2020 年度秋学期　物理数学 I

浜口幸一

最終更新日：2022 年 11 月 2 日

目次

§ 0 この講義について 1
0.1 担当教員の自己紹介 1
0.2 講義の内容とスケジュール 1
0.3 成績 1
0.4 講義のウェブページと ITC-LMS について 1
0.5 参考文献 2

§ 1 複素関数論 3
1.1 この章の目標 3
1.2 準備 4
1.2.1 複素数 4
1.2.2 偏微分 6
1.2.3 (実変数関数の) テイラー展開 7
1.3 複素関数とその微分、正則関数 8
1.3.1 複素関数 8
1.3.2 複素関数は平面から平面への写像 9
1.3.3 複素微分と正則関数 12
1.3.4 正則関数の一般的性質（予告編） 17
1.3.5 正則関数の例 19
1.3.6 複素級数とその収束 21
1.4 複素積分 26
1.4.1 複素線積分の定義と例 26
1.4.2 コーシーの積分定理 31
1.4.3 コーシーの積分公式と、無限回微分可能性 36
1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理 42
1.5.1 テイラー展開 42
1.5.2 ローラン展開と留数 47
1.5.3 留数定理 52
1.5.4 実数積分への応用 54
1.5.5 特異点について 67

1.6 一致の定理と解析接続 69
1.6.1 一致の定理と解析接続 69
1.6.2 多価関数とリーマン面 74
1.7 発展的話題：部分分数展開、Γ、B、ζ、など 81
1.7.1 部分分数展開 (と無限積) 81
1.7.2 Γ(ガンマ) 関数 84
1.7.3 B(ベータ) 関数 87
1.7.4 ζ(ゼータ) 関数 88

§ 2 常微分方程式 89
2.1 はじめに 89
2.2 定義と分類 89
2.3 一階微分方程式の解法の例 91
2.3.1 変数分離形 91
2.3.2 同次形 91
2.3.3 完全形／全微分方程式 92
2.3.4 一階線形微分方程式 93
2.4 線形微分方程式 94
2.4.1 解の線型性 94
2.4.2 ロンスキアン 95
2.4.3 べき級数展開による 2 階斉次微分方程式の解法 97

§ 0　この講義について

0.1　担当教員の自己紹介

- 浜口幸一 （漢字は「浜」でも「濱」でもどちらでも良いです。）
- 専門は素粒子論（＋初期宇宙論）です。
- ウェブページはこちら。

0.2　講義の内容とスケジュール

- $\underbrace{\text{§ 1 章「複素関数論」}}_{\text{80〜90\% くらい}}+\underbrace{\text{§ 2 章「常微分方程式」}}_{\text{10〜20\% くらい}}$
- 毎週木曜 2 限 +3 限、10/1〜11/12 の 7 週、計 14 コマです。
- 講義の前後 10 分くらい、質問用に Zoom を開けておこうと思います。

10:15〜	10:25〜11:55	〜12:05	13:05〜	13:15〜14:45	〜14:55
(質問用)	講義	(質問用)	(質問用)	講義	(質問用)

特に質問がなくても、お昼休憩に遊びに来て下さるのも歓迎します。
もちろん講義中も、質問があればいつでもどうぞ。（マイクオン or チャット or 手を挙げて。）

0.3　成績

レポートで評価します。詳しくは**こちらの pdf ファイル**を見て下さい。
（同じファイルは ITC-LMS またはウェブページからもダウンロードできます。）
[pdf を画面共有して説明する。]
出席はとりませんので、講義ノートを見てレポートを提出するだけでも結構です。
[講義の録画については...]　(→ ITC-LMS にアップすることにしました。)

0.4　講義のウェブページと ITC-LMS について

- 講義のウェブページはこちら。 (「浜口幸一」で検索 → 講義のページ → 物理数学 I.)
- お知らせがある場合は、ウェブページと ITC-LMS の両方でアナウンスします。（どちらか片方だけ見ていれば大丈夫なはず。）

- ITC-LMS には以下の欄もありますので、ご利用下さい。
  - 「担当教員へのメッセージ」: 質問やコメントにどうぞ。
  - 「アンケート → 匿名での質問やメッセージ」: 匿名が良い場合はこちら。
  - 「掲示板」: 学生さんどうしの連絡や、講義に関する疑問・情報共有などに。

0.5 参考文献

特定の教科書・参考書はありませんが、講義ノートを作る際に参考にした文献をいくつかあげておきます。

- 松尾先生の講義ノート
- 「物理数学 I」福山秀敏・小形正男、朝倉書店
- 「物理のための数学入門　複素関数論」有馬朗人・神部勉、共立出版
- 「自然科学者のための数学概論」寺沢貫一、岩波書店
- 「複素関数論の基礎」山本直樹、裳華房
- 名古屋大学吉田伸生先生の講義ノート
- EMAN の物理数学

後でまた追加するかもしれません。

[ここでいったん質問を受け付けて（マイクオン or チャット or 手を挙げて）1 分くらい待つ。]
[字の大きさや声について Zoom アンケートもやってみるか？ノートの縦横も聞いてみるか。]

§ 1　複素関数論

1.1　この章の目標

目標：正則関数の特別な性質たちを理解すること。

まず 1.3 節で複素関数の微分を考える。

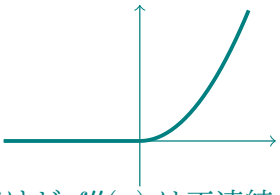
$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (z, \Delta z \text{ は複素数}). \tag{1}$$

この極限が一意に決まるとき、$f(z)$ は点 z で「複素微分可能」あるいは「正則」と言う。このたった 1 つの条件「微分可能性」=「正則性」を要求しただけで、複素関数 $f(z)$ に対して多くの特別な性質が導かれる。例えば・・・

- ▶（1 回微分可能を要求しただけなのに）無限回微分可能。　→ 1.4 節　(修正)

  実変数関数だと・・・例えば関数

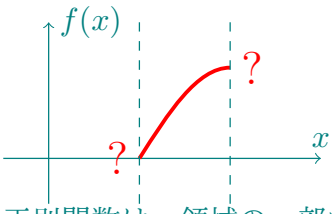
  $$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$$

  は、$x = 0$ で $f'(x)$ は連続だけど $f''(x)$ は不連続。

  複素関数は 1 階微分可能なら無限回微分可能。
- ▶ 複素平面の一部で定義したら拡張が一意に決まる（解析接続）。 (修正)　→ 1.6 節

  実変数関数だと、ある領域で関数を定義して微分可能性を要求しても

  領域外の関数形は決まらない。

  正則関数は、領域の一部で定義したら拡張が一意に決まる。
- ▶ 正則な領域で周回積分したら必ずゼロになる（コーシーの積分定理）　→ 1.4 節
- ▶ 部分的に正則でない領域があっても、周回積分の値が一部の点の情報だけで決まる（留数定理）　→ 1.5 節
- ▶ 他にも色々あります。（一部はレポート問題で出題予定。）

[講義終了後に、正則関数のこれらの性質がだいたい頭に残ってくれれば、担当教員としては目標達成です！]

1.2 準備

まずは簡単な復習から始めます。のんびり聞いていて下さい。

1.2.1 複素数

- 複素数とは、2 つの実数 x, y と虚数単位 i（$i^2 = -1$）を用いて

$$z = x + iy \tag{2}$$

のように表される数のことである。

- 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ と書く。実数の集合 $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ に含まれる（$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$）。
- 複素数 $z = x + iy$ に対して、以下の記号・用語を定義する。 ($|z|^2 \to |z|$ 修正、10/1)

$$z \text{ の実部} : \mathrm{Re}(z) = x \tag{3}$$
$$z \text{ の虚部} : \mathrm{Im}(z) = y \tag{4}$$
$$z \text{ 共役} : \overline{z} = x - iy \tag{5}$$
$$z \text{ の絶対値} : |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

- 複素数 $z_1 = x_1 + iy_1$ と $z_2 = x_2 + iy_2$ に対して、四則演算は

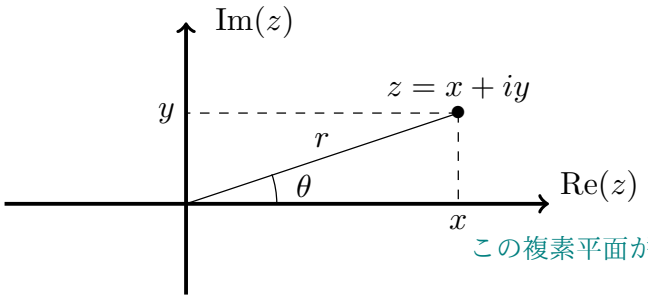
$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \tag{7}$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{8}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \quad \text{for} \quad z \neq 0. \tag{9}$$

- 複素数 $z = x + iy$ は実数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と θ ($\cos\theta = x/r$, $\sin\theta = y/r$) を用いて

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta \tag{10}$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{11}$$

とも書ける（極形式）。 (θ の定義を arctan から修正, 10/1)

- <u>複素平面</u>　複素数は複素平面上の点で表される。



この複素平面が、今後この講義で何度も出てきます。

▶ さてこの辺りで、簡単なレポート問題を 1 つ出しておこうと思います。

レポート問題

[b-1] 以下を示せ。

(i) $z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$|z|^2 = z\overline{z}, \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i},$$
$$\overline{1/z} = 1/\overline{z}, \quad |1/z| = 1/|z|. \tag{12}$$

(ii) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して、 ($\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ 修正, 10/1)

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad |zw| = |z||w|,$$
$$|z+w| \le |z| + |w|. \tag{13}$$

(iii) $z_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)$ $(j = 1, 2)$ に対して

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right). \tag{14}$$

▶ オイラーの公式について

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{15}$$

ほとんどの人が見たことがあると思います。

この式は、状況証拠

- 左辺の指数関数から (形式的に) 導かれる式 $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ と右辺の累乗 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$（ド・モアブルの公式）が、無矛盾。
- 左辺を (形式的に) 微分した式 $(d/d\theta)e^{i\theta} = ie^{i\theta}$ が、右辺の微分 $(d/d\theta)$[右辺] $= i$[右辺] と無矛盾。
- 両辺に $\theta = 0$ を代入した値 $(= 1)$ が一致。

などから、正しそう。しかし良く考えると・・・

- 左辺では勝手に指数関数 e^x の指数を $x \to i\theta$ と拡張したけどいいのか？
- するとさらに拡張して、一般の $z \in \mathbb{C}$ に対して $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ と言えるのか？ ($e^z \to e^{iz}$ 修正、10/1)
- すると $\cos z$ とか $\sin z$ というのは何者だ？ $z \in \mathbb{C}$ でどう定義する？？

これらの疑問は後で回収する。（正則関数の例 1.3.5, 解析接続 1.6.）

[この辺でまた質問を受け付けて（手を挙げるかチャット欄）1 分くらい待ってみようかな。]

1.2.2 偏微分

複素関数は 2 変数関数なので、偏微分が出てくる。

- 実 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して、点 (x,y) で極限

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \tag{16}$$

が (Δx の符号によらず) に有限な一定値をとるとき、これを「$f(x,y)$ の点 (x,y) における x に関する偏微分 (係数)」という。省略して $f_x(x,y)$ や $\partial_x f(x,y)$ と書くこともある。

- y に関する偏微分も同様で

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \partial_y f(x,y) = f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to \pm 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}. \tag{17}$$

- また 1 つレポート問題を出しておきます。

レポート問題

[b-2] 実 2 変数関数 $f(x,y)$ を考える。点 (x,y) において
2 階の偏微分 $f_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ および $f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ が存在し、
これらが連続であるとき、$f_{xy} = f_{yx}$ であることを示せ。
(平均値の定理を既知として良い。)

(※) 偏微分における注意：微分していない変数（固定している変数）が何かも指定しないといけない。例えば $f(x,y) = x^2 y$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xy, \tag{18}$$

だが、ここから例えば変数を $(x,y) \to (x, s = xy)$ と変換すると、$y = s/x$ だから $f(x,y) = xs$。これを同じ記号 f を用いて $f(x,s)$ と書いてしまうと (同じ記号を用いてしまうのが混乱のもとなのですが、、、下記参照)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,s) = s = xy. \tag{19}$$

なので、$f_x = \partial_x f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ と書いたときに、x 以外の変数として何を固定しているかを指定しないと、答が変わってしまう。$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_y$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_s$ と書いたりする。(熱力学とか混乱しやすいですよね・・・。混乱を避けるには、変数変換するたびに関数の表記を $f \to \tilde{f}$

などと変更すれば良いのですが、物理では関数が物理量を表すことが多いので、あまり変更したくないという事情もあります。)

1.2.3 (実変数関数の) テイラー展開

- 実変数関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で n 回微分可能であるとき、その k 階微分 $f^{(k)}(a)$ $(k = 1, \cdots n)$ を用いて

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x), \tag{20}$$

と表すことができる。剰余項 $R_n(x)$ は $f(x)$ と多項式関数の誤差を表し、$x \to a$ で $(x-a)^n$ より速く 0 に近づく（テイラーの定理)。

レポート問題

[b-3] テイラーの定理を示せ。

- $f(x)$ が点 $x = a$ で無限回微分可能で、かつ $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ のとき、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{21}$$

と書ける（テイラー級数)。

- テイラー展開の例

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{22}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{23}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{24}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{25}$$

それぞれの級数がどの範囲で収束するか（収束半径）については、複素数に拡張して 1.3.6 節で議論する。 例えば最後の式は、左辺は $x \neq 1$ で定義されているけど、右辺は $|x| < 1$ でしか収束しない。

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.1 複素関数

- 例えば実変数関数 $f(x) = x^2$ というものがある。これを素直に複素数に拡張すると、

$$f(z) = z^2. \tag{26}$$

これに $z = x + iy$ を代入すると

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \tag{27}$$

したがって $f(z)$ は、複素数から複素数への写像となる。

- 一般に複素関数 $f(z)$ の実部と虚部を u, v と書くと、

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{28}$$

と書ける。上の $f(z) = z^2$ の例では、$u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

- いくつか例を挙げてみる。

$f(z)$	$\mathrm{Re}f = u(x, y)$,	$\mathrm{Im}f = v(x, y)$
z^2	$x^2 - y^2$	$2xy$
z^3	$x^3 - 3xy^2$	$3x^2y - y^3$
iz	$-y$	x
$2z + i\overline{z}$	$2x + y$	$x + 2y$
$(z + \overline{z})/2$	x	0
$\lvert z\rvert^2$	$x^2 + y^2$	0

(29)

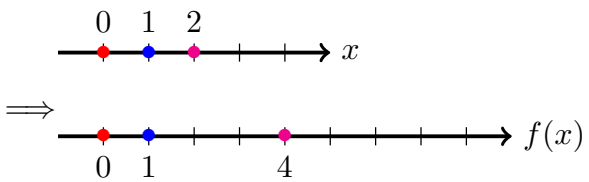
下の 3 つの例では、$f(z)$ が z だけでなく $\overline{z}$ にも独立に依存していると仮定している。$f(z, \overline{z})$ と書いてもよい。

- 一般に z と $\overline{z}$ を用いれば、任意の実 2 変数関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ を実部と虚部にもつような複素関数が作れる。

$$f(z) = u\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right). \tag{30}$$

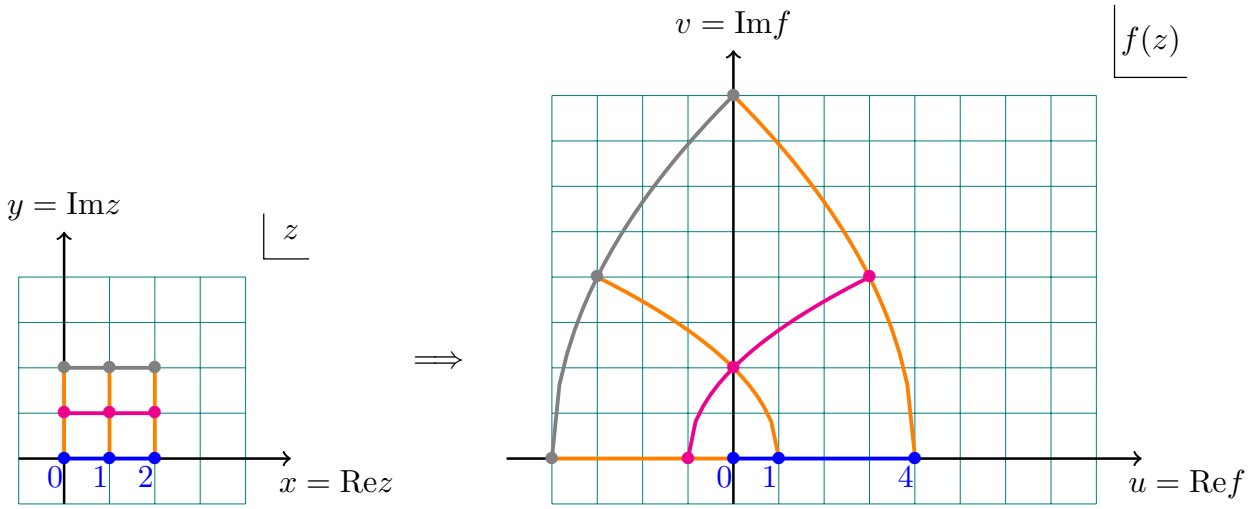
1.3.2　複素関数は平面から平面への写像

► 再び実変数関数 $f(x) = x^2$ を考える。これは実数から実数への写像。



► これを複素数に拡張した $f(z) = z^2$ は複素数から複素数への写像なので、「平面から平面への写像」になっている。これを見てみよう。 [ここは、リアルタイムでノートを取るのはしんどいかも？後で pdf の講義ノートを見てもらおう。]

$f(z) = z^2$.

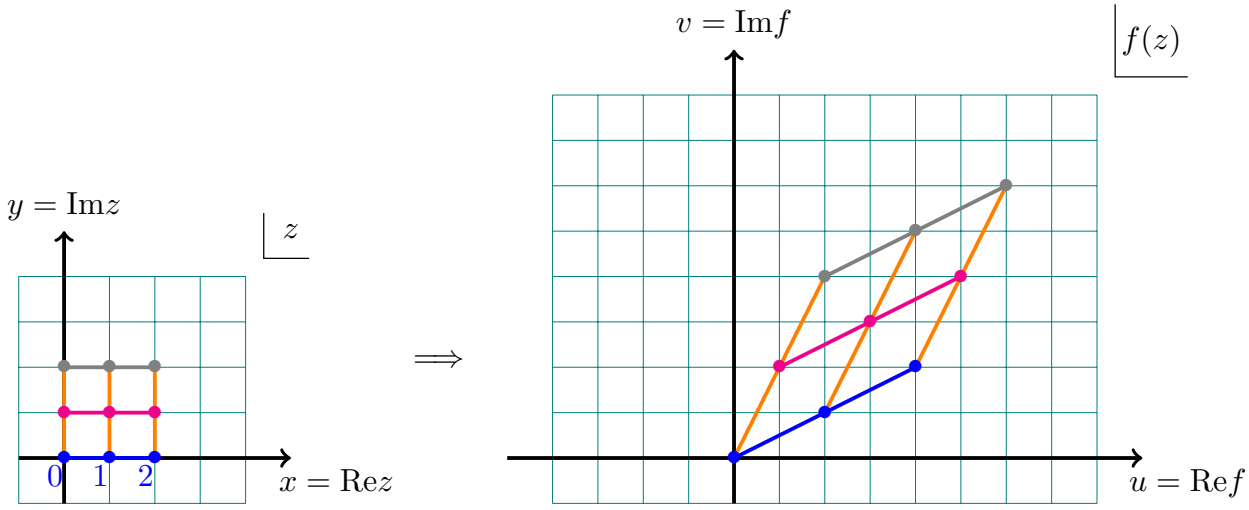


[講義は手描きで]

この例では、実は x-y 平面での格子が u-v 平面でも直交していることが分かる。

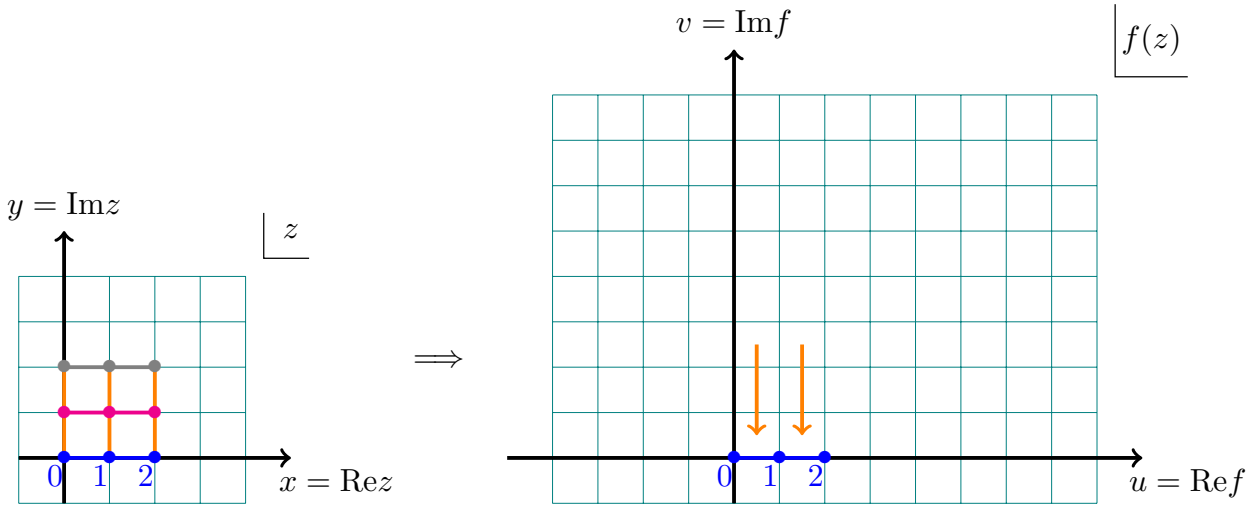
► $f(z,\overline{z})$ が $\overline{z}$ に依存する例でも見てみよう。

$$f(z) = 2z + i\overline{z} = (2x+y) + i(x+2y).$$



[講義は手描きで]

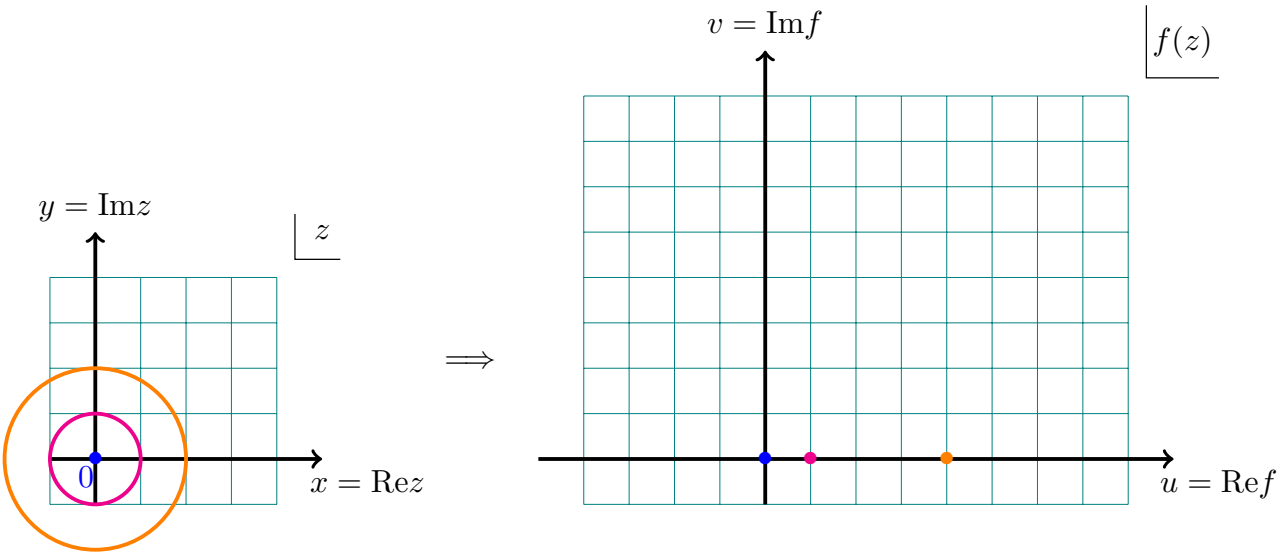
$$f(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} = x + i0.$$



