§2 直交多項式 (ここでの取り扱いは犬井鉄郎「特殊関数」を参考にしている)

§2.1 定義

$\rho(x)$: weight (重み) 関数

$P_n(x)$: x について n 次の多項式 $(n=0,1,2,3,\cdots)$

I : 積分区間

直交性

$$\int_I \rho(x) P_n(x) P_m(x)\, dx = N_n \delta_{n,m}$$

$N_n > 0$, 規格化因子

積分区間 I	重み ρ	名前
$[-1, 1]$	1	Legendre 多項式 $P_n(x)$
	$(1-x^2)^{-1/2}$	Tschebyscheff
	$(1-x^2)^{\alpha}$ $(\alpha>-1)$	Gegenbauer
	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ $(\alpha,\beta>-1)$	Jacobi
$[0, \infty)$	e^{-x}	Laguerre $L_n(x)$
	$e^{-x} x^{\alpha}$ $(\alpha>-1)$	Sonine (Laguerre 陪関数)
$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	Hermite $H_n(x)$

Tschebyscheff

$x=\cos\theta$ とおくと $dx = -\sin\theta\, d\theta = -\sqrt{1-x^2}\, d\theta$

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} dx\, f(x) = \int_0^{\pi} d\theta\, f(\cos\theta)$$

三角関数の直交多項式

直交多項式は規格化を除いて一意的

Gram-Schmit

$P_0 = 1, \quad P_1 = x + \alpha_1 \qquad (P_0, P_1) = 0$ より α_1 を決定

$P_2 = x^2 + \beta_1 x + \beta_2 \qquad (P_0, P_2) = (P_1, P_2) = 0$ より β_1, β_1 を決定

$\vdots$

$P_n = x^n + \gamma_1 x^{n-1} + \cdots + \gamma_n \qquad (P_n, P_0) = \cdots = (P_n, P_{n-1}) = 0$ より

$\gamma_1 \cdots, \gamma_n$ を決定.

§1.2 Rodrigues の公式

直交多項式の一般形

$$P_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\rho(x) \, Q(x)^n \right)$$

$\rho(x)$: 重み関数

$Q(x)$: x の多項式

(A) Jacobi

$$Q(x) = 1 - x^2, \quad \rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

$$P_n(x) = (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right)$$

・$P_n(x)$ は n 次の多項式

$$P_n(x) = (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{d^l}{dx^l} (1-x)^{\alpha+n} \frac{d^{n-l}}{dx^{n-l}} (1+x)^{\beta+n}$$

$$= (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \sum_{l=0}^{n} C_l \, (1-x)^{\alpha+n-l} (1+x)^{\beta+\cancel{n}-\cancel{n}+l}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} C_l \, (1-x)^{n-l} (1+x)^{l}$$; n 次の多項式!

・P_n は互いに直交している

∵ $q(x)$ を $n-1$ 次以下の多項式とすると

$$(P_n, q) = \int_{-1}^{1} \cancel{\rho(x)} \cdot \frac{1}{\cancel{\rho(x)}} \frac{d^n}{dx^n}\left(\rho(x) Q(x)^n\right) q(x)\, dx$$

$$= \underbrace{\left.\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\rho(x) Q(x)^n\right) q(x)\right|_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\rho Q^n) \frac{dq}{dx}\, dx$$

$(1-x^2)^n$

必ず $(1-x^2)$ という因子を含む

$$= \cdots = (-1)^n \int_{-1}^{1} \rho Q^n \frac{d^n q}{dx^n}\, dx = 0$$

q は $n-1$ 次以下の多項式だからゼロ

とくに $(P_n, P_0) = (P_n, P_1) = \cdots = (P_n, P_{n-1}) = 0$

(B) Laguerre, Sonine, Laguerre 陪関数

$$\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}, \quad Q(x) = x$$

$$P_n(x) = x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right)$$

(C) Hermite

$$\rho(x) = e^{-x^2}, \quad Q(x) = 1$$

$$P_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

注意：規格化因子は実際の多項式の定義とは異なる

§2.3 直交多項式がみたす微分方程式

Rodrigue の式

$$P_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\rho(x) Q(x)^n\right)$$

は 2 階の DE

$$\hat{H} P_n(x) = \lambda_n P_n(x)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d}{dx} \left(\rho(x) Q(x) \frac{d}{dx}\right)$$

$$\lambda_n = n\left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{n-1}{2} \frac{d^2Q}{dx^2}\right)$$

