物理数学 II　2009 ②

ノートのタイトル　2009/05/13

§3. 直交多項式の応用

直交多項式	量子力学	対称性
Hermite	調和振動子	Heisenberg 代数 $[a, a^\dagger] = 1$
Legendre	角運動量子化	回転群 $[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c$
Laguerre	水素原子	$SO(4)$
Bessel	Helmholtz eq $(\Delta + m^2)\psi = 0$	??

§1. 調和振動子と Hermite 多項式

$$H = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \hat{x}^2) = \frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) = a^\dagger a + \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})$$

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [x, p] = i$$

基底状態 $|0\rangle$; $a|0\rangle = 0$

下降演算子 a がこれ以上下に降せない状態

励起状態 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$ $\Leftrightarrow$ Hermite 多項式

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$
$$a|n\rangle = n\,|n-1\rangle$$

$\Leftrightarrow$ Hermite 多項式の漸化式

x 表示

$$\langle x|0\rangle = \varphi_0(x) \qquad \langle x|\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}\langle x|$$

$$a|0\rangle = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0 = 0 \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^n\varphi_0$$
$$= \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{+\frac{x^2}{2}}f(x)\right) = \left(\frac{d}{dx} + x\right)f(x)$$

$$\therefore \left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{+\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)e^{+\frac{x^2}{2}}\right)^n\left(e^{-x^2}\right)$$
$$= e^{+\frac{x^2}{2}}\left(x - x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$
$$= (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(e^{+x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\right)$$
$$= e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$$

$$\therefore \varphi_m(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{2^{n/2}}H_n(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \,, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1} \,, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$x H_n = \frac{1}{2} H_{n+1} + n H_{n-1} \,, \quad \frac{d}{dx} H_n = 2n\, H_{n-1}$$

§3.2 角運動量の量子化とLegendre多項式

Legendre陪関数

定義：
$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$ ← Legendre関数

$$= \frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$$
$(-n \leq m \leq n)$

注意）多項式ではない！

主な性質

① $$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m$$

② 漸化式

(A) $$(1-x^2)^{1/2}\frac{dP_n^m}{dx} + mx(1-x^2)^{-1/2}P_n^m = P_n^{m+1}$$

(B) $$(1-x^2)^{1/2}\frac{dP_n^m}{dx} - mx(1-x^2)^{-1/2}P_n^m = -(n-m+1)(n+m) \times P_n^{m-1}$$

③ 微分方程式

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}\right] P_n^m(x) = 0$$

④ 直交性

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_\ell^m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{n,\ell}$$

① の証明 (n ≥ m > 0 に対して)

$$① \Leftrightarrow (x^2-1)^m \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n$$

$$\text{左辺} = (x^2-1)^m \sum_{r=0}^{n+m}\binom{n+m}{r}\frac{d^{n+m-r}}{dx^{n+m-r}}(x+1)^n \frac{d^r}{dx^r}(x-1)^n$$

$$= (x^2-1)^n \sum_{r=m}^{n}\frac{(n+m)!}{r!(n+m-r)!}\frac{m!}{(n-n-m+r)!}\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\times (x+1)^{n-n-m+r}(x-1)^{n-r}$$

$$= \sum_{r=m}^{n}\frac{(n+m)!(n!)^2}{r!(n+m-r)!(r-m)!(n-r)!}(x+1)^r(x-1)^{n+m-r}$$

$r' = n-r$

$r = n-r'$

$$= \sum_{r'=0}^{n-m}\frac{(n+m)!(n!)^2}{(n-r')!(m+r')!(n-m-r')!r'!}(x+1)^{n-r'}(x-1)^{m+r'}$$

$$= \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\sum_{r'=0}^{n-m}\underbrace{\frac{(n-m)!}{r!(n-m-r)!}}_{\binom{n-m}{r'}}\cdot\underbrace{\frac{m!}{(n-r')!}(x+1)^{n-r'}}_{\frac{d^{r'}}{dx^{r'}}(x+1)^n}\underbrace{\frac{n!}{(m+r')!}(x-1)^{m+r'}}_{\frac{d^{n-m-r'}}{dx^{n-m+r'}}(x-1)^n}$$

$$= \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n \quad //$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x)}$$

② -(A)

$$\frac{d}{dx}P_n^m = \frac{1}{2^n n!}\left[(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{n+m+1}}{dx^{n+m+1}}(x^2-1)^n - mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n\right]$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} P_n^{m+1} - mx(1-x^2)^{-1}\cdot P_n^m$$

$$\therefore \quad (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dP_n^m}{dx} = P_n^{m+1} - \frac{mx}{\sqrt{1-x^2}}P_n^m \quad //$$

② - (B)

(A) で $m \to -m$ とすると

$$(1-x^2)^{1/2}\frac{dP_n^{-m}}{dx} - m\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P_n^{-m} = P_n^{-m+1}$$