[講義は手描きで]

実軸上につぶれてしまう。

$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2.$



[講義は手描きで]

実軸上 $(x \geq 0)$ につぶれてしまう。

レポート問題

[b-4] 上の $f(z) = z^2$ の例にならって、1 つ以上の正則関数（$\bar{z}$ を含まない z だけの関数。次節参照）について複素平面から複素平面への写像を図示せよ。手描きでも良いし、数値計算を用いても良い。x-y 平面での格子（$x =$ 一定、$y =$ 一定の直線）が u-v 平面でも直交していることを確認せよ。

[c-1] 一般に、正則関数は $f'(z) \neq 0$ の点で複素平面上の角度を変えない「等角写像」になっていることを示せ。（「$f'(z) \neq 0$ の点で」を追加、10/1)

1.3.3 複素微分と正則関数

いよいよこの講義の主役である正則関数を定義する。

- 実変数関数 $f(x)$ の微分は極限値

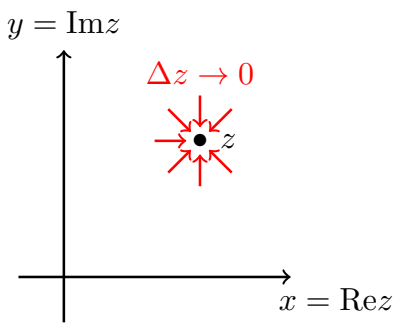
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{31}$$

で与えられていた。（このとき、極限値が Δx の符号によらないことを要求。）

- これを素直に複素関数に拡張すると、、、極限値

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{32}$$

が存在すれば、それを複素関数の微分とすれば良さそう。
しかし、ここで Δz は複素数なので、$\Delta z \to 0$ と言っても、複素平面上で色んな角度から $\Delta z \to 0$ とできる。



どの方向から $\Delta z \to 0$ としても上の極限値が一意に定まるとき、「複素関数 $f(z)$ は点 z で複素微分可能である」と言い、$f'(z)$, $\dfrac{df(z)}{dz}$ などで表す。

正則関数の定義

複素関数 $f(z)$ が複素平面のある領域 D の全ての点において複素微分可能であるとき、「$f(z)$ は D において正則である」といい、そのような関数を正則関数という。

この「正則関数」が、この講義の主役となる。その性質を見る前に「複素微分可能」を他の条件に言いかえられる事を見る。

▶ 複素関数 $f(z)$ に関して、点 $z = x + iy$ における以下の 3 条件には

$$\text{(i)} \longrightarrow \text{(ii)} \longleftrightarrow \text{(iii)}$$

の関係が成り立つ。[*1]

(i) $f(z)$ が複素微分可能である。つまり極限値

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が $\Delta z \to 0$ の向きによらずに一意に定まる。

(ii) $f(z)$ の実部 $u = \mathrm{Re} f$ と虚部 $v = \mathrm{Im} f$ がコーシー・リーマンの関係式

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ v_x + u_y = 0 \end{cases} \tag{33}$$

を満たす。コーシー・リーマンの関係式はまとめて

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y + i \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x = 0 \quad \text{あるいは} \quad f_x + i f_y = 0 \tag{34}$$

とも書ける。(実部と虚部がそれぞれ (33) の各式になっている。)

(iii) $f(z)$ を $z, \overline{z}$ を独立変数とする 2 変数関数としてみたときに

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0, \tag{35}$$

つまり $\overline{z}$ に依存しない。

(iii) が特に便利である。例えば 1.3.1 節, 1.3.2 節で出てきた例

$$f(z) = 2z + i\overline{z}, \tag{36}$$
$$f(z) = (z + \overline{z})/2, \tag{37}$$
$$f(z) = |z|^2, \tag{38}$$

などは、$\overline{z}$ を含むので、すべて複素微分可能でない（正則でない)。

[*1] (ii) に条件「全微分可能性」を加えると (i) と (ii) が同値になります。下記参照。 (講義後にココの文章を修正しました。)

▶ (i)→(ii) の証明: (i) を仮定する。極限値が $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ の向きによらず一意に決まることから、特に $\Delta z = \Delta x$ (実軸方向) の場合と $\Delta z = i\Delta y$ (虚軸方向) の場合に極限値が存在してそれらが等しい。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z+i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y}.$$

両辺の実部、虚部を比べて

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y}.$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y}.$$

よって (ii) のコーシー・リーマンの関係式を得る。■

▶ (ii)↔(iii) の証明: $(x,y) \leftrightarrow (z,\overline{z})$ の変数変換より

$$\frac{\partial f(z,\overline{z})}{\partial \overline{z}} = 0 \tag{39}$$
$$\iff \left.\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\right|_z \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y + \left.\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\right|_z \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x = 0 \tag{40}$$
$$\iff \frac{1}{2} f_x + \frac{i}{2} f_y = 0 \tag{41}$$
$$\iff \text{コーシー・リーマンの関係式.■} \tag{42}$$

—— **10/1、ここまで** ——

先週のあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標：正則関数の性質を理解する！

1.2 準備：

- 複素数
- 偏微分
- テイラー展開

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.1 複素関数

1.3.2 平面 → 平面

1.3.3 複素微分と正則関数 ← イマココ

(i) 複素微分可能性 → (ii) コーシー・リーマン ⟷ (iii) $\partial_{\overline{z}} f = 0$.

—— **10/8、ここから** ——

- 複素微分の例。$f(z) = z^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とすると

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}.$$

  実数の場合と同じ。

- 複素微分できない例：$f(z) = \overline{z}$。$\Delta z \to 0$ の向きを θ とし、$\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \Delta r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\overline{z + \Delta z}) - \overline{z}}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta r(\cos\theta - i\sin\theta)}{\Delta r(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}.\end{aligned}$$

  θ の値によって値が一意に決まらないので、複素微分不可能。

- (先週示した) 上の証明では (i) 複素微分可能 → (ii) コーシー・リーマン関係式 (CR) を示したが、(ii) を「(ii)' $f(z)$ が全微分可能かつ CR を満たす」と修正すると、(i) と (ii)' が同値になる。複素関数の全微分の定義や (i)↔(ii)' の証明は、ここでは省略する。 (興味があればやってみて下さい。来年度はレポートにしようかな。実多変数関数の全微分、はどこかでやった？)

- ここでは「$f(z)$ の x, y での偏微分係数が z で連続なら (ii)→(i)」を示しておく。(偏微分係数が連続 → 全微分可能、も言える。これも省略。興味があればやってみて。) $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \Delta r(\cos\theta + i\sin\theta)$ として

$$g(\theta) = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{f(z + \Delta r\cos\theta + i\Delta r\sin\theta) - f(z)}{\Delta r\cos\theta + i\Delta r\sin\theta}$$

  が θ によらずに一意に決まることが示せればよい。$f(z)$ の偏微分係数が連続なら

$$\begin{aligned}g(\theta) &= \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \lim_{\Delta r \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta r} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\Delta y}{\Delta r} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \right) \\ &= \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}(\cos\theta \cdot f_x + \sin\theta \cdot f_y).\end{aligned}$$

  ここで CR より $f_y = if_x$ を代入すると、$g(\theta) = f_x$ となって、θ に依存しないことがわかる。

▶ (オマケ）全微分可能性を課さない場合の (ii)→(i) の反例について。

$f(z)$ を $f(z) = \begin{cases} \exp(-1/z^4) & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$ で定義する。（e^z の定義は 1.3.5 で。）

この関数は実軸上で $f(x, y = 0) = \begin{cases} \exp(-1/x^4) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ となり、

虚軸上で $f(x = 0, y) = \begin{cases} \exp(-1/y^4) & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$ となるので、

原点で x, y でそれぞれ偏微分可能で、$f_x(0) = f_y(0) = 0$ であり、コーシー・リーマンの関係式を満たす。しかし一方で、z を 45 度の方向から原点に近づけると、$z = re^{i\pi/4} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}r$ として $f(z) = \exp(+1/r^4) \xrightarrow{r\to 0} \infty$ となるので、原点で複素微分できない。

▶ 正則関数は、実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ をそれぞれ単独に見ても、単に「偏微分可能な x, y の実 2 変数関数」というよりも強い制限を受けている。

レポート問題

実 2 変数関数 $f(x, y)$ が

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) = 0 \tag{43}$$

を満たすとき、$f(x, y)$ を (2 次元) 調和関数という。

[b-5] 正則関数の実部、虚部はそれぞれ (2 次元) 調和関数になっていることを示せ。

[c-2] 調和関数 $u(x, y)$ が与えられた時、それを実部とするような正則関数 $f(z)$ が必ず存在することを示せ。

レポート問題

[d-1] 正則関数の性質を用いた電磁気学または流体力学への応用について、具体的な例を 1 つ以上挙げて解説せよ。 (部分点あり)

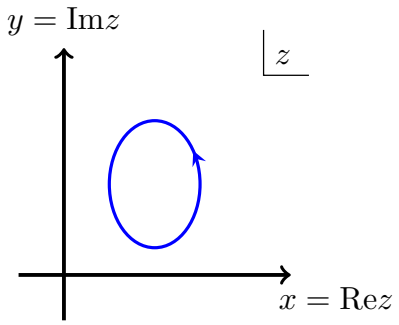
▶ 特異点について: 関数 $f(z) = 1/z$ における点 $z = 0$ などのように、微分できない点（正則でない点）を「特異点」という。特異点も正則関数において重要な役割を果たす。これについては 1.5 でまた改めて取り上げる。

1.3.4　正則関数の一般的性質（予告編）

1.1 の繰り返しになりますが、もう一度、予告編。

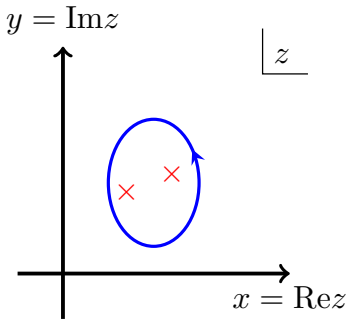
正則関数は、、、

- ▶ 正則な領域で周回積分したら必ずゼロになる（コーシーの積分定理）　→ 1.4 節



$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

- ▶ 部分的に正則でない領域があっても、周回積分の値が一部の点の情報だけで決まる（留数定理）　→ 1.5 節

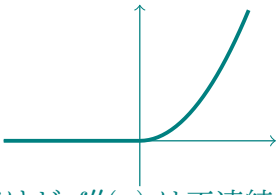


$$\oint_C f(z)dz = \sum_k R_k.$$

- ▶（1 回微分可能を要求しただけなのに）無限回微分可能。　→ 1.4 節 (修正)

  実変数関数だと・・・例えば関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$$

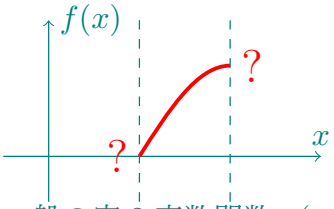


  は、$x = 0$ で $f'(x)$ は連続だけど $f''(x)$ は不連続。

  複素関数は 1 階微分可能なら無限回微分可能。

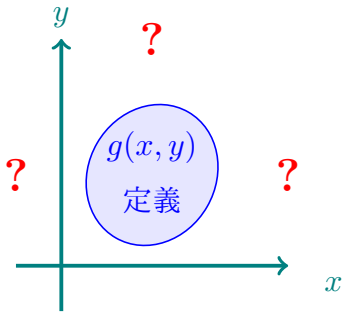
▶ 複素平面の一部で定義したら拡張が一意に決まる（解析接続）。 (修正) → 1.6 節

実変数関数だと、ある領域で関数を定義して微分可能性を要求しても



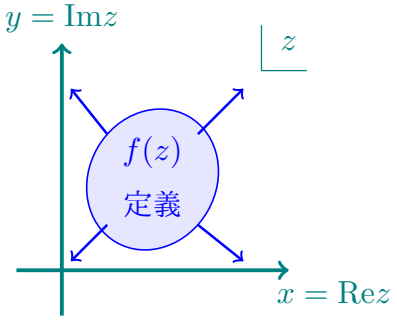
領域外の関数形は決まらない。

一般の実 2 変数関数 $g(x,y)$ では、ある領域で関数を定義して偏微分可能性を要求しても



領域外の関数形は決まらない。

正則関数は、領域の一部で定義したら



拡張が一意に決まる。

▶ 他にも色々と特別な性質があります。（一部はレポート問題で出していく予定。）

レポート問題

[c-3] ある領域で $f(z)$ が正則で、かつ $|f(z)|$ が一定ならば、$f(z)$ 自身が定数であることを示せ。

(物理学演習を履修している人は、今日の演習問題でもいくつか正則関数の性質に関する問題が出ていますので、見てみて下さい。(→ 履修してない人に、配布の希望を聞いてみる。))

1.3.5 正則関数の例

- 多項式：

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \quad (n < \infty), \tag{44}$$

は $|z| < \infty$ で正則。（例：$f(z) = z^2$, $f(z) = 2020 + 10iz^8$。）

- 有理関数：多項式 $p(z)$, $q(z)$ を用いて

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \tag{45}$$

は $q(z) = 0$ となる点（特異点）を除いて正則。（特異点の数は $q(z)$ の次数以下。）

- 指数関数と三角関数は以下の式で定義する。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \tag{46}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \tag{47}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots. \tag{48}$$

これらの定義は以下の性質を満たす。

(i) 実軸上で、実数の場合の指数関数、三角関数に一致する（1.2.3 節参照）。

(ii) $\mathbb{C}$ 全域で正則。

(iii) 収束半径が無限大。

(i) を満たすだけなら、他にも色んな複素関数があり得る、例えば $f(z, \overline{z}) = \sin x + y^{100} = \sin((z + \overline{z})/2) + ((z - \overline{z})/2i)^{100}$ は実軸上では $f(z) = \sin x$ となる。しかし、(i)(ii) を同時に満たす関数は、唯一上の定義式のものだけとなる。（→解析接続 1.6。）

(iii) の収束半径については次節 1.3.6 で見る。

- 上の定義によって 1.2 節で出てきた疑問は解決できた。$\cos z$, $\sin z$ は $z \in \mathbb{C}$ で定義されたし、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ およびその一般化

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{49}$$

は上の定義式から示せる。

レポート問題

[b-6] $z, w \in \mathbb{C}$ に対し、以下を (解析接続を用いずに) 示せ。 (講義後修正)

(i) $e^{z+w} = e^z e^w$. (無限和の順番は気にしなくて良い。)

(ii) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

(iii) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$.

(iv) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

ではもっと複雑な式、例えば $\cos 4z = 8\cos^4 z - 8\cos^2 z + 1$ などは？・・・一つ一つ定義に戻れば確認出来るが、それも面倒だ。実はこれも 1.6 節の「解析接続」で解決する。

▶ 対数関数：実数では $\ln x$ は e^x の逆関数として定義できた。

$$f(x) = \ln x \Longleftrightarrow x = e^{f(x)}. \tag{50}$$

これを素直に複素数に拡張すると

$$f(z) = \ln z \Longleftrightarrow z = e^{f(z)}. \tag{51}$$

一方、極形式を用いて

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (0 \le \theta < 2\pi) \\ &= re^{i\theta} \\ &= e^{\ln r} e^{i\theta} \\ &= e^{\ln r + i\theta} \end{aligned} \tag{52}$$

なので、

$$f(z) = \ln z = \ln r + i\theta \tag{53}$$

と言えそうだ。ところが、$z = e^{f(z)}$ を満たす $f(z)$ はこれだけではない。

$$e^{2n\pi i} = 1 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{54}$$

なので、

$$z = e^{\ln r + i\theta} e^{2n\pi i} = e^{\ln r + i\theta + 2n\pi i}. \tag{55}$$

よって

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln z \\ &= \ln r + i(\theta + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \end{aligned} \tag{56}$$

しがって対数関数は多価関数となる。(1.6 節でまた戻って議論する。)

1.3.6 複素級数とその収束

ここで複素級数とその収束についてまとめておく。

1.3.6.A 複素数列

▶ 複素数の数列 $\{z_n\}$

$$z_1, z_2, \cdots z_n, \cdots \tag{57}$$

に対して、「ある複素数 α が存在し ($\exists\alpha \in \mathbb{C}$)、任意の正の実数 ϵ に対して ($\forall\epsilon > 0$)、自然数 N が存在し ($\exists N \in \mathbb{N}$)、N より大きな全ての n に対して $|z_n - \alpha| < \epsilon$ が成り立つ」とき「数列 $\{z_n\}$ は α に収束する。」と言い

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha \qquad \text{あるいは} \qquad n \to \infty \text{ で } z_n \to \alpha. \tag{58}$$

などと書く。上の下線部を

$$\exists\alpha \in \mathbb{C}, \forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \text{s.t. } |z_n - \alpha| < \epsilon \text{ for } \forall n > N.$$

などと書く。(以下 $\in \mathbb{C}$ とか $\in \mathbb{N}$ は省略。)
上記のような α が存在しないとき「数列 $\{z_n\}$ は収束しない (発散する)。」という。
(「発散」っていうと何となく ∞ のイメージがあって、振動を含まない気がしません？)

▶ $n \to \infty$ で $z_n \to a$, $w_n \to b$ なら、

$$z_n \pm w_n \to a \pm b, \quad z_n w_n \to ab, \quad \frac{z_n}{w_n} \to \frac{a}{b} \text{ for } w_n \neq 0, b \neq 0. \tag{59}$$

▶ 定理: 数列 $\{z_n\}$ が収束することと、

$$\forall\epsilon > 0, \exists N,\ \text{s.t. } |z_n - z_m| < \epsilon \text{ for } \forall n, \forall m > N. \quad (\text{コーシーの収束条件})$$

は同値である。

レポート問題

[b-7] 複素数列 $\{z_n\}$ が収束 $\Longrightarrow$ コーシーの収束条件、を示せ。
[c-4] 複素数列 $\{z_n\}$ が収束 $\Longleftarrow$ コーシーの収束条件、を示せ。 (どこまで既知とするかはお任せします。Bolzano-Weierstrass も知らなければついでに是非。)

1.3.6.B 級数

- ▶ 数列の和 $w_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ を級数という。$n \to \infty$ の極限 $\lim_{n\to\infty} w_n$ が存在するとき、それを $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ と書き、無限級数という。（$n \to \infty$ の極限が存在しないときも同じ記号を用いてしまって「$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ が収束しない」などと言う。）
- ▶ 各項の絶対値をとった級数 $s_n = \sum_{k=1}^{n} |z_n|$ は、単調増加な実数列となる。したがって上に有界なら収束する（証明略）。
- ▶ 絶対収束と条件収束
  - $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は「絶対収束する」という。

    レポート問題

    以下を示せ。

    [b-8] 絶対収束する複素級数は収束する。

    [b-9] 絶対収束する複素級数は、足し算の順序を変えても和は変わらない。

  - 収束するが絶対収束しない級数は「条件収束する」という。
    例：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$。（この級数自体は $\ln 2$ に収束するが、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散する。）
- ▶ 級数の収束の判定法の例：
  ダランベールの判定法（証明は省略。 参考：物理学演習 No.1 ）

$$\exists N, \exists q < 1 \text{ s.t. } \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \leq q \text{ for } \forall n > N \quad \Longrightarrow \sum z_n \text{ は絶対収束.}$$

$$\text{特に } \lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = q \text{ が存在するとき} \begin{cases} q < 1 \Longrightarrow \text{絶対収束,} \\ q > 1 \Longrightarrow \text{収束しない.} \end{cases}$$

1.3.6.C 関数級数

- 関数の極限と連続性: これまで特に断りなく使ってきたが、関数 $f(z)$ に対して、

$$\exists f_0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \text{s.t. } \forall z,\ |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f_0| < \epsilon.$$

であるとき f_0 を $z \to z_0$ での $f(z)$ の極限値といい、$\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0$ と書く。
$f(z_0)$ が定義されていて $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ のとき「$f(z)$ は $z = z_0$ で連続」という。

- 関数列の各点収束と一様収束:
領域 D で定義された関数列 $f_1(z), f_2(z), \cdots$ に対して
  - $f_n(z)$ が $f(z)$ に各点収束する、とは

$$\exists f(z), \forall \epsilon > 0, \forall z \in D, \exists N,\ \text{s.t. } |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \text{ for } \forall n > N.$$

であることをいう。(N が z に依存して良いことに注意。)
  - $f_n(z)$ が $f(z)$ に一様収束する、とは

$$\exists f(z), \forall \epsilon > 0, \exists N,\ \text{s.t. } |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \text{ for } \forall n > N, \forall z \in D.$$

であることをいう。(N が z に依存せずに決まる。)

- 各点収束するけど一様収束しない例。$0 \le x \le 1$ で実関数列 $f_n(x) = x^n$ を考える。これは各点で $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ と収束する。しかし与えられた $0 < \epsilon < 1$ と $0 < x < 1$ に対して $|f_n(x) - f(x)| = x^n < \epsilon$ とするには $n > \dfrac{|\ln \epsilon|}{|\ln x|}$ とする必要があり、$|\ln x| \xrightarrow{x \to 1} 0$ なので N は x に無関係に選べない。

- 関数級数の一様収束：共通する領域 D で定義された関数列 $f_1(z), f_2(z), \cdots$ の和 $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ に対しても、上と同じように「関数級数の一様収束」が定義できる。

定理 ：連続関数列 $\{f_n(z)\}$ の無限和は、和が一様収束するとき、連続である。

レポート問題

[c-5] 示せ。

また、微分可能な関数列 $\{f_n(z)\}$ の無限和は、和が一様収束するとき、項別微分可能（微分の和と和の微分が一致する）かつ項別積分可能（積分の和と和の積分が一致する）。 (証明略。仮定に条件の追加が必要かも...。複素 (線) 積分については、1.4 節参照。)

1.3.6.D べき級数と収束半径

▶ 複素数列 $\{c_n\}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{60}$$

をべき級数と呼ぶ。

▶ 任意のべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対して、ある点 $z = w$ を考える。$f(z)$ は $z = w$ で (i) 収束する、(ii) 収束しない、のいずれかである。

(i) $z = w$ で収束すると仮定すると、$|z| < |w|$ なる全ての z に対して $f(z)$ は絶対収束する。

(証明) コーシーの収束条件で $\epsilon = 1$, $m = n + 1$ として、

$$\exists N \text{ s.t. } |c_n w^n| < 1 \text{ for } \forall n > N.$$

したがって $B = \max\{|c_0|, |c_1 w^1|, \cdots |c_N w^N|, 1\}$ とすると

$$|c_n w^n| < B \text{ for } n = 0, 1, \cdots.$$

$$\therefore \sum |c_n z^n| = \sum |c_n w^n| \left|\frac{z}{w}\right|^n < B \sum \left|\frac{z}{w}\right|^n = B \frac{1}{1 - |z/w|} \text{ for } |z| < |w|.$$

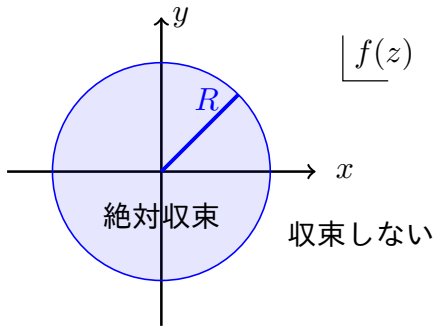
したがって $\sum |c_n z^n|$ は単調増加で上に有界なので収束する。■.