証明) 以下の4つのステップで証明する

① $\hat{H}$ は n 次の多項式を n 次の多項式に写像する

$$\because \quad \hat{H} = Q(x) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dx}(\rho Q) \frac{d}{dx}$$

$$= Q(x) \frac{d^2}{dx^2} + P_1(x) \frac{d}{dx}$$

$Q(x)$: 2 次以下の多項式

$P_1(x)$: 1 次の多項式

② $\hat{H}$ は 内積 $(\, , \,)$ に対して Hermite 性を持つ

$$(u, \hat{H}v) = (\hat{H}u, v)$$

∵ $$(u, \hat{H}v) = \int_I u(x) \cancel{\frac{1}{\rho}} \frac{d}{dx}\left(\rho Q \frac{dv}{dx}\right) \cancel{\rho(x)} \, dx$$

$$\underset{\text{部分積分}}{=} u(x)\rho Q \frac{dv}{dx}\Big|_{\partial I} - \int_I dx \frac{du}{dx} \rho Q \frac{dv}{dx}$$

∂I : I の境界

$$= \underbrace{\rho Q\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\Big|_{\partial I}}_{\rho Q|_{\partial I} = 0} + \int_I dx \frac{d}{dx}\left(\rho Q \frac{du}{dx}\right) v$$

$$= (\hat{H}u, v) \quad //$$

---

③ $P_n(x)$ は $\hat{H}$ の固有関数である

∵ 帰納法により証明する。$\hat{H}P_n = \lambda_n P_n$ $(n=0, \cdots, m-1)$ と仮定

$n=0$ は $P_0 = 1$、$\hat{H}P_0 = 0$ なので成立

① より $\hat{H}P_m = \sum_{l=0}^{m} c_l P_l$ と書くことができる

$l = 0, \dots, m-1$ に対して

$$(P_l, \hat{H}P_m) = \sum_{l'=0}^{m} c_{l'} \underbrace{(P_l, P_{l'})}_{N_l \delta_{ll'}} = c_l N_l$$

(N_l は規格化因子)

一方 ② を用いると

$$(P_l, \hat{H}P_m) = (\hat{H}P_l, P_m) \underset{\text{帰納法の仮定}}{=} \lambda_l (P_l, P_m) = 0$$

$$\therefore \quad c_l = 0 \quad (l = 0, 1, \cdots, m-1)$$

$$\therefore \quad \hat{H}P_m = c_m P_m \quad //$$

④ 固有値の計算

$$\lambda_n = n\left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{d^2Q}{dx^2}\right)$$

∵ 最高次の係数を比較する

$$\left.\begin{array}{l} P_n = d_n x^n + \cdots \\ Q(x) = ax^2 + \cdots, \quad P_1(x) = bx + \cdots \end{array}\right) \text{ とおくと}$$

$$\hat{H}P_n = \left[(ax^2+\cdots)\frac{d^2}{dx^2} + (bx+\cdots)\frac{d}{dx}\right](d_n x^n + \cdots)$$

$$= d_n\left(a\,n(n-1) + bn\right)x^n + \cdots$$

$$= \lambda_n(d_n x^n + \cdots)$$

$$\therefore \lambda_n = a\,n(n-1) + bn$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d^2Q}{dx^2}n(n-1) + \frac{dP_1}{dx}\cdot n$$

$$= n\left(\frac{dP_1}{dx} + \frac{n-1}{2}\frac{d^2Q}{dx^2}\right)$$

微分方程式の具体形

Jacobi : $Q(x) = 1 - x^2$, $P_1 = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$

$$= \beta - \alpha - x(\alpha+\beta+2)$$

$$\lambda_n = -n(\alpha+\beta+n+1)$$

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + \left((\beta-\alpha) - x(\alpha+\beta+2)\right)\frac{du}{dx} + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0}$$

