2017 年度夏学期　場の量子論 I（浜口）期末試験

2017 S-semester, Quantum Field Theory I (Hamaguchi), End-term exam.

講義ノートや教科書など見ても結構です。解答用紙に名前と学籍番号を書く事。計算用紙は提出不要です。
You can look at the lecture note, textbooks, etc. **Write your name and student id number on the answer sheet.**
You do not need to submit calculation sheets.

講義中で導いた結果は全て再導出なしで用いて良い。
You may use any results derived in class, without re-deriving them.

以下、$x = (x^0, \mathbf{x})$ および $p = (p^0, \mathbf{p})$ は 4 元ベクトルを表し、$p \cdot x = p^0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ とする。
In the following, $x = (x^0, \mathbf{x})$ and $p = (p^0, \mathbf{p})$ represent four-vectors, and $p \cdot x$ denotes $p \cdot x = p^0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$.

[1] 自由スカラー場について $\phi(x)$ について、Lagrangian 密度が次のように与えられているとする。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

Consider a free real scalar field $\phi(x)$, which has the above Lagrangian density.

[1-1] $\phi(x)$ を生成・消滅演算子 $a(\mathbf{p})$, $a^\dagger(\mathbf{p})$ を用いて表せ。
Express $\phi(x)$ in terms of the creation/annihilation operators $a(\mathbf{p})$ and $a^\dagger(\mathbf{p})$.

[1-2] 一般に同時刻でないとき（$x^0 \neq y^0$）の ϕ とその時間微分の交換関係 $[\phi(x), \dot{\phi}(y)]$ を求めよ。（積分を用いて表してよい。）
Compute the commutation relation between ϕ and its time derivative, $[\phi(x), \dot{\phi}(y)]$, for *not* equal time ($x^0 \neq y^0$). (Use an integral to express your answer, if necessary.)

[1-3] [1-2] で求めた $[\phi(x), \dot{\phi}(y)]$ で $x^0 = y^0$ とした時、ϕ と $\dot{\phi}$ の同時刻交換関係を再現することを確かめよ。
Take $x^0 = y^0$ in the $[\phi(x), \dot{\phi}(y)]$ obtained in [1-2], and show that it reproduces the equal-time commutation relation of ϕ and $\dot{\phi}$.

[2] 以下のように 2 つの実スカラー場 φ と χ からなるラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} M^2 \varphi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m^2 \chi^2 - \frac{f}{2}\varphi \chi^2 - \frac{1}{24}\lambda \chi^4.$$

ただし f と λ は正の実数であり、それぞれ質量次元 1 と 0 を持った結合定数である。
Consider the above Lagrangian with two real scalar fields ϕ and χ. Here, f and λ are real positive coupling constants with mass dimensions one and zero, respectively.

[2-1] 相互作用表示場 $\varphi_I(x)$ と $\chi_I(x)$ を定義し、Heisenberg 場 $\varphi(x)$, $\chi(x)$ との違いを説明せよ。
Define the interaction picture fields $\varphi_I(x)$ and $\chi_I(x)$, and explain the difference from the Heisenberg field $\varphi(x)$ and $\chi(x)$.

[2-2] $\varphi(x)$ を $\varphi_I(x)$ および

$$H_I(t) = \int d^3x \frac{f}{2} \varphi_I(t, \mathbf{x}) \chi_I(t, \mathbf{x})^2$$

を用いて表せ。またその結果を f の 1 次まで展開せよ。
Express $\varphi(x)$ in terms of $\varphi_I(x)$ and the above $H_I(t)$. And expand it in powers of f, up to order f.
(試験後追加コメント：すみません。ここで $\lambda \to 0$ として λ を無視するか、あるいは $H_I(t)$ に $\lambda\chi^4$ 項を加えておくべきでした。／Note added after the exam: I am sorry, I should have taken $\lambda \to 0$ here, or included $\lambda\chi^4$ term in $H_I(t)$.)
（裏面に続く／please turn over）

[2-3] 以下、2 体散乱 $\varphi\varphi \to \chi\chi$ を考えたい。まず Heisenberg 場の 4 点相関関数 $\langle 0|\mathrm{T}\Big(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\chi(x_3)\chi(x_4)\Big)|0\rangle$ を $\varphi_I(x)$、$\chi_I(x)$ および上記の $H_I(t)$ を用いて表せ。

Let us consider the 2-body scattering $\varphi\varphi \to \chi\chi$. First, express the four-point correlation function among Heisenberg fields, $\langle 0|\mathrm{T}\Big(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\chi(x_3)\chi(x_4)\Big)|0\rangle$ in terms of $\varphi_I(x)$, $\chi_I(x)$ and the above $H_I(t)$.

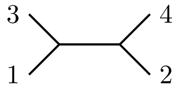
(同じく、$\lambda \to 0$ とするか、$H_I(t)$ に $\lambda\chi^4$ 項を加えておくべきでした。／Similarly, I should have taken $\lambda \to 0$ here, or included $\lambda\chi^4$ term in $H_I(t)$.)