(ii) $z = w$ で収束しないと仮定すると、$|z| > |w|$ なる全ての z に対して $f(z)$ は収束しない。

(証明) 背理法。ある点 $z = z_0$ ($|z_0| > |w|$) での収束を仮定すると、(i) より $z = w$ でも収束となり、仮定に反する。■

▶ したがって、任意のべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ に対してある長さ R（収束半径）が存在して

$$\begin{cases} |z| < R \text{ で } f(z) \text{ は絶対収束し,} \\ |z| > R \text{ で } f(z) \text{ は収束しない.} \end{cases}$$



（ただしここでの R は $R = 0$ と $R = \infty$ を含む。）さらに $|z| < R$ で $f(z)$ は一様収束する。 ($\forall \epsilon > 0$, $|z| < R - \epsilon$ に対して一様収束、という事。証明略。)

► 特に $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ が存在する場合は、$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ がべき級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ の収束半径となる。

レポート問題

[b-10] 示せ。（ダランベールの判定法を既知としてよい。）

► 前節 1.3.5 で定義した指数関数と三角関数

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \tag{61}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{2n}}{(2n)!}, \tag{62}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{63}$$

の右辺の収束半径は $R=\infty$ である。また

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\cdots \tag{64}$$

の右辺の級数の収束半径は $R=1$ である。

ここまでのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標：正則関数の性質を理解する！

1.2 準備（複素数、偏微分、テイラー展開）

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.1 複素関数

1.3.2 平面 → 平面

1.3.3 複素微分と正則関数（コーシー・リーマン）

1.3.4（予告編）

1.3.5 正則関数の例（$e^z, \cos z, \cdots$.）

1.3.6 複素級数とその収束

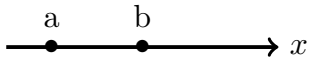
この後 1.4 複素積分

1.4 複素積分

1.4.1 複素線積分の定義と例

- ここでもまずは実数関数の場合を思い出す。
  関数 $f(x)$ に対して、例えば $x=a$ から $x=b$ までの積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

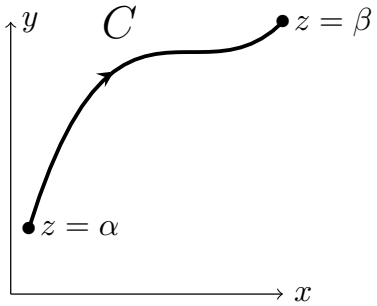


  を考えることができた。
- これを素直に複素関数 $f(z)$ に拡張すると、例えば点 $z=\alpha$ から $z=\beta$ までの積分

$$\int_\alpha^\beta f(z)dz$$

  が考えられそうだ。しかし z は複素数なので、$z=\alpha$ から $z=\beta$ までいろんな経路が取りうる、そこで経路 C を指定して

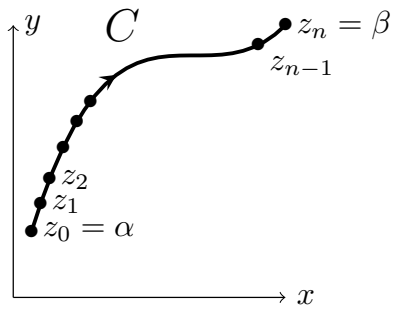
$$\int_C f(z)dz$$



  と書くことにする。
- より正確には実数のときと同様に、無限小区間の和の極限として定義できる。

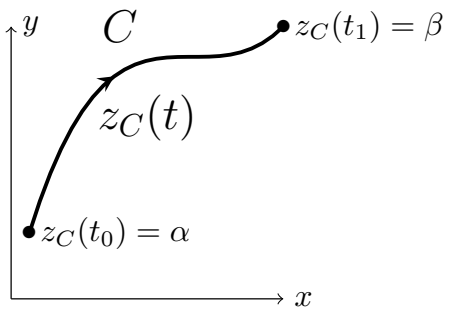
$$\int_C f(z)dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k,$$

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$



▶ あるいは、実数 t を用いて経路 C を $z_C(t):\begin{array}{c|ccc} t & t_0 & \to & t_1 \\ \hline z & \alpha & \to & \beta \end{array}$ とパラメータ表示して、

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\left(z_C(t)\right)\frac{dz_C(t)}{dt}dt$$



のように定義することも出来る。

▶ この定義は（経路が同じなら）パラメータの取り方によらない。実際 t の代わりに $t'(t):\begin{array}{c|ccc} t & t_0 & \to & t_1 \\ \hline t' & t'_0 & \to & t'_1 \end{array}$ を用いても、変数変換によって

$$\begin{aligned}\int_{t'_0}^{t'_1} f\left(z_C(t')\right)\frac{dz_C(t')}{dt'}dt' &= \int_{t_0}^{t_1} f\left(z_C(t')\right)\left.\frac{dz_C(t')}{dt'}\right|_{t'=t'(t)}\frac{dt'(t)}{dt}dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f\left(z_C(t)\right)\frac{dz_C(t)}{dt}dt \qquad (65)\end{aligned}$$

となり、元の表式と一致する。（最後の式では $z_C(t'(t))$ を $z_C(t)$ と書いている。）

10/8、ここまで

10/8 までのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標　1.2 準備（複素数、偏微分、テイラー展開）

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.1 複素関数,　1.3.2 平面 → 平面

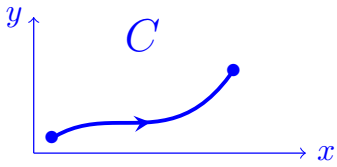
$\boxed{\text{1.3.3 複素微分と正則関数（コーシー・リーマン）}}$

1.3.4 （予告編）,　1.3.5 正則関数の例.　1.3.6 複素級数とその収束

1.4 複素積分

1.4.1 複素線積分の定義と例 (⟵ イマココ)

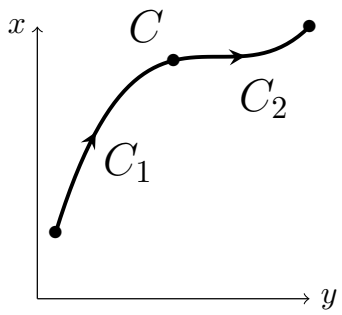
$$\int_C f(z)dz = \underbrace{\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta z_k\to 0}}\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k}_{\text{無限小区間の和で定義}} = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} f\left(z_C(t)\right)\frac{dz_C(t)}{dt}dt}_{\text{パラメータ表示で定義}}$$



10/15、ここから

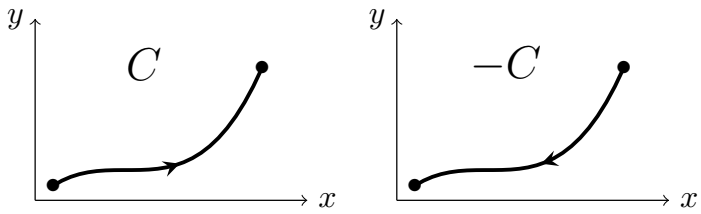
▶ 経路は足し算できる。

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C=C_1+C_2} f(z)dz.$$



逆向きの経路 ($-C$ と書く) は引き算になる。

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_{C} f(z)dz.$$

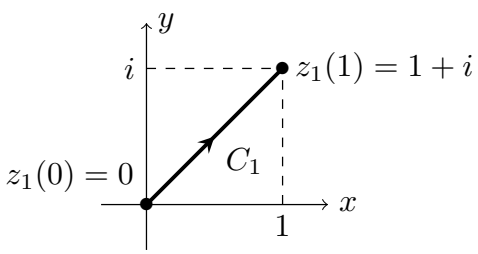


▶ 具体的な計算の例として、

$$f(z) = a + bz \tag{66}$$

を考え、$z = 0$ から $z = 1 + i$ まで、いくつかの経路で積分してみよう。

<u>経路 1</u>



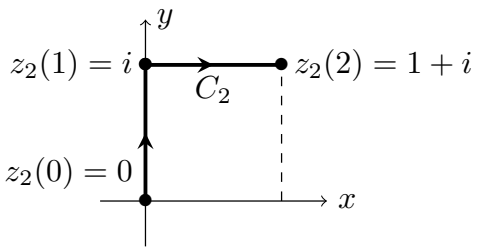
$$z_1(t) = (1+i)t \qquad (0 \le t \le 1)$$

$$f(z_1(t)) = a + b(1+i)t$$

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = 1 + i$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)dz &= \int_0^1 f(z_1(t))\frac{dz_1(t)}{dt}dt \\
&= \int_0^1 \big(a + b(1+i)t\big) \cdot (1+i) \cdot dt \\
&= \int_0^1 \left((1+i)a + 2ib\, t\right) dt \\
&= (1+i)a + ib.
\end{aligned} \tag{67}$$

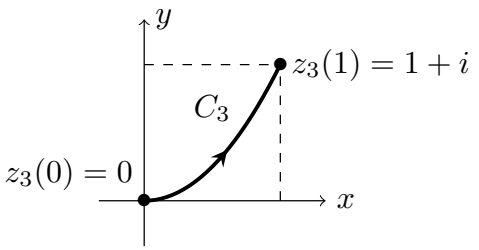
経路 2



	$0 \le t \le 1$	$1 \le t \le 2$
$z_2(t)$	it	$t - 1 + i$
$f(z_2(t))$	$a + ibt$	$a + b(t - 1 + i)$
$\dfrac{dz_2(t)}{dt}$	i	1

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)dz &= \int_0^2 f(z_2(t))\frac{dz_2(t)}{dt}dt \\
&= \int_0^1 (a + ibt)\cdot i \cdot dt + \int_1^2 [a + b(t - 1 + i)]\cdot 1 \cdot dt \\
&= (ia - \frac{1}{2}b) + (a + \frac{3}{2}b + (-1 + i)b) \\
&= (1 + i)a + ib. \qquad (\text{経路 1 と同じ！}) \qquad (68)
\end{aligned}$$

経路 3



$z_3(t) = t + it^2 \qquad (0 \le t \le 1)$

$f(z_3(t)) = a + b(t + it^2)$

$\dfrac{dz_3(t)}{dt} = 1 + 2it$

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} f(z)dz &= \int_0^1 f(z_3(t))\frac{dz_3(t)}{dt}dt \\
&= \int_0^1 \left[a + b(t + it^2)\right](1 + 2it)dt \\
&= \cdots \quad = (1 + i)a + ib. \qquad (\text{また同じ！}) \qquad (69)
\end{aligned}$$

▶ 積分が経路によらない！

・・・実はこれも正則関数の一般的性質の 1 つ。(→ 次の 1.4.2 節)

レポート問題

[b-11] 同じ $f(z) = a + bz$ に対して、上の 3 つ以外の経路を自分で考え、積分を計算せよ。(経路は上と同じ $z = 0 \to 1 + i$ としましょう。 (10/15 追記))

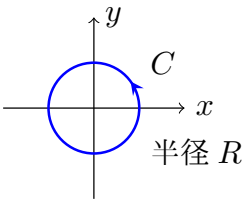
▶ 正則でない関数の場合、積分の値は経路に依存してしまう。

レポート問題

[b-12] $f(z) = \overline{z}$ に対して、上の 3 つの経路で積分を計算せよ。

▶ もう 1 つ、ぜひ計算しておきたい例がある。原点を中心とした半径 R の円を反時計回りに 1 周する経路 C を考えて、次の複素積分を考える。

$$\oint_C z^n dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{70}$$



(周積分のことを $\oint$ で表す。)
$z = z(\theta) = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とパラメータ表示すると

$$\oint_C z^n dz = \int_0^{2\pi} f(z(\theta)) \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \tag{71}$$

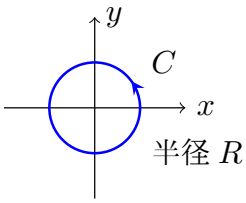
$$= \int_0^{2\pi} \left(Re^{i\theta}\right)^n \cdot iRe^{i\theta}\, d\theta \tag{72}$$

$$= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \tag{73}$$

$$= \begin{cases} (\text{for} \quad n \neq -1) & = iR^{n+1} \left[\dfrac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0, \\ (\text{for} \quad n = -1) & = i \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i. \end{cases} \tag{74}$$

つまり

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i & (n = -1) \end{cases}. \tag{75}$$



これは

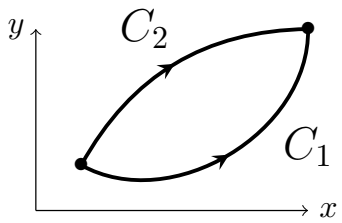
- 答えが半径 R によらない。
- $n = -1$ のときだけ特別で、$2\pi i$ となる。

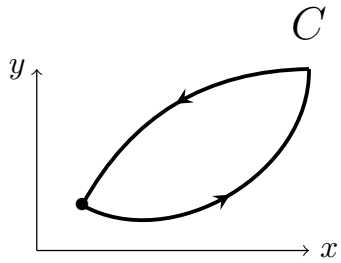
これらの意味は、次の 1.4.2 節、および 1.5 節の留数定理でより明らかになる。

1.4.2　コーシーの積分定理

▶ 前節で見た「正則関数の複素積分が経路によらない」ことを一般に示したい。

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$
$$\Longrightarrow \oint_{C=C_1-C_2} f(z)dz = 0$$





なので、「経路によらない」は「周積分がゼロ」と言いかえられる。

▶

コーシーの積分定理

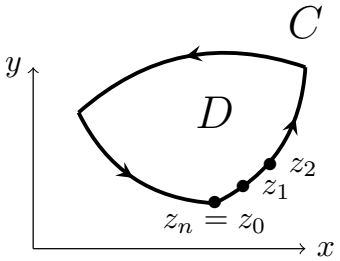
複素関数 $f(z)$ が閉じた経路 C とその内部で正則であれば

$$\oint_C f(z)dz = 0. \tag{76}$$

以下 3 通りの方法で示す。

- 証明 1:（グリーンの定理による）

無限小区間による定義を思い出して



$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta z_k\to 0}} \sum_k f(z_k)\Delta z_k \qquad (\Delta z_k = z_{k+1} - z_k) \\ &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k, \Delta y_k\to 0}} \sum_k f(z_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) \\ &= \oint_C (f(z)dx + if(z)dy) \qquad \text{———}(*)\end{aligned}$$

ここで、グリーンの定理を使う。

グリーンの定理

(x, y) 平面上の閉じた経路 C（反時計回り）上および C で囲まれた領域 D で定義された偏微分可能な関数 $P(x, y)$ と $Q(x, y)$ に対して

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \int_D (\partial_x Q - \partial_y P)\, dxdy. \tag{77}$$

よって (*) より

$$\oint_C f(z)dz = \int_D (i\partial_x f - \partial_y f)\, dxdy. \tag{78}$$

$f(x)$ が領域 D 内で正則であればコーシー・リーマン関係式より $i\partial_x f - \partial_y f = 0$. したがって

$$\oint_C f(z)dz = 0. \qquad \blacksquare \tag{79}$$

レポート問題

[c-6] 上のグリーンの定理を証明せよ。

- 証明 2:（$f(z) = a + bz$ の場合。） (10/14 修正)

  $f(z) = a + bz$ の場合、

$$\oint_C (a + bz)dz = a \oint_C dz + b \oint_C zdz. \tag{80}$$

第一項は

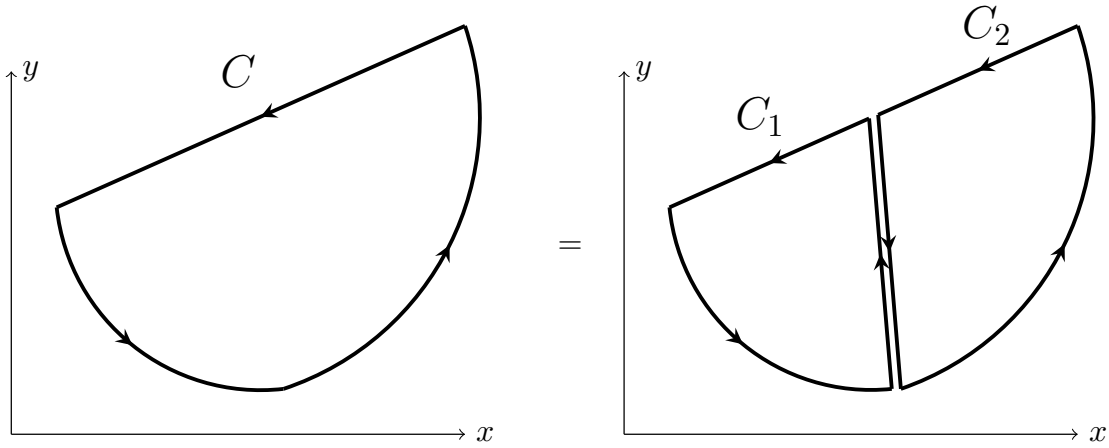
$$\oint_C dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \Delta z_k = \lim \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = 0. \tag{81}$$

第二項も、被積分項に中点の値を用いると (← 間のどの点を取ってもよいので)

$$\begin{aligned}
\oint_C zdz &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{z_k + z_{k-1}}{2}\right) \Delta z_k \\
&= \lim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{z_k + z_{k-1}}{2}\right) (z_k - z_{k-1}) \\
&= \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
&= \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2) = 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned} \tag{82}$$

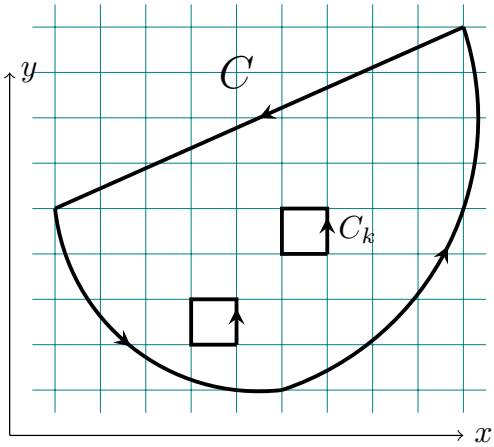
- 証明 3:（微小分割による）

周積分は分けられる。 $$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz. \tag{83}$$



どんどん分けると、、、

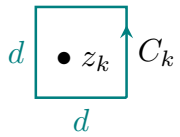
$$\oint_C f(z)dz = \sum_k \oint_{C_k} f(z)dz$$



領域全体を一辺の長さが d の正方形の格子で覆うとする。正則性（微分可能性）より、任意の $\epsilon > 0$ に対して、十分細かい分割をすれば、全ての領域において、

$$f(z) = f(z_k) + f'(z_k)(z - z_k) + \phi_k(z), \quad |\phi_k(z)| < \epsilon|z - z_k|. \qquad (\star)$$

とおける。 (ϵ-δ の δ を用いて $\sqrt{2}d < \delta$ とすれば良い。)



すると

$$\sum_k \oint_{C_k} f(z)dz = \sum_k \oint_{C_k} \left[f(z_k) + f'(z_k)(z - z_k)\right] dz + \sum_k \oint_{C_k} \phi_k(z)dz. \tag{84}$$

第一項は、$\oint (a+bz)dz$ の形なので証明 2 によりゼロ。第二項は

$$
\begin{aligned}
|\,\text{第二項}\,| &= \left| \sum_k \oint_{C_k} \phi_k(z) dz \right| \\
&< \sum_k \left| \oint_{C_k} \phi_k(z) dz \right| \\
&\leq \sum_k \left[\Big(|\phi_k(z)| \text{ の最大値} \Big) \times \Big(C_k \text{ の周長} \Big) \right]
\end{aligned} \tag{85}
$$

ここで $(\star)$ より、全ての領域 k において

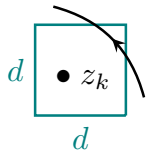
$$
|\phi_k(z)| < \epsilon |z - z_k| < \epsilon \cdot \sqrt{2} d, \tag{86}
$$

なので、

$$
|\,\text{第二項}\,| < \sqrt{2}\,\epsilon\, d \sum_k \Big(C_k \text{ の周長} \Big) \tag{87}
$$

さらに

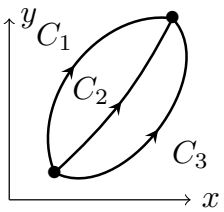
- 境界以外：(C_k の周長) = 4d,
- 境界：そこに含まれる境界の長さを ℓ_k として、(C_k の周長)< $(4d + \ell_k)$.



よって

$$
\begin{aligned}
|\,\text{第二項}\,| &< \sqrt{2}\,\epsilon\, d \left(\sum_{k \notin \text{境界}} 4d + \sum_{k \in \text{ 境界}} (4d + \ell_k) \right) \\
&= 4\sqrt{2}\,\epsilon \sum_k d^2 + \sqrt{2}\epsilon\, d \sum_{k \in \text{ 境界}} \ell_k \\
&< 4\sqrt{2}\,\epsilon \cdot (\text{領域全体を覆う長方形の面積}) + \sqrt{2}\epsilon\, d \cdot (\text{領域全体の周長}) \\
&\to 0 \qquad \text{for} \quad \epsilon \to 0. \blacksquare
\end{aligned} \tag{88}
$$

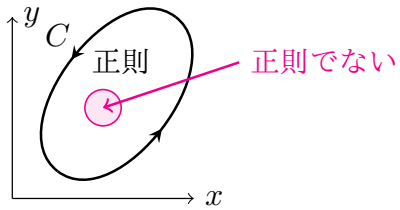
▶ コーシーの積分定理があるため、正則な領域では経路を好きなように曲げて良い！



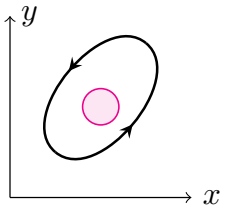
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_3} f(z)dz \tag{89}$$

▶ 正則でない場所があったら？

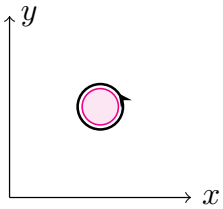
$$\oint_C f(z)dz = ?$$



$=$



$=$



周積分は、<u>正則でないところの局所的な情報だけで決まりそうだ。</u>

→ 次節 1.4.3 や 1.5 節の留数定理で見ていく。

1.4.3 コーシーの積分公式と、無限回微分可能性

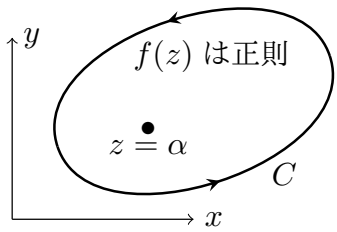
(コーシー、コーシーとコーシーだらけなのに、前節のコーシーの積分「定理」とこの節のコーシーの積分「公式」があるからさらにややこしい...。)

▶ まずは

コーシーの積分公式

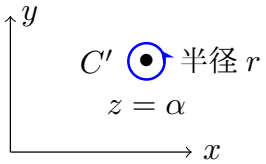
$f(z)$ が閉じた経路 C(正の向き = 反時計回り) とその内部 D で正則なら、$z=\alpha\in D$ に対して

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz = 2\pi i\ f(\alpha) \qquad \text{———} (\star)$$



証明：$\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ は D 内では $z=\alpha$ を除いて正則なので、経路を $z=\alpha$ を中心とした半径 r の円 (経路 $C'\in D$) に変形する。C' は

$$z(\theta)=\alpha+re^{i\theta}, \qquad (0\le\theta\le 2\pi) \tag{90}$$



とパラメータ表示できるので

$$\begin{aligned}\oint_{C'}\frac{f(z)}{z-\alpha}dz &= \int_0^{2\pi}\frac{f(z(\theta))}{z(\theta)-\alpha}\cdot\frac{dz(\theta)}{d\theta}d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\cdot ire^{i\theta}d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} f(\alpha+re^{i\theta})id\theta \quad \xrightarrow{r\to 0} 2\pi i\ f(\alpha).\ \blacksquare\end{aligned} \tag{91}$$

(より正確には、$f(z)$ の正則性 $\to$ 連続性から $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$ s.t. $|f(z)-f(\alpha)|<\epsilon$ for $\forall|z-\alpha|<\delta$ なので、$0<r<\delta$ とすれば $f(\alpha+re^{i\theta})=f(\alpha)+\phi(\theta)$ s.t. $|\phi(\theta)|<\epsilon$、を代入して示せる。)

