

2022 年度夏学期「基礎方程式とその意味を考える」中間試験： 解答例

- ▶ 講義の Web ページは[こちら](#)。(元の試験問題、講義ノート)
- ▶ 教員名：浜口幸一
- ▶ 日時：2022 年 5 月 26 日 (木) 5 限

以下、解答例を青で書いていきます。

(ITC-LMS に追加のコメントを付けたファイルを置いておきますので、受講者の方はそちらをご覧ください。)

1 講義の第 1 週目では、§ 1 で数学の準備として複素指数関数などを導入した。次の文章を読んで、以下の問いに答えよ。

あなたが長い眠りから目を覚ますと、そこは 20xx 年の某国。そこでは、「三角関数は不要だ」と考える権力者によって全ての教科書から三角関数の記述が消されてしまっていた。これは大変だ。しかし幸いなことに、指数関数や複素数に関する記述は残っていた。そこであなたは「基礎方程式とその意味を考える」の講義で出てきた複素指数関数を用いて三角関数を定義し、そこから三角関数の性質を導くことにした*1。

関数 $c(\theta)$, $s(\theta)$ を以下の関係式で定義する。

$$e^{i\theta} = c(\theta) + is(\theta). \quad (1)$$

ただし i は虚数単位、 θ は実数であり、 $c(\theta)$, $s(\theta)$ については実関数（実数値を与える関数）であること以外は知らないと仮定する。一方で、左辺の $e^{i\theta}$ については指数関数としての性質が成立すると仮定する。例えば $\theta = 0$ を代入すると左辺は $e^0 = 1$ 、右辺は $c(0) + is(0)$ となるため、両辺の実部と虚部を比較して $c(0) = 1$ 、 $s(0) = 0$ が得られる。このように、指数関数と複素数の性質から $c(\theta)$, $s(\theta)$ の性質を求めようというわけだ。

*1 この問題設定はフィクションであり、実在する人物・団体・国とは一切関係ありません。

設定を考えるにあたり、以下の文献 [1][2] を参考にしました。

[1] カクヨム小説「三角関数禁止法」グレブナー基底大好き bot.

[2] 2012 年度物理学科物理数学 II テスト, 立川先生.

1-1 式 (1) の複素共役から $e^{-i\theta} = c(\theta) - is(\theta)$ が成り立つとし、さらに指数関数の性質から $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$ が成り立つとする。これらの式から $c(\theta)^2 + s(\theta)^2 = 1$ を導け。

解答例 与えられた式より

$$1 = e^{i\theta}e^{-i\theta} \quad (2)$$

$$= (c(\theta) + is(\theta))(c(\theta) - is(\theta)) \quad (3)$$

$$= c(\theta)^2 + s(\theta)^2. \quad \blacksquare \quad (4)$$

別解 として、 $c(\theta) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ と $s(\theta) = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$ を用いて解いている答案もありました。もちろんそれでも OK です。(1-2 も同様。)

1-2 指数関数の性質から $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ が成り立つとする。この両辺に式 (1) を代入して比較することで、 $c(\alpha + \beta)$ および $s(\alpha + \beta)$ を $c(\alpha), c(\beta), s(\alpha), s(\beta)$ で表す関係式 (加法定理) を導け。

解答例 与えられた式より

$$c(\alpha + \beta) + is(\alpha + \beta) = (c(\alpha) + is(\alpha))(c(\beta) + is(\beta)) \quad (5)$$

$$= c(\alpha)c(\beta) - s(\alpha)s(\beta) + ic(\alpha)s(\beta) + is(\alpha)c(\beta). \quad (6)$$

両辺の実部と虚部を比べて

$$c(\alpha + \beta) = c(\alpha)c(\beta) - s(\alpha)s(\beta), \quad (7)$$

$$s(\alpha + \beta) = c(\alpha)s(\beta) + s(\alpha)c(\beta). \quad (8)$$

1-3 ある値 $\theta = \theta_0 \neq 0$ で $c(\theta_0) = 1, s(\theta_0) = 0$ であるとする。このとき任意の θ に対して $c(\theta + \theta_0) = c(\theta), s(\theta + \theta_0) = s(\theta)$ が成り立つこと (周期性) を示せ。

