物理数学 II

ノートのタイトル 2009/04/08

内容： 偏微分方程式の解法

波動方程式

熱伝導方程式

Schrödinger 方程式

Laplace 方程式

- Fourier 級数（変換）
- Green 関数
- 直交多項式
- 超幾何関数, Bessel 関数
- 境界条件

- 回転群

参考書： Arfken - Weber "Mathematical Methods for Physicist"

Academic Press（1200ページ） ('07)

寺沢寛一「自然科学者のための数学概論」

岩波（700ページ） ('60)

Whittaker & Watson "A Course on Modern Analysis"

Cambridge (1902)

評価 小テスト（6回程度）

期末テスト

§1 偏微分方程式とFourier変換

§1.1 Fourier級数とFourier変換

(物数Iの復習)

Fourier級数

$f(x)$: 周期 2π の周期関数

$f(x+2\pi) = f(x)$: 一変数実関数

三角関数の無限和で表現

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \qquad (c_{-n} = c_n^*)$$

複素Fourier級数

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = -i(c_n - c_{-n})$$

三角関数の直交性

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \pi \delta_{n,m}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} \pi \delta_{m,n} & (m \neq 0) \\ 2\pi & (n = m = 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0$$

&

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \left(e^{+inx}\right)^* dx = 2\pi \delta_{n,m}$$

などを用いると 係数 a_n, b_n, c_n は次のように定まる.

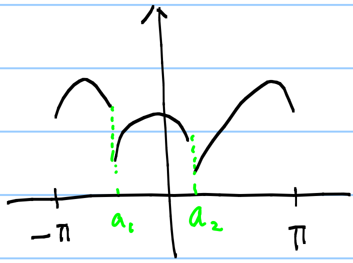
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$$

注意

- 関数 $f(x)$ は $[-\pi, \pi]$ で連続である必要はなく有限個の x で不連続であっても良い (Dirichlet 条件)

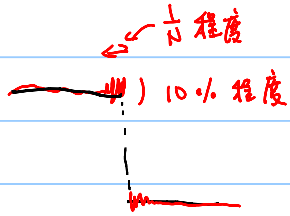


- 不連続な点 a では級数は

$$\frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left(f(a+\epsilon)+f(a-\epsilon)\right)$$

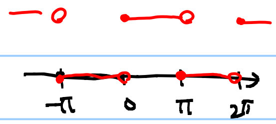
に収束する

- 不連続な点の近傍では収束性が悪い



Fourier 級数の例

「階段関数」



$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

係数の決定

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx = 0 & (n>0) \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dx = 1 & (n=0) \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cos(nx)\Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n:\text{偶数} \\ \frac{2}{\pi n} & n:\text{奇数} \end{cases}$$

