## 2017 年度夏学期　場の量子論 I（浜口）レポート: 6/5(月) 出題

### 2017 S-semester, Quantum Field Theory I (Hamaguchi), homework (report) problems (June 5).

- 締切：
  **[問題 A] の締切:**　2017 年 6 月 26 日 (月)
  **[問題 B] の締切:**　2017 年 7 月 31 日 (月)
- 提出先：
  物理教務（理学部 1 号館 208 号室）レポートボックス
  または email で hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp まで
  （email の場合は、3 日以内に受領確認の返信がなければ再度連絡下さい。）
- **レポートには講義名 (場の量子論 I)、氏名、学籍番号を明記し提出する事。**
- レポートは返却しないので、必要があれば自分でコピーをとっておいて下さい。
- 成績は、このレポートと期末試験（7/24(月)）を総合して評価します。[a]
- 問い合わせ先：hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp

[a] レポートを 2 回出すかもと言っていましたが、1 つにまとめてしまったので、今回分で全てです。

- Deadline：
  **Deadline for [Problem A]:**　2017 June 26 (Mon.)
  **Deadline for [Problem B]:**　2017 July 31 (Mon.)
- Submission:
  Report Box at the Physics Academic Affairs Office
  (Faculty of science bldg. 1, room 208)
  **or** email: hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp
  (If you submit via an email and do not receive a confirmation email within three days, please contact me again.)
- **Please write the course name (QFT I), your name, and you student ID at the beginning of your report.**
- Reports are not returned. Keep a copy for yourself, if necessary.
- Grades are given based on this homework (report) problem and the exam (on July 24).[a]
- Contact: hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp

[a] Though I said that I may give homework problems twice, I combined them into this one set, so this is all.

## [問題 A] (締切 6 月 26 日 (月))

A-1. $E_p\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})$ が Lorentz 不変であることを、$z$ 方向の boost

$$\begin{pmatrix} p_3 \\ E_p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p_3' \\ E_p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ E_p \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$$

を例に確認せよ。

A-2. $\vec{p}_A /\!\!/ \vec{p}_B$ のときに $\sqrt{(p_A\cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2} = E_A E_B v_{\mathrm{rel}}$ となることを示せ。ただし $p_X = (E_X, \vec{p}_X)$, $E_X = \sqrt{|\vec{p}_X|^2 + m_X^2}$ $(X = A, B)$, $v_{\mathrm{rel}} = |\vec{p}_A/E_A - \vec{p}_B/E_B|$ である。

A-3. 自由場について、$a(\vec{p})$, $a^\dagger(\vec{p})$ の交換関係を未知としたとき、これらを $\phi(x)$, $\dot{\phi}(x)$ の交換関係から導くことを考える。

講義では、

$$\phi(x) = \phi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} \left( a(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{ip\cdot x} \right),$$
$$p\cdot x = p^0 t - \vec{p}\cdot\vec{x}, \quad p^0 = E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2},$$

から

$$a(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{ip\cdot x} \left( E_p\phi(x) + i\dot{\phi}(x) \right)$$
$$a^\dagger(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{-ip\cdot x} \left( E_p\phi(x) - i\dot{\phi}(x) \right) \qquad \text{——————(1)}$$

が導けることを示した。(§1.4.1 の Problem(a).) この続きを考えよう。

(i) 自由場の運動方程式を用いて

$$\int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \left( \ddot{\phi}(x) + E_q^2\phi(x) \right) = 0 \qquad \text{——————(2)}$$

を示せ。

(ii) (2) を用いて、(1) の各右辺が時間 $t$ に依存しないことを確認せよ。

(iii) (1) と、$\phi(x)$, $\dot{\phi}(x)$ の同時刻交換関係を用いて

$$\begin{cases} [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}), \\ [a(\vec{p}), a(\vec{q})] = 0, \\ [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = 0 \end{cases}$$