解答例 与えられた式と、前問の結果より

$$c(\theta + \theta_0) = c(\theta) \underbrace{c(\theta_0)}_{=1} - s(\theta) \underbrace{s(\theta_0)}_{=0} = c(\theta), \quad (9)$$

$$s(\theta + \theta_0) = c(\theta) \underbrace{s(\theta_0)}_{=0} + s(\theta) \underbrace{c(\theta_0)}_{=1} = s(\theta). \quad \blacksquare \quad (10)$$

別解 条件より $e^{i\theta_0} = 1$ 。よって $e^{i(\theta+\theta_0)} = e^{i\theta_0}e^{i\theta} = e^{i\theta}$ 。両辺の実部と虚部より $c(\theta + \theta_0) = c(\theta), s(\theta + \theta_0) = s(\theta)$ 。

2 講義の第2～4週目では、§2で座標表示のシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t). \quad (11)$$

を扱った。

2-1 $\psi_1(x, t), \psi_2(x, t)$ がそれぞれシュレディンガー方程式 (11) の解であるとき、任意の複素数 c_1, c_2 に対して $\psi(x, t) = c_1\psi_1(x, t) + c_2\psi_2(x, t)$ も (11) の解となっていることを示せ。

解答例 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ と書くと、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (c_1\psi_1(x, t) + c_2\psi_2(x, t)) \quad (12)$$

$$= c_1 \cdot i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(x, t) + c_2 \cdot i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(x, t) \quad (13)$$

$$= c_1 \hat{H} \psi_1(x, t) + c_2 \hat{H} \psi_2(x, t) \quad (14)$$

$$= \hat{H} (c_1\psi_1(x, t) + c_2\psi_2(x, t)) \quad (15)$$

$$= \hat{H} \psi(x, t). \quad \blacksquare \quad (16)$$

2-2 (修正あり、下記参照。) §2.5.2節で、粒子の位置と運動量の期待値

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t)^* x \psi(x, t) dx, \quad \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t)^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t) dx \quad (17)$$

の間に

$$m \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \langle p \rangle, \quad (18)$$

という関係式が成り立つことを示した。この式をさらにもう1回時間で微分して、

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle, \quad (19)$$

が成り立つことを示せ。ただし右辺は

$$\left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t)^* \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) \psi(x, t) dx, \quad (20)$$

で定義する。また講義ノートと同様に $\psi(x, t) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ を仮定して良い。

(式 (19) はエーレンフェストの定理と呼ばれている。)

【テスト後追記】 すみません、式 (19) の左辺に m が抜けていました。正しくは

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle,$$

でした。申し訳ありません。正しくミス指摘した上で解けていた人は正解、また $1/m$ や m の因子を除いて正しく式変形出来ていた人も正解とします。この出題ミスのせいで m 倍合わないと思って解けなかった人には大変申し訳ないことをしました。部分点などで対応したいと思います。

【後日 (6/7) さらに追記】式 (3) の $\langle p \rangle$ の式の右辺に dx が抜けていました。

解答例 与えられた式から

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = \frac{d}{dt} \langle p \rangle \quad (21)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (-i\hbar) \psi' dx \quad \left(F' = \frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad (22)$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi') dx \quad (23)$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{\psi}^* \psi' + \psi^* \dot{\psi}') dx \quad \left(\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \dot{F}' = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) \right) \quad (24)$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H} \psi^* \right) \psi' + \psi^* \left(\frac{-i}{\hbar} \hat{H} \psi \right)' \right) dx \quad (25)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left((\hat{H} \psi^*) \psi' - \psi^* (\hat{H} \psi)' \right) dx \quad (26)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \psi^{*''} + V \psi^* \right) \psi' - \psi^* \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \psi'' + V \psi \right)' \right) dx \quad (27)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} (-\psi^{*''} \psi' + \psi^* \psi''') dx + \int_{-\infty}^{\infty} (V \psi^* \psi' - \psi^* (V \psi)') dx \quad (28)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} (-\psi^{*'} \psi' + \psi^* \psi'')' dx + \int_{-\infty}^{\infty} (\psi^* V' \psi) dx \quad (29)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{[-\psi^{*'} \psi' + \psi^* \psi'']_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle. \quad \blacksquare \quad (30)$$

3 講義の第4～5週目では、§3でブラケット表示でのシュレディンガー方程式を扱った。

3-1 §3.1節で、コーシー・シュワルツの不等式

$$|\langle A|B \rangle|^2 \leq \langle A|A \rangle \cdot \langle B|B \rangle, \quad (31)$$

