2018 年度夏学期　場の量子論 I（浜口）レポート 2　(5/7 出題)

2018 S-semester, QFT I (Hamaguchi), homework problems 2 (May 7)

- 締切：
  <u>問題 [a], [b] の締切:</u>　毎週、該当する講義の 2 週間後の月曜 17:00.
  (例えば 4/23 の講義のレポートであれば 5/7, 17:00 が締切.)
  <u>問題 [c], [d] の締切:</u>　2018 年 7 月 30 日 (月) 17:00.
- 提出先：
  物理教務（理学部 1 号館 208 号室）レポートボックス
  <u>または</u> email で hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp まで
  （email の場合は、3 日以内に受領確認の返信がなければ再度連絡下さい。）
- 言語は日本語か英語でお願いします。**レポートには講義名 (場の量子論 I)、氏名、学籍番号を明記する事。**
- レポート問題はたくさんありますが、<u>**全てを提出する必要はありません。**</u>
- 成績 (優, 良, 可, 不可) は、レポートで評価し、以下の条件を満たせば「可」以上とします。[a]

$$(\# \text{ of [a]}) + (\# \text{ of [b]}) + (\# \text{ of [c]}) \times 5 + (\# \text{ of [d]}) \times 10 \geq 10.$$

- レポートは基本的に返却しないので、必要があれば自分でコピーをとっておいて下さい。
- 問い合わせ先：hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp

- Deadline：
  <u>**Deadline for Problems [a], [b]:**</u>　Every Monday 17:00, two weeks after the corresponding lecture.
  (For example, for the problems given in the lecture on April 23, the deadline is May 7, 17:00.)
  <u>**Deadline for Problems [c], [d]:**</u>　2018 July 30 (Mon.) 17:00.
- Submission:
  Report Box at the Physics Academic Affairs Office (Faculty of science bldg. 1, room 208)
  <u>**or**</u> email: hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp
  (If you submit via an email and do not receive a confirmation email within three days, please contact me again.)
- Write the reports in English or Japanese. **Write the course name (QFT I), your name, and you student ID at the beginning of your report.**
- There are many homework problems, but <u>**you do not have to work on all of them.**</u>
- Grades (A=excellent, B=good, C=OK, F=Fail) are given based on these homework problems. You will pass (A, B, or C) if [a]

$$(\# \text{ of [a]}) + (\# \text{ of [b]}) + (\# \text{ of [c]}) \times 5 + (\# \text{ of [d]}) \times 10 \geq 10.$$

- Basically reports are not returned. Keep a copy for yourself, if necessary.
- Contact: hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp

[a] この方式は渡利さんの講義のマネをしました。This homework format is taken from Watari-san's lectures. http://member.ipmu.jp/taizan.watari/lectures.html

レポート問題はたくさんありますが、<u>全てを提出する必要はありません。</u>
参考文献があれば明記すること。単なる引用ではなく、自分の言葉でまとめること。

There are many homework problems, but <u>you do not have to work on all of them.</u>
Write the references, if any. Summarize the report in your own words, not just extracting/excerpting from references.

問題 [a],[b] ／ Problems [a],[b]

- レポート 1 を参照。　See homework problems 1.
  `http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~hama/lectures/lecture_files/QFT_2018_report1.pdf`

問題 [c] ／ Problems [c]

[c-1] 自由 Fermion 場の生成消滅演算子の Lorentz 変換を求めよ。

[c-1] Compute the Lorentz transformations of the creation and annihilation operators for a free Fermionic field.

[c-2] Fermion 場の LSZ formula を導け。

[c-2] Derive the LSZ formula for Fermionic fields.

[c-3] 量子力学における経路積分について説明せよ。

[c-3] Explain the Path Integral in Quantum Mechanics.

