必ず存在

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} z^n$$

Gauss の超幾何関数

$\rho=1-c$ に対する解

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-c+a)_n (1-c+b)_n}{(2-c)_n\, n!} z^{n+1-c} = z^{1-c}\, {}_2F_1(1-c+a, 1-c+b; 2-c; z)$$

$c=$ 整数の場合 一方の解は存在せず $\log z$ を含んだ表式になる。

第2種超幾何関数

$z=1$ のまわりの級数解　（$w=1-z$ と変数変換して HGDEを書きかえる）

$${}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z)$$

$$(1-z)^{c-a-b}\ {}_2F_1(c-b, c-a; 1-a-b+c; 1-z)$$

$z=\infty$ のまわりの級数解

$$z^{-a}\ {}_2F_1(a, 1-c+a; 1-b+a; \tfrac{1}{z})$$

$$z^{-b}\ {}_2F_1(b, 1-c+b; 1-a+b; \tfrac{1}{z})$$

例1)　Jacobi 多項式

$$a=-n,\quad b=n+\alpha+\beta+1,\quad c=1+\alpha$$

Rodrigue 公式

$$P_n(z)=(-2)^n(1+\alpha)_n\ {}_2F_1(-n, n+1+\alpha+\beta; 1+\alpha; \tfrac{1-z}{2}) \quad (1)$$

$$= k_n z^n\ {}_2F_1(-n, -\alpha-n; -\alpha-\beta-2n; z^{-1}) \quad (2)$$

$$P_n(z) \sim k_n z^n + \cdots, \qquad k_n=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} = (-1)^n(\alpha+\beta+n+1)_n$$

$${}_2F_1(-n, n+1+\alpha+\beta; 1+\alpha; \tfrac{1-z}{2}) \sim \frac{(-1)^n n!\ (n+1+\alpha+\beta)_n}{n!\ (1+\alpha)_n}\cdot\left(-\frac{z}{2}\right)^n + O(z^{n-1})$$

$$z^n\ {}_2F_1(-n, -\alpha-n; -\alpha-\beta-2n; z^{-1}) \sim z^n + O(z^{n-1})$$

$$(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \Gamma(x+n)/\Gamma(x)$$

注意：第2の公式が成立するためには

$b-a=2n+\alpha+\beta+1 \neq$ 整数　つまり $\alpha+\beta\neq$ 整数と

なる必要がある

- Legendre $\alpha=\beta=0$, $a=-n$, $b=n+1$, $c=1$

$$\underset{\swarrow \text{Legendre}}{P_n(x)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \underset{\swarrow \text{Rodrigue}}{P_n(x)}$$

$k_n = (-1)^n (n+1)_n$
$= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$

$$= {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right) \quad \leftarrow (1)$$

$$\cancel{= \frac{(2n)!}{2^n} \cdot z^n {}_2F_1(-n, -n; -2n; z^{-1})}$$

$\alpha+\beta=0$ なので
第2の公式は使えない

$$= \frac{(2n-1)!!}{n!} z^n {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; \frac{1}{2}-n; \frac{1}{z^2}\right) \quad \Leftarrow \text{DEの書きかえ}$$

- Tschebyscheff $(\alpha=\beta=-1/2)$

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

$$= \cos(n\theta) \qquad (x = \cos\theta)$$

$$= {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2} : \frac{1-x}{2}\right) \quad \leftarrow (1)$$

$$(-2)^n \left(\tfrac{1}{2}\right)_n = (-2)^n \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} = (-1)^n (2n-1)!!$$

三点に確定特異点を持つ最も一般の解数

= Riemann の $\mathcal{P}$ 関数

3点 z_i $(i=1\sim3)$ に確定特異点を持ち
各点 z_i における指数(=決定方程式の解)が
$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ となる DE