を用いたが、証明は省略してしまった。ここでその証明をしよう。

(i) z を複素数として、 $|C\rangle = |A\rangle + z|B\rangle$ とおくと、

$$\langle C|C \rangle = \langle A|A \rangle + |z|^2 \langle B|B \rangle + z \langle A|B \rangle + z^* \langle B|A \rangle \text{ となることを示せ。}$$

解答例 $\langle C| = \langle A| + z^* \langle B|$ より

$$\langle C|C \rangle = (\langle A| + z^* \langle B|) (|A\rangle + z|B\rangle) \quad (32)$$

$$= \langle A|A \rangle + |z|^2 \langle B|B \rangle + z \langle A|B \rangle + z^* \langle B|A \rangle. \quad \blacksquare \quad (33)$$

(ii) $z = \langle B|A \rangle x$ (x は実数) のとき、上の $\langle C|C \rangle$ を x の二次式として表せ。

解答例 代入して

$$\langle C|C \rangle = \langle A|A \rangle + |\langle B|A \rangle|^2 x^2 \langle B|B \rangle + |\langle B|A \rangle|^2 x + |\langle B|A \rangle|^2 x \quad (34)$$

$$= (|\langle B|A \rangle|^2 \langle B|B \rangle) x^2 + 2|\langle A|B \rangle|^2 x + \langle A|A \rangle. \quad (35)$$

(iii) 任意の実数 x に対して $\langle C|C \rangle \geq 0$ が成り立つことを用いて、コーシー・シュワルツの不等式 (31) を示せ。

解答例 二次関数の判別式より

$$(|\langle A|B \rangle|^2)^2 - (|\langle B|A \rangle|^2 \langle B|B \rangle) \cdot \langle A|A \rangle \leq 0. \quad (36)$$

$$\therefore |\langle A|B \rangle|^2 (|\langle A|B \rangle|^2 - \langle B|B \rangle \cdot \langle A|A \rangle) \leq 0. \quad (37)$$

$$\therefore |\langle A|B \rangle| = 0 \text{ または } |\langle A|B \rangle|^2 \leq \langle B|B \rangle \cdot \langle A|A \rangle. \quad (38)$$

$$\therefore |\langle A|B \rangle|^2 \leq \langle B|B \rangle \cdot \langle A|A \rangle. \quad \blacksquare \quad (39)$$

別解 として、 $x = -\frac{1}{\langle B|B \rangle}$ を代入したり、平方完成しているものも OK です。
(その場合、正確には $\langle B|B \rangle = 0$ の場合分けなどが必要ですが。)

3-2 状態 $|\psi_1(t)\rangle, |\psi_2(t)\rangle$ が、あるハミルトニアン \hat{H} の下、シュレディンガー方程式にしたがって発展しているとする。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_1(t)\rangle = \hat{H} |\psi_1(t)\rangle, \quad (40)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_2(t)\rangle = \hat{H} |\psi_2(t)\rangle. \quad (41)$$

ただし、 $|\psi_1(t)\rangle, |\psi_2(t)\rangle$ はエネルギー固有状態とは限らない。このとき、内積 $\langle \psi_1(t) | \psi_2(t) \rangle$ が時間に依存しないことを示せ。(ヒント：ハミルトニアンのエルミート性を用いる。)

解答例 まず

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_1(t) | \psi_2(t) \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_1(t) | \right) |\psi_2(t)\rangle + \langle \psi_1(t) | \left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi_2(t)\rangle \right). \quad (42)$$

($\frac{\partial}{\partial t}$ は $\frac{d}{dt}$ でも良いです。) ここで

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_2(t)\rangle = \frac{-i}{\hbar} \hat{H} |\psi_2(t)\rangle = \frac{-i}{\hbar} |\hat{H} \psi_2(t)\rangle, \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_1(t) | = \frac{-i}{\hbar} \hat{H} \langle \psi_1(t) | = \frac{-i}{\hbar} \langle \hat{H} \psi_1(t) |. \quad (44)$$

第二式より

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_1(t) | = \frac{i}{\hbar} \langle \hat{H} \psi_1(t) |. \quad (45)$$

代入して

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_1(t) | \psi_2(t) \rangle = \left(\frac{i}{\hbar} \langle \hat{H} \psi_1(t) | \right) |\psi_2(t)\rangle + \langle \psi_1(t) | \left(\frac{-i}{\hbar} |\hat{H} \psi_2(t)\rangle \right) \quad (46)$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left(\langle \hat{H} \psi_1(t) | \psi_2(t) \rangle - \langle \psi_1(t) | \hat{H} \psi_2(t) \rangle \right) = 0. \quad \blacksquare \quad (47)$$