[c-4] 以下のように 2 つの実スカラー場 ϕ と χ からなるラグランジアンを考える。

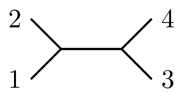
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m^2\chi^2 - \frac{f}{2}\phi\chi^2.$$

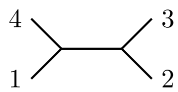
ただし f は正の実数であり、質量次元 1 を持った結合定数である。

(i) 相互作用表示場 $\phi_I(x)$ と $\chi_I(x)$ を定義し、Heisenberg 場 $\phi(x)$, $\chi(x)$ との違いを説明せよ。

(ii) $\phi(x)$ を $\phi_I(x)$ および $H_I(t) = \int d^3x \frac{f}{2}\phi_I(t,\mathbf{x})\chi_I(t,\mathbf{x})^2$ を用いて表せ。またその結果を f の 1 次まで展開せよ。

(iii) 以下、2 体散乱 $\phi\chi \to \phi\chi$ を考えたい。まず Heisenberg 場の 4 点相関関数 $\langle 0|\mathrm{T}\Big(\phi(x_1)\chi(x_2)\phi(x_3)\chi(x_4)\Big)|0\rangle$ を $\phi_I(x)$、$\chi_I(x)$ および上記の $H_I(t)$ を用いて表せ。

(iv) (iii) の結果を結合定数 f で展開することを考える。f の 0 次の項は散乱に寄与せず、f の 1 次の項がない。f の 2 次の項はたくさんあるが、そのうち散乱に寄与するのは 

, 

の 2 つの connected diagram に相当する項だけである。これらの寄与について以下の Feynman propagator を用いて表せ。

$$D_F(x-y;m) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}\ , \quad D_F(x-y;M) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-M^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}$$

(v) (iv) の結果に LSZ reduction formula を適用して 2 体散乱 $\phi\chi \to \phi\chi$ の S 行列 $\langle\phi(p_3)\chi(p_4);\mathrm{out}|\phi(p_1)\chi(p_2);\mathrm{in}\rangle$ および散乱振幅 $\mathcal{M}\Big(\phi(p_1)\chi(p_2) \to \phi(p_3)\chi(p_4)\Big)$ を求めよ。

(vi) (v) の結果を用いて、重心系での散乱断面積 $\sigma(\phi\chi \to \phi\chi)$ を求めよ。

[c-4] Consider the following Lagrangian with two real scalar fields ϕ and χ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m^2\chi^2 - \frac{f}{2}\phi\chi^2,$$

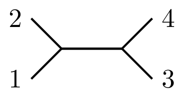
where f is a real positive coupling constants with mass dimension one.

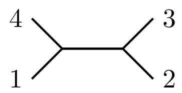
(i) Define the interaction picture fields $\phi_I(x)$ and $\chi_I(x)$, and explain the difference from the Heisenberg field $\phi(x)$ and $\chi(x)$.

(ii) Express $\phi(x)$ in terms of $\phi_I(x)$ and $H_I(t) = \displaystyle\int d^3x \frac{f}{2}\phi_I(t,\mathbf{x})\chi_I(t,\mathbf{x})^2$. And expand it in powers of f, up to order f.

(iii) Let us consider the 2-body scattering $\phi\chi \to \phi\chi$. First, express the four-point correlation function among Heisenberg fields, $\langle 0|\mathrm{T}\Big(\phi(x_1)\chi(x_2)\phi(x_3)\chi(x_4)\Big)|0\rangle$ in terms of $\phi_I(x)$, $\chi_I(x)$ and the above $H_I(t)$.

(iv) Let us expand the result of (iii) in powers of f. The $\mathcal{O}(f^0)$ term does not contribute, and the $\mathcal{O}(f^1)$ term vanishes. There are many $\mathcal{O}(f^2)$ terms, but only those terms corresponding to the two connected diagrams,



,


, contribute to the scattering. Express these contributions in terms of the following Feynman propagators.

$$D_F(x-y;m) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}\ , \quad D_F(x-y;M) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-M^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}$$

(v) Apply the LSZ reduction formula to the result of (iv), and compute the S-matrix $\langle\phi(p_3)\chi(p_4);\mathrm{out}|\phi(p_1)\chi(p_2);\mathrm{in}\rangle$ and the scattering amplitude $\mathcal{M}\Big(\phi(p_1)\chi(p_2)\to\phi(p_3)\chi(p_4)\Big)$.

(vi) Compute the scattering cross section $\sigma(\phi\chi\to\phi\chi)$ in the center-of-mass frame, by using the result of (v).

[c-5] [c-4] のラグランジアンで ϕ の崩壊率 $\Gamma(\phi\to\chi\chi)$ を f の最低次で求めよ。ただし $M>2m$ であるとする。

[c-5] For the Lagrangian in [c-4], compute the decay rate of ϕ, $\Gamma(\phi\to\chi\chi)$, at the leading order in f. Here, we assume that $M>2m$.