よって Fourier 級数は

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)x)$$

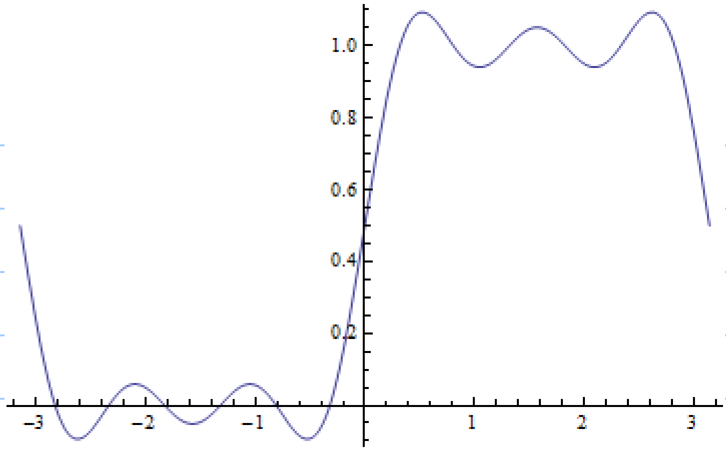
x が不連続となる点 ($x=0, \pi$ など) では

例えば

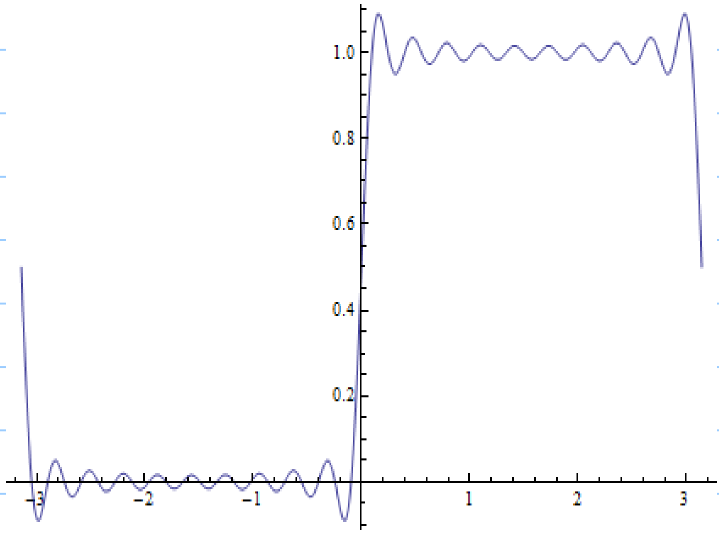
$$f(0) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left(f(-\epsilon)+f(\epsilon)\right)$$

となる。

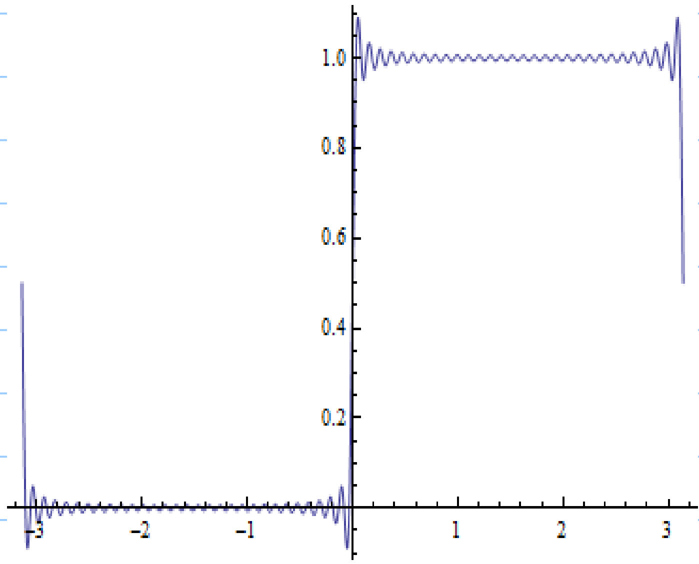
収束性



最初の3項



10 項

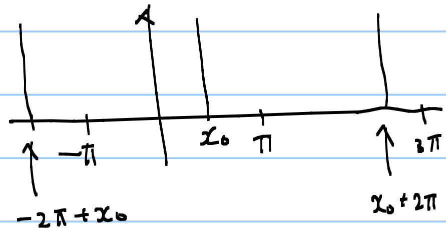


30 項

(例 2) δ 関数 (周期的)

$$f(x) = \delta(x - x_0) \quad (-\pi \leq x_0 \leq \pi)$$

$$f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$$



とおくと

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,\delta(x - x_0)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-inx_0}$$

$$\therefore \delta(x - x_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} e^{in(x - x_0)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x - x_0)\right)$$

Fourier変換

$f(x)$: $(-\infty, \infty)$で定義された関数
(+ Dirichlet条件)

Fourier変換 $f(x) \to \tilde{f}(k)$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

Fourier逆変換 $\tilde{f}(k) \to f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\, e^{ikx}\, dk$$

Fourier級数との対応

(discrete $\Leftrightarrow$ continuum)