① を用いて

$$(1-x^2)^{1/2}\frac{dP_n^m}{dx} - m\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P_n^m = (-1)^m\frac{(n+m)!}{(n-m)!}(-1)^{m-1}\frac{(n-m+1)!}{(n+m-1)!}P_n^{m-1}$$

$$= -(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1} \quad //$$

③ の 証明

②の (A)(B) を 組み合わせると

$$\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx} - (m+1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx} + m\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)P_n^m$$

$$= -(n-m)(n+m+1)P_n^m$$

$$\text{左辺} = \left((1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + m(m+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_n^m$$

右辺と組みあわせ整理すると ③ になる

④の証明

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)\, P_\ell^m(x)\, dx = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} P_n^{-m}(x)\, P_\ell^m(x)\, dx$$

$$= (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{2^\ell \ell!} \int_{-1}^{1} dx\, \cancel{(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2-1)^n$$

$$\times \cancel{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell$$

$=$ 部分積分 $\quad \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \to \frac{d^n}{dx^n}, \quad \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} \to \frac{d^\ell}{dx^\ell}$

$$= \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^{1} dx\, P_n(x)\, P_\ell(x)$$

$$= \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2}{2n+1} \delta_{n,\ell} \quad //$$

球面調和関数

$$\boxed{(\Delta + f(r))\,\psi(r,\theta,\varphi) = 0}$$

球対称な系

Schrödinger eq.

Maxwell, ..

r, θ, φ : 極座標

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

極座標で書いたLaplacian

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{1}{r^2}\hat{\Omega}$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

変数分離

$$\psi = R(r)\,Y(\theta,\varphi)$$

$$Y\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) + \frac{R}{r^2}(\hat{\Omega}Y) + f(r)RY = 0 \qquad (*)$$

固有値方程式 $\hat{\Omega}Y = -\alpha Y$ (**)

が解けると (*) は r についての常微分方程式

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \left(f(r) - \frac{\alpha}{r^2}\right)R = 0$$

に帰着。 ⇒ 級数展開などで解ける

次章 (Laguerre, 球ベッセルなど)

角度方向

$$\hat{\Omega} Y + \alpha Y = 0$$

さらに変数分離 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$

$$\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\Phi \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \alpha = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\beta^2 \Phi & \cdots (☆) \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) - \dfrac{\beta^2}{\sin^2\theta}\Theta + \alpha\Theta = 0 & \cdots (☆☆) \end{cases}$$

(☆) を解く

$$\Phi = A e^{i\beta\varphi} + B e^{-i\beta\varphi}$$

一価性 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ を要求

$$\beta = m \in \mathbb{Z}$$

(☆☆) を解く

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta + \alpha\Theta = 0$$

$\mu = \cos\theta$ とおくと $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = -\sin\theta \dfrac{\partial}{\partial\mu} = -\sqrt{1-\mu^2}\dfrac{\partial}{\partial\mu}$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}\right) + \left(\alpha - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)\Theta = 0$$

$\boxed{\alpha = n(n+1)}$ とおくと Legendre 陪関数の微分方程式と一致

$\hookrightarrow$ $\Theta(\theta) = P_n^m(\mu) = P_n^m(\cos\theta)$

球面調和関数

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

$\ell = 0, 1, 2, \cdots$

$m = -\ell, -\ell+1, \cdots, \ell-1, \ell$

$$\hat{\Omega} Y_{\ell m} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}$$

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

規格化

$$\boxed{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, Y_{\ell m}^*(\theta,\varphi)\, Y_{\ell' m'}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}}$$

$\because$ $$\int_0^{2\pi} d\varphi\, (e^{im\varphi})^* e^{im'\varphi} = 2\pi\,\delta_{mm'}$$

$$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, P_\ell^m(\cos\theta)\, P_{\ell'}^m(\cos\theta) \qquad (\cos\theta \equiv \mu)$$

$$= \int_{-1}^{1} d\mu\, P_\ell^m(\mu)\, P_{\ell'}^m(\mu) = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}$$

角運動量子化と球面調和関数

角運動量演算子

$$L_i = -i\,\epsilon_{ijk}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$\left(L_3 = -i\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \text{ など} \right)$$

交換関係

$$[L_i, L_j] = i\,\epsilon_{ijk} L_k$$

$$([L_1, L_2] = i L_3 \text{ など})$$

昇降演算子

$L_\pm = L_1 \pm i L_2$ とおくと

$$[L_3, L_\pm] = \pm L$$
$$[L_+, L_-] = 2L_3$$

調和振動子の代数

$[N, a] = -a$
$[N, a^\dagger] = a^\dagger$
$[a, a^\dagger] = 1$
$N = aa^\dagger$ と似ている

$L_\pm$: 昇降演算子

$$L_3 |m\rangle = m|m\rangle$$

とすると

$$L_3 L_\pm |m\rangle = (m \pm 1) L_\pm |m\rangle$$

$\Rightarrow$ $L_\pm|m\rangle$ は固有値 $m\pm 1$ を持つ

全角運動量演算子

$$L^2 = \sum_{i=1}^{3} (L_i)^2 = L_- L_+ + L_3^2 + L_3$$
$$= L_+ L_- + L_3^2 - L_3$$