[c-6] **(ネーターの定理)** 与えられたラグランジアンがある場の微小変換に対して (全微分項を除いて) 不変であるとする。このとき、(i) ネーターカレント j^μ が構成出来て、(ii) 運動方程式の下で $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たし、(iii) ネーターチャージ $Q = \int d^3x j^0$ が保存する ($dQ/dt=0$) ことを示せ。

[c-6] **(Noether's theorem)** Suppose that a given Lagrangian is invariant under a certain infinitesimal transformation of fields (up to a total derivative). Show that, in such a case, (i) a Noether current j^μ can be constructed, (ii) it satisfies $\partial_\mu j^\mu = 0$ under the equation of motion, (iii), and the Noether charge $Q=\int d^3xj^0$ is conserved ($dQ/dt=0$).

[c-7] **(ポアンカレ対称性)** 実スカラー場のラグランジアン $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{24}\lambda\phi^4$ を考える。

(i) 作用 $S=\int d^4x\mathcal{L}$ が時空並進 $\phi(x)\to\phi(x')=\phi(x+a)$ および Lorentz 変換 $\phi(x)\to\phi(x')=\phi(\Lambda^{-1}x)$ に対して不変であることを示せ。

(ii) (i) の対称性に対するネーターカレント及びネーターチャージを構成し、場の運動方程式を用いてチャージの保存を確認せよ。(ネーターチャージは全部で 10 個あるはず。そのうちの一つはハミルトニアン $P^0=H$ になります。)

(iii) 場の同時刻交換関係を用いて、(ii) で求めたチャージと $\phi(x)$ の交換関係（例えば $[P^0,\phi(x)]$）を求めよ。(これらのチャージ演算子が対応する変換の生成子となっていることを確認せよ。)

(iv) (ii) で求めたチャージの間の交換関係を求め、それらが閉じている（チャージどうしの交換関係の右辺がチャージの線形結合で書けること）を示せ。

[c-7] **(Poincaré symmetry)** Consider a Lagrangian of a real scalar field, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{24}\lambda\phi^4$.

(i) Show that the action $S=\int d^4x\mathcal{L}$ is invariant under the space-time translation $\phi(x)\to\phi(x')=\phi(x+a)$ as well as the Lorentz transformation $\phi(x)\to\phi(x')=\phi(\Lambda^{-1}x)$.

(ii) Construct the Noether currents and the Noether charges corresponding to the symmetries in (i), and show that the charges are conserved under the equation of motion. (There are 10 Noether charges. One of them is the Hamiltonian $P^0 = H$.)

(iii) Compute the commutation relations between the charges obtained in (ii) and $\phi(x)$ (for instance, $[P^0, \phi(x)]$), by using the equal-time commutation relation of the field. (Check that the charge operators are the generators of the corresponding transformations.)

(iv) Compute the commutation relations among the charges obtained in (ii), and show that they are closed (the right-hand sides of the commutation relations between the charges can be written as linear combinations of the charges.)

[c-8] 同じ質量 m を持った N 個の複素スカラー場からなるラグランジアン

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i^* - m^2 \sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 \right)^2$$ を考える。

(i) この模型が SU(N) 対称性を持っていることを示せ。

(ii) (i) の対称性に対するネーターカレント及びネーターチャージを構成し、場の運動方程式を用いてチャージの保存を確認せよ。

(iii) 場の同時刻交換関係を用いて、(ii) で求めたチャージと $\phi(x)$ の交換関係を求めよ。（これらのチャージ演算子が対応する変換の生成子となっていることを確認せよ。）

(iv) (ii) で求めたチャージの間の交換関係を求め、SU(N) の Lie 代数と同じ交換関係になっていることを示せ。

[c-8] Consider a Lagrangian with N complex scalar fields with the same mass m,

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i^* - m^2 \sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} |\phi_i|^2 \right)^2 .$$

(i) Show that this model has an SU(N) symmetry.

(ii) Construct the Noether currents and the Noether charges corresponding to the symmetries in (i), and show that the charges are conserved under the equation of motion.

(iii) Compute the commutation relations between the charges obtained in (ii) and $\phi(x)$, by using the equal-time commutation relation of the field. (Check that the charge operators are the generators of the corresponding transformations.)