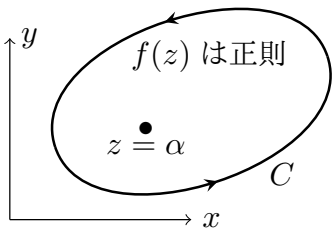
► ($\star$) 式は 1.5 節でやる「留数定理」の特別な例になっている。

► ($\star$) 式は

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz \qquad \text{———————}(\star\star) \qquad (C \text{ 内で } f(z) \text{ は正則})$$

とも書ける。右辺の z の経路は点 α から離れているのに、積分すると $z=\alpha$ の値が得られている！

► さらに ($\star\star$) 式から次のことが言える。

> $f(z)$ が閉じた経路 C(正の向き) とその内部 D で正則なら、D 内で
> 何回でも複素微分可能であり、$z=\alpha$ での n 階微分係数は
>
> $$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz, \tag{92}$$
>
> で与えられる。
>
> 
>

► (証明の前に) いくつかコメント

(i) $n=0$ の場合は上のコーシーの積分公式になっている。

(ii) この式もコーシーの積分公式とよばれるらしい。さらに文献によっては「グルサの定理（公式)」とも書いてある。

(iii) 前の方で何度か「無限回微分可能性は 1.5 節でやる」と書いていましたが、こちらに書くことにしました。(該当箇所修正しました。) 文献によっては次節 1.5 のテイラー展開を議論してから無限回微分可能を議論しています。この辺りの論理展開の順番は自分の納得のいく形で理解してもらえればと思います。

► 証明: 先ほど示した

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz \qquad \text{———————}(\star\star) \qquad (C \text{ 内で } f(z) \text{ は正則})$$

の両辺を α の関数と見て微分する。

方法 1：微分と積分を気にしないで交換してしまう。

$$
\begin{aligned}
f'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{f(z)}{z-\alpha}\right)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}dz. \qquad (93)
\end{aligned}
$$

次々と微分して

$$
f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz. \blacksquare \qquad (94)
$$

方法 2：気にする。

$$
g(\alpha) = \oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}dz \qquad (95)
$$

として定義通り微分すると

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{g(\alpha+\Delta\alpha)-g(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}\oint_C\left[\frac{f(z)}{z-(\alpha+\Delta\alpha)}-\frac{f(z)}{z-\alpha}\right]dz \\
&= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha-\Delta\alpha)(z-\alpha)}dz \\
&= \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}dz + \lim_{\Delta\alpha\to 0}\Delta\alpha\underbrace{\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha-\Delta\alpha)(z-\alpha)^2}dz}_{\text{(A)}} \qquad (96)
\end{aligned}
$$

第二項は、経路 C 上で $f(z)$ が正則なので $|f(z)|$ は有限、かつ $|\Delta\alpha|$ が十分小さければ $|z-\alpha|>0$ かつ $|z-\alpha-\Delta\alpha|>0$ なので、(A) は有限。したがって第二項 $\xrightarrow{\Delta\alpha\to 0} 0$. よって

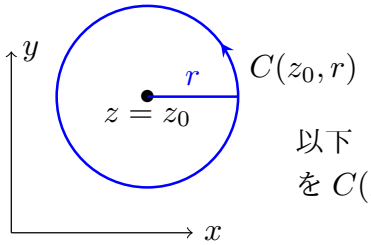
$$
g'(\alpha) = \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}dz. \qquad (97)
$$

さらに同様にしてこの右辺が複素微分可能であることが示せて、以下それを繰り返して

$$
g^{(n)}(\alpha) = n!\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz. \quad \blacksquare \qquad (98)
$$

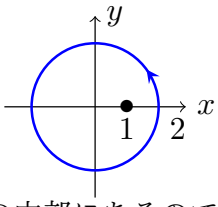
方法 3：さらに気にする。→ 数学の教科書を見ましょう。

▶ コーシーの積分公式を用いた計算の具体例を見てみよう。



以下「$z = z_0$ を中心とした半径 r の円を正の向きに一周する経路」を $C(z_0, r)$ と表す。

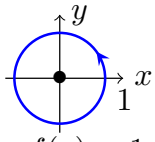
例 1: $\displaystyle\oint_{C(0,2)} \frac{e^z \sin z}{z-1} dz$



$z = 1$ は $C(0, 2)$ の内部にあるので、$f(z) = e^z \sin z$ として

$$\oint_{C(0,2)} \frac{e^z \sin z}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i e \sin 1. \tag{99}$$

例 2: $\displaystyle\oint_{C(0,1)} \frac{1}{z^n} dz \quad (n = 1, 2, \cdots)$

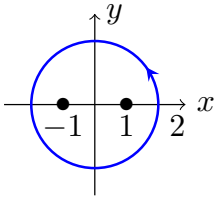


$z = 0$ は $C(0, 1)$ の内部にあるので、$f(z) = 1$ として、

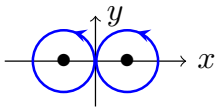
$$\oint_{C(0,1)} \frac{1}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) = \begin{cases} 2\pi i & (n = 1) \\ 0 & (n = 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{100}$$

前節の結果が再現できた。

例 3: $\displaystyle\oint_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2-1} dz$



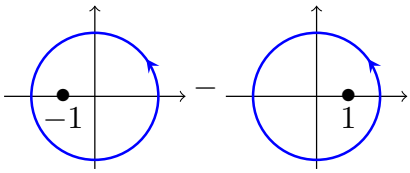
これは、経路を $C(-1, 1)$ と $C(1, 1)$ に分割すると



$$\begin{aligned}
\oint_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2-1} dz &= \oint_{C(-1,1)} \frac{e^z}{z^2-1} dz + \oint_{C(1,1)} \frac{e^z}{z^2-1} dz \\
&= \oint_{C(-1,1)} \frac{1}{z+1} \underbrace{\left(\frac{e^z}{z-1}\right)}_{f(z)} dz + \oint_{C(1,1)} \frac{1}{z-1} \underbrace{\left(\frac{e^z}{z+1}\right)}_{g(z)} dz \\
&= 2\pi i (f(-1) + g(1)) = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{-2} + \frac{e}{2}\right).
\end{aligned} \tag{101}$$

あるいは被積分関数を変形して

$$\oint_{C(0,2)} \frac{e^z}{z^2-1}dz = \oint_{C(0,2)} \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{z-1} - \frac{e^z}{z+1}\right)dz$$



$$= \pi i\left(e^1 - e^{-1}\right). \tag{102}$$

レポート問題

[b-13] 以下の積分を計算せよ。

$$\oint_{C(0,2)} \frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{(z-1)^3}dz. \tag{103}$$

$$\oint_{C(0,2)} \frac{\sin z}{(z-1)(z-3)^2}dz. \tag{104}$$

$$\oint_{C(0,4)} \frac{\sin z}{(z-1)(z-3)^2}dz. \tag{105}$$

[b-14] a を正の実数とするとき、以下の積分を計算せよ。 (10/13 修正)

$$\oint_{C(0,2a)} \frac{e^z}{z^2+a^2}dz. \tag{106}$$

$$\oint_{C(ia,a)} \frac{e^z}{z^2+a^2}dz. \tag{107}$$

$$\oint_{C(-a,a)} \frac{e^z}{z^3+a^3}dz. \tag{108}$$

[b-15] 次の実数積分を、$z = e^{i\theta}$ として複素積分を用いて計算せよ。

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta}d\theta. \tag{109}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\beta\cos\theta}d\theta \qquad (0<\beta<1). \tag{110}$$

レポート問題

[b-16] $f(z)$ が $C(\alpha, r)$ 上とその内部で正則であるとき、次の式を示せ。

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta})d\theta. \tag{111}$$

(適当な半径 r の円周上でぐるっと周積分して「平均」を取れば、中心での値が分かる。)

▶ 最大値の定理：[b-16] の結果を用いて、次のことが言える。

レポート問題

[c-7] 複素関数 $f(z)$ が閉じた領域（境界を含む領域）D 内で正則であり、かつ定数関数ではないとする。このとき、以下を示せ。

- D 内での $|f(z)|$ の最大値は境界で与えられる。（最大値の定理）
- D 内で $f(z) \neq 0$ であれば、$|f(z)|$ の最小値も境界で与えられる。

▶ さらにここでリウビルの定理も紹介しておく。

リウビルの定理

正則関数 $f(z)$ がある自然数 n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して次をみたすとする。

$$\max_{|z| \leq r} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} \xrightarrow{r \to \infty} 0. \tag{112}$$

このとき、$f(z)$ は n 次以下の多項式 $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots c_n z^n$ である。
特に $|f(z)|$ が $|z| \to \infty$ で有限なら $f(z)$ は定数関数になる。
（$n = 0$ で上式が成り立つので $f(z) = c_0$、つまり定数関数となる。）

(“Liouville” をどうカタカナにするかは色んな流儀があるようです。)
(“max” は “sup” としている文献が多いようですが、ここでは “max” としてしまいました。)

レポート問題

[c-8] リウビルの定理を以下の小問にしたがって示せ。

(i) $f(z)$ が中心 $z = \alpha$、半径 r の円周 $C(\alpha, r)$ およびその内部で正則であるとする。円周 $C(\alpha, r)$ 上での $|f(z)|$ の最大値を $M(\alpha, r)$ とするとき、コーシーの積分公式を用いて、以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n! M(\alpha, r)}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \text{（コーシーの評価式）} \tag{113}$$

(ii) コーシーの評価式を用いて、$\displaystyle\max_{|z| \leq r} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} \xrightarrow{r \to \infty} 0$ であれば $f^{(n+1)}(z) = 0$ であることを示せ。（$f^{(n+1)}(z) = 0$ なので、n 次多項式。■）

(さらに話は「代数学の基本定理」へと繋がりますが、ここでは省略。)

1.5　テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

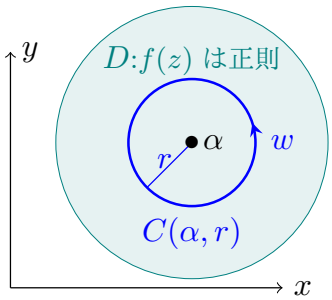
1.5.1　テイラー展開

テイラー展開

関数 $f(z)$ が点 $z=\alpha$ を中心とした円形の領域 D 内で正則であるとき、$f(z)$ はこの領域内で常に次の形のべき級数で展開できる（テイラー展開）。

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n \tag{114}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(\alpha,r)}\frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}dw\right)(z-\alpha)^n. \tag{115}$$



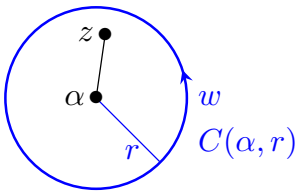
ただし $C(\alpha,r)$ は $w=\alpha$ を中心とした円周経路 $(\in D)$ である。

(証明)：コーシーの積分公式より

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(w)}{w-z}dw. \tag{116}$$

ここで、与えられた z に対して、円周経路 $C(\alpha,r)$ の半径 r を $|z-\alpha|$ より大きくとれば $|w-\alpha|=r>|z-\alpha|$ なので

$$\frac{f(w)}{w-z}=\frac{f(w)}{(w-\alpha)-(z-\alpha)}$$



$$=\frac{f(w)}{w-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)}=\frac{f(w)}{w-\alpha}\left[1+\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)+\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{f(w)}{w-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n\qquad\left(\text{for }\left|\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right|<1\right).\text{———}(\star) \tag{117}$$

(この辺り、板書ノート／講義録画で $\dfrac{f(z)}{\cdots}$ と書いていたのは全て $\dfrac{f(w)}{\cdots}$ の間違いです。すみません。後のローラン展開で同じようなことをもう 1 回やるので、そこで見直して下さい．．．。)

経路 $C(\alpha, r)$（$|w-\alpha| = r > |z-\alpha|$）の上でこの級数は一様に絶対収束するので、両辺を w で積分して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(\alpha,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw \quad (\because \text{コーシー}) \tag{118}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(\alpha,r)} \left[\frac{f(w)}{w-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n\right]dw \quad (\because (\star)) \tag{119}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(\alpha,r)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}dw\right)(z-\alpha)^n \quad (\because \text{一様収束}) \tag{120}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n \quad (\because \text{コーシー}) \quad \blacksquare \tag{121}$$

10/15、ここまで

10/15 までのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標　　1.2 準備（複素数、偏微分、テイラー展開）

1.3 複素関数とその微分、正則関数

1.3.3 $\boxed{\text{複素微分と正則関数（コーシー・リーマン）}}$

1.4 複素積分

1.4.1 複素線積分の定義と例

1.4.2 $\boxed{\text{コーシーの積分定理: } \oint_C f(z)dz = 0.}$ ($f(z)$ は C と内部で正則.)

1.4.3 $\boxed{\text{コーシーの積分公式・無限回微分可能性: } f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.}$

1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

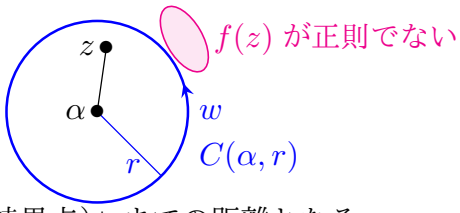
1.5.1 テイラー展開　$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n.$　← イマココ

(前回の板書ノート／講義録画で、最後の辺り、$\dfrac{f(z)}{\cdots}$ とあるのは全て $\dfrac{f(w)}{\cdots}$ の間違いです。すみません。後のローラン展開で同じようなことをもう 1 回やるので、そこで見直して下さい．．．。)

10/22、ここから

▶ テイラー展開

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(\alpha,r)}\frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}dw\right)(z-\alpha)^n,$$



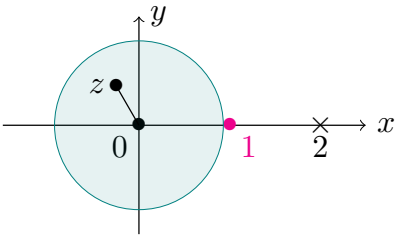
は、w の経路 $C(\alpha,r)$ が正則な範囲で取れる限り可能。

収束半径は α と「α から最も近い $f(z)$ が正則でない点（特異点）」までの距離となる。

▶ いくつかテイラー展開の具体例を見てみよう。まず 1.3.5 節で見たように、e^z, $\cos z$, $\sin z$ は原点 $z=0$ の周りのテイラー展開を用いて定義していた。（$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ など。）これらの展開は $|z|<\infty$ で正則であり、収束半径は無限大である。

▶ 次に特異点のある場合の例として、$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ をいくつかの点の周りでテイラー展開してみよう。

まず $z=0$ のまわりで展開すると

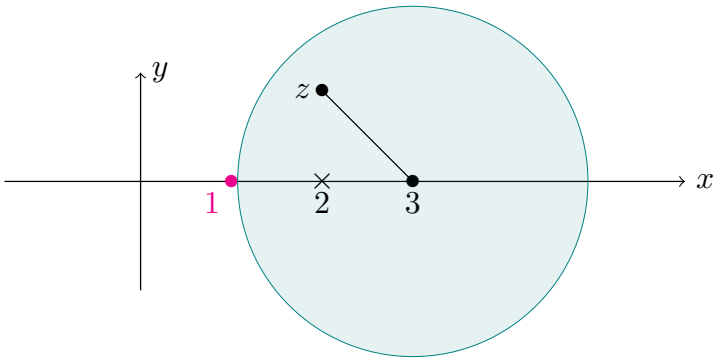


$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\quad(|z|<1).\qquad\text{———(i)}$$

収束半径は 1（$z=0$ から最寄りの特異点の $z=1$ までの距離）。

- 収束半径の中の点、例えば $z=1/2$ を代入すると、左辺は $\dfrac{1}{1-1/2}=2$ となって、右辺も $1+1/2+1/4+1/8+\cdots=2$ と収束して一致する。
- 収束半径の外の点、例えば $z=2$ を代入すると、左辺は $\dfrac{1}{1-2}=-1$ だけど、右辺は $1+2+4+8+\cdots$ となって発散してしまう。

▶ 同じ $\dfrac{1}{1-z}$ を $z=3$ のまわりで展開すると



$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{-2-(z-3)}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{z-3}{-2}\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3}{-2}\right)^n$$

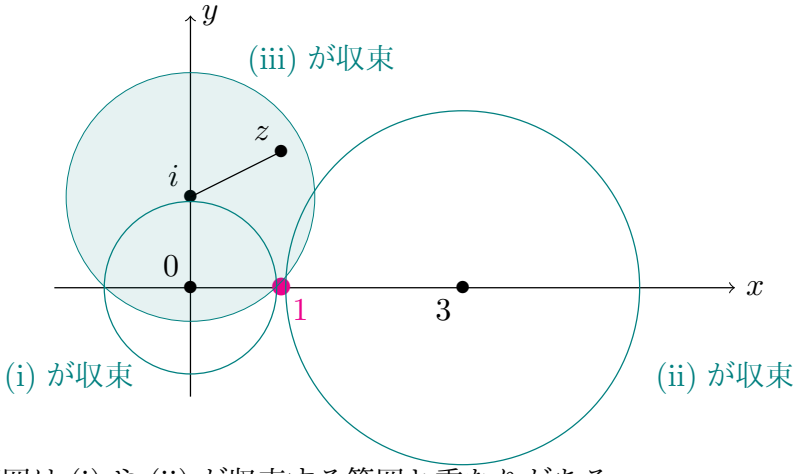
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z-3)^n \qquad (|z-3|<2). \quad \text{———(ii)}$$

収束半径は 2。今度は $z=2$ は収束半径の中に入っていて、右辺に代入すると、$(-1/2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n=-1$ に収束して、左辺と一致する。

▶ もう 1 つ、$z=i$ のまわりで展開してみると

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-i}\right)^{n+1}(z-i)^n \qquad (|z-i|<\sqrt{2}). \quad \text{———(iii)}$$

収束半径は $\sqrt{2}$。



(iii) が収束する範囲は (i) や (ii) が収束する範囲と重なりがある。

<u>重なっているところでは 2 つの異なるテイラー展開が同じ関数を表している。</u>

→ この「テイラー展開の重なり」は 1.6 節で再び見る。

レポート問題

[b-17] 1. 上の (iii) 式を示せ。

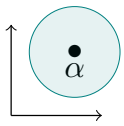
2. 上の (i) と (iii) の右辺が共に収束する点 $z = i/2$ においてそれぞれの級数を評価し、一致することを確認せよ。

[b-18] 1. $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$（$0 < |a| < |b|$）を $z = 0$ のまわりでテイラー展開し、[b-10] の結果を用いて収束半径が $|a|$ であることを確認せよ。

2. $f(z) = \sin z$ を $z = \alpha$ のまわりでテイラー展開し、[b-10] の結果を用いて収束半径が ∞ であることを確認せよ。

▶ またテイラー展開から次のことも言える。

ゼロ点の孤立



複素関数 $f(z)$ が点 $z = \alpha$ を中心とした円形領域 D で正則かつ $f(\alpha) = 0$ とする。このとき $f(z)$ が恒等的にゼロでない限り、$z = \alpha$ は「孤立したゼロ点」である。（$\exists\delta > 0$ s.t. $0 < |z-\alpha| < \delta \Longrightarrow f(z) \neq 0$.）

(証明): 仮定より $f(z)$ は $z = \alpha$ の周りで

$$f(z) = c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots \tag{122}$$

とテイラー展開できる。$f(\alpha) = 0$ より $c_0 = 0$。さらに「$f(z)$ が恒等的にゼロでない」と仮定すると、ある $c_m \neq 0$ $(m \geq 1)$ が存在して

$$f(z) = c_m(z-\alpha)^m + c_{m+1}(z-\alpha)^{m+1} + c_{m+2}(z-\alpha)^{m+2} + \cdots . \tag{123}$$

$$= (z-\alpha)^m \underbrace{\left(c_m + c_{m+1}(z-\alpha) + c_{m+2}(z-\alpha)^2 + \cdots\right)}_{f_m(z)} . \tag{124}$$

$f_m(z)$ の連続性と $f_m(\alpha) = c_m \neq 0$ から、$\exists\delta > 0$ s.t. $0 < |z-\alpha| < \delta \Longrightarrow f_m(z) \neq 0$. よって同じ δ に対して $0 < |z-\alpha| < \delta \Longrightarrow f(z) \neq 0$. ■

($f_m(z)$ の絶対収束と連続性については証明略。)

コメント (i) 正則関数でなければ必ずしも「ゼロ点の孤立」は成り立たない。

（例：$f(z) = z + \overline{z}$ は虚軸上 $(z = iy)$ で連続的に $f(z) = 0$。）

(ii) $f(z) = (z-1)(z-2)$ のように、離れたゼロ点があることはある。

(iii) 上の「ゼロ点の孤立」は 1.6 節の解析接続で用いる。

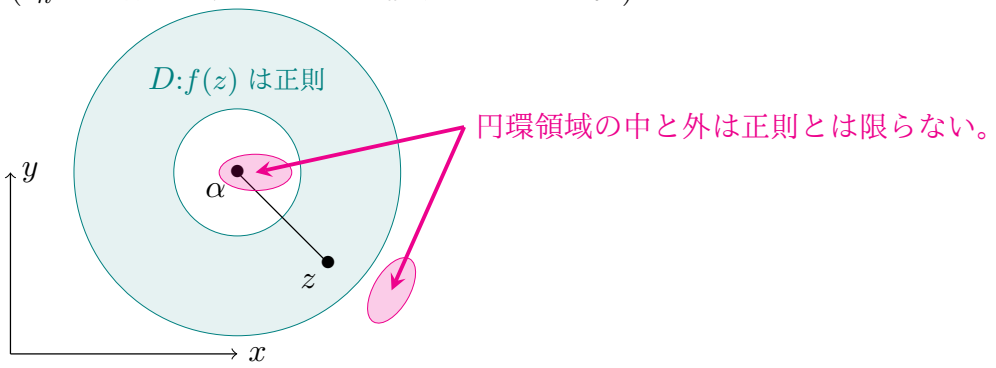
1.5.2 ローラン展開と留数

ローラン展開

関数 $f(z)$ が点 $z=\alpha$ を中心とした円環領域 D $(0<r_1<|z-\alpha|<r_2)$ 内で正則であるとき、$f(z)$ はこの領域内で常に次の形で展開できる。（ローラン展開）

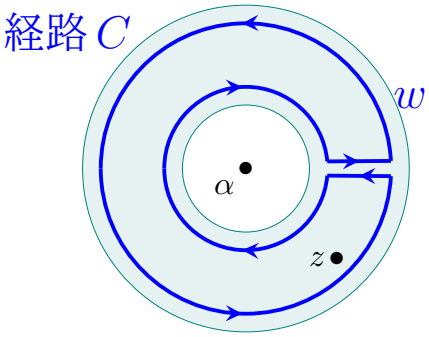
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n = c_0+c_1(z-\alpha)+c_2(z-\alpha)^2+\cdots + \frac{c_{-1}}{z-\alpha}+\frac{c_{-2}}{(z-\alpha)^2}+\frac{c_{-3}}{(z-\alpha)^3}+\cdots. \quad (125)$$

(c_n の具体的な表式は以下の証明の中で示す。)



(証明)