周期 $2\pi L$ の周期関数に対するFourier級数

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n\, e^{inx/L}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi L}^{\pi L} e^{-inx/L} f(x)\, dx$$

$L \to \infty$ の極限

$$\frac{n}{L} = k \qquad \sum_n \overbrace{\frac{1}{L}}^{\Delta k} \Leftrightarrow \int dk$$

$$f(x) = \sum_n c_n e^{inx/L} \Rightarrow \text{“} L \int dk \text{”}\; c_n \quad e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}\, L\, c_n$$

$$\left(f(x) = \text{“} L \int dk \text{”} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, L} \tilde{f}(k)\, e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{ikx} \right)$$

「逆」

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}\, L\, \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi L}^{\pi L} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

$$(L \to \infty) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

Kronecker delta と Dirac delta

$$\frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi L}^{\pi L}\left(e^{inx/L}\right)^* e^{in'x/L}\,dx = \delta_{n,n'}$$

$$\Downarrow \quad L\to\infty$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ikx}\right)^* e^{ik'x}\,dx = \delta(k-k')$$

つまり $\quad L\,\delta_{n,n'} \underset{L\to\infty}{\Rightarrow} \delta(k-k')$

§1.2 偏微分方程式への応用

物理に現れる基本的偏微分方程式

① Poisson 方程式 (楕円型 : elliptic)

$$\Delta \phi = -\rho(\vec{x})$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

(Helmholtz 方程式

$$(\Delta + \omega^2)\phi = -\rho(\vec{x})$$
)

これはどうなのだろう..

② 波動方程式 (双曲型, hyperbolic)

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \Delta \phi$$

③ 熱伝導方程式 (放物型, Parabolic)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \gamma \Delta \phi$$

これらの方程式は空間方向 $(x_1, \ldots, x_n)$ (または $x, y, z, \cdots$)
が周期的であるとき Fourier 級数
無限に広がっている場合に Fourier 変換で
解くことが可能

いくつかの例

[1] 一次元波動方程式

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \qquad \phi(x,t)$$

境界条件 $\quad \phi(x+2\pi L, t) = \phi(x,t) \quad \cdots\cdots (1)$

初期値 $\quad \phi(x,t)\big|_{t=0} = \delta(x-x_0) \quad \cdots (2)$

$(\pi L \leq x_0 \leq \pi L)$

$\quad \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,t)\big|_{t=0} = 0 \quad \cdots\cdots - (3)$

解) 境界条件 (1) より Fourier 級数を用いて

$$\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{inx/L}$$

と展開できる。このとき

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{v^2}\frac{d^2 c_n}{dt^2}\right)\cdot e^{inx/L}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{L}\right)^2 c_n(t)\, e^{inx/L}$$

となるので $e^{inx/L}$ の係数を比較すると

$$\frac{1}{v^2}\frac{d^2 c_n}{dt^2} = -\left(\frac{n}{L}\right)^2 c_n$$

または $\quad \frac{d^2 c_n}{dt^2} = -\left(\frac{nv}{L}\right)^2 c_n \quad$ となる

(4)

次に初期条件を書きかえる.

$$\delta(x-x_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{(0)} e^{inx/L}$$

と書くと

$$c_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi L}^{\pi L} dx\ e^{-inx/L}\ \delta(x-x_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi L} e^{-inx_0/L}$$

これから初期条件 (2) は

$$c_n(0) = c_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi L} e^{-inx_0/L} \qquad (5)$$

初期条件 (3) は

$$\left.\frac{dc_n}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad (6)$$

結局偏微分方程式は係数 c_n に対して常微分方程式 (4) を初期条件 (5)(6) の下に解くことに帰着する.