(iv) Compute the commutation relations among the charges obtained in (ii), and show that they are the same as those in the SU(N) Lie algebra.

[c-9] 超対称なラグランジアンの例を一つ挙げ、場の超対称変換を定義し、ラグランジアンが (全微分項を除いて) 超対称変換に対して不変であることを示せ。

[c-9] Give an example of supersymmetric Lagrangian, define supersymmetric transformations of the fields, and show that the Lagrangian is invariant under the supersymmetric transformations (up to a total derivative).

問題 [d] ／ Problems [d]

[d-1] 場の量子論における経路積分についてスカラー場の場合を例に説明し、講義で行った演算子形式（相互作用場や Wick の定理を用いた方法）と同じ結果が得られることを示せ。

[d-1] Explain the Path Integral in Quantum Field Theory in the case of scalar field, and show that it will lead to the same result as the operator formalism used in the lecture (the formalism which uses the interaction picture field, the Wick's theorem, etc).

[d-2] 自由 Dirac 場のラグランジアン $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ を考える。このラグランジアンが拘束系であることに注意して、Dirac かっこを用いて、Dirac 場を量子化せよ。

[d-2] Consider the Lagrangian of the free Dirac field, $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$. Quantize the Dirac field, paying attention to the fact that it is a constrained system, and using the Dirac brackets.

[d-3] ゲージ場の量子化について説明せよ。（演算子形式でも経路積分形式でも（その両方でも）良いです。 Abelian でも non-Abelian でも良いです。）

[d-3] Explain the quantization of the gauge field. (It can be either in the operator formalism or in the path integral formalism (or both). It can be either for Abelian or non-Abelian gauge theory.)

[d-4] (共形対称性)

(i) [c-7] を解け。

(ii) [c-7] のラグランジアンにおいて質量がゼロ（$m = 0$）である場合を考える。このとき、作用 $S = \int d^4x\mathcal{L}$ がスケール変換 (dilatation) $\phi(x) \to \phi'(x) = e^\alpha \phi(e^\alpha x)$ に対しても不変であることを示せ。（α は実数。）

(iii) (ii) の対称性に対するネーターカレント及びネーターチャージを構成し、チャージの保存を確認せよ。

(iv) (iii) で求めたチャージと、[c-7] で求めたチャージとの間の交換関係を求めよ。

(v) (iv) の交換関係は閉じない。実は [c-7] のラグランジアンは $m = 0$ のとき、ポアンカレ対称性とスケール変換不変性だけでなく、さらに広い対称性を持つ (共形対称性)。1) 共形対称性の場の変換を書き、2) 作用が不変であることを確認し、3) ネーターカレントを構成してその保存を確認し、4) チャージ演算子と $\phi(x)$ の交換関係を計算して変換の生成子になっていることを確認し、5) チャージ演算子の交換関係が閉じていることを示せ。

[d-4] **(conformal symmetry)**

(i) Solve [c-7].

(ii) Consider the massless case ($m = 0$) for the Lagrangian. In this case, show that the action $S = \int d^4x\mathcal{L}$ is also invariant under the scale transformation (dilatation) $\phi(x) \to \phi'(x) = e^\alpha \phi(e^\alpha x)$. ($\alpha$ is a real number.)

(iii) Construct the Noether current and the Noether charge corresponding to the symmetry in (i), and show that the charge is conserved.

(iv) Compute the commutation relations between the charges obtained in (iii) and the charges obtained in [c-7].

(v) The set of commutation relations in (iv) is not closed. In fact, the Lagrangian in [c-7] with $m = 0$ has not only the Poincaré symmetry and the dilatation invariance, but a larger set of symmetries (conformal symmetry). 1) Write down the field transformations of the conformal symmetry, 2) show that the action is invariant under those transformations, 3) construct the Noether currents and check their conservation, 4) compute the commutation relations between the charge operators and $\phi(x)$, and check that they are the generators of the transformations, 5) and show that the set of commutation relations among the charge operators is closed.

[d-5] 電子の異常磁気モーメントを 1 ループで計算せよ。（QED のファインマンルールは既知として用いて良い。）

[d-5] Compute the anomalous magnetic moment of the electron at the 1-loop level. (You can use the Feynman rules of the QED.)