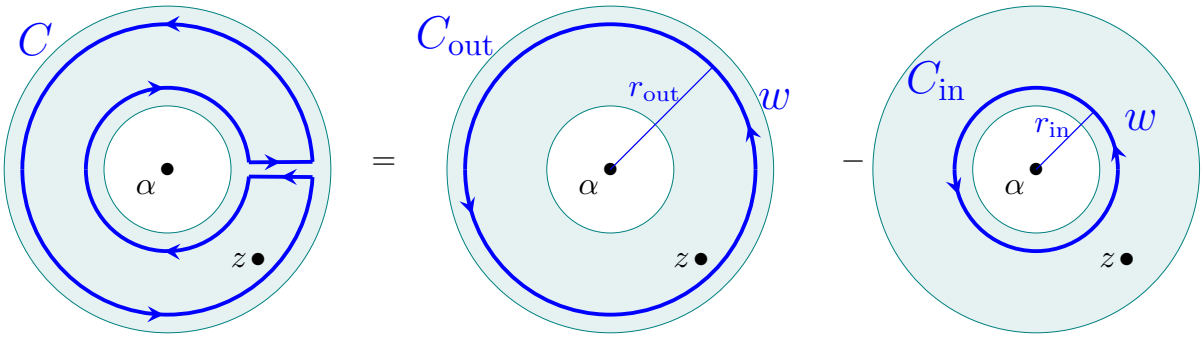
図のような経路 C を考える。C 内で $f(z)$ は正則なので、コーシーの積分公式より



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}dw. \quad (126)$$

経路 C は $C_{\mathrm{out}}=C(\alpha,r_{\mathrm{out}})$ と $C_{\mathrm{in}}=C(\alpha,r_{\mathrm{in}})$ を用いて $C=C_{\mathrm{out}}-C_{\mathrm{in}}$ と分け

られるので



$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\mathrm{out}}} \frac{f(w)}{w-z}dw}_{f_{\mathrm{out}}(z)} + \underbrace{\frac{-1}{2\pi i}\oint_{C_{\mathrm{in}}} \frac{f(w)}{w-z}dw}_{f_{\mathrm{in}}(z)}. \tag{127}$$

まず $f_{\mathrm{out}}(z)$ の中の $\dfrac{1}{w-z}$ は、積分変数 w が経路 C_{out} 上で $|w-\alpha| = r_{\mathrm{out}} > |z-\alpha|$ を満たすので

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-\alpha)-(z-\alpha)} = \frac{1}{w-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-\alpha}{w-\alpha}} = \frac{1}{w-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n, \tag{128}$$

と展開できる。級数は C_{out} 上で一様絶対収束するので

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{out}}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\mathrm{out}}} \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\mathrm{out}}} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(w-\alpha)^{n+1}}dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\mathrm{out}}} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}dw\right)}_{c_n\ (n\geq 0)}(z-\alpha)^n \qquad (129) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n. \qquad (130) \end{aligned}$$

次に $f_{\mathrm{in}}(z)$ の中の $\dfrac{1}{w-z}$ は、経路 C_{in} 上で $|w-\alpha| = r_{\mathrm{in}} < |z-\alpha|$ なので

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-\alpha)-(z-\alpha)} = \frac{-1}{z-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}} = \frac{-1}{z-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right)^n, \tag{131}$$

と展開できる。級数は C_{in} 上で一様絶対収束するので

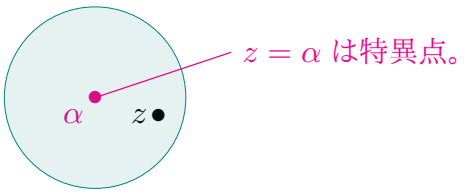
$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{in}}(z) &= \frac{-1}{2\pi i}\oint_{C_{\mathrm{in}}} \frac{f(w)}{w-z}dw \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\oint_{C_{\mathrm{in}}} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(w-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}}dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{\mathrm{in}}} f(w)(w-\alpha)^n dw\right)}_{c_{-n-1}\ (n\geq 0)}\frac{1}{(z-\alpha)^{n+1}} \qquad (132)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-\alpha)^{-n}. \qquad (133)
\end{aligned}
$$

以上より

$$
f(z) = f_{\mathrm{out}}(z) + f_{\mathrm{in}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n. \quad \blacksquare \qquad (134)
$$

- ローラン展開はテイラー展開を含む。 もし円環領域の内側で $f(z)$ が正則なら、$f_{\mathrm{in}}(z)=0$ であり、$c_{-1}=c_{-2}=\cdots=0$ となるので、ローラン展開はテイラー展開に帰着する。
- 特に「孤立特異点のまわりのローラン展開」が重要である。

$f(z)$ が $z=\alpha$ を中心とした円形領域 D 内で
$z=\alpha$ を除いて正則なとき、



$$
\begin{aligned}
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n &= c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + \frac{c_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{c_{-3}}{(z-\alpha)^3} + \cdots. \qquad (135)
\end{aligned}
$$

と展開できる。係数は円周経路 $C(\alpha,r)\in D$ を用いて

$$
c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(\alpha,r)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz, \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \qquad (136)
$$

で与えられる。

言葉をいくつか定義する。

- α が $f(z)$ の孤立特異点である。
  $\iff z=\alpha$ が特異点、かつ $\exists r>0$, s.t. $0<|z-\alpha|<r \longrightarrow f(z)$ が正則。
- 負べきの次数に最大値 m があるとき α を $f(z)$ の m 位の極という。
- 負べきの次数に上限がなく無限に続くとき、α を $f(z)$ の真性特異点という。
- 孤立特異点のまわりのローラン展開の -1 次の係数 c_{-1} を留数という。

$$\boxed{\text{留数: } \mathrm{Res}(f,\alpha)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C(\alpha,r)} f(z)dz.}$$

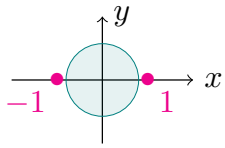
→ 次節 1.5.3 の主役。

- 特異点については 1.5.5 でまたやる。（その前に早く次の留数定理を紹介したい！）

▶ (留数定理に行く前に) ローラン展開の具体例をいくつか見ておこう。例として

$$f(z)=\frac{z}{z^2-1}. \tag{137}$$

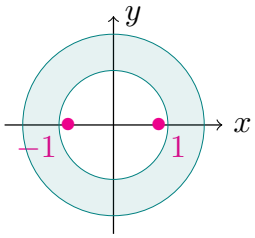
を考える。まず $z=0$ のまわりで $|z|<1$ の範囲で展開すると、



$$\begin{aligned} f(z)&=(-z)\frac{1}{1-z^2}=(-z)\sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n \\ &=-z-z^3-z^5-\cdots. \quad (|z|<1). \end{aligned} \tag{138}$$

これはただのテイラー展開。

▶ 次に同じ $z=0$ のまわりで、今度は $|z|>1$ で展開すると

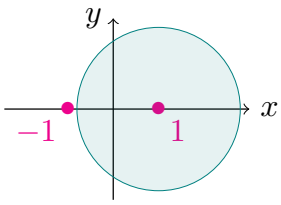


$$\begin{aligned} f(z)&=\frac{z}{z^2-1}=\frac{z}{z^2}\cdot\frac{1}{1-1/z^2}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n \\ &=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\cdots \quad (|z|>1). \end{aligned} \tag{139}$$

このときローラン展開の -1 次の係数は $c_{-1}=1$ だが、これは留数とは呼ばない。（孤立特異点のまわりの展開ではないため。）

▶ 今度は孤立特異点 $z=1$ のまわりで、$0<|z-1|<2$ の範囲でローラン展開して

みよう。



$$f(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) \tag{140}$$

であり、第二項は

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n \quad (|z-1|<2), \tag{141}$$

と展開できるので、結局

$$f(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}(z-1)^n \quad (0<|z-1|<2), \tag{142}$$

となる。したがって $z=1$ における留数は $\mathrm{Res}(f,1)=1/2$ となる。

レポート問題

[b-19]

1. 上の例 $f(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$ について、$z=-1$ のまわりで $0<|z+1|<2$ の範囲でローラン展開し、$z=-1$ での留数 $\mathrm{Res}(f,-1)$ を求めよ。
2. 同じ関数 $f(z)$ について $z=-1$ のまわりで、$|z+1|>2$ の範囲でローラン展開せよ。
3. $\cos(1/z)$ を $z=0$ のまわりでローラン展開せよ。

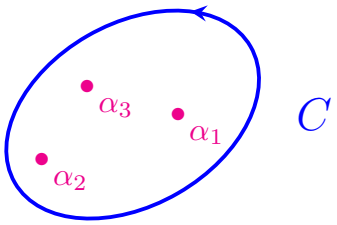
1.5.3 留数定理

(やっとここまで来た！ついに留数定理！)

留数定理

関数 $f(z)$ が閉じた経路 C（正の向き）の内部で N 個の孤立特異点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_N$ を除いて正則であるとき

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f, \alpha_k). \tag{143}$$

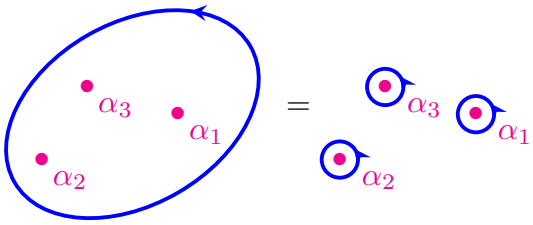


周積分の値は、内部の留数の和だけで決まる。

(証明): ここまでやってきたことを組み合わせるだけ。

1. まず経路を分割。（コーシーの積分定理）

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{N} \oint_{C_k} f(z)dz.$$



2. 次に各経路でローラン展開。

$$\oint_{C_k} f(z)dz = \oint_{C_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} (z-\alpha_k)^n dz = \oint_{C_k} \left[\cdots + \frac{c_{-1}^{(k)}}{z-\alpha_k} + c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(z-\alpha_k) + \cdots \right] dz \tag{144}$$

3. それぞれの経路で $z(\theta) = \alpha_k + re^{i\theta}$ として円周積分すると、

$$\oint_{C_k} (z-\alpha_k)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases} \quad (1.4.1 \text{ 節参照}) \tag{145}$$

$$\therefore \oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \; c_{-1}^{(k)} = 2\pi i \; \mathrm{Res}(f, \alpha_k). \tag{146}$$

$$\therefore \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f, \alpha_k). \quad \blacksquare \tag{147}$$

留数の求め方

定義によれば、それぞれの孤立特定点のまわりでローラン展開して

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}^{(k)}}{(z-\alpha_k)^2} + \frac{c_{-1}^{(k)}}{z-\alpha_k} + c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(z-\alpha_k) + c_2^{(k)}(z-\alpha_k)^2 + \cdots, \quad (148)$$

この $c_{-1}^{(k)}$ が留数となる。しかし、いちいち展開しなくても留数を求める方法がある。

- ▶ まず $z=\alpha$ が 1 位の極である場合は、そのまわりで

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots, \quad (149)$$

と展開できるので、

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = c_{-1} = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z), \quad (150)$$

とすれば留数が求まる。

- ▶ 一般に $z=\alpha$ が m 位の極である場合は、そのまわりで

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-\alpha)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-\alpha} + c_0 + c_1(z-\alpha) + \cdots, \quad (151)$$

と展開できるので、

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,\alpha) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-\alpha)^m f(z)\Big)}, \quad (152)$$

とすれば留数が求まる。

- ▶ 例：$f(z) = \dfrac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)^3}$ $(\alpha \neq \beta)$ は $z=\alpha$ に 1 位の極、$z=\beta$ に 3 位の極を持つ。それぞれの留数は

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \frac{1}{(\alpha-\beta)^3}, \quad (153)$$

$$\mathrm{Res}(f,\beta) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to\beta}\frac{d^2}{dz^2}\Big((z-\beta)^3 f(z)\Big) = \frac{1}{(\beta-\alpha)^3}. \quad (154)$$

レポート問題

[b-20] [b-13], [b-14] の問題を、留数定理を用いて解け。（すでにあちらの問題で留数定理を使ってしまっている場合は、こちらはナシにしましょう...）

[b-21]
1. $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ の全ての極とそこでの留数を求めよ。
2. $\displaystyle\oint_{C(0,1)} z^2 \sin(1/z)dz$ を求めよ。

1.5.4　実数積分への応用

留数定理を使うと、様々な実数積分が (簡単に) 計算できる！

1.5.4.A 三角関数の 1 周積分

▶ [b-15] に出てきた

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta} d\theta. \tag{155}$$

を留数積分を用いて求めてみよう。 (レポートの答が出てしまいますが、まぁいいでしょう。) これは、(i) 経路 $C(0,1)$: $z(\theta) = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ を考え、(ii) $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$ を代入し、(iii) $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ とした複素周積分

$$\oint_{C(0,1)} \frac{1}{5+3\left(\dfrac{z+z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz}, \tag{156}$$

で求められる。実際、パラメータ表示を代入すると

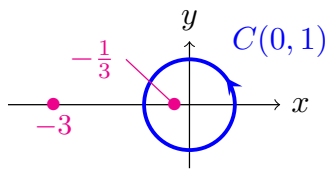
$$(\text{上式}) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\left(\dfrac{z(\theta)+z(\theta)^{-1}}{2}\right)} \underbrace{\frac{1}{iz(\theta)} \frac{dz(\theta)}{d\theta}}_{=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta} d\theta = I. \tag{157}$$

となって元の実数積分に帰着する。複素積分は留数定理で簡単に求められて

$$I = \oint_{C(0,1)} \frac{1}{5+3\left(\dfrac{z+z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz} = \oint_{C(0,1)} \frac{-2i}{10z+3z^2+3} dz \tag{158}$$

$$= \oint_{C(0,1)} \underbrace{\frac{-2i}{3(z+1/3)(z+3)}}_{f(z)} dz. \tag{159}$$

ここで $C(0,1)$ 内に特異点は $z = -1/3$ だけなので、



$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1/3) \tag{160}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -1/3} (z+1/3) f(z) = \frac{\pi}{2}. \tag{161}$$

と答が求まる。

► 一般に、$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の関数の 1 周積分

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta, \tag{162}$$

は上の例と同様にして (i) 経路 $C(0,1)$: $z(\theta) = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ を考え、(ii) $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$ を代入し、(iii) $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ とすれば、複素周積分に帰着できて

$$I = \oint_{C(0,1)} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}. \tag{163}$$

で与えられる。特に、$R(\cos\theta, \sin\theta)$ が有理関数

$$R(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q(\cos\theta, \sin\theta)} \qquad (P, Q \text{ は } \cos\theta, \sin\theta \text{ の多項式}) \tag{164}$$

のときは（経路上で Q がゼロになる場合を除いて）留数積分で計算できる。

レポート問題

[b-22] **[b-23]** **[b-24]** 上の例のように、$\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ の形の実数積分が留数定理によって計算できる例を自分で考え、積分値を求めよ。（ただし $R(\cos\theta, \sin\theta)^{-1} \neq 0$ for $0 \le \theta \le 2\pi$ とする。）1 人最大 3 つまで。 (※今後、講義や演習でこの形の例が出てくるかもしれないですが、ノートや演習問題の公開前の提出なら重複しても良いものとします。) （一人 3 個までってスーパーの納豆売り場みたいですね。）

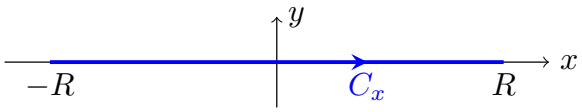
1.5.4.B 無限遠の積分路の追加

▶ 以下のような、$\pm\infty$ の範囲の実数積分を考えよう。

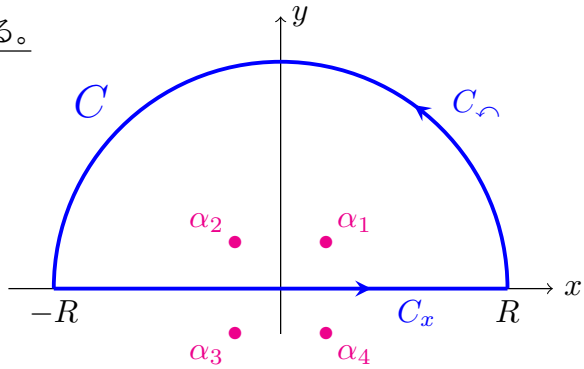
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx. \tag{165}$$

▶ これは複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ の実軸上の経路 C_x に沿った複素線積分だと考えることが出来る。 (分かりにくければ、$z(x) = x$ とパラメータ表示を考えよう。)

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{C_x} f(z)dz. \tag{166}$$



▶ 関数 $f(z)$ は複素平面上に孤立特異点を持っている。そこで留数定理を用いるために半径 R の半円経路 $C_{\curvearrowleft}$ を追加した周積分を考える。



$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_x} f(z)dz + \int_{C_{\curvearrowleft}} f(z)dz.$$

$$\therefore \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{C_x} f(z)dz}_{\text{求めたい量 } I} = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)dz - \lim_{R\to\infty} \int_{C_{\curvearrowleft}} f(z)dz. \tag{167}$$

以下、右辺の第一項と第二項を計算する。

▶ まず第一項（周積分）を留数定理で求める。$f(z)$ は 4 つの孤立特異点 $\alpha_1 = e^{\pi i/4}$, $\alpha_2 = e^{3\pi i/4}$, $\alpha_3 = -\alpha_1$, $\alpha_4 = -\alpha_2$ を持つが、このうち経路 C の中にあるのは α_1, α_2 の 2 つである。それぞれの留数は $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-\alpha_1^2)(z^2-\alpha_2^2)}$ を用いて

$$\mathrm{Res}(f, \alpha_1) = \lim_{z\to\alpha_1} (z-\alpha_1) f(z) = \frac{1}{2\alpha_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2)} = \frac{1}{4i\alpha_1}, \tag{168}$$

$$\mathrm{Res}(f, \alpha_2) = \lim_{z\to\alpha_2} (z-\alpha_2) f(z) = \frac{1}{2\alpha_2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)} = \frac{1}{-4i\alpha_2}, \tag{169}$$

と計算できるので、結局

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1,2} \mathrm{Res}(f, \alpha_k) = 2\pi i \left(\frac{1}{4i\alpha_1} - \frac{1}{4i\alpha_2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{170}$$

▶ 次に第二項（追加した半円の経路積分）がゼロになることを示す。一般に[*2]

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \max_{z\in C}|f(z)|\cdot(C\text{ の経路長}), \tag{171}$$

なので、今の場合に適用して

$$\left|\int_{C_\frown} f(z)dz\right| \leq \max_{z\in C_\frown}|f(z)|\cdot(C_\frown\text{の経路長}) \tag{172}$$

$$= \max_{z\in C_\frown}\left|\frac{1}{z^4+1}\right|\cdot(C_\frown\text{の経路長}) \tag{173}$$

$$= \frac{1}{|R^4-1|}\cdot\pi R \quad \xrightarrow{R\to\infty} 0. \tag{174}$$

▶ したがって、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx \tag{175}$$

$$= \underbrace{\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)dz}_{\text{留数積分}} - \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{C_\frown} f(z)dz}_{=0} \tag{176}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \tag{177}$$

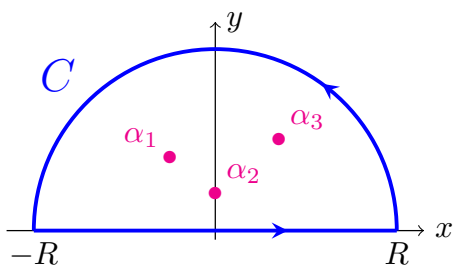
と計算できた。

▶ 一般に $f(z)$ が

1. 実軸上に特異点を持たない。
2. 上半面（$\mathrm{Im}z>0$）に有限個の極をもつ。
3. 上半面の半円周積分 $\xrightarrow{R\to\infty} 0$。$\left(\lim_{R\to\infty}|Rf(Re^{i\theta})| = 0 \text{ for } 0\leq\theta\leq\pi\right)$

の条件をみたすとき、上の例と同様にして計算できて

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}\ \alpha_k>0}\mathrm{Res}(f,\alpha_k).$$

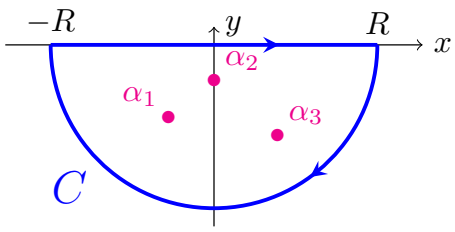


のように±∞ の範囲の実数積分が留数計算に帰着できる。

*2 この不等式は 1.4.2 節でコーシーの積分定理の証明でも使いましたね。もっと早い段階で一般論として紹介すべきだったかな。

▶ 下半面の半円周積分がゼロになる場合 $\left(\lim_{R\to\infty}|Rf(Re^{i\theta})| = 0 \text{ for } -\pi \le \theta \le 0\right)$ も同様で、経路を下半面で閉じて

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ \alpha_k<0} \mathrm{Res}(f, \alpha_k).$$



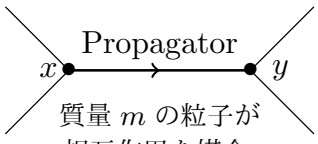
レポート問題

[b-25] **[b-26]** **[b-27]** 上の例のように、$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ の形の実数積分が「無限遠の積分路の追加」と留数定理によって計算できる例を自分で考え、積分値を求めよ。1 人最大 3 つまで。（今後の講義や演習でこの形の例が出てくるかもしれませんが、ノートや演習問題の公開前の提出なら重複可とします。）

レポート問題

[c-9] 「場の量子論」において、以下のような “Feynman Propagator” という量が重要な役割を果たす。

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}$$



質量 m の粒子が
相互作用を媒介.

$$\text{where} \quad \begin{cases} p = (p^0, \vec{p}), \\ x = (x^0, \vec{x}), \end{cases} \quad \begin{cases} p^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}\,|^2, \\ p\cdot(x-y) = p^0(x^0-y^0) - \vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y}). \end{cases}$$

$$\int d^4p = \int d^3\vec{p} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0.$$

留数定理を用いて p^0 積分を実行し

$$D_F(x-y) \xrightarrow{\epsilon>0,\epsilon\to 0} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \times \begin{cases} e^{-ip\cdot(x-y)}\Big|_{p^0=E_p} & (\text{for } x^0 > y^0) \\ e^{-ip\cdot(y-x)}\Big|_{p^0=E_p} & (\text{for } y^0 > x^0) \end{cases}$$

$$\text{where} \quad E_p = \sqrt{|\vec{p}\,|^2 + m^2}$$

を示せ。

—————— **10/22、ここまで** ——————

10/22 までのあらすじ

§ 1 複素関数論

(10/1〜10/8) 1.1 目標、1.2 準備、1.3 複素微分・正則関数 (∋ コーシー・リーマン)

(10/8〜15) 1.4 複素積分

1.4.2 $\boxed{\text{コーシーの積分定理: } \oint_C f(z)dz = 0.}$

1.4.3 $\boxed{\text{コーシーの積分公式: } f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw. \text{ ・無限回微分可能性}}$

(10/15〜22〜29) 1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

1.5.1 テイラー展開

1.5.2 $\boxed{\text{ローラン展開と留数: } \begin{cases} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n & (\ni \text{テイラー展開}) \\ \mathrm{Res}(f,\alpha) = c_{-1}. \end{cases}}$

1.5.3 $\boxed{\text{留数定理: } \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f,\alpha_k).}$

1.5.4 実数積分への応用 ← イマココ

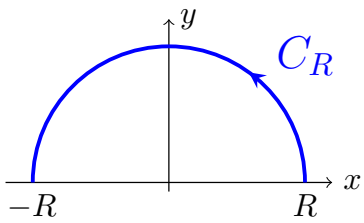
1.5.4.A: $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

1.5.4.B: 無限遠の積分路の追加

—————— **10/29、ここから** ——————

1.5.4.C ジョルダンの補助定理を使う例

▶ ジョルダンの補助定理:



上半面の半円経路 C_R（$z = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi$）と $a > 0$ に対して、

$$f(z) \xrightarrow{R\to\infty} 0 \text{ for } \forall z \in C_R \quad \Longrightarrow \quad \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \xrightarrow{R\to\infty} 0. \tag{178}$$

レポート問題

[c-10] 以下の手順でジョルダンの補助定理を示せ。

(i) $\max_{z\in C_R} |f(z)| = M(R)$ とするとき、
$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \le M(R)\ R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} d\theta.$ を示せ。