(4) の一般解は

$$c_n(t) = p_n \cos\left(\frac{nv}{L}t\right) + q_n \sin\left(\frac{nv}{L}t\right)$$

(p_n, q_n は任意)

(5) より $\quad p_n = \dfrac{1}{2\pi L} e^{-inx_0/L}$

(6) より $\quad q_n = 0$

以上をまとめて

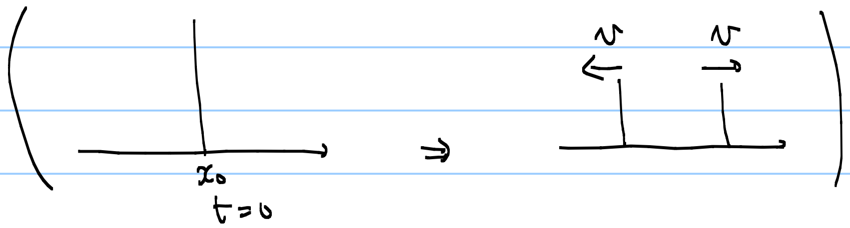
$$\phi(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{in(x-x_0)/L}}{2\pi L} \cos\left(\frac{nv}{L}t\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi L}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{nv}{L}t\right)\cos\left(\frac{n(x-x_0)}{L}\right)\right)$$

$$\left(\cos\alpha\cos\beta = \frac{(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})(e^{i\beta}+e^{-i\beta})}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi L}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{n}{L}(x-x_0+vt) + \cos\frac{n}{L}(x-x_0-vt)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\delta(x-x_0+vt) + \delta(x-x_0-vt)\right)$$



注意1) 初期値を (2) のかわりに

$$\phi(x,t)\big|_{t=0} = \rho(x)$$

とすると解はどのようになるのか？

解) 上の解を $G(x, x_0; t)$ と書いたとき

$$\phi(x,t) = \int_{-\pi L}^{\pi L} G(x,y;t)\rho(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\rho(x-vt) + \rho(x+vt)\right)$$

が求める解となる

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi = \int_{-\pi L}^{\pi L} \underbrace{\left[\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(x,y;t)\right]}_{=0} \rho(y)\,dy$$

$$\phi\Big|_{t=0} = \int_{-\pi L}^{\pi L} \delta(x-y)\,\rho(y)\,dy = \rho(x)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \int_{-\pi L}^{\pi L} \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0} \rho(y)\,dy = 0$$

注意2)　境界条件の変更

(1)　$\phi(0,t) = \phi(\pi L, t) = 0$　　Dirichlet型境界条件

$$\Rightarrow \phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{nx}{L}\right)$$

と展開する

↑上の境界条件をみたす基底

(2)　$\displaystyle \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\pi L} = 0$

Neumann型

$$\Rightarrow \phi(x,t) = \frac{1}{2} a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos\left(\frac{nx}{L}\right)$$

と展開

(3)　Mix型　　$\displaystyle \phi(0,t) = \frac{\partial \phi(\pi L, t)}{\partial x} = 0$　など

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) \sin\left(\frac{2n-1}{2L} x\right)$$

例2 熱伝導方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad x \in (-\infty, \infty),\ \nu > 0$$

初期条件

$$\phi(x,t)\Big|_{t=0} = \delta(x)$$

$t>0$ での時間発展を解く

解： $\tilde{\phi}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t)\, e^{-ikx}\, dx$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} e^{-ikx}\, dx = -k^2 \tilde{\phi}(k,t)$$

部分積分

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Longleftrightarrow \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -\nu k^2 \tilde{\phi} \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

初期条件は $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(x,0)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

これから $\tilde{\phi}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \cdots\cdots\cdots (**)$

一階の偏微分方程式 $(*)$ を初期条件 $(**)$ の下でとくと

$$\tilde{\phi}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\nu k^2 t}$$

となる。

Fourier 逆変換を行うと

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\, \tilde{\phi}(k,t)\, dk$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu k^2 t + ikx}\, dk = (A)$$

expの肩を平方完成

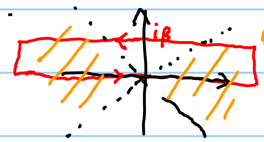
$$-\nu k^2 t + ikx = -\nu t\left(k - \frac{ix}{2\nu t}\right)^2 - \frac{x^2}{4\nu t}$$