を示せ。

(iv) (1)(2) と Heisenberg 方程式 $[H,\phi(x)] = -i\dot{\phi}(x)$, $[H,\dot{\phi}(x)] = -i\ddot{\phi}(x)$ を用いて

$$\begin{cases} [H, a^\dagger(\vec{q})] = E_p a^\dagger(\vec{q}), \\ [H, a(\vec{q})] = -E_p a(\vec{q}) \end{cases}$$

を示せ。

## [Problem A] (Deadline: June 26 (Mon.))

A-1. Show that $E_p\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})$ is Lorentz invariant, in the case of a boost along the $z$-direction;

$$\begin{pmatrix} p_3 \\ E_p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p_3' \\ E_p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ E_p \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}.$$

A-2. Show that $\sqrt{(p_A\cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2} = E_A E_B v_{\mathrm{rel}}$ for $\vec{p}_A /\!/ \vec{p}_B$, where $p_X = (E_X, \vec{p}_X)$ and $E_X = \sqrt{|\vec{p}_X|^2 + m_X^2}$ $(X = A, B)$, and $v_{\mathrm{rel}} = |\vec{p}_A/E_A - \vec{p}_B/E_B|$.

A-3. Consider a free field theory. Suppose that we do not know the commutation relations of $a(\vec{p})$ and $a^\dagger(\vec{p})$, and let us consider deriving them from the commutation relations of $\phi(x)$ and $\dot{\phi}(x)$.

In the lecture, we have shown that, starting from

$$\phi(x) = \phi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} \left(a(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{ip\cdot x}\right),$$
$$p\cdot x = p^0 t - \vec{p}\cdot\vec{x}, \quad p^0 = E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2+m^2},$$

we can derive

$$a(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{ip\cdot x}\left(E_p\phi(x) + i\dot{\phi}(x)\right)$$
$$a^\dagger(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \int d^3x e^{-ip\cdot x}\left(E_p\phi(x) - i\dot{\phi}(x)\right) \qquad \text{———} (1)$$

(Problem(a) of §1.4.1.) Let us continue from here.

(i) Show

$$\int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\left(\ddot{\phi}(x) + E_q^2\phi(x)\right) = 0 \qquad \text{———} (2)$$

by using the equation of motion of the free field.

(ii) Show that the right-hand sides of equations (1) do not depend on time $t$, by using (2).

(iii) Show

$$\begin{cases} [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}), \\ [a(\vec{p}), a(\vec{q})] = 0, \\ [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = 0 \end{cases}$$

by using (1) and the equal-time commutation relations of $\phi(x)$ and $\dot{\phi}(x)$.

(iv) Show

$$\begin{cases} [H, a^\dagger(\vec{q})] = E_p a^\dagger(\vec{q}), \\ [H, a(\vec{q})] = -E_p a(\vec{q}) \end{cases}$$

by using (1),(2), and the Heisenberg equations $[H,\phi(x)] = -i\dot{\phi}(x)$, $[H,\dot{\phi}(x)] = -i\ddot{\phi}(x)$.

## [問題 B] (締切 7 月 31 日 (月))

以下 3 つの問題のうち **1 つ以上**に答えて提出せよ。
参考文献があれば明記すること。単なる引用ではなく、自分の言葉でまとめること。

B-1. 量子力学における経路積分について説明せよ。

B-2. 場の量子論における経路積分についてスカラー場の場合を例に説明し、講義で行った演算子形式（相互作用場や Wick の定理を用いた方法）と同じ結果が得られることを示せ。

B-3. 場の量子論を学ぶ中で分からなかった点を 1 つ (以上) 挙げ、それについて教科書や文献を調べ、分かったことをまとめよ。

---

## [Problem B] (Deadline: July 31 (Mon.))

Answer and submit **one or more** of the following three problems. Write the references, if any. Summarize the report in your own words, not just extracting/excerpting from references.

B-1. Explain the Path Integral in Quantum Mechanics.

B-2. Explain the Path Integral in Quantum Field Theory in the case of scalar field, and show that it will lead to the same result as the operator formalism used in the lecture (the formalism which uses the interaction picture field, the Wick's theorem, etc).

B-3. Write one (or more) point which you do not understand during learning the quantum field theory. Check the textbooks and/or other literature about it, and summarize what you have learned.