(ii) $\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta} d\theta$ を示せ。

(iii) $\sin\theta \ge (2/\pi)\theta$ for $0 \le \theta \le \pi/2$ を示せ。

(iv) (iii) の結果を用いて $R\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta} d\theta < \dfrac{\pi}{2a}$ を示せ。

(v) 以上を組み合わせてジョルダンの補助定理を示せ。

▶ ジョルダンの補助定理を使う例 :[*3]

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \tag{179}$$

まず式変形して

$$I = \lim_{R\to\infty,\epsilon\to+0} \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx \tag{180}$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \lim_{R\to\infty,\epsilon\to+0} \int_{\epsilon}^{R} \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x} \right) dx. \tag{181}$$

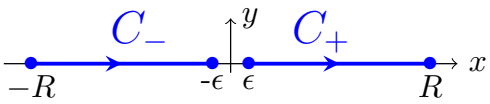
ただし $\epsilon \to +0$ は $\epsilon > 0, \epsilon \to 0$ の意味である。第二項は $x \to -x$ と変数変換して

$$-\int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx = -\int_{-\epsilon}^{-R} \frac{e^{ix}}{-x}(-dx) = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx. \tag{182}$$

[*3] (上の途中計算でも使えます。)

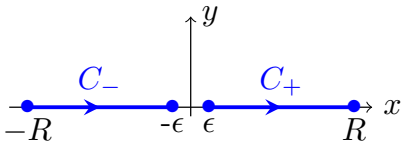
よって

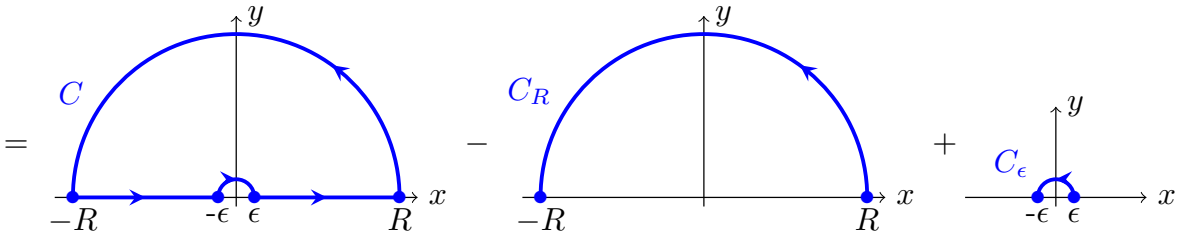
$$I = \frac{1}{2i} \cdot \lim_{R\to\infty,\epsilon\to+0} \left(\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$



$$= \frac{1}{2i} \cdot \lim_{R\to\infty,\epsilon\to+0} \int_{C_+ + C_-} f(z)dz. \quad \left(f(z) = \frac{e^{iz}}{z}. \right) \tag{183}$$

ここで半径 ϵ と R の半円を加えて





$$2iI = \lim_{R\to\infty,\epsilon\to+0} \int_{C_- + C_+} f(z)dz = \lim_{R\to\infty,\epsilon\to+0} \left(\oint_C - \int_{C_R} + \int_{C_\epsilon} \right) f(z)dz \tag{184}$$

まず、C の内部に $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ の特異点はないので $\displaystyle\oint_C f(z)dz = 0.$

次に、<u>ジョルダンの補助定理より</u>、$\displaystyle\oint_{C_R} f(z)dz \xrightarrow{R\to\infty} 0.$

最後に、経路 C_ϵ は $z(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi)$ とパラメータ表示できるので

$$\int_{C_\epsilon} f(z)dz = \int_0^\pi f(\epsilon e^{i\theta}) \frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{d\theta} d\theta \tag{185}$$

$$= \int_0^\pi \frac{\exp(i\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \tag{186}$$

$$= i \int_0^\pi \left(1 + i\epsilon e^{i\theta} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) d\theta \xrightarrow{\epsilon\to 0} \pi i. \tag{187}$$

よって

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{188}$$

1.5.4.D 主値積分

▶ 前節 1.5.4.C の途中計算で $\lim_{\epsilon\to+0}\left(\int^{-\epsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\epsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx\right)$ という形が出てきた。一般に、実関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ 内に $x=c$ に特異点を持つとき、特異点をはさんで微小距離 $\pm\epsilon$ 離れたところまでの積分を実行し、足してから $\epsilon\to 0$ とする、という

$$\text{主値積分}:\quad P\int_a^b f(x)dx=\lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\epsilon}f(x)dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right). \tag{189}$$

が定義できる。

▶ 例：

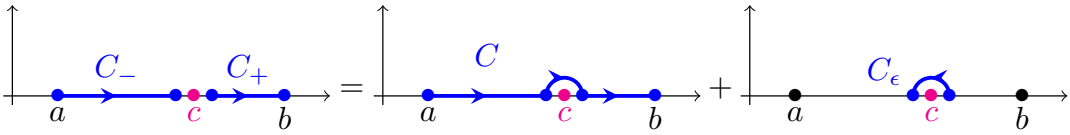
$$P\int_0^3\frac{1}{x-1}dx=\lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_0^{1-\epsilon}\frac{1}{x-1}dx+\int_{1+\epsilon}^3\frac{1}{x-1}dx\right)$$
$$=\lim_{\epsilon\to+0}\left([\ln|x-1|]_0^{1-\epsilon}+[\ln(x-1)]_{1+\epsilon}^3\right)=\lim_{\epsilon\to+0}(\ln\epsilon-0+\ln 2-\ln\epsilon)=\ln 2.$$

両サイドの微小区間 (ϵ) が異なると発散してしまうことに注意。

▶ 複素積分との関係

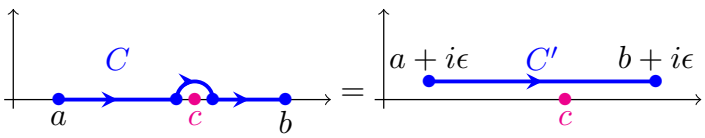
$$P\int_a^b\frac{f(x)}{x-c}dx=\lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\epsilon}\frac{f(x)}{x-c}dx+\int_{c+\epsilon}^b\frac{f(x)}{x-c})dx\right), \tag{190}$$

の形の主値積分を求めたいとしよう。ただし $f(x)$ を複素数に拡張した $f(z)$ は実軸上 $[a,b]$ の近くで正則であるとする。前節 1.5.4.C で行なったように半径 ϵ の半円を足した経路 C を考えると



$$P\int_a^b\frac{f(x)}{x-c}dx=\lim_{\epsilon\to+0}\int_{C_-+C_+}\frac{f(z)}{z-c}dz=\lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_C\frac{f(z)}{z-c}dz+\int_{C_\epsilon}\frac{f(z)}{z-c}dz\right). \tag{191}$$

経路 C は、少しだけずらすと



$$\int_C\frac{f(z)}{z-c}dz=\int_{C'}\frac{f(z)}{z-c}dz=\int_a^b\frac{f(x)}{x+i\epsilon-c}dx. \tag{192}$$

一方、経路 C_ϵ の積分は $z(\theta) = c + \epsilon e^{i\theta}$ とパラメータ表示して

$$\int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-c} dz = \int_0^\pi \frac{f(z(\theta))}{z(\theta)-c} \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta = \int_0^\pi f(c+\epsilon e^{i\theta}) i d\theta \xrightarrow{\epsilon \to 0} \pi i f(c). \quad (193)$$

以上より

$$P\int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x+i\epsilon-c} dx + \pi i f(c). \quad (194)$$

同様にして、下半面 ($\mathrm{Im} z < 0$) の半円を経路を考えると

$$P\int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x-i\epsilon-c} dx - \pi i f(c). \quad (195)$$

これらの式は（正則関数と共に積分されることを前提に）形式的に

$$\boxed{\begin{aligned} P\frac{1}{x-c} &= \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{x-c+i\epsilon} + \pi i \delta(x-c) \\ &= \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{x-c-i\epsilon} - \pi i \delta(x-c). \end{aligned}} \quad (196)$$

と書ける。ただし $\delta(x)$ はデルタ関数で、

$$\delta(x) = 0 \text{ for } x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-c) dx = f(c). \quad (197)$$

を満たす。さらに上の式から次の式も得られる。

$$\boxed{\lim_{\epsilon \to +0} \left(\frac{1}{x-c-i\epsilon} - \frac{1}{x-c+i\epsilon} \right) = 2\pi i \delta(x-c)}. \quad (198)$$

(物理学演習 No.4 に関連問題あり。)

▶ <u>分散関係式</u>

上の結果より、$f(z)$ が実軸上 $(-\infty, \infty)$ で特異点を持たない場合は

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x+i\epsilon-a} dx + \pi i f(a). \quad (199)$$

特に、$f(z)$ が複素平面の上半面で正則かつ $|f(Re^{i\theta})| \xrightarrow{R \to \infty} 0$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ を満たすときは、右辺第一項の積分を半径 $R \to \infty$ の上半面半円で閉じてゼロになるので

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \pi i f(a). \quad (200)$$

両辺の実部と虚部をとると

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}f(a) &= \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}f(x)}{x-a}dx. \\ \mathrm{Im}f(a) &= -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}f(x)}{x-a}dx. \end{aligned}} \quad (a \text{ は実数}) \tag{201}$$

これらは「複素平面の上半面で正則かつ $|f(z)| \xrightarrow{\mathrm{Im}z>0,\ |z|\to\infty} 0$ を満たすような関数 $f(z)$」の実部（虚部）を虚部（実部）の積分を用いて表した式で、「分散関係式」「クラマース・クローニッヒの関係式」などと呼ばれ、線形応答理論など様々な場面で登場する。

レポート問題

[b-28] 条件を満たす具体的な関数 $f(z)$ を一つ代入してクラマース・クローニッヒの関係式の両辺を計算し、一致することを確認せよ。

1.5.4.E (虚軸方向にずらした) ガウス積分

▶ k を実数とするとき、以下の実数積分を考えたい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-ikx}dx. \tag{202}$$

コメント

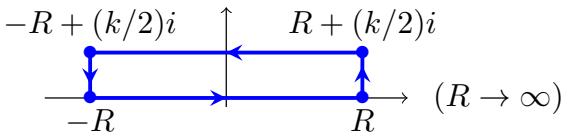
1. この形の積分も様々な場面で登場する。
   (例: 熱伝導方程式 $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \nu\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ のフーリエ変換での解法。)
2. $k=0$ の場合のガウス積分については以下のように求められる。

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dxdye^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} 2\pi rdre^{-r^2} = \left[-\pi e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi.$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \tag{203}$$

レポート問題

[b-29] 図のような経路を考えることによって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-ikx}dx$ を求めよ。



1.5.4.F 直交多項式への応用 (物理数学 2 の予習)

レポート問題

[d-2] ロドリゲスの公式

$$P_n(x) = c_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(w(x) Q(x)^n \right), \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{204}$$

に以下の表の式を代入すると、様々な直交多項式が得られる。[a][b]

c_n	$w(x)$	$Q(x)$	名前
$(-1)^n/(2^n n!)$	1	$1-x^2$	ルジャンドル多項式
1	e^{-x}	x	ラゲール多項式
$(-1)^n$	e^{-x^2}	1	エルミート多項式

(205)

1. $n = 0, 1, 2$ の場合について 3 つの多項式の具体的な形を求めよ。
2. ロドリゲスの公式は、コーシーの積分公式を用いて

$$P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} c_n \frac{1}{w(x)} \oint_C \frac{w(z)Q(z)^n}{(z-x)^{n+1}} dz, \tag{206}$$

と書きかえられる。(C は x を中心とした周経路。) この式と、適当な経路と留数定理を用いることによって、上の 3 つの多項式がそれぞれ母関数

$$g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n \quad \text{または} \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{y^n}{n!} \tag{207}$$

の形にまとめられることを示し、母関数の具体的な形を導出せよ。[c]

3. 各多項式について、(A) 直交性、(B) 微分方程式、(C) 漸化式、について調べて、簡潔に説明せよ。

---

[a] 規格化因子 c_n は慣習によって異なる定義の場合もあります。

[b] この他にも、ヤコビ多項式、ゲーゲンバウア多項式、チェビシェフ多項式などが同じ表式から得られます。

[c] 母関数を用いて直交多項式を定義することも出来ます。ここではそうせずに、ロドリゲスの公式から出発して母関数を導いてください、という問題です。

1.5.4.G 分散関係式 (追加しました)

► もう 1 つ積分路の工夫による例を紹介しよう。$f(z)$ が以下の条件を満たすとする。

- $f(z)$ は実軸上の区間 $I=[a,\infty)$ を除いて正則である。
- $f(z) \xrightarrow{|z|\to\infty} 0.$
- $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$

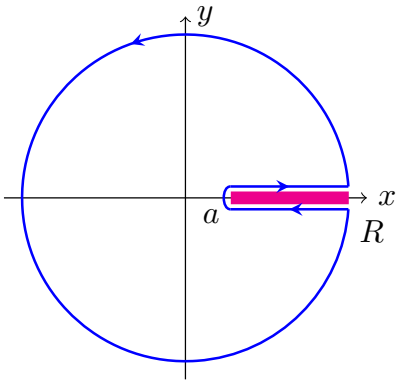
このとき $f(z)$ は以下の関係式を満たす。

$$f(z) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_a^\infty \frac{\mathrm{Im} f(x+i\epsilon)}{x-z}dx. \tag{208}$$

この式も分散関係式と呼ばれ、様々な場面で登場する。[*4]

(証明) 右のような経路 C を考える。コーシーの積分公式より C 内の任意の点 z に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}dw. \tag{209}$$



仮定より円周上の積分は $R\to\infty$ で消えるので

$$f(z) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{a+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon}\frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{a-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon}\frac{f(w)}{w-z}dw\right) \tag{210}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_a^\infty\left(\frac{f(w+i\epsilon)}{w-z+i\epsilon} - \frac{f(w-i\epsilon)}{w-z-i\epsilon}\right)dw \tag{211}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_a^\infty \frac{f(w+i\epsilon)-f(w-i\epsilon)}{w-z}dw \tag{212}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_a^\infty \frac{f(w+i\epsilon)-\overline{f(w+i\epsilon)}}{w-z}dw = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_a^\infty \frac{\mathrm{Im} f(w+i\epsilon)}{w-z}dw. \blacksquare$$

*4 コメント：素粒子物理の分野だと、例えばミューオン異常磁気能率 $g_\mu - 2$ への量子補正の計算において重要な役割を果たしています。(左辺が $g_\mu - 2$ へのハドロン真空偏極の寄与の計算に登場し、その評価のために右辺を (光学定理と共に) 用いて、ハドロン対生成断面積の実験値を代入する... といった事をやります。最新のレビュー文献はこちら。) [コメントのコメント：以前からミューオン $g_\mu - 2$ には「標準模型の予言値」と「観測値」の間に 3σ 以上のズレが報告されており、ひょっとしたら「標準模型を超える物理」のヒントかもしれない、と注目を集めています。(僕もいくつか関連する論文を書きました。コレとか。) 近々新しい実験結果も出ると期待されています。]

1.5.5 特異点について

1.5 節を終える前に、特異点についていくつかコメントしておく。

- ▶ 孤立特異点の分類：（1.5.2 節のローラン展開を参照）
  複素関数 $f(z)$ を孤立特異点 $z=\alpha$ の周りで
  $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-\alpha)^n}, \tag{213}$$
  とローラン展開したときに
  - 全ての負べきの係数がゼロのとき ($c_{-n}=0$ for $\forall n\geq 1$)
    $\to z=\alpha$ は「除去可能な特異点」という。このとき $\lim_{z\to\alpha}f(z)$ が存在する。
  - 負べきの次数に上限があるとき ($\exists m$ s.t. $c_{-m}\neq 0$ and $c_{-n}=0$ for $\forall n>m$)
    $\to z=\alpha$ は「極」という。
  - 負べきの次数に上限がないとき (for $\forall m, \exists n>m$, s.t., $c_{-n}\neq 0$)
    $\to z=\alpha$ は「真性特異点」という。
- ▶ 真性特異点の例：$f(z)$ が正則かつ多項式でないとき、$z=0$ まわりのテイラー展開は無限級数となる。（例えば $f(z)=e^z, \cos z, \sin z$ など。）このとき $g(z)=f(1/z)$ とおくと、$g(z)$ は $z\neq 0$ で正則でそのローラン展開
  $$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{1}{z^n}. \tag{214}$$
  仮定より $f^{(n)}(0)$ は無限に続くので、$z=0$ は $g(z)$ の真性特異点となる。
  [コメント：真性特異点には「真性特異点の近傍では任意の値に近づくことが出来る」という面白い性質もあります。（ワイエルシュトラスの定理）。興味があれば調べてみて下さい。]
- ▶ 無限遠点について：（物理学演習 No.2 に関連問題あり。）
  複素平面上で $|z|\to\infty$ となる方向は $\theta=[0,2\pi]$ のどちらに行っても良いが、それらをまとめて「無限遠点」として扱うと便利なことが多い。
  いま、関数 $f(z)$ がある円より外（$0<R<|z|<\infty$）で正則であると仮定しよう。$|z|>R$ で $z=0$ のまわりにローラン展開すると
  $$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-3}}{z^3}+\cdots. \tag{215}$$
  ここで、$w=1/z$ という変数変換をして $g(w)=f(z)=f(1/w)$ という関数を考えると
  $$g(w)=c_0+\frac{c_1}{w}+\frac{c_2}{w^2}+\frac{c_3}{w^3}+\cdots+c_{-1}w+c_{-2}w^2+\cdots. \tag{216}$$

このとき、$w=0$ を「無限遠点」と考えることが出来て、

- $c_1 = c_2 = \cdots = 0$ のとき
  $\to$「$z=\infty$ が正則」で、$\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} g(w) = c_0$.
- w の負べきに最大値 m があるとき ($\exists m$ s.t. $c_m \neq 0$ and $c_n = 0$ for $\forall n > m$)
  $\to$「$z=\infty$ が m 位の極」という。
- w の負べきに最大値がないとき (for $\forall m, \exists n > m$, s.t., $c_n \neq 0$)
  $\to$「$z=\infty$ が真性特異点」という。

レポート問題

[c-11] (追加しました。) 次の定理を示せ。 (修正しました。)
<u>無限遠点も含めて極しか特異点を持たない関数は有理関数である。</u>
(有理関数とは、有限次元の多項式 $P(z)$ と $Q(z)$ を用いて $f(z) = P(z)/Q(z)$ と書けるような関数のことである。)

ここまでのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標、1.2 準備、1.3 複素微分・正則関数 ($\ni$ コーシー・リーマン)

1.4 複素積分

1.4.2 コーシーの積分定理: $\displaystyle\oint_C f(z)dz = 0.$

1.4.3 コーシーの積分公式と無限回微分可能性: $\displaystyle f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$

1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

1.5.1 テイラー展開

1.5.2 ローラン展開と留数: $\begin{cases} f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-\alpha)^n & (\ni \text{テイラー展開}) \\ \mathrm{Res}(f,\alpha) = c_{-1}. \end{cases}$

1.5.3 留数定理: $\displaystyle\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f,\alpha_k).$

1.5.4 実数積分への応用

1.5.5 特異点

この後 $\to$ 1.6 一致の定理と解析接続

1.6 一致の定理と解析接続

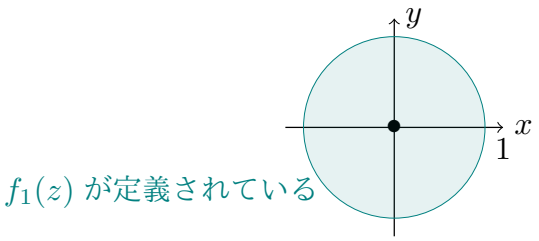
1.6.1 一致の定理と解析接続

(いよいよ予告編で書いていた最後のトピックだ。)

▶ 点 $z=0$ のまわりのテイラー展開で定義された次の複素関数を考えよう。

$$f_1(z) = 1 + 3z + 5z^2 + 7z^3 + 9z^4 + 11z^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n.$$

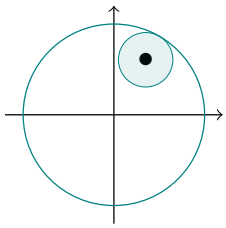
ダランベールの判定法を用いて、この関数 $f_1(z)$ の収束半径は $|z|<1$ だと分かる。



$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n \quad (|z|<1). \tag{217}$$

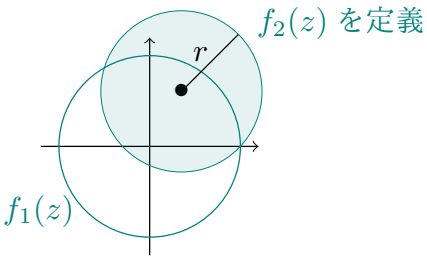
$|z|>1$ では関数は定義されていない。(実はちょっと考えると $f_1(z)$ の正体がある有理関数のテイラー展開だと分かるのだが、、、しばらく知らないフリをする。)

▶ 次に $f_1(z)$ の収束円内の適当な点 α をとってきて、そこでテイラー展開してみる。



$$\begin{aligned} f_1(z) &= f_1(\alpha) + f_1'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f_1''(\alpha)}{2}(z-\alpha)^2 + \cdots \\ &= c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots \end{aligned}$$

このテイラー展開の収束円は、一般には元の収束円の外にはみ出しても良い。(1.5.1 節の $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ の例を思い出そう。) そこでこの右辺が収束する領域で、新たに関数 $f_2(z)$ を定義する。



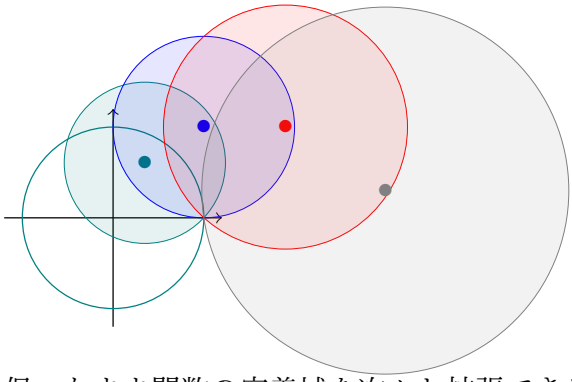
$$f_2(z) = c_0 + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \cdots \quad (|z-\alpha|<r).$$

► 2 つの関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ が重なっている領域で両者は一致するので、関数

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & (|z| < 1) \\ f_2(z) & (|z - \alpha| < r), \end{cases} \tag{218}$$

を定義すれば、元の定義域よりも広い領域に関数が拡張されたことになる。

► これを繰り返せば、、、



複素平面上で正則性を保ったまま関数の定義域を次々と拡張できる。

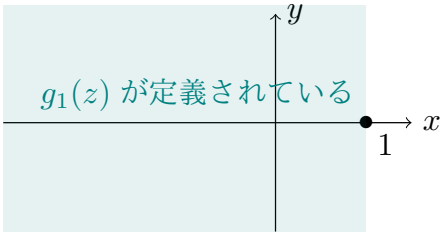
► 実は今の場合、元の関数 $f_1(z)$ は、$z = 1$ 以外の全域で定義された関数 $f(z) = \dfrac{1+z}{(1-z)^2}$ のテイラー展開だった。しかし一般に、そのような「答の関数」を知らなくても、上の方法でテイラー展開で次々と関数の定義域を拡張できる。

コメント：級数によっては、ある限界があってそれを超えて拡張できないこともある。例えば $f(z) = z + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n} + \cdots$ は収束半径が $|z| < 1$ だが、$|z| = 1$ 上の無限に多い点 $z = \exp(2\pi i m/2^n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, m = 0, 1, 2, \cdots 2^n - 1)$ で発散するため、$|z| > 1$ に拡張できない。以下ではこのような場合は考えない。