$[L^2, L_3] = 0 \Rightarrow L^2$ と L_3 は同時対角化可能

$[L^2, L_\pm] = 0 \Rightarrow$ 昇降演算子をかけても L^2 の固有値は変化しない。

最高ウェイト状態 $|l, l\rangle$

$$\begin{cases} L_+ |l, l\rangle = 0 \\ L_3 |l, l\rangle = l |l, l\rangle \end{cases}$$

- この条件の下で $|l, l\rangle$ は L^2 の固有状態

$$\because \quad L^2 |l, l\rangle = (L_- L_+ + L_3^2 + L_3) |l, l\rangle$$
$$= (l^2 + l) |l, l\rangle$$

- 一般の状態は $|l, l\rangle$ に降下演算子を作用することにより得られる。

$$L^2 (L_-^r |l, l\rangle) = l(l+1) L_-^r |l, l\rangle$$
$$L_3 (L_-^r |l, l\rangle) = (l-r) L_-^r |l, l\rangle$$

$$\Rightarrow L_-^r |l, l\rangle \propto |l, l-r\rangle$$

- 内積の正値性を保つためには l は 0 以上の半整数 ($l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$) に限定される。

$\because$ $\| |l, m\rangle \|^2 = 1$ と正規化するとき

$$\| L_- |l, m\rangle \|^2 = \langle l, m | L_+ L_- | l, m\rangle$$
$$= \langle l, m | (L^2 - L_3^2 + L_3) | l, m\rangle$$
$$= (l(l+1) - m^2 + m) \langle l, m | l, m\rangle$$
$$= (l - m + 1)(l + m)$$

ここで m は l ($\Leftrightarrow |l, l\rangle$), $l-1$ ($\Leftrightarrow \propto L_- |l, l\rangle$), …

となるが $m < -l$ に対しては

$\| L_- |l, m\rangle \|^2 < 0$ となる

正値性を保つためには ある $r (\geq 0)$ に対して

$(L_-)^{r+1} |l, l\rangle = 0$ となる必要がある.

$$\Rightarrow \quad (L_-)^r |l, l\rangle \propto |l, l-r\rangle$$
$$l + m = l + l - r = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = \frac{r}{2}}$$

正規化された $|l, m\rangle$ に対して

$$L_- |l, m\rangle = \sqrt{(l-m+1)(l+m)}\, |l, m-1\rangle$$
$$L_+ |l, m\rangle = \sqrt{(l+m+1)(l-m)}\, |l, m+1\rangle$$

球面調和関数と $|l,m\rangle$ の対応

角運動量演算子の極座標表示

$$L_+ = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_- = e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = -\hat{\Omega}$$

$$|l,m\rangle \iff Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\left.\begin{aligned} L^2 Y_{lm} &= l(l+1)Y_{lm} \\ L_3 Y_{lm} &= m Y_{lm} \end{aligned}\right\}\ \text{既に証明済み}$$

$$L_- Y_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,Y_{l,m-1} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$L_+ Y_{lm} = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,Y_{l,m+1} \quad \cdots\cdots (2)$$

(1) の証明

$$Y_{lm} \propto P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$

$$L_+\left(P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\right) = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi} - m\cot\theta\,P_l^m e^{im\varphi}\right)$$

$$= e^{i(m+1)\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - m\cot\theta\right)P_l^m(\cos\theta)$$

($\leftarrow$ $\cos\theta = \mu$ と変数変換)

$$= e^{i(m+1)\varphi}\left(-\sqrt{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial\mu} - m\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\right)P_l^m(\mu)$$

$$= -e^{i(m+1)\varphi}P_l^{m+1}(\mu) \quad \propto Y_{l,m+1}$$

規格化因子も入れると

$$L_+ Y_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \left(-e^{i(m+1)\varphi} P_l^{m+1}(\mu)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!}}\, Y_{l,m+1}$$

$$= \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\, Y_{l,m+1} \quad /\!/$$

小テスト (6/4)

球対称性を持つ偏微分方程式

$$(\Delta + f(r))\,\psi(r,\theta,\varphi) = 0$$

を変数分離を行い $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$
という形の解を求める. ここで Δ は極座標表示では

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}\hat{\Omega}$$
$$\hat{\Omega} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

となることを用いて良い.

① $R(r)$, $\Theta(\theta)$, $\Phi(\varphi)$ のみたすべき方程式を求めよ.

② $\Phi(\varphi)$ の解を求めよ. ただし Φ は一価
$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$
であるものとする.

解

① $\psi = R\Theta\Phi$ を偏微分方程式に代入.
整理すると

$$\frac{1}{Rr}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + f(r) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right) = 0$$

これから

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi) = -\alpha^2\Phi(\varphi) \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) - \dfrac{\alpha^2}{\sin^2\theta}\Theta = \lambda\Theta \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial R}{\partial r}\right) + f(r)R + \dfrac{\lambda}{r^2}R = 0 \end{cases}$$

α, λ は定数.

(2) $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi) = -\alpha^2\Phi(\varphi)$ をといて

$$\Phi(\varphi) = Ae^{i\alpha\varphi} + Be^{-i\alpha\varphi}$$

Φ の一価性

$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ を要請

$\rightarrow \alpha = m \in \mathbb{Z}$ 整数