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0$$

$$p(z) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1-\alpha_i-\beta_i}{z-z_i}$$

$$q(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}\left\{ \frac{\alpha_1\beta_1(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{z-z_1} + \underbrace{\cdots}_{2項} \right\}$$

この DE の級数解を総称して リーマンの $\mathcal{P}$ 関数と呼び

$$u(z) = \mathcal{P}\left\{\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & ,\ z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{matrix}\right\}$$

と書く。 ∞ に特異点があってはならないという条件より

$$\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i + \beta_i) = 1$$

となる必要がある。(独立なパラメータは 5 つ)

HGF はこの表示を用いると

$${}_2F_1(a, b; c; z) \sim \mathcal{P}\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & ,\ z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{matrix}\right\}$$

$\vdots$

64の関数

$\mathcal{P}$関数の性質

(a) 指数の変更

$$\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)^k \left(\frac{z-z_3}{z-z_2}\right)^l \mathcal{P}\begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & , z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix}$$

$$= \mathcal{P}\begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_1+k & \alpha_2-k-l & \alpha_3+l & , z \\ \beta_1+k & \beta_2-k-l & \beta_3+l & \end{Bmatrix}$$

k, l の自由度を用いると $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ とできる.

⇒ 非自明なパラメータは3個 (= HGF のパラメータ数)

2) 一次分数変換

$$z \Rightarrow z' = \frac{Az+B}{Cz+D}, \quad z_i' = \frac{Az_i+B}{Cz_i+D} \quad (i=1\sim3)$$

の下で

$$\mathcal{P}\begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & , z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = \mathcal{P}\begin{Bmatrix} z_1' & z_2' & z_3' & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & , z' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix}$$

特に $z' = \dfrac{(z_2-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_1)(z-z_3)}$ とすると

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{pmatrix}$$ HGF の特異点

⇒ $\mathcal{P}$関数は HGF (6種) で書くことができる.

⇒ 任意の点のまわりの解は HGF で書けていた理由

§4.3 合流型超幾何関数

(Confluent Hypergeometric function) (CHGF)

特異点の合流

2点に確定特異点を持つDE (RiemannのP関数のDEで $z_3 \to z_2$ とする)

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0$$

$$p(z) = \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1+\alpha+\alpha'}{z-b}$$

$$q(z) = \frac{\alpha\alpha'(a-b)^2}{(z-a)^2(z-b)^2}$$

2 parameter?

Solution

$$u(z) = A\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} + B\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}$$

特異点の合流：単に $b\to a$ とすると特異点が消える！

自明でない解を得るには

$$b = a+\epsilon, \quad \alpha = \frac{k}{\epsilon}, \quad \epsilon\to 0$$

という limit をとる.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{z-a}{z-a-\epsilon}\right)^{\frac{k}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(1+\frac{\epsilon}{z-a}\right)^{\frac{k}{\epsilon}} = e^{\frac{k}{z-a}}$$

⇒ $z=a$ に真性特異点が現れる.

⊙ Kummer の CHGF

$${}_1F_1(a;c;z) = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a, b+c; c; \frac{z}{b}\right) = \lim_{b\to\infty} P\begin{Bmatrix} 0 & b & \infty & \\ 0 & 0 & a & ,z \\ 1-c & -a-b & b+c & \end{Bmatrix}$$

1 にあった特異点を ∞ と合流

対応するDE

$$z\left(1-\frac{z}{b}\right)\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{c-(a+b+c+1)\frac{z}{b}\right\}\frac{du}{dz}-a\left(1+\frac{c}{b}\right)u=0$$

$$\Downarrow\ b\to\infty$$

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(c-z)\frac{du}{dz}-au=0$$

Kummer の CHGDE

$z=0$: 確定特異点　　$z=\infty$: 真性特異点

・$z=0$ における級数解

$$F(a;c;z)=\lim_{b\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\,n!}\cdot\left(\frac{z}{b}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n\,n!}z^n$$

収束半径 ∞

第2の解

$$\lim_{b\to\infty} z^{1-c}\,{}_2F_1\left(a-c+1,b+1;2-c;\frac{z}{b}\right)$$

$$=z^{1-c}\,{}_1F_1(a-c+1;2-c;z)$$

$z=\infty$ における級数解 (?)