►「定義域の拡張」の別の例を見てみよう。以下の実数積分

$$g_1(z) = \int_0^\infty e^{-t(1-z)} dt \quad (\mathrm{Re} z < 1), \tag{219}$$

で複素関数 $g_1(z)$ を定義する。この関数は、$\mathrm{Re} z < 1$ でのみ定義されている。



実際、$\mathrm{Re} z < 1$ で上の積分を実行してみると

$$\int_0^\infty e^{-t(1-z)} dt = \left[\frac{e^{-t(1-z)}}{-(1-z)} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{1-z} \quad (\mathrm{Re} z < 1). \tag{220}$$

となるが、$\mathrm{Re} z > 1$ では $t \to \infty$ で積分が収束しない。

▶ 上にあるように、$g_1(z)$ はその定義域においては関数 $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ に一致している。この例でも、関数 $g(z)$ は元の関数 $g_1(z)$ の定義域を拡張した関数になっている。

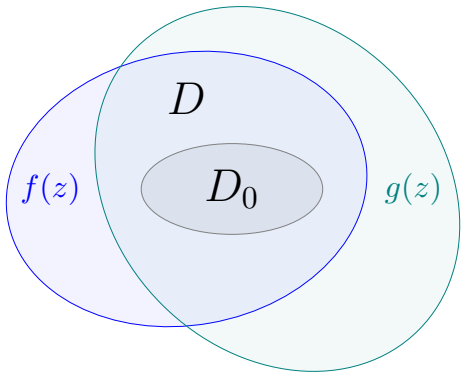
$$g_1(z) = \int_0^\infty e^{-t(1-z)}dt \quad (\mathrm{Re}z < 1) \quad \xrightarrow{\text{拡張}} \quad g(z) = \frac{1}{1-z} \quad (z \neq 1). \tag{221}$$

▶ 一般に、上の 2 つの例のように、ある領域で定義された正則関数を、正則性を保ったままより広い定義域の関数に拡張できる。これを「解析接続」という。

▶ ではこのような拡張は一意か？... これを保証するのが「一致の定理」である。

一致の定理

2 つの複素関数 $f(z)$, $g(z)$ が共通な正則領域 D を持つとする。



このとき、D 内の小領域 D_0 において $f(z) = g(z)$ ならば、
D 内全てにおいて $f(z) = g(z)$ である。小領域 D_0 は曲線や線分でも良い。

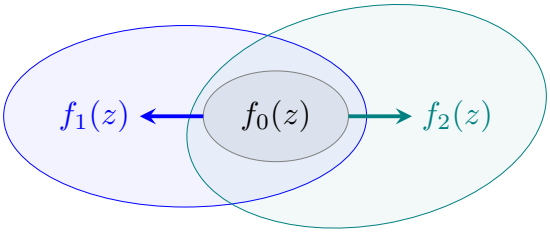
(証明): 共通領域 D で関数 $\phi(z) = f(z) - g(z)$ を定義する。仮定より

- $\phi(z)$ は D 内で正則。
- 小領域 D_0 内の全ての点で $\phi(z) = 0$。

つまり $\phi(z)$ は孤立していないゼロ点を持つ正則関数になっている。1.5.1 節の「ゼロ点の孤立」の定理により、そのような関数は定数関数 $\phi(z) = 0$ しかない。したがって D 内全域で $f(z) = g(z)$。■

証明から分かるように、小領域 D_0 は曲線や線分でも良い。

► 一致の定理により、「解析接続による定義域の拡張は一意である」ことが言える。



つまり、ある領域で定義された正則関数 $f_0(z)$ を 2 つの正則関数 $f_1(z)$ と $f_2(z)$ に拡張したとき、$f_1(z)$ と $f_2(z)$ が重なる領域（両者が共に正則な領域）では、必ず $f_1(z) = f_2(z)$ となる。

► 解析接続により、1.3.5 節で先延ばしにしてきた宿題も片付けられる。

宿題 (i) 実軸上で実数の場合の指数関数、三角関数に一致するような正則関数は一意に決まるか？ $\Longrightarrow$ Yes.

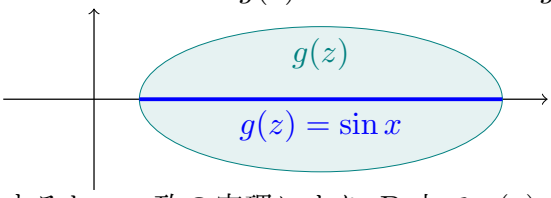
例として三角関数を考えよう。1.3.5 節で定義した正則関数

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \quad (\text{これを } \sin z \text{ と定義した.}) \tag{222}$$

は $|z| < \infty$ で正則であり、実軸上で実数関数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{223}$$

に一致する。これとは別に、実軸のある区間 $I = [a, b]$ を含む領域 D で定義された関数 $g(z)$ があり、I 上で $g(z)$ が $\sin x$ に一致するとしよう。



すると、一致の定理により D 内で $g(z) = f(z) = \sin z$ である。したがって「実軸上で実数関数に一致し、正則性を保ったまま定義域を拡張する方法」は一意に定まる。■

宿題 (ii) 実数で成立していた式、例えば $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ は x を複素数 z に拡張した正則関数でも成立するか？ $\Longrightarrow$ Yes.

両辺を解析接続した正則関数 $f(z) = \cos 4z$、$g(z) = 8\cos^4 z - 8\cos^2 z + 1$ を考えると、両者は複素数全域で正則であり、かつ実軸上で一致する。したがって一致の定理により複素数全域で $f(z) = g(z)$ である。■

10/29、ここまで

ここまでのあらすじ

§ 1 複素関数論

1.1 目標

1.2 準備

1.3 複素微分・正則関数　(∋ コーシー・リーマン)

1.4 複素積分

1.4.2 コーシーの積分定理: $\oint_C f(z)dz = 0.$

1.4.3 コーシーの積分公式と無限回微分可能性: $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$

1.5 テイラー展開、ローラン展開と留数、留数定理

1.5.1 テイラー展開

1.5.2 ローラン展開と留数: $\begin{cases} f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n \quad (\ni \text{テイラー展開}) \\ \mathrm{Res}(f,\alpha) = c_{-1}. \end{cases}$

1.5.3 留数定理: $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f,\alpha_k).$

1.5.4 実数積分への応用

1.5.5 特異点

1.6 一致の定理と解析接続

1.6.1 一致の定理と解析接続

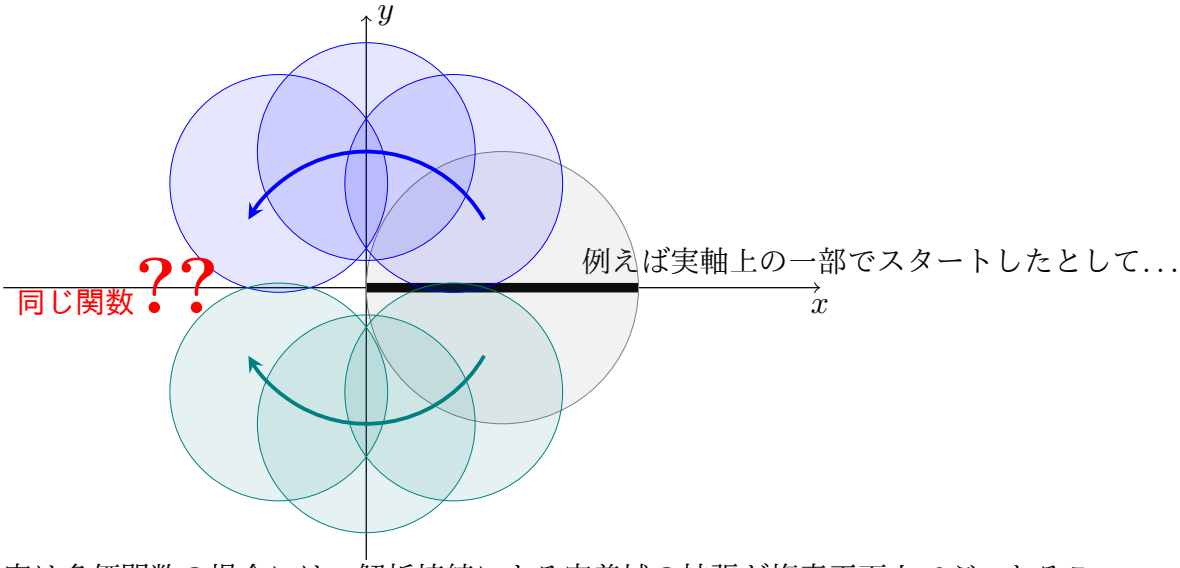
今日ココから → 1.6.2 多価関数とリーマン面

11/5、ここから

1.6.2　多価関数とリーマン面

実はここまでの議論では、「正則」というときには多くの場合「一価正則」を暗黙に仮定していた。この節では、多価関数の場合にこれまでの議論をどう拡張すべきかを考える。

- 前節 1.6.1 で解析接続を議論した。一致の定理により「局所的」な関数の拡張の一意性はなものだったが、、、「大局的」にはどうか？



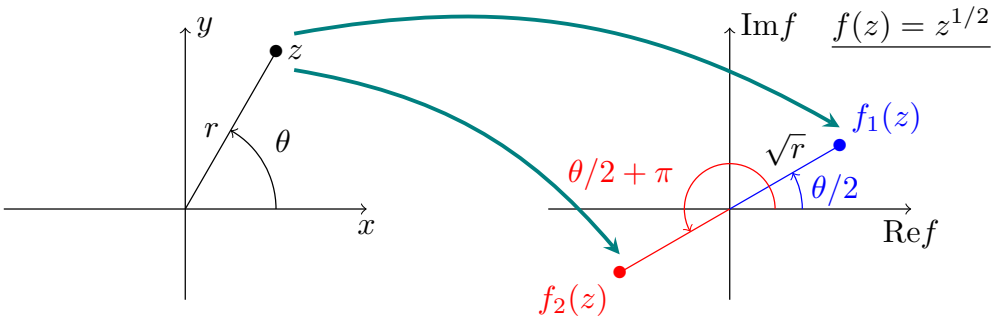
実は多価関数の場合には、解析接続による定義域の拡張が複素平面上でぶつかることがある。これを見てみよう。

- 多価関数の例として、まずは

$$f(z) = z^{1/2}, \tag{224}$$

を考える。$z = re^{i\theta}$ として、$f(z) = z^{1/2} \Longleftrightarrow [f(z)]^2 = z$ となるような複素数は

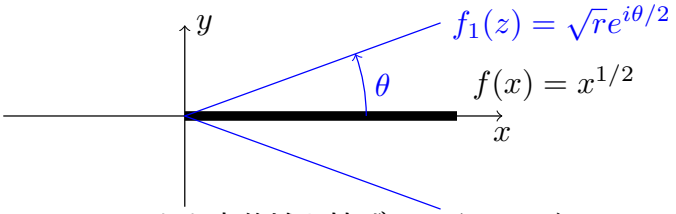
$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \\ f_2(z) = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} = -f_1(z) \end{cases}, \tag{225}$$



の 2 つある。つまり $f(z) = z^{1/2}$ は 2 価関数である。

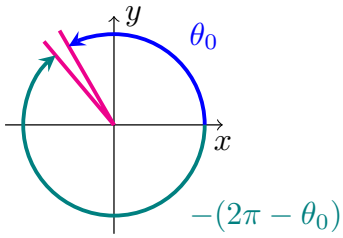
▶ 実軸上の実数関数 $f(x) = x^{1/2}$ $(x \geq 0)$ からスタートして解析接続を考えよう。実軸上 $x \geq 0$ で $f(x)$ に一致するのは、$\begin{cases} f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \xrightarrow{\theta\to 0} \sqrt{r} \\ f_2(z) = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} \xrightarrow{\theta\to 0} -\sqrt{r} \end{cases}$

なので、$f_1(z)$ の方。したがって $\theta = 0$ 近辺では $f(x) \to f_1(z)$ と解析接続される。

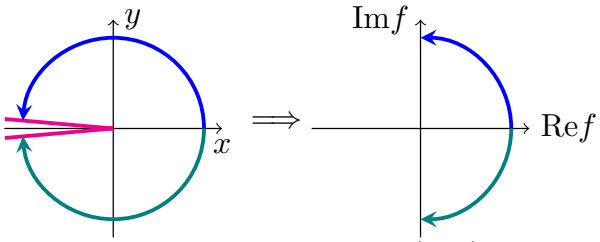


しかしそのまま定義域を拡げていくと、どこかで不連続になってしまう。

$$\begin{cases} f_1(z) \xrightarrow{\theta\to\theta_0-0} \sqrt{r}e^{i\theta_0/2}, \\ f_1(z) \xrightarrow{\theta\to\theta_0+0} = \sqrt{r}e^{-i(2\pi-\theta_0)/2} = -\sqrt{r}e^{i\theta_0/2}. \end{cases} \tag{226}$$



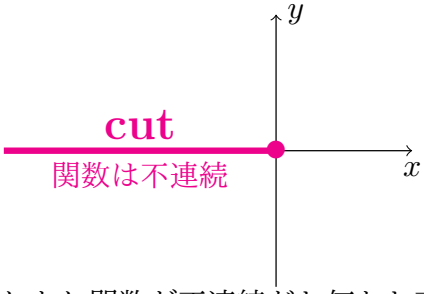
例えば$\theta = \pi$だと $\begin{cases} f_1(z) \xrightarrow{\theta\to\pi+0} i\sqrt{r}, \\ f_1(z) \xrightarrow{\theta\to\pi-0} -i\sqrt{r}. \end{cases}$



(227)

▶ このように、多価関数では、解析接続による単純な定義域の拡張がうまく行かない。z がある点 z_0 のまわりを一周して $f(z)$ が元の値に戻らないとき、z_0 を分岐点という。$f(z) = z^{1/2}$ の場合、原点 $z = 0$ が分岐点になっている。

▶ 多価関数の扱い方には 2 つの方法がある。1 つは、複素平面上に「cut (切断)」を入れて、そこで関数が不連続だとしてしまう考え方である。

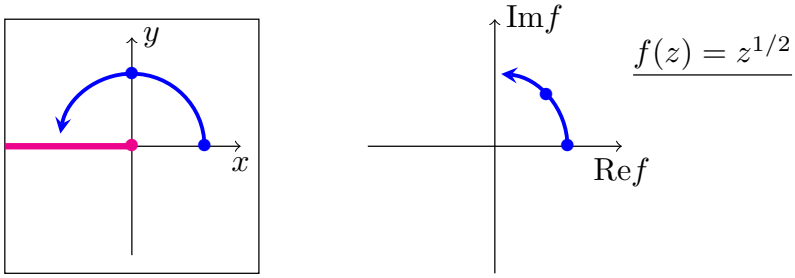


$f(z)$ は $\theta = \pi$ で不連続だとしてしまう。

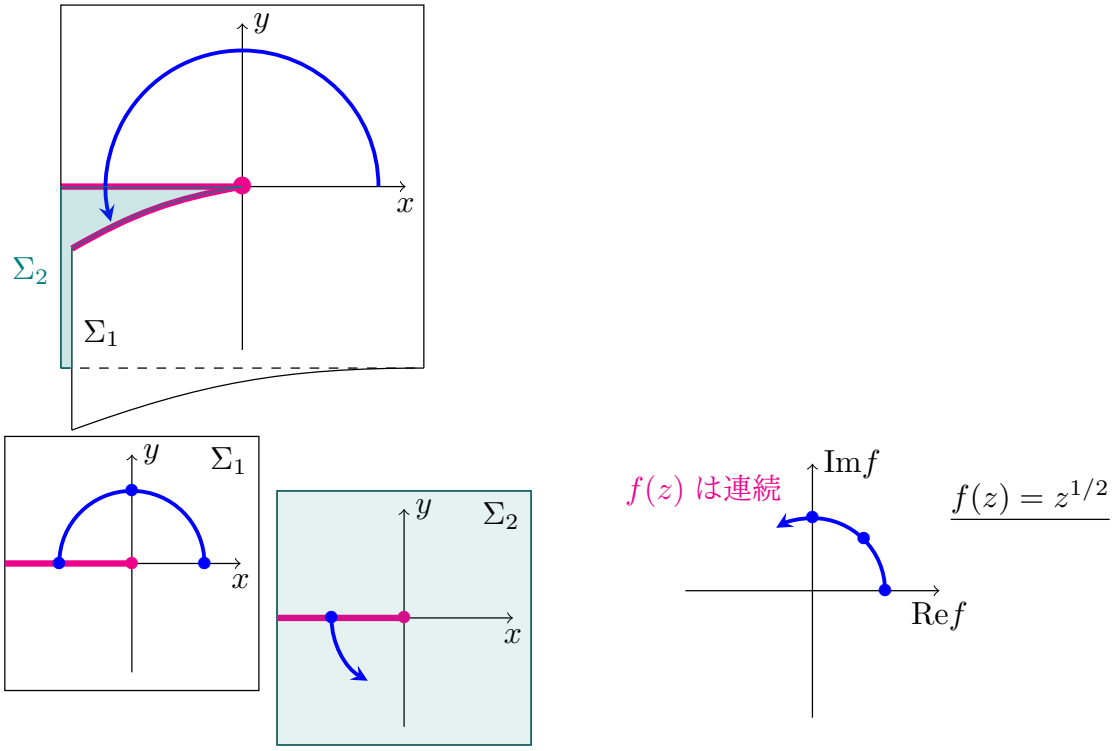
しかし関数が不連続だと何かと不便な場合もある。

▶ もう 1 つの方法は、連続性を保つために、cut を通り過ぎると別の複素平面に定義域が移る、とする考え方である。これを見ていこう。

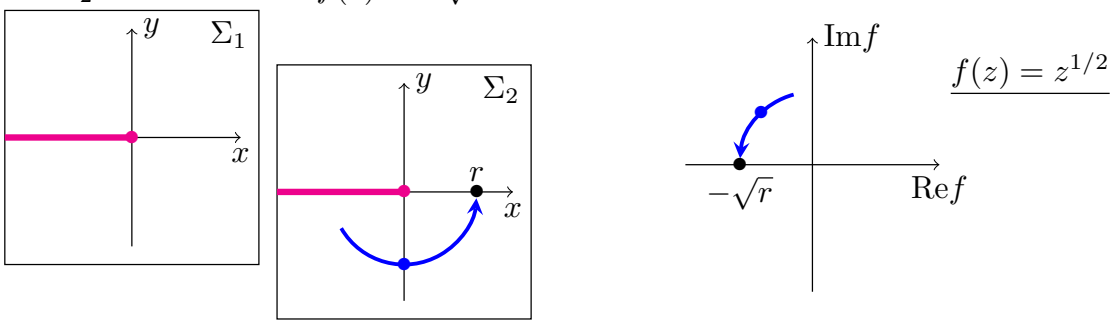
- 実軸 $(x > 0)$ からスタートして解析接続により連続的に関数を定義していく。



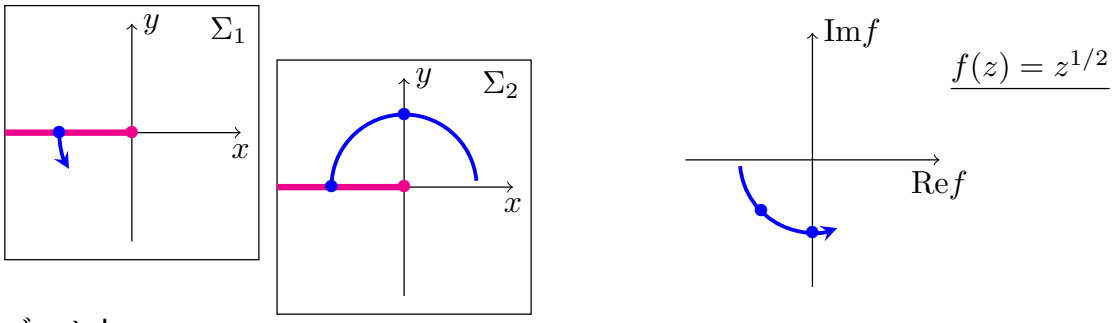
- cut を通り過ぎるとき、$f(z)$ を連続に保ったまま定義域を 2 枚目の複素平面に移す。



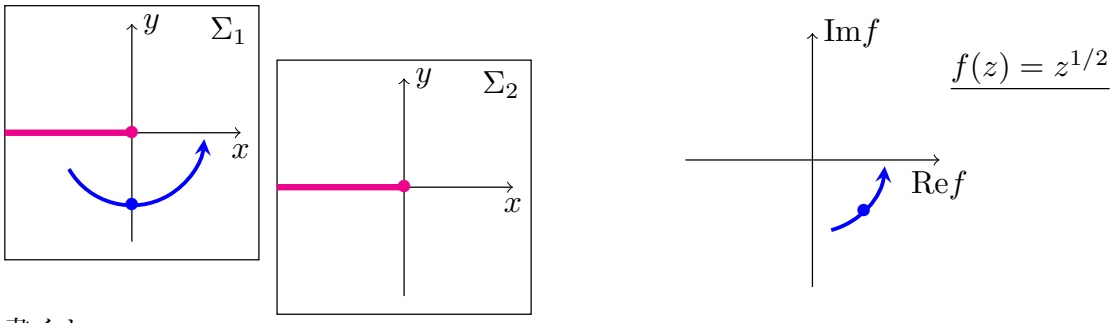
- $z \in \Sigma_2$ では、実軸上で $f(z) = -\sqrt{x}$ となる。



- 再び cut を通ると（今の場合）元の複素平面 Σ_1 に戻る。

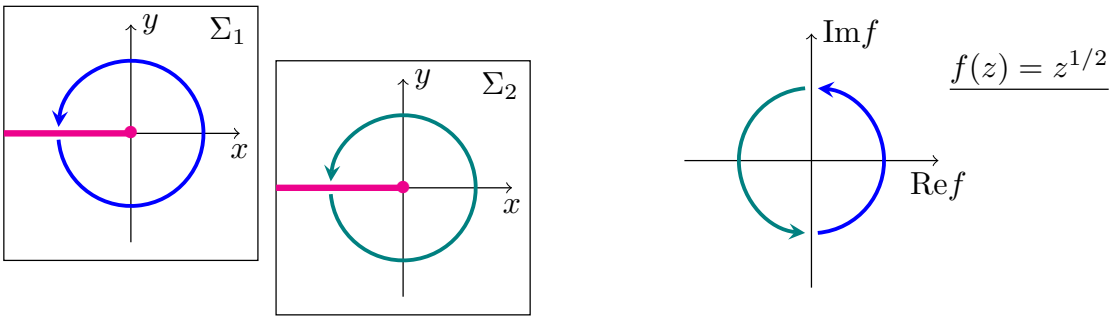


- ゴール！



► 式で書くと

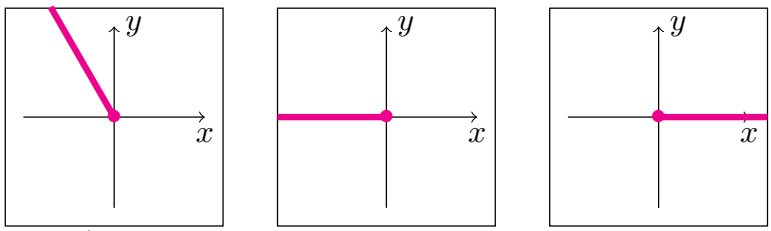
$$f(z) = z^{1/2} = \begin{cases} f_1(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} & (z \in \Sigma_1, -\pi \leq \theta < \pi) \\ f_2(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2+i\pi} & (z \in \Sigma_2, -\pi \leq \theta < \pi) \end{cases}. \tag{228}$$