ガウス積分

$$\int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} e^{-\alpha k^2}\,dk = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

(βは任意の実数)

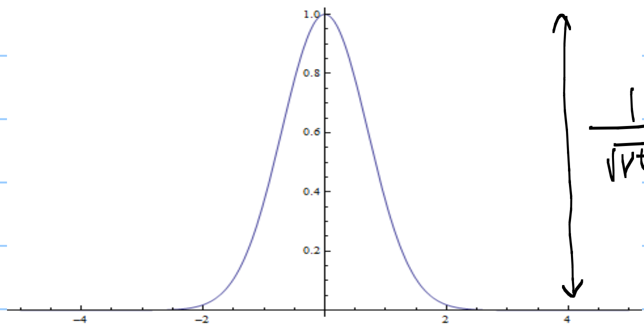
積分が収束する領域



以上を用いると

$$(A) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\nu t}}\, e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\, e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}$$

解の様子



$\frac{1}{\sqrt{\nu t}}$

$\sqrt{\nu t}$

$t \to 0$では

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{\epsilon}} = \delta(x)$$

この関数は$x=0$の近傍にのみ値を持ち

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\epsilon\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{\epsilon}}\,dx = 1$$

注意) $\nu<0$ではガウス積分が収束しないので解がない!

問題)
- 初期値が $\phi(x,0) = f(x)$ のとき解はどう書けるのか
- 定義域が $x \in [0,\infty)$ で境界条件が $\phi(x,t)\big|_{x=0} = 0$ のときどのような解となるのか
- 定義域が上と同様に $[0,\infty)$ で境界条件が $\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$ のときはどのように解けるのか
- 定義域が $[0,L]$ の場合は?

例3　ポアッソン方程式　("時間"がない)

$$\Delta G(\vec{x}) = -\delta^{(3)}(\vec{x})$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \lim_{r\to\infty} G(\vec{x}) = 0$$

3次元の内積 $\sum_{i=1}^{3} k_i x_i = \vec{k}\cdot\vec{x}$

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int G(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d^3x$$ とおき両辺をFourier変換

$$\text{左辺} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Delta G(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d^3x = -\frac{|\vec{k}|^2}{(2\pi)^{3/2}} \int G(\vec{x})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d^3x$$

$$= -|\vec{k}|^2 \tilde{G}(\vec{k})$$

$$\text{右辺} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(-\delta^{(3)}(\vec{x})\right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$

よってポアッソン方程式のFourier変換は

$$-|\vec{k}|^2 \tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{|\vec{k}|^2}}$$

Fourier逆変換

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{|\vec{k}|^2}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

$\vec{x} = (0, 0, r)$

$\vec{k} = (k\sin\theta\cos\varphi, k\sin\theta\sin\varphi, k\cos\theta)$

Euler角

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{k^2 dk\, d(\cos\theta)\, d\varphi}{k^2}\, e^{ikr\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \underbrace{(2\pi)}_{\varphi\text{積分}} \int_0^\infty dk \int_{-1}^{1} d\xi\, e^{ikr\xi}$$

$(\xi \equiv \cos\theta)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk \, \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \Leftarrow \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2i} = \sin(kr)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr}\, dk \Leftarrow kr = \xi$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 r} \underbrace{\int_0^\infty d\eta \, \frac{\sin\eta}{\eta}}_{} \leftarrow \text{複素積分 } \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{4\pi r}$$

$$\therefore \quad G(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}$$

Fourier変換による偏微分方程式の解法のまとめ

① $\phi(x) \Longleftrightarrow \tilde{\phi}(k)$

② $\dfrac{d\phi}{dx} \Longleftrightarrow ik\tilde{\phi}(k)$

x微分 $\Longleftrightarrow$ ikのかけ算

③ 初期条件のかきかえ　$\tilde{G}(k)$の条件にする

④ $\tilde{G}(k)$の微分（代数）方程式を解く

⑤ Fourier逆変換

Green 関数の概念

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \qquad \text{初期条件} \quad G(x,0) = \delta(x)$$

$$\Rightarrow \quad G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}$$

初期条件を $\phi(x,0) = \rho(x)$ とすると解は？

解） $$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} du \; G(x-u,t)\,\rho(u)$$