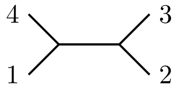
[2-4] [2-3] の結果を結合定数 f で展開することを考える。f の 0 次の項は散乱に寄与しない。

Let us expand the result of [2-3] in powers of f. The $\mathcal{O}(f^0)$ term does not contribute.

(a) f の 1 次の項がないことを示せ。

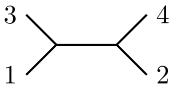
Show that the $\mathcal{O}(f^1)$ term vanishes.

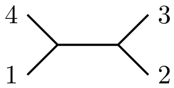
(b) f の 2 次の項はたくさんあるが、そのうち散乱に寄与するのは 

, 

の 2 つの connected diagram に相当する項だけである。これらの寄与について以下の Feynman propagator を用いて表せ。

$$D_F(x-y;m) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}\,, \quad D_F(x-y;M) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-M^2+i\epsilon}e^{-ip\cdot(x-y)}$$

There are many $\mathcal{O}(f^2)$ terms, but only those terms corresponding to the two connected diagrams, 

, 

, contribute to the scattering. Express these contributions in terms of above Feynman propagators.

[2-5] [2-4] の結果に LSZ reduction formula を適用して 2 体散乱 $\varphi\varphi \to \chi\chi$ の S 行列 $\langle\chi(p_3)\chi(p_4);\mathrm{out}|\varphi(p_1)\varphi(p_2);\mathrm{in}\rangle$ および散乱振幅 $\mathcal{M}\Big(\varphi(p_1)\varphi(p_2) \to \chi(p_3)\chi(p_4)\Big)$ を求めよ。

Apply the LSZ reduction formula to the result of [2-4], and compute the S-matrix $\langle\chi(p_3)\chi(p_4);\mathrm{out}|\varphi(p_1)\varphi(p_2);\mathrm{in}\rangle$ and the scattering amplitude $\mathcal{M}\Big(\varphi(p_1)\varphi(p_2) \to \chi(p_3)\chi(p_4)\Big)$.

[3] 講義ではローレンツ群を SU(2)×SU(2) に分解し、その $(1/2,0)$ 表現や $(0,1/2)$ 表現が 2 成分スピノルとなることを示した。例えば $(0,1/2)$ 表現に対して、z 軸回りの回転と z 軸方向の boost はそれぞれ表現行列

$$D(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\theta_3/2} & \\ & e^{-i\theta_3/2}\end{pmatrix}, \quad D(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{-\eta_3/2} & \\ & e^{\eta_3/2}\end{pmatrix},$$

で表されていた。では $(0,1)$ 表現は何成分の場で表されるかを答えよ。またその z 軸回りの回転と z 軸方向の boost に対する表現行列を求めよ。

In the lecture, we have decomposed the Lorentz group to SU(2)×SU(2), and shown that its $(1/2,0)$ and $(0,1/2)$ representations are given by 2-component spinors. For instance, for $(0,1/2)$ representation, the rotation around the z-axis and the boost in the z-directions are represented by the above two matrices, respectively. Then, how many components does the $(0,1)$ representations have? Answer it. In addition, compute its representation matrices for the rotation around the z-axis and the boost in the z-directions.

[4] 講義では、$D_R(\Lambda) = \exp(i\theta_k\sigma_k/2 + \eta_k\sigma_k/2)$, $\Lambda^\mu{}_\nu = \exp(i\theta_i J_i + i\eta_i K_i)$, に対して $D_R^\dagger(\Lambda)\sigma^\mu D_R(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu$ となることを $\theta_k, \eta_k \ll 1$ に対して示した。($(J_i)^\mu{}_\nu, (K_i)^\mu{}_\nu$ の定義は講義ノートを見よ。) $D_R^\dagger(\Lambda)\sigma^\mu D_R(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu$ が微小でない θ_k, η_k に対して成立することを、(i) $\theta_3 \neq 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \eta_k = 0$、(ii) $\eta_3 \neq 0$, $\eta_1 = \eta_2 = \theta_k = 0$ の場合について示せ。(余裕があれば一般の θ_k, η_k の場合についても考えてみよ。)

In the lecture, we have shown that $D_R^\dagger(\Lambda)\sigma^\mu D_R(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu$ is satisfied for $\theta_k, \eta_k \ll 1$, where $D_R(\Lambda) = \exp(i\theta_k\sigma_k/2 + \eta_k\sigma_k/2)$ and $\Lambda^\mu{}_\nu = \exp(i\theta_i J_i + i\eta_i K_i)$. (For the definitions of $(J_i)^\mu{}_\nu, (K_i)^\mu{}_\nu$, see the lecture note.) Show that $D_R^\dagger(\Lambda)\sigma^\mu D_R(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu$ is satisfied for not infinitesimal θ_k, η_k, in the cases of (i) $\theta_3 \neq 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \eta_k = 0$ and (ii) $\eta_3 \neq 0$, $\eta_1 = \eta_2 = \theta_k = 0$. (If you have time, consider also the case of generic θ_k and η_k.)