Legendre : $\alpha = \beta = 0$

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + n(n+1)u = 0$$

超幾何関数 $z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \{c-(a+b+1)z\}\frac{du}{dz} - abu = 0$

$$P_n \sim {}_2F_1\left(-n, n+1+\alpha+\beta; 1+\alpha; \frac{1-x}{2}\right)$$

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^n$$

- Sonine (Laguerre)

$$Q = x, \quad \rho = x^\alpha e^{-x}$$

$$P_1 = x^{-\alpha} e^x \frac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1} e^{-x}\right)$$

$$= -x + (\alpha+1), \quad \lambda_n = -n$$

$$\boxed{x\frac{d^2u}{dx^2} + (\alpha+1-x)\frac{du}{dx} + nu = 0}$$

$$z\frac{d^2u}{dz^2} + (c-z)\frac{du}{dz} - au = 0$$

合流型超幾何関数 ${}_1F_1(-n; \alpha+1; z)$

$${}_1F_1(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!(c)_n} z^n$$

Laguerre 陪関数

$\alpha \to k$ としたもの

Laguerre

$\alpha \to 0$

- Hermite $\rho = e^{-x^2}$, $Q = 1$, $P_1 = e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2x$

$$\lambda_n = -2n$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + 2nu = 0}$$

小テスト（第2回）

Laguerre 陪関数に対する Rodrigue の公式　　（$k=0,1,2,\cdots$）

$$L_n^k = \frac{1}{n!} e^x x^{-k} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+k} \right)$$

について次の性質を示せ。

① L_n^k は x の n 次の多項式である

② $(L_n^k, L_m^k) = 0$ if $n \neq m$

ただし $(u, v) = \int_0^\infty dx\, x^k e^{-x} u(x) v(x)$

答）① $$L_n^k = \frac{1}{n} e^x x^{-k} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \left(\frac{d^l}{dx^l} e^{-x} \right) \left(\frac{d^{n-l}}{dx^{n-l}} x^{n+k} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \cancel{e^x} \cancel{x^{-k}} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \cancel{e^{-x}} \frac{(n+k)!}{(k+l)!} x^{\cancel{k}+l}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l \frac{(n+k)!}{(k+l)!} x^l \quad //$$

4点

② $n > m$ とすると

$$(P_n, P_m) = \int_0^\infty dx\, \cancel{x^k} \cancel{e^{-x}} \frac{1}{n!} \cancel{e^x} \cancel{x^{-k}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+k} \right) P_m(x)$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(e^{-x} x^{n+k} \right) P_m(x) \right]_0^\infty}_{=0} - \frac{1}{n!} \int_0^\infty dx\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\text{same}) \frac{dP_m}{dx}$$

= （部分積分くりかえし）

$$= (-1)^n \frac{1}{n!} \int_0^\infty dx\, \left(e^{-x} x^{n+k} \right) \underbrace{\frac{d P_m}{dx^n}}_{=0}$$

P_m は m 次の多項式

$$= 0$$

§2.4 規格化

$$N_n = (P_n, P_n) = \int_I (P_n(x))^2 \rho(x)\, dx$$

$$= \int_I P_n(x) \frac{d^n}{dx^n}(\rho Q^n)\, dx$$ ⇐ Rodriguesの公式

$$= \cancel{P_n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\rho Q^n)\Big|_{\partial I}} - \int_I \frac{dP_n}{dx} \frac{d}{dx^{n-1}}(\rho Q^n)$$