$\because$ $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi = \int_{-\infty}^{\infty} du \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(x-u,t)\right]\rho(u)$$

$$= 0$$

$$\phi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} du \; G(x-u,0)\,\rho(u) = \int_{-\infty}^{\infty} du \; \delta(x-u)\,\rho(u)$$

$$= \rho(x) \;/\!/$$

ポアッソン方程式

$$\Delta G(\vec{x}) = -\delta^{(3)}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad G(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}$$

方程式を $\Delta\phi = -\rho(\vec{x})$ とすると解は？

解） $$\phi(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3u \; G(\vec{x}-\vec{u})\,\rho(\vec{u})$$

$\because$ $$\Delta\phi(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3u \left(\Delta_x G(\vec{x}-\vec{u})\right)\rho(\vec{u})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^3u \left(-\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{u})\right)\rho(\vec{u}) = -\rho(\vec{x})$$

このように

$$\Delta G(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$$

$$\Box G(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$$

などの解をGreen関数と呼ぶ

ダランベルシアン

$$\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Green関数を用いると

$$\Delta\phi = \rho \quad , \quad \Box\phi = \rho$$

などの解は重ね合わせの原理

$$\phi(\vec{x}) = \int G(x-u)\,\rho(u)\,du$$

により求められる

線型代数とのanalogy

$$A\vec{x} = \vec{y} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

$$A \Leftrightarrow \Delta, \Box \quad , \quad A^{-1} \Leftrightarrow \text{Green関数}$$

波動方程式の Green 関数

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) G(\vec{x},t) = -\delta(t)\,\delta^{(3)}(\vec{x}) \qquad (*)$$

$\tilde{t} = vt$ とおくと $\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} - \Delta\right) G = -v\,\delta(\tilde{t})\,\delta^{(3)}(\vec{x})$

($\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$: 公式)

Fourier 変換 $t \to \omega$, $\vec{x} = \vec{k}$

$$(*) \iff (\omega^2 - |\vec{k}|^2)\,\tilde{G}(\omega,\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}$$

$$\therefore\ \tilde{G}(\omega,\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\omega^2 - |\vec{k}|^2}$$

Fourier 逆変換

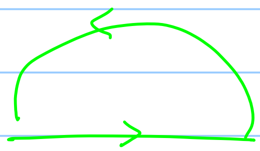
$$G(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\omega\, d^3k\; e^{i\omega t + i\vec{k}\vec{x}}\,\frac{1}{\omega^2 - |\vec{k}|^2}$$

ω 積分に pole (1次の極) が現れる!

$\omega \to \pm|\vec{k}|$ で 被積分関数が発散

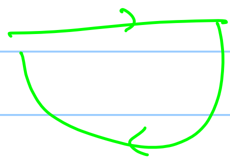
複素積分を留数積分で評価

$t>0$ では



のように閉じる

$t<0$ では



のように閉じる

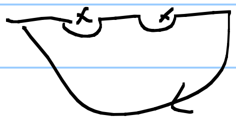
$\omega = \omega_1 + i\omega_2$ $\quad i\omega t = i(\omega_1 + i\omega_2)t = -\omega_2 t + i\omega_1 t$

$t>0$ では $\omega_2 > 0$, $t<0$ では $\omega_2 < 0$

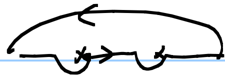
Pole の回避

(I) 