$z=\frac{1}{w}$ と変数変換

$$\frac{d^2u}{dw^2}+\left[\frac{2-c}{w}+\frac{1}{w^2}\right]\cdot\frac{du}{dw}-\frac{a}{w^2}u=0$$ ⇐ 確定特異点型でない!

$u=w^p\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n$ とおいてみる $(a_0\equiv 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+p)(n+p-1)w^{n+p-2}$$
$$+\left(\frac{2-c}{w}+\frac{1}{w^2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+p)w^{p+n-1}-\frac{a}{w^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^{n+p}=0$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[(n+p)-a]w^{p+n-3}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n[(n+p)(n+p-1)+(2-c)(n+p)]w^{n+p-2}$$

$$=(p-a)w^{p-3}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\{a_{n+1}(n+1+p-a)+a_n(n+p)(n+p+1-c)\}w^{n+p-2}$$

$\Rightarrow\ p=a$

$$a_{n+1}=-\frac{(n+a)(n+a+1-c)}{n+1}a_n$$

$$\therefore\ a_n=-\frac{(n+a-1)(n+a-c)}{n}a_{n-1}=\cdots$$
$$=(-1)^n\frac{(a)_n(a-c+1)_n}{n!}$$

$$\therefore\ u_1(z)\sim z^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(a)_n(a-c+1)_n}{n!}z^{-n}$$

$$= z^{-a}\ {}_2F_0\left(a, a-c+1\ ;\ ;\ \frac{-1}{z}\right)$$

収束半径 $=0$ → 漸近展開

もう一つの解

$u = e^z v$, $z = -\zeta$ とおいて DEをかきなおす

$$\zeta \cdot \frac{d^2 v}{d\zeta^2} + (c-\zeta)\frac{dv}{d\zeta} + (a-c)\cdot v = 0$$

これは元のDEで $c \to c$, $a \to c-a$ と書きかえたもの

$$u_2(z) \sim z^{a-c} e^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-a)_n (1-a)_n}{n!} z^{-n}$$

$$= e^z z^{a-c}\ {}_2F_0\left(1-a, c-a\ ;\ ;\ \frac{1}{z}\right)$$ 漸近展開

Laguerre (Sonine) 関数との関係

Sonine $P_n(z) \sim {}_1F_1(-n\ ; \alpha+1\ ; z)$

$(a = -n,\ c = \alpha+1\ ,\ 1-c = -\alpha)$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right)$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_1F_1(-n, \alpha+1\ ; x)$$

∵ x^n の係数比較 $L_n^{(\alpha)}(x) \sim \frac{(-1)^n}{n!} x^n + O(x^{n-1})$

$${}_1F_1(-n\ ; \alpha+1\ ; x) = \frac{n!\,(-1)^n}{n!\,(\alpha+1)_n} x^n + O(x^{n-1})$$

・指数関数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = {}_1F_1(a; a; z) \quad a\text{は任意}$$

・Bessel 関数

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

$$= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \, {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{z^2}{4}\right)$$

$$= \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-iz} \, {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2}; 2\nu+1; 2iz\right)$$

→ next section

§4.4 HGF の積分表示

$$L_z[u]=0 \ , \quad L_z = z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + \{c-(a+b+1)z\}\frac{d}{dz} - ab$$

$$u(z) = \int_C (z-\zeta)^\lambda v(\zeta)\, d\zeta$$ (Euler 変換と呼ばれる)