境界でゼロ

$$= \cdots = (-1)^n \int_I \frac{d^n P_n}{dx^n} \rho Q^n\, dx = (*)$$

部分積分くり返し

$P_n = k_n x^n + \cdots$ と書くと $\frac{d^n P_n}{dx^n} = k_n n!$

$$\Rightarrow \boxed{N_n = (-1)^n n!\, k_n \int_I \rho Q^n\, dx}$$

Legendre (Jacobi)

$$P_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]$$

$$\xrightarrow[x\to\infty]{} (-x)^{-\alpha} x^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} (-x)^{\alpha+n} x^{\beta+n}$$

$$= (-1)^n x^{-\alpha-\beta} \frac{d^n}{dx^n} x^{\alpha+\beta+2n}$$

$$= (-1)^n (\alpha+\beta+2n)\cdots(\alpha+\beta+n+1)\, x^n$$

$$\therefore\ k_n = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}\, dx = (*)$$

$$\zeta = \frac{1+x}{2} \qquad x = 2\zeta - 1 \qquad 1-x = 2(1-\zeta)$$

$$dx = 2\, d\zeta$$

$$(*) = \int_0^1 2^{\alpha+\beta+2n} \zeta^{\beta+n} (1-\zeta)^{\alpha+n} \cdot 2\, d\zeta$$

$$= 2^{\alpha+\beta+2n+1} \underbrace{\int_0^1 \zeta^{\beta+n} (1-\zeta)^{\alpha+n}\, d\zeta}_{B(\alpha+n+1,\, \beta+n+1)}$$

$$= 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$$

$$\therefore\ N_n = (-1)^n n!\, (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$$

$$= n!\, 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \quad //$$

Legendre $\quad \alpha = \beta = 0 \quad \Gamma(n+1) = n!$

$$N_n = n!\, 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)\, n!} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1}$$

Legendre 多项式 $\quad P_n(x) := \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$

$$(P_n, P_m) = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

Tschebycheff $\quad \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ $\qquad n!\, 2^{\alpha+\beta+2n+1} \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$

$$N_n = n!\, 2^{2n} \frac{\Gamma(n+1/2)^2}{(2n)\,\Gamma(n)} = 2^{2n-1}\,\Gamma(n+1/2)^2 \qquad \Leftarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$= 2^{2n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{2}\,(2n-1)!!^2$$

$$x\,\frac{d^n}{dx^n}\,x^{2n-1} = (2n-1)\cdots(n)\,x^n = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}\,x^n$$

$$T_n = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}\,(1-x^2)^{+1/2}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(1-x^2)^{n-1/2} \sim 2^{n-1}x^n + \cdots$$

$x = \cos\theta$ とおくと $\quad 1-x^2 = \sin^2\theta$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\sin\theta\,\frac{d}{dx}$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$$

$$\int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \int_{\pi}^{0}(-\sin\theta\, d\theta)\,\frac{1}{\sin\theta} = \int_0^{\pi} d\theta$$

$$T_n = \cos(n\theta)$$

$\Uparrow$

DE $\quad (1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2 T_n = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^2}{d\theta^2}T_n + n^2 T_n = 0$$

$$\int_0^{\pi} d\theta\, \cos(n\theta)\cos(m\theta)\, d\theta = \begin{cases} \pi & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & n = m > 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

cos $n\theta$ を cos θ で書いたものが Tschebyshefｆ

Laguerre (Sonine, Laguerre 陪関数)

$$P_n(x) = x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)$$

$$\sim (-1)^n x^n + \cdots \quad \Rightarrow \quad k_n = (-1)^n$$

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha+n} e^{-x}\, dx = \Gamma(\alpha+n+1)$$

$$\therefore N_n = (-1)^n n! \, (-1)^n \Gamma(\alpha+n+1)$$

$$= n! \, \Gamma(\alpha+n+1)$$

Laguerre 陪関数

$$L_n^k = \frac{1}{n!} e^{x} x^{-k} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{n+k}\right)$$

$$L_n = L_n^0$$

$$(L_n^k, L_m^k) = \frac{n! \, \Gamma(n+k+1)}{(n!)^2} \delta_{n,m} = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{n,m}$$

$$(L_n, L_m) = \delta_{n,m}$$

Hermite

$$P_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \sim (-2)^n x^n + \cdots$$

$$k_n = (-1)^n 2^n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\therefore (P_n, P_m) = (-1)^n n! (-1)^n 2^n \sqrt{\pi} = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Hermite 多項式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$(H_n, H_m) = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{n,m}$$