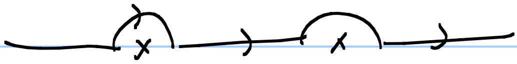
このようにまげると $t<0$ では



$= 0$

$t>0$ では  $= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{\omega=|k|} + \mathrm{Res}_{\omega=-|k|} \right)$

$\neq 0$

(II) 

$t>0$ で $G=0$, $t<0$ で $G\neq 0$

元の問題に戻ると

$(\partial_t^2 - \Delta)\phi = -\rho$ の解は

$$\phi(x,t) = \int d^3y\, du\; G(\vec{x}-\vec{y}, t-u)\,\rho(\vec{y}, u)$$

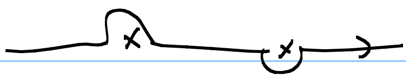
過去に起った事象のみが現在に影響する

$t-u>0$ で $G(\vec{x}-\vec{y}, t-u) \neq 0$

⇒ (I) の選択 (遅延ポテンシャル : retarded potential)

逆に (II) を選ぶと未来の事象が現在に影響を与える

Another choice



$\omega = |k|$ 正エネルギー解 ⇒ 未来に伝播

$\omega = -|k|$ 負 〃 ⇒ 過去に伝播

Feynman propagator

以下(I)の場合を計算する.

$$\mathrm{Res}_{\omega=|\vec{k}|}\ \frac{1}{(2\pi)^4} e^{i\omega t+i\vec{k}\vec{x}} \frac{1}{\omega^2-|\vec{k}|^2} = \frac{e^{i|\vec{k}|t+i\vec{k}\vec{x}}}{(2\pi)^4\cdot 2|\vec{k}|}$$

$$\mathrm{Res}_{\omega=-|\vec{k}|}\ (\text{same}) = -\frac{e^{-i|\vec{k}|t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{(2\pi)^4\, 2|\vec{k}|}$$

よってωの留数積分により

$$G(t,\vec{x}) = \frac{2\pi i}{2(2\pi)^4}\int d^3k\ \frac{\left(e^{i|k|t}-e^{-i|k|t}\right)}{|\vec{k}|} e^{i\vec{k}\vec{x}} = (*)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \qquad \vec{k} = \begin{pmatrix} k\sin\theta\cos\varphi \\ k\sin\theta\sin\varphi \\ k\cos\theta \end{pmatrix}$$

とおくと $|\vec{k}|=k,\quad \vec{k}\cdot\vec{x} = kr\cos\theta$

$$\int d^3k = \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$\cos\theta = \xi$ とおくと $\int_0^\pi \sin d\theta = \int_{-1}^1 d\xi$

$$\therefore (*) = \frac{-1}{2i(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi\ \frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{k} e^{ikr\xi}$$

$$= \frac{-2\pi}{2i(2\pi)^3}\int_0^\infty k\,dk\,(e^{ikt}-e^{-ikt})\int_{-1}^1 d\xi\ e^{ikr\xi}$$

$$= \frac{-1}{2i(2\pi)^2}\int_0^\infty \cancel{k}\,dk\,(e^{ikt}-e^{-ikt})\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{i\cancel{k}r}$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 r}\int_0^\infty dk\,\big(e^{ik(t+r)}+e^{-ik(t+r)} - e^{ik(t-r)} - e^{-ik(t-r)}\big)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^\infty dk\,\big(e^{ik(t+r)} - e^{-ik(t-r)}\big)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 r}\big(2\pi\,\delta(t+r) - 2\pi\delta(t-r)\big)$$