の形で解を求める。($v(\zeta)$, λ, C は解となるように決める)

$$L_z u = \int_C L_z[(z-\zeta)^\lambda]\, v(\zeta)\, d\zeta$$

$$L_z[(z-\zeta)^\lambda] = \lambda(\lambda-1)z(1-z)(z-\zeta)^{\lambda-2} + \{c-(a+b+1)z\}\lambda(z-\zeta)^{\lambda-1} - ab(z-\zeta)^\lambda$$

$(z-\zeta)$ のべきでまとめる

$$= -(\lambda+a)(\lambda+b)(z-\zeta)^\lambda + \lambda(\lambda-1+c-\zeta(a+b+2\lambda-1))(z-\zeta)^{\lambda-1} + \lambda(\lambda-1)\zeta(1-\zeta)(z-\zeta)^{\lambda-2}$$

$$= \Big\{-(\lambda+a)(\lambda+b) - (\lambda-1+c-\zeta(a+b+2\lambda-1))\frac{\partial}{\partial\zeta} + \zeta(1-\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\Big\}(z-\zeta)^\lambda = (*)$$

$\boxed{\lambda=-b}$ とおいて第1項を消去 ($\lambda=-a$ でも可)

$$(*) = \Big\{-(c-b-1-\zeta(a-b-1))\frac{\partial}{\partial\zeta} + \zeta(1-\zeta)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\Big\}(z-\zeta)^{-b}$$

$$L_z[u] = \int_C (*) \cdot v(\zeta)\, d\zeta$$

第2項を一回部分積分

$$= \zeta(1-\zeta)\, v(\zeta) \frac{\partial}{\partial\zeta}(z-\zeta)^{-b} \Big|_{\partial C} \quad \Leftarrow (***)$$

$$- \int_C \left[(c-b-1-\zeta(a-b+1))\, v(\zeta) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\{\zeta(1-\zeta)\, v(\zeta)\}\right] \times \frac{\partial}{\partial\zeta}(z-\zeta)^{-b}\, d\zeta \quad \Leftarrow (**)$$

(**)を消すように $v(\zeta)$ を選ぶ

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\zeta(1-\zeta)\, v(\zeta)\} + (c-b-1-\zeta(a-b-1))\, v(\zeta) = 0$$

$\zeta(1-\zeta)\, v(\zeta) = f(\zeta)$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} f + \frac{c-b-1-\zeta(a-b-1)}{\zeta(1-\zeta)} \cdot f = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} \ln f = -\frac{c-b-1}{\zeta} - \frac{c-a}{1-\zeta}$$

$$f = \zeta^{-c+b+1} (1-\zeta)^{c-a}$$

$$\boxed{v(\zeta) = \zeta^{b-c}(1-\zeta)^{c-a-1}} \quad \Leftarrow v\text{決定！}$$

(***)を消すように ∂C を決める

$$\zeta^{-c+b+1}(1-\zeta)^{c-a}(z-\zeta)^{-b-1}\Big|_{\partial C} = 0 \quad \Leftarrow C\text{決定}$$

(☆)

以上をまとめて HGDEの解は次の形に書けた

$$u(z) = \int_C \zeta^{b-c} (1-\zeta)^{c-a-1} (z-\zeta)^{-b} d\zeta$$

変数変換 $\zeta = 1/\eta$ を行うと

$$u(z) = \int_C \left(\frac{1}{\eta}\right)^{b-c} \left(1-\frac{1}{\eta}\right)^{c-a-1} \left(z-\frac{1}{\eta}\right)^{-b} \left(-\frac{d\eta}{\eta^2}\right)$$

$$\propto \int_{C'} \eta^{a-1} (1-\eta)^{c-a-1} (1-\eta z)^{-b} d\eta$$

境界条件

$$\eta^a (1-\eta)^{c-a} (1-\eta z)^{-b-1} \Big|_{\partial C'} = 0$$

級数解との対応

$$u(z) = \int_{C'} \eta^{a-1} (1-\eta)^{c-a-1} (1-\eta z)^{-b} d\eta$$

$C' = [0,1]$ ととる.