§2.5 母関数

Goursatの公式 $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_x} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{n+1}}$ を用いて

Rodriguesの公式を次のように書きかえる

$$P_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left(\rho(x) Q(x)^n\right)$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \frac{1}{\rho(x)} \oint_{C_x} d\zeta \frac{\rho(\zeta) Q(\zeta)^n}{(\zeta - x)^{n+1}}$$

母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{y^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\rho(x)} \oint_{C_x} d\zeta\, \rho(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y Q(\zeta))^n}{(\zeta - x)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\rho(x)} \oint_{C_x} d\zeta\, \rho(\zeta) \frac{1}{\zeta - x - yQ(\zeta)} = (*)$$

※ ここで $\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{x^{n+1}}$ (taylor展開) を用いた

収束するためには $|y| < |x|$ となることが必要なことに注意

$(*)$では $|yQ(\zeta)| \leq |\zeta - x|$ となるように C_x を選ぶ必要がある

以下 具体例

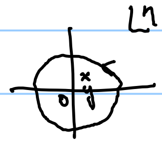
・Hermite $\quad \rho = e^{-x^2}, \quad Q = 1, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

(*)の左辺 $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n!} H_n(x)$

右辺 $= \dfrac{1}{2\pi i} e^{x^2} \displaystyle\oint_{C_x} d\zeta \, e^{-\zeta^2} \frac{1}{\zeta - x - y}$

$= e^{x^2} e^{-(x+y)^2} = e^{-2xy - y^2}$

和の収束性 $\Leftrightarrow \underset{\eta}{\underset{\equiv}{|\zeta - x|}} > |y| \Leftrightarrow |\eta| > |y|$



ηの積分路の中にyが入っている

$\Updownarrow$

留数をひろう

母関数では $y \to -y$ として

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{y^n}{n!} = e^{2xy - y^2}$$

yについての収束半径 ∞

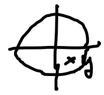
Laguerre $\quad Q(x) = x, \quad \rho(x) = e^{-x}, \quad L_n(x) = \dfrac{1}{n!} e^{x} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$

(*)の左辺 $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} y^n L_n(x)$

(*)の右辺 $= \dfrac{1}{2\pi i} e^{x} \displaystyle\oint_{C_x} d\zeta \, e^{-\zeta} \frac{1}{\zeta - x - y\zeta} = (**)$

和の収束 $\Leftrightarrow |\zeta - x| > |y\zeta|$

poleの位置は $\zeta = \dfrac{x}{1-y} = \zeta_0$ で ζ_0は積分路の内部にある



☺ $t = \frac{\zeta - x}{\zeta}$ とおくと 積分路は $|t| > |y|$

一方 $t_0 = \frac{\zeta_0 - x}{\zeta_0} = y \to |t_0| < |t|$

$$\therefore (**) = \frac{1}{2\pi i} e^x \oint_{C_x} d\zeta \, e^{-\zeta} \frac{1}{(1-y)(\zeta - \zeta_0)}$$

$$= e^x e^{-\frac{x}{1-y}} \cdot \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-y} e^{\frac{xy}{y-1}}$$

$$\therefore \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) y^n = \frac{1}{1-y} e^{\frac{xy}{y-1}}}$$

<u>Legendre</u> $\rho = 1$, $Q = x^2 - 1$, $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$

$$(*)\text{の左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} (2y)^n \cdot P_n(x)$$

$$(*)\text{の右辺} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_x} d\zeta \frac{1}{\zeta - x - y(\zeta^2 - 1)}$$

$$= -\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_x} d\zeta \frac{1}{(\zeta - \zeta_+)(\zeta - \zeta_-)} = (**)$$

$$\zeta_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4xy + 4y^2}}{2y}$$

$y \to 0$ としたとき $\zeta_\pm = \frac{1 \pm (1 - 2xy)}{2y}$

$$\zeta_+ \sim \frac{1}{y} \to \infty, \quad \zeta_- \sim x$$

収束性 $\Leftrightarrow$ C_x の内部に ζ_- がある

$$(**) = -\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\zeta_- - \zeta_+} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4xy + 4y^2}}$$