$$= -\frac{1}{4\pi r}\delta(t-r)$$ ⇐ $t>0,\ r>0$ なので

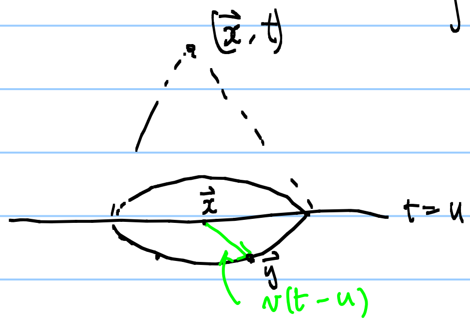
v を復活 $t \to vt,\quad G \to vG$

$$\begin{cases} G(\vec{x},t) = -\dfrac{v}{4\pi r}\delta(vt - r) \\ \quad = -\dfrac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta\left(t - \dfrac{|\vec{x}|}{v}\right) & (t>0) \\ G(\vec{x},t) = 0 & (t<0) \end{cases}$$

一般に $\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f(\vec{x},t) = -\rho(\vec{x},t)$ の解は

$t>0$ では $f(\vec{x},t) = -\int d^3y\, du \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\delta\left(t-u-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{v}\right)\rho(\vec{y},u)$

$$= -\int d^3y \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\rho\left(\vec{y},\ t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{v}\right)$$



解の確認

- $t=\vec{x}=0$ 以外で偏微分方程式をみたすこと

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\delta(t-r)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\cancel{r}\cdot\frac{1}{4\pi\cancel{r}}\delta(t-r)\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi r}\delta''(t-r)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{4\pi r}\delta(t-r)\right) = \frac{1}{4\pi r}\delta''(t-r)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\left(\frac{1}{4\pi r}\delta(t-r)\right) = 0 \quad //$$

- $t=0$ で delta 関数を出すこと

偏微分方程式の両辺を $t\in[-\epsilon,\epsilon]$ で積分

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}G\right|_{t=\epsilon} - \left.\frac{\partial}{\partial t}G\right|_{t=-\epsilon} = -\delta^{(3)}(\vec{x})$$

となれば良い。

$$左辺 = -\frac{1}{4\pi r}\delta'(\epsilon - r)$$

- $\epsilon\to 0$ ではこの関数は $r=0$ のみで値を持つ

- $$\int_0^r r^2 dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\ \frac{-1}{4\pi r}\delta'(\epsilon - r)$$

$$= -\frac{4\pi}{4\pi}\int_0^r r\,dr\,\delta'(\epsilon-r)$$

$$= -\int_0^r dr\,\delta(\epsilon - r) = -1 \quad \Leftrightarrow \int d^3x\left(-\delta^{(3)}(x)\right) = -1$$

部分積分

OK

小テスト第1回　('09/4/23)

熱伝導方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

を周期的境界条件

$$\phi(x+2\pi L, t) = \phi(x, t)$$

$(L>0)$ の下で解く。

① $\phi(x,t)$ を Fourier 級数展開

$$\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(t)\, e^{inx/L}$$

するとき、係数 $C_n(t)$ がみたす微分方程式を導け

② 初期条件を

$$\phi(x,0) = \delta(x)$$

とするとき、$C_n(t)$ の初期条件を導け

③ $C_n(t)$ を求めよ。

解答

① $$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{dC_n}{dt} e^{inx/L}$$

$$\nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu \cdot \left(\frac{n}{L}\right)^2 C_n(t)\, e^{inx/L}$$

なので $e^{inx/L}$ の係数を比較して

$$\boxed{\frac{dC_n}{dt} = -\nu \left(\frac{n}{L}\right)^2 C_n}$$

4点

② $$\delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx/L}$$ と書くと

$$a_n = \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi L}^{\pi L} \delta(x)\, e^{-inx/L}\, dx = \frac{1}{2\pi L}$$

これから $\boxed{C_n(0) = \frac{1}{2\pi L}}$

3点

③ 微分方程式は

$$\frac{dC_n}{C_n} = -\nu \left(\frac{n}{L}\right)^2 dt \rightarrow C_n = C_n^{(0)} e^{-\nu\left(\frac{n}{L}\right)^2 t}$$

初期値を代入

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2\pi L} e^{-\nu\left(\frac{n}{L}\right)^2 t}}$$

3点