境界条件は $\mathrm{Re}(a) > 0$, $\mathrm{Re}(c-a) > 0$ を要請

$\eta \in [0,1]$ (実軸) に対し $\arg \eta = 0$, $\arg(1-\eta) = 0$

のように多価関数の phase を固定

展開

$$(1-\eta z)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\underbrace{(-b)(-b-1)\cdots(-b-n+1)}}{n!} (-\eta z)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} (\eta z)^n \quad \text{を代入}$$

$$u(z) = \int_0^1 \eta^{a-1} (1-\eta)^{c-a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} \eta^n z^n \, d\eta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} z^n \int_0^1 \eta^{a+n-1} (1-\eta)^{c-a-1} d\eta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} z^n \underbrace{\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)}} \leftarrow B(a+n,\ c-a)$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!\,(c)_n} z^n$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; z) \quad //$$

応用) HGFの特殊値

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \int_0^1 \eta^{a-1} (1-\eta)^{c-a-1} (1-\eta \underset{\text{を1とする.}}{z})^{-b} d\eta$$

$$= (\text{same}) \int_0^1 \eta^{a-1} (1-\eta)^{c-a-b-1} d\eta$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \left. \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)} \right\} B(a,\ c-b-a)$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

CHGFの積分表示

$$\lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(a, b+c; c; \frac{z}{b}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \int_0^1 \eta^{a-1} (1-\eta)^{c-a-1} \left(1 - \frac{\eta z}{b}\right)^{-b-c} \times d\eta$$

$$\lim_{b\to\infty}$$

$$\lim \left(1 - \frac{\eta z}{b}\right)^{-b-c} = e^{\eta z}$$

$$\boxed{{}_1F_1(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \int_0^1 \eta^{a-1} (1-\eta)^{c-a-1} e^{\eta z} d\eta}$$

Legendre 多項式

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right)$$

$$P_n \sim \int_C \zeta^n (1-\zeta)^{1+n-1} \left(\frac{1-z}{2} - \zeta\right)^{-n-1} d\zeta$$

$$\zeta = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$P_n \sim \int_{C'} (1-\xi)^n (1+\xi)^n (z-\xi)^{-n-1} d\xi$$

これは §2 で用いた積分表示そのもの

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint_{C_x} \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-x)^{n+1}} d\zeta$$

積分路をかえると Legendre の微分方程式の別解が求まるはず.

第2種 Legendre 関数

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{1} (1-\zeta^2)^n (z-\zeta)^{-n-1} d\zeta$$

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}, \quad Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln \frac{z+1}{z-1} - 1, \quad \cdots$$

級数展開 $|z| > 1$ とすると

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+1)_r}{r!} \cdot \left(\frac{\zeta}{z}\right)^r$$

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1} z^{n+1}} \int_{-1}^{1} (1-\zeta^2)^n \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-n-1} d\zeta$$

$= \cdots$ ベータ関数積分

$$= \frac{\pi^{1/2}\, \Gamma(n+1)}{2^{n+1}\, \Gamma(n+\frac{3}{2})} \frac{1}{z^{n+1}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}n + 1; n + \frac{3}{2}; z^{-2}\right)$$

小テスト

Legendreの微分方程式

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)u=0$$

において $z=\infty$ が確定特異点であることを示し、指数（決定方程式の解）を求めよ.