$2y \to y$ と書いて $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xy + y^2}}$

旧ノート

§2.5 母関数 (Generating function)

この部分は以前のノートより収束性の議論のためキープしてある

$$P_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\rho Q^n)$$

$$= \frac{n!}{2\pi i \rho} \oint_{C_x} d\zeta \frac{\rho(\zeta) Q(\zeta)^n}{(\zeta - x)^{n+1}}$$

c.f. Goursatの公式

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_x} d\zeta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - x)^{n+1}}$$

Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$= (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_x} d\zeta \frac{e^{-\zeta^2}}{(\zeta - x)^{n+1}}$$

$t = \zeta - x$ とおくと $\zeta = t + x$ $\quad d\zeta = dt$

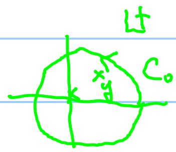
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_0} dt \frac{e^{-(t+x)^2}}{t^{n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{n} \frac{(-y)^n}{t^{n+1}} = \frac{1}{t+y}$$
for $|y| < |t|$

$$\sum_{n=0}^{n} \frac{y^n}{n!} H_n(x) = \sum_{n=0}^{n} (-y)^n e^{x^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dt \frac{e^{-(t+x)^2}}{t^{n+1}}$$

$$= e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} dt \frac{e^{-(t+x)^2}}{t+y}$$

$|t| > |y|$



$$= e^{x^2} e^{-(x-y)^2}$$

$$= e^{-y^2 + 2xy}$$

$$\therefore \boxed{e^{-y^2+2xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} H_n(x)}$$

$|y| < \infty$

旧ノート

Laguerre多項式

$$L_n = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

$$= \frac{e^x}{2\pi i}\oint_{C_x} d\zeta \, \frac{\zeta^n e^{-\zeta}}{(\zeta - x)^{n+1}} = (*)$$

$t = \frac{\zeta - x}{\zeta}$ とおく　　$\zeta = \frac{x}{1-t}$　　$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{x}{(1-t)^2}$

$$\zeta - x = \zeta t = \frac{tx}{1-t}$$

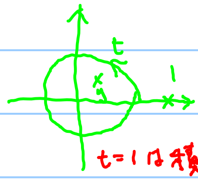
$$L_n = \frac{e^x}{2\pi i}\oint_{C_0} dt \, \frac{\cancel{x}}{(1-t)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{t^n} \cdot \frac{\cancel{1-t}}{t\cancel{x}} \, e^{-\frac{x}{1-t}}$$

$$= \frac{e^x}{2\pi i}\oint_{C_0} dt \, \frac{1}{t^{n+1}(1-t)} \, e^{-\frac{x}{1-t}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) y^n = \frac{e^x}{2\pi i}\oint_{C_0} dt \, \frac{e^{-\frac{x}{1-t}}}{1-t} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{t^{n+1}}}_{\frac{1}{t-y}}$$

(if $|y| < |t|$)

$$= \frac{e^x}{2\pi i}\oint_{C_0} dt \, \frac{e^{-\frac{x}{1-t}}}{(1-t)(t-y)}$$



t=1は積分路の外

$$= e^x \, \frac{e^{-\frac{x}{1-y}}}{1-y}$$

$$= \frac{1}{1-y} e^{\frac{xy}{y-1}}$$

$$x - \frac{x}{1-y} = \frac{xy - x + x}{y-1} = \frac{xy}{y-1}$$

$$\therefore \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) y^n = \frac{1}{1-y} e^{\frac{xy}{y-1}}}$$

$|y| < 1$

旧ノート

Legendre 多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{2\pi i} \oint_{C_x} \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-x)^{n+1}} d\zeta = (*)$$

$t = \dfrac{2(\zeta - x)}{\zeta^2 - 1}$ とおく.