最後の等式では \hat{H} のエルミート性を用いた。

4 講義の第6週目では、§5で調和振動子を扱った。その中の§5.2節で、以下の生成・消滅演算子、および基底状態 $|0\rangle$ を定義した。

$$\text{消滅演算子: } \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{X} + i\hat{P}). \quad (48)$$

$$\text{生成演算子: } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{X} - i\hat{P}). \quad (49)$$

$$\text{基底状態 } |0\rangle : \hat{a}|0\rangle = 0. \quad (50)$$

4-1 基底状態の位置と運動量の期待値は

$$\langle\hat{X}\rangle = \langle 0|\hat{X}|0\rangle, \quad \langle\hat{P}\rangle = \langle 0|\hat{P}|0\rangle, \quad (51)$$

で与えられる。 \hat{X}, \hat{P} を \hat{a}, \hat{a}^\dagger で表し、 $\langle\hat{X}\rangle = 0, \langle\hat{P}\rangle = 0$ となることを示せ。

ただし、 $\langle 0|\hat{a}^\dagger = 0$ (\longleftrightarrow 任意の状態 $|\alpha\rangle$ に対して $\langle 0|\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = 0$) を用いてよい。

解答例 与えられた式から

$$\hat{X} = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{2m\omega}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (52)$$

$$\hat{P} = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (53)$$

ここで

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\hat{a}^\dagger = 0, \quad (54)$$

より

$$\langle 0|\hat{X}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\hat{P}|0\rangle = 0. \quad \blacksquare \quad (55)$$

4-2 基底状態の位置、運動量の期待値（平均値）は共にゼロだが、分散はゼロとはならない。それぞれの分散は

$$\sigma^2(\hat{X}) = \langle 0 | (\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle)^2 | 0 \rangle, \quad \sigma^2(\hat{P}) = \langle 0 | (\hat{P} - \langle \hat{P} \rangle)^2 | 0 \rangle, \quad (56)$$

で定義される。今の場合、 $\langle \hat{X} \rangle = \langle \hat{P} \rangle = 0$ を用いると

$$\sigma^2(\hat{X}) = \langle 0 | \hat{X}^2 | 0 \rangle, \quad \sigma^2(\hat{P}) = \langle 0 | \hat{P}^2 | 0 \rangle, \quad (57)$$

となる。 $\sigma^2(\hat{X}), \sigma^2(\hat{P})$ を求めよ。

解答例 前問の答と与えられた式から

$$\sigma^2(\hat{X}) = \langle 0 | \hat{X}^2 | 0 \rangle \quad (58)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 | 0 \rangle \quad (59)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | \left(\hat{a}^2 + \underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}} + \hat{a}^{\dagger 2} \right) | 0 \rangle. \quad (60)$$

ここで $\hat{a}|0\rangle = 0$, $\langle 0|\hat{a}^\dagger = 0$ および $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を用いて

$$\sigma^2(\hat{X}) = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}. \quad (61)$$

同様にして

$$\sigma^2(\hat{P}) = \langle 0 | \hat{P}^2 | 0 \rangle \quad (62)$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \langle 0 | (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 | 0 \rangle \quad (63)$$

$$= -\frac{m\hbar\omega}{2} \langle 0 | \left(\hat{a}^2 - \underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{-[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] - 2\hat{a}^\dagger\hat{a}} + \hat{a}^{\dagger 2} \right) | 0 \rangle. \quad (64)$$

$$= \frac{m\hbar\omega}{2} \langle 0 | 0 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}. \quad (65)$$

4-3 位置と運動量の標準偏差（測定値のばらつきぐあい）は分散の平方根

$$\sigma(\hat{X}) = \sqrt{\sigma^2(\hat{X})}, \quad \sigma(\hat{P}) = \sqrt{\sigma^2(\hat{P})}, \quad (66)$$

で定義される。 $\sigma(\hat{X})$ と $\sigma(\hat{P})$ の積 $\sigma(\hat{X})\sigma(\hat{P})$ を求めよ。

(一般に $\sigma(\hat{X})\sigma(\hat{P})$ には下限値があり、「位置と運動量の間不確定性関係」として知られている。)

解答例 前問の結果より

$$\sigma(\hat{X})\sigma(\hat{P}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cdot \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}. \quad (67)$$

問題は以上です。