解) $w = \frac{1}{z}$ とおくと

$$\frac{d}{dz} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{d}{dw} = -\frac{1}{z^2}\frac{d}{dw} = -w^2\frac{d}{dw}$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 = \left(-w^2\frac{d}{dw}\right)^2 = w^4\frac{d^2}{dw^2} + 2w^3\frac{d}{dw}$$

$$\left(1-\frac{1}{w^2}\right)\cdot\left(w^4\frac{d^2}{dw^2} + 2w^3\frac{d}{dw}\right)u - \frac{2}{w}\left(-w^2\right)\frac{du}{dw} + n(n+1)u = 0$$

$$w^2(w^2-1)\frac{d^2u}{dw^2} + \left\{2w(w^2-1) + 2w\right\}\frac{du}{dw} + n(n+1)u = 0$$

$$\frac{d^2u}{dw^2} + p(w)\frac{du}{dw} + q(w)u = 0 \quad \text{とおくと}$$

$$p(w) = \frac{2w^3}{w^2(w^2-1)} \sim \frac{0}{w} + \text{regular}$$

$$q(w) = \frac{n(n+1)}{w^2(w^2-1)} \sim -\frac{n(n+1)}{w^2} + O\left(\frac{1}{w}\right)$$

よって $w=0$ は確定特異点。//

決定方程式は $p_0 = 0$, $q_0 = -n(n+1)$ より

$$\alpha^2 - \alpha - n(n+1) = 0 \quad //$$

$$(\alpha+n)(\alpha-n-1) = 0$$

$$\alpha = -n, \; n+1 \quad //$$

超幾何関数の間の関係

$z=0$ のまわりの展開

$${}_2F_1(a,b;c;z), \quad z^{1-c}F(1-c+a,1-c+b;2-c;z)$$

$z=\infty$ のまわりの展開

$$z^{-a}F(a,1-c+a;1-b+a;\tfrac{1}{z})$$

$$z^{-b}F(b,1-c+b;1-a+b;\tfrac{1}{z})$$

$z=1$ のまわりの展開

$$F(a,b;a+b-c;1-z)$$

$$(1-z)^{c-a-b}F(c-b,c-a;1-a-b+c;1-z)$$

このうち2コの解のみが独立で3コ目の解は一次従属であるはず.

$\Downarrow$

沢山の関係式

(A) $z=0 \leftrightarrow z=1$

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b;1+a+b-c;1-z)$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-b,c-a;1+c-a-b;1-z)$$

(B) $z=0 \leftrightarrow z=\infty$

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F(a,1+a-c;1+a-b;\tfrac{1}{z})$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F(b,1+b-c;1+b-a;\tfrac{1}{z})$$

(A)の証明

$$F(a,b;c;z) = A\,F(a,b;1+a+b-c;1-z) + B(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;1+c-a-b;1-z)$$

とおけるはず。 $z\to 1$ として両辺を比較 $(\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ とする$)$

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = A \qquad (F(*,*;*;0)=1 \text{ なので})$$

次に $z\to 0$ として両辺を比較 $(\mathrm{Re}(1-c)>0$ を仮定$)$

$$1 = A\cdot\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(a-c+1)} + B\,\frac{\Gamma(1+c-a-b)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}$$

$$B = \frac{\Gamma(1-b)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-c)\Gamma(1+c-a-b)}\left\{1-\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(1+a+b-c)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(a-c+1)}\right\}$$

$$\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\right)$$

$$= (\text{same})\cdot\left(1-\frac{\sin\pi(c-b)\sin\pi(c-a)}{\sin(\pi c)\sin\pi(c-a-b)}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(b)\Gamma(a)}\underbrace{\left(\quad\text{same}\quad\right)\frac{\sin\pi c\,\sin\pi(a+b-c)}{\sin\pi a\,\sin\pi b}}_{=1}$$

$$\frac{\sin\pi c\,\sin\pi(a+b-c)}{\sin\pi a\,\sin\pi b} + \frac{\sin\pi(c-b)\sin\pi(c-a)}{\sin\pi a\,\sin\pi b}$$

$$\Leftarrow \sin A\sin B = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B)-\cos(A+B)\right)$$

$$= \frac{\cancel{\cos\pi(a+b-2c)} - \cos\pi(a+b) + \cos\pi(a-b) - \cancel{\cos\pi(a+b-2c)}}{\cos\pi(a-b)-\cos\pi(a+b)}$$

$$= 1$$