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{1}{t^n (\zeta - x)} \frac{d\zeta}{dt} \cdot dt$$

$$t(\zeta^2-1) - 2(\zeta - x) = t\zeta^2 - 2\zeta - t + 2x = 0$$

$$\zeta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - t(2x-t)}}{t} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2xt+t^2}}{t}$$

$\zeta \to x$ で $t \to 0$ となるためには $\ominus$ をとる必要がある

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1-2xt+t^2}}{t} \equiv \frac{1-R}{t} \qquad R = \sqrt{t^2 - 2xt + 1}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{-2x + 2t}{2\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{t-x}{\sqrt{R}}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \cdots = \frac{1 - xt - R}{t^2 R}$$

$$\zeta - x = \frac{1 - R - xt}{t}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} t^n \frac{\cancel{t}}{\cancel{1-R-xt}} \cdot \frac{\cancel{1-xt-R}}{t^{\cancel{2}} R} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{dt}{t^{n+1} R(t)}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{dt}{R(t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{t^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{dt}{R(t)} \frac{1}{t-y}$$

$$= \frac{1}{R(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}}$$

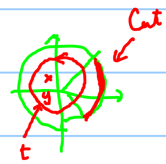
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n = (1-2xy+y^2)^{-1/2}}$$

$R^2 = 1 - 2xt + t^2 = 0$

$t = x \pm \sqrt{x^2-1}$

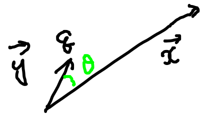
$x = \cos\theta$

$t = \cos\theta \pm i \sin\theta$



$|y| < 1$ if x: Real, $|x| < 1$

電磁気　$\phi(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|}$　← Green 関数



Coulomb's law

一般には　$\phi(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int d^3y \dfrac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$　$\vec{y} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ とおくと

$$|\vec{x}-\vec{y}| = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}$$
$$= R\sqrt{1+\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)\cos\theta}$$

$$\therefore \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)\cos\theta}}$$

← $x = \cos\theta$, $y = \dfrac{r}{R}$ とおくと Legendre 関数の母関数

$$= \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

$$\therefore \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{R^{n+1}}$$

$$C_n := \int r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\; r^n \rho(r,\theta,\varphi)\, P_n(\cos\theta)$$

小テスト　（第3回）

Hermite多項式　$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

に対する母関数

$$e^{-y^2+2xy} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{y^n}{n!}$$

を導け

解答）Goursatの公式より

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_x} d\zeta \frac{e^{-\zeta^2}}{(\zeta-x)^{n+1}}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{y^n}{n!} = e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_x} d\zeta\, e^{-\zeta^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{(\zeta-x)^{n+1}}$$

← $|y| < |\zeta - x|$ が収束のため必要

$$= e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_x} d\zeta\, e^{-\zeta^2} \frac{1}{\zeta - x + y}$$

poleが C_x 内部にある

$$= e^{x^2} e^{-(y-x)^2} = e^{2xy-y^2}$$

//

§2.6 漸化式

Hermite

$$H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = 2^n x^n + \cdots \quad (\text{低次の項})$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx}_{\equiv\ (H_n,\, H_m)} = n!\, 2^n \sqrt{\pi}\, \delta_{n,m} \equiv N_n \delta_{n,m}$$

(i) $x H_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + n H_{n-1}$

(ii) $\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$

係数比較と直交性を用いた証明

(i) $x H_n$ は $n+1$ 次の多項式なので

$$x H_n(x) = C_0 H_{n+1}(x) + C_1 H_{n-1}(x) + C_2 H_{n-3} + \cdots$$

2コおきの和になるのは Hermite 関数の偶奇性のため

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$$

- 両辺の x^{n+1} の係数を比較

$$2^n = C_0 2^{n+1} \rightarrow C_0 = \frac{1}{2}$$

- C_2 以降はゼロ

例) $C_2 N_{n-3} = (H_{n-3},\, x H_n)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_{n-3} (x H_n)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \underbrace{(x H_{n-3})}_{n-2\text{次の多項式}} H_n = 0$$

・c_1 の計算

$$c_1 N_{n-1} = (H_{n-1}, x H_n)$$

$$= (x H_{n-1}, H_n)$$

$$= \left(\frac{1}{2} H_n + \cdots H_{n-2} + \cdots, H_n\right)$$

$$= \frac{1}{2} N_n$$

$$c_1 = \frac{1}{2} N_n / N_{n-1} = \frac{n!\, 2^n \sqrt{\pi}}{2 \cdot (n-1)!\, 2^{n-1} \sqrt{\pi}} = n$$

(ii) $\frac{dH_n}{dx}$ は $n-1$ 次の多項式

$$\frac{dH_n}{dx} = D_0 H_{n-1} + D_1 H_{n-3} + \cdots$$

・両辺の x^{n-1} の係数を比較

$$2^n n = 2^{n-1} D_0 \quad \rightarrow \quad D_0 = 2n$$

・D_1 以降はゼロ

$$D_1 N_{n-3} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \frac{dH_n}{dx} H_{n-3}$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, H_n \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} H_{n-3}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_n \underbrace{\left(2x H_{n-3} - \frac{d}{dx} H_{n-3}\right)}_{n-2\text{ 次以下の多項式}}$$

$$= 0$$

Legendre

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$
$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + O(x^{n-2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) \, P_m(x) \, dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m} \equiv N_n \delta_{n,m}$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

漸化式

(i) $$x P_n = \frac{1}{2n+1} \left((n+1) P_{n+1} + n P_{n-1} \right)$$

(ii) $$(x^2-1) \frac{dP_n}{dx} = \frac{n(n+1)}{2n+1} \left(P_{n+1} - P_{n-1} \right)$$

証明は Hermite の場合と同様

直交性 + 係数比較

Laguerre

(i) $x L_n = -(n+1) L_{n+1} + (2n+1) L_n - n L_{n-1}$

(ii) $x \frac{d}{dx} L_n = n (L_n - L_{n-1})$

- 直交性を用いた証明は難しい
- 母関数を用いた証明は可能

$\because$

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) y^n = \frac{e^{-\frac{xy}{1-y}}}{1-y}$$

(i) $$x \frac{\partial}{\partial x} U = y(1-y) \frac{\partial U}{\partial y} - yU \quad \cdots\cdots \text{(A)}$$

$\because$ $$x \frac{\partial}{\partial x} U = - \frac{xy}{(1-y)^2} e^{-\frac{xy}{1-y}} = - \frac{xy}{1-y} U$$

$$y(1-y) \frac{\partial}{\partial y} U = \cdots = yU + x \frac{\partial}{\partial x} U$$

(A) の両辺の y^n の係数を比較

$$x \frac{\partial}{\partial x} U = \sum x L_n' y^n$$

$$(y - y^2) \frac{\partial}{\partial y} U - yU = \sum_n n L_n y^n - \sum_n n L_n y^{n+1} - \sum L_n y^{n+1}$$

$$= \sum_n (n L_n - n L_{n-1}) y^n$$

$$\Rightarrow \quad x L_n' = n (L_n - L_{n-1}) \qquad \text{(ii) の関係式}$$

同様に(i)は

$$x\,U(x,y) = (1-y)\,U(x,y) - (1-y)^2 \frac{\partial}{\partial y} U(x,y)$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} x\,L_n(x)\,y^n$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-y)\,L_n\,y^n - (1-2y+y^2)\sum_{n=0}^{\infty} n\,L_n\,y^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-(n+1)L_n\,y^{n+1} + (1+2n)\,L_n\,y^n - n\,L_n\,y^{n-1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-n\,L_{n-1} + (1+2n)L_n - (n+1)L_{n+1}\right) y^n$$

y^nの係数比較

↳ (i) //