定義域を Σ_1 と Σ_2 という 2 つの複素平面に拡張することで、$f(z) = z^{1/2}$ を<u>連続かつ正則な一価関数</u>とみなせた。

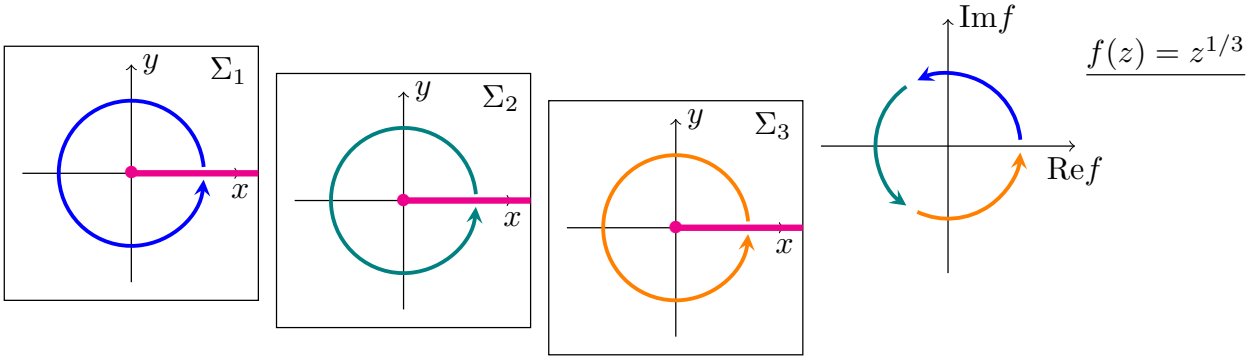
► このように複素平面を複数つなぎ合わせたものをリーマン面という。

- リーマン面上で解析接続によって定義された関数は一価正則である。
- 複素平面どうしをはり合わせる線 (cut) を分岐線 (branch cut) という。
- 分岐線の端点は分岐点になっている。（今の場合 $z=\infty$ も分岐点。）
- 分岐線の選び方には自由度がある。（今の場合 $z=0$ と $z=\infty$ を結べば良い。）



► $f(z)=z^{1/3}$ の場合はリーマン面は 3 枚の複素平面からなる。例えば分岐線を実軸 $x>0$ にとると

$$f(z)=z^{1/3}=\begin{cases} r^{1/3}e^{i\theta/3} & (z\in\Sigma_1, 0\le\theta<2\pi) \\ r^{1/3}e^{i(\theta+2\pi)/3} & (z\in\Sigma_2, 0\le\theta<2\pi) \\ r^{1/3}e^{i(\theta+4\pi)/3} & (z\in\Sigma_3, 0\le\theta<2\pi) \end{cases}. \tag{229}$$

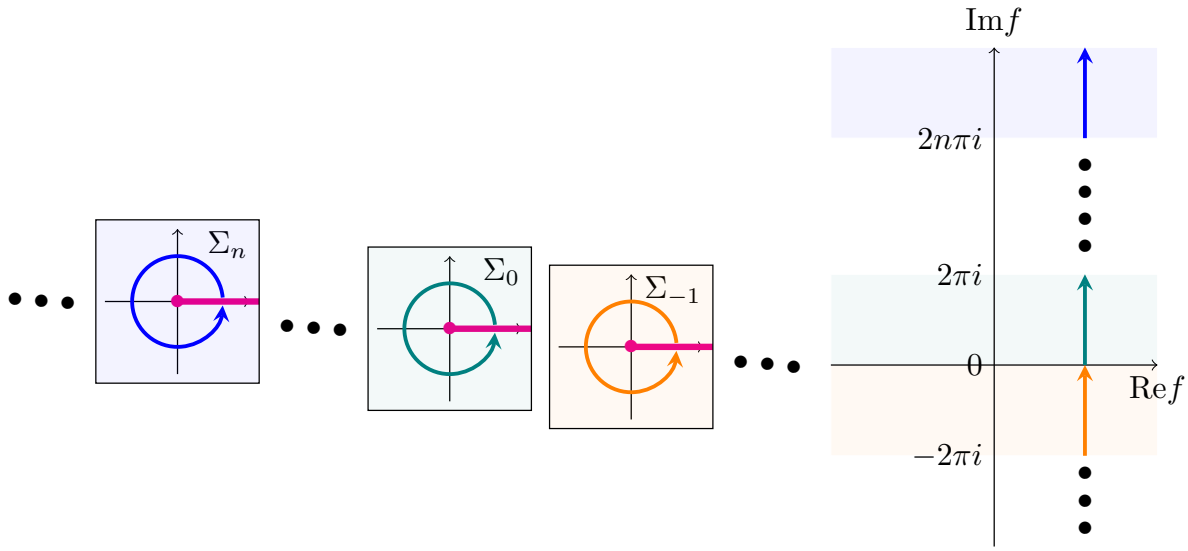


► 一般に $f(z)=z^{\alpha}$ のリーマン面は...

- α が有理数 $\alpha=m/n$ (n と m が互いに素) なら n 枚の複素平面からなる。（$z=0$ のまわりを n 回まわれば元に戻る。$z=0$ は代数的分岐点という。）
- α が無理数ならリーマン面は無限枚の複素平面からなる。（$z=0$ のまわりを何回まわっても元に戻らない。$z=0$ は対数的分岐点という。）

► 1.3.5 節で出てきた対数関数も多価関数であり、リーマン面は無限枚の複素平面からなる。（$z=0$ が対数的分岐点。）分岐線を実軸 $x>0$ にとると

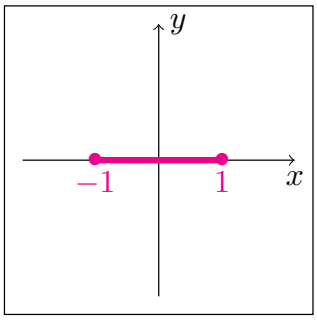
$$
\begin{aligned}
f(z) &= \ln z \\
&= \ln r + i(\theta + 2n\pi) \quad (z \in \Sigma_n, 0 \le \theta < 2\pi), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \quad (230)
\end{aligned}
$$



► 分岐線が線分にとれる場合もある。

レポート問題

[b-30] 関数 $f(z) = (z^2-1)^{1/2}$ について、分岐線が図のようにとれることを説明し、またリーマン面が何枚の複素平面からなるか答えよ。



▶ これまでの 1.4〜 1.5 節で出てきた「閉じた経路」については、多価関数の場合は注意が必要。

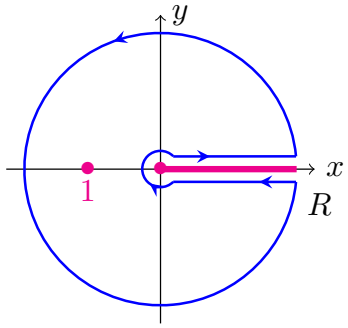
- 経路が分岐線を横切らない場合は、一枚の複素平面で考えて問題ない。
- 経路が分岐線を横切る場合は、リーマン面での閉じた経路を考える必要あり。

分岐線を避ける例:

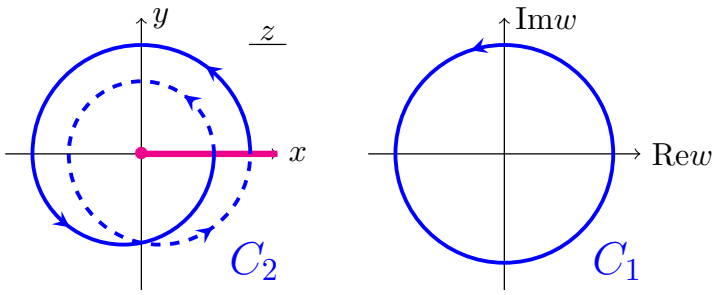
レポート問題

[b-31] + **[b-32]** (ちょっと面倒なので b 問題 2 つ分とします。)

実数積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}dx$ $(0 < a < 1)$ を求めたい。



複素関数 $f(z) = \dfrac{z^{-a}}{z+1} = \dfrac{e^{-a\ln z}}{z+1}$ を考え、
分岐線を実軸 $x > 0$ にとって図の経路の周積分を実行することで I を求めよ。



分岐線を横切る例:

例えば先ほどの $f(z) = z^{1/2}$ で、分岐点まわりを 2 回まわって閉じる経路 C_2 を考える。このような場合、一価関数に帰着する変数変換を用いると見通しが良い。今の場合 $w = z^{1/2}$ とおくと、w の複素平面は 1 枚になり、
$\displaystyle\oint_{C_2} f(z)dz = \oint_{C_1} f(w^2)2wdw$ となる。(ただし C_1 は w 平面での 1 周積分。)

- $\displaystyle\oint_{C_2} z^{1/2}dz = \oint_{C_1} w \cdot 2wdw = 0.$ ($\because$ コーシーの積分定理)
- $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{dz}{(z^{1/2})^2} = \oint_{C_1} \frac{2wdw}{w^2} = 2\oint_{C_1} \frac{dw}{w} = 4\pi i.$ ($\because$ 留数定理)
- $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{dz}{z^{1/2}-\alpha} = \oint_{C_1} \frac{2wdw}{w-\alpha} = 4\pi i\alpha.$ ($\because$ 留数定理. α が経路内の場合.)

1.7 発展的話題：部分分数展開、Γ、B、ζ、など

最後に発展的話題について紹介しておく。

[注：この節では（時間の都合もあり）これまで以上に証明の省略が多いです！]

1.7.1 部分分数展開 (と無限積)

部分分数展開

次のような関数 $f(z)$ を考える。

1. $f(z)$ は $|z| < \infty$ で極しか持たない。原点に極はない。極を α_k $(0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots)$ とおき、各極まわりのローラン展開の負べき部分（主要部と呼ぶ）を $P_k(z)$ とおく。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} (z-\alpha_k)^n + \underbrace{\frac{\mathrm{Res}(f,\alpha_k)}{z-\alpha_k} + \frac{c_{-2}^{(k)}}{(z-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{c_{-m_k}^{(k)}}{(z-\alpha_k)^{m_k}}}_{\text{主要部 } P_k(z)}, \tag{231}$$

2. 極の数は無限個あり、$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| \to \infty$。
3. 全ての極 α_n に対して、それを含む原点中心の円周経路 $C_n = C(0, R_n)$ がとれて $(R_n > |\alpha_n|)$、全ての C_n 上で $f(z)$ は有限。$\max_{z\in C_n, \forall n} |f(z)| = M < \infty$.

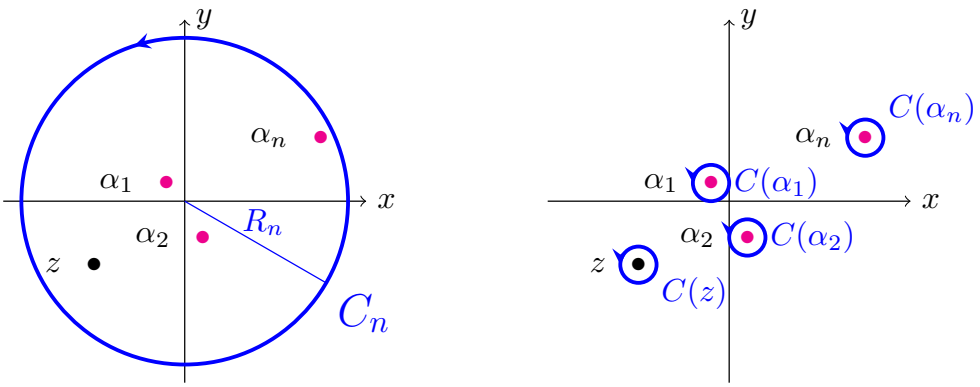
このとき、$f(z)$ は次のように<u>極の主要部の和で書ける</u>。

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(P_k(z) - P_k(0)\right). \quad \text{（部分分数展開）} \tag{232}$$

特に 1 位の極しかないときは

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Res}(f,\alpha_k) \left(\frac{1}{z-\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k}\right). \tag{233}$$

証明: 経路 C_n 内の極以外の点 z $(z \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$ に対して



(234)

$$\oint_{C_n} \frac{f(w)}{w-z} dw = \oint_{C(z)} \frac{f(w)}{w-z} dw + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C(\alpha_k)} \frac{f(w)}{w-z} dw. \tag{235}$$

ただし $C(z)$ は $w = z$ まわりの小円である。留数定理より

$$\oint_{C_n} \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i f(z) - 2\pi i \sum_{k=1}^{n} P_k(z). \tag{236}$$

となる。 （← 第二項は $w = \alpha_k$ まわりの展開が必要。計算略。）

$z = 0$ を代入した式を両辺から引いて

$$\oint_{C_n} f(w) \left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w} \right) dw = 2\pi i \left(f(z) - f(0) - \sum_{k=1}^{n} (P_k(z) - P_k(0)) \right). \tag{237}$$

仮定より

$$|(\text{左辺})| = \left| \oint_{C_n} f(w) \frac{z}{w(w-z)} dw \right| < M \frac{|z|}{R_n(R_n - |z|)} 2\pi R_n \xrightarrow{n\to\infty, \therefore R_n \to \infty} 0. \tag{238}$$

よって

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} (P_k(z) - P_k(0)). \quad \blacksquare \tag{239}$$

例:

- (2022.10 月 修正) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}-\dfrac{1}{z}$ (with $f(0)=0$) は $z=n\pi$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ に 1 位の極をもち、それぞれの留数は $(-1)^n$ なので （← 計算略）

$$\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}=\sum_{n=\pm1,\pm2\cdots}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)=\sum_{n=\pm1,\pm2\cdots}\frac{(-1)^n}{z-n\pi}. \tag{240}$$

- $f(z)=\dfrac{1}{\tan z}-\dfrac{1}{z}$ (with $f(0)=0$) は $z=n\pi$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ に 1 位の極をもち、それぞれの留数は 1 なので （← 計算略）

$$\frac{1}{\tan z}-\frac{1}{z}=\sum_{n=\pm1,\pm2\cdots}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)\overset{\text{略}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}. \tag{241}$$

無限積

$(\ln f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ の部分分数展開がわかれば $f(x)$ の無限積が得られる。

例として $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ を考えると

$$(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}. \tag{242}$$

両辺を $x=0$ から y $(<\pi)$ まで実数積分すると （← 収束の議論略）

$$\ln\left(\frac{f(y)}{f(0)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(x^2-(n\pi)^2)\Big|_0^y \tag{243}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{y^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{244}$$

$$=\ln\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{y^2}{n^2\pi^2}\right)\right] \tag{245}$$

$$\therefore\ f(y)=f(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{y^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{246}$$

ここから $\sin z$ の無限積表示

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{247}$$

が得られる。($z\in\mathbb{C}$ に解析接続した。)

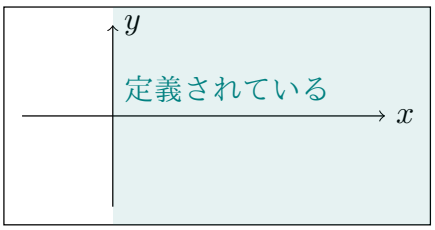
1.7.2 Γ(ガンマ) 関数

▶ 大雑把には $n!$ の拡張。

$$n! \left(\xrightarrow{\text{実数に拡張}} \begin{array}{l} \Gamma(x) \\ x > 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{複素数に拡張}} \begin{array}{l} \Gamma(z) \\ \mathrm{Re}z > 0 \end{array} \xrightarrow{\text{解析接続}} \begin{array}{l} \Gamma(z) \\ z \neq 0, -1, -2, \cdots \end{array}.$$

▶ 以下の実数積分で Γ 関数を定義する。（オイラーの第二種積分）

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\mathrm{Re}z > 0). \tag{248}$$



▶ 定義域の確認：

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{249}$$

第二項は任意の z に対して収束する。 (← 略) 第一項は $\mathrm{Re}z > 0$ で収束するが、$\mathrm{Re}z \leq 0$ では積分の下端 $t \to 0$ が収束しない。 (← 略)

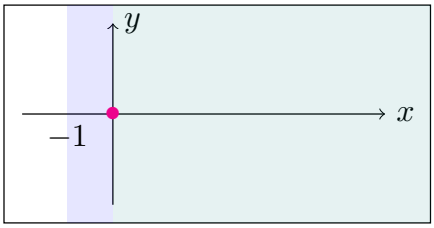
▶ $\Gamma(z)$ は $\underline{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)}$ を満たす。

$$\because \Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \underbrace{\left[-e^{-t} t^z\right]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt}_{z\Gamma(z)}. \tag{250}$$

これと $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$ より、$\underline{\Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \cdots)}$ が得られる。

▶ 上式より

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1). \tag{251}$$



この式の左辺は $\mathrm{Re}z > 0$ のみで定義されているが、右辺はより広い領域 $\mathrm{Re}z > -1$ $(z \neq 0)$ で定義されている。したがって、右辺を用いて、<u>解析接続</u>により定義域が拡張できる。さらに上式を繰り返し使うと

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) = \frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}\Gamma(z+3) = \cdots \tag{252}$$

により $\mathrm{Re}z > -2,\ \mathrm{Re}z > -3,\ \cdots$ と次々と解析接続できて、複素平面全域 に定義域を拡張できる。

- 上式からわかるように、こうして得られた $\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \cdots$ に 1 位の極をもつ。それぞれの留数は

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) \tag{253}$$

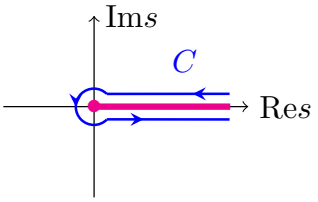
$$= \lim_{z\to -n}(z+n)\frac{1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\Gamma(z+n+1) \tag{254}$$

$$= \frac{1}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)}\Gamma(1) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{255}$$

- Γ 関数は他にもいくつかの表式もある。以下それらを見ていく。
- ハンケル表示

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$s \in \mathbb{C}$ による複素積分

$$\int_C e^{-s}(-s)^{z-1}ds. \tag{256}$$



を考える。ただし $z \in \mathbb{C}$ に対して $(-s)^{z-1}$ は $s = 0$ に分岐点をもち、ここでは分岐線を s の実軸上 $(\mathrm{Re}s \geq 0)$ にとってある。原点まわりの積分は半径 $\epsilon \to 0$ でゼロになる。 (← 略) 一方、分岐線に注意すると

- 分岐線の少し上で $(-s)^{z-1} = (e^{-\pi i}s)^{z-1} = (e^{-\pi i}|s|)^{z-1}$.
- 分岐線の少し下で $(-s)^{z-1} = (e^{-\pi i}s)^{z-1} = (e^{-\pi i}|s|e^{2\pi i})^{z-1} = (e^{+\pi i}|s|)^{z-1}$.

なので、結局 (実軸上の s を t とおいて)

$$\int_C e^{-s}(-s)^{z-1}ds = \int_\infty^0 e^{-t}(e^{-\pi i}t)^{z-1}dt + \int_0^\infty e^{-t}(e^{+\pi i}t)^{z-1}dt \tag{257}$$

$$= (e^{-\pi iz} - e^{\pi iz})\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{258}$$

$$= -2i\sin(\pi z)\Gamma(z). \tag{259}$$

よって

$$\Gamma(z) = \frac{i}{2\sin(\pi z)}\int_C e^{-s}(-s)^{z-1}ds \quad (\text{ハンケル表示}). \tag{260}$$

右辺は Γ 関数の複素平面全体への解析接続を与えている。 (← 略)

▶ <u>無限積表示</u>

$e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ を積分表示に代入すると

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt.$

ここで $\int^\infty \lim_{n\to\infty}(\cdots) = \lim_{n\to\infty}\int^n(\cdots)$ と変形することが出来て (← 略)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt \tag{261}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^1(1-\tau)^n(n\tau)^{z-1}nd\tau \qquad (t=n\tau) \tag{262}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau. \tag{263}$$

部分積分をくりかえし用いて (← 略)

$$\underline{\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z}{z}\prod_{k=1}^n\frac{k}{z+k} \quad (\text{ガウスの公式}).} \tag{264}$$

▶ さらに

$$n^z = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1}\right)^z = \prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k}\right)^z\cdot\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^z}_{\xrightarrow{n\to\infty}1} \tag{265}$$

を用いて

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n\frac{(1+1/k)^z}{1+z/k} = \underline{\frac{1}{z}\prod_{k=1}^\infty\frac{(1+1/k)^z}{1+z/k} \quad (\text{オイラーの無限積表示}).} \tag{266}$$

▶ さらにオイラー数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = 0.5772\cdots \tag{267}$$

を用いて

$$e^{-\gamma z} = \lim_{n\to\infty}\exp\left[-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}-\ln n\right)z\right] = \lim_{n\to\infty}n^z\prod_{k=1}^n e^{-z/k}. \tag{268}$$

と書けることを用いると、ガウスの公式から (← 途中略)

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1+z/n} \quad (\text{ワイエルシュトラスの無限積}). \tag{269}$$

▶ ワイエルシュトラス表式の逆数を取ると

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-z/n} \left(1 + \frac{z}{n}\right). \tag{270}$$

となり、これが特異点をもたないことから、$\Gamma(z)$ はゼロ点を持たないこともわかる。

▶ また次も分かる。

レポート問題

[b-33] ワイエルシュトラス表式と 1.7.1 節の $\sin z$ の無限積を用いて

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{271}$$

を示せ。

ここから $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ も得られる。

▶ スターリングの公式、とかも議論したかったけど、、、時間がないですね。[追記：物理学演習 No.8 に関連問題あり]

1.7.3 B(ベータ) 関数

定義

$p, q \in \mathbb{C}$ に対して

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt. \quad (\mathrm{Re}p > 0, \mathrm{Re}q > 0). \tag{272}$$

を解析接続して得られる関数を B(ベータ) 関数という。

$t = \cos^2\theta$ と変数変換して (途中略)

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta. \tag{273}$$

また次も言える。

レポート問題

[b-34] $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ を示せ。

1.7.4 ζ(ゼータ) 関数

定義

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots, \quad (\mathrm{Re}z > 1) \tag{274}$$

を解析接続して得られる関数を ζ(ゼータ or ツェータ) 関数という。

レポート問題

[b-35] 上式が $\mathrm{Re}z > 1$ で絶対収束することを示せ。

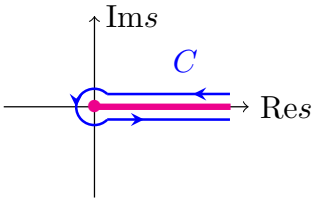
実数積分を用いた表式

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (\mathrm{Re}z > 1). \tag{275}$$

$1/(e^t - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$ を代入し $nt = y$ として項別積分すると示せる。 (計算略)

複素積分を用いた表式

$$\zeta(z) = \frac{i}{2\pi}\Gamma(1-z) \int_C \frac{(-s)^{z-1}}{e^s - 1} ds. \tag{276}$$



$\Gamma(z)$ のハンケル表示のときと同様にして示せる。この表式から $z = 1, 2, \cdots$ が極になりそうだが、$z = 1$ 以外は除去可能。(和の定義に戻ると収束する。)

$\zeta(z)$ は...

- $z = 1$ のみに 1 位の極をもち、そこの留数は $\mathrm{Res}(\zeta, 1) = 1$。 (積分表式より. 略.)
- $\zeta(-2m) = 0$ $(m = 1, 2, \cdots)$.
- これ以外のゼロ点が全て直線 $\mathrm{Re}z = 1/2$ とするのが リーマン予想 (未解決問題, 1859〜)。
- この他の特殊な点での値としては $\zeta(0) = -1/2$, $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, $\zeta(-1) = -1/12$, $\zeta(-3) = 1/120$ など。

  例えば $z = -1$ を元の和の式に代入すると $1 + 2 + 3 + \cdots = -1/12$ などという式が得られるがこれは定義されていない領域に代入したため。

11/5、ここまで

—————— **11/12、ここから** ——————

[いよいよ最終日ですね。今日は午後の後半に時間があまったら slido か何かで匿名可の質問・相談・愚痴・文句...の時間を作ってもいいかな、と思っています。]

§ 2　常微分方程式

2.1　はじめに

この章ではいったん複素関数のことは忘れて、主に実数関数で考える。

物理では様々な場面で微分方程式が出てくる。ニュートンの運動方程式、マックスウェル方程式、シュレディンガー方程式、アインシュタイン方程式...。

ここでは微分する変数が 1 つだけの微分方程式、常微分方程式を扱う。

2.2　定義と分類

- $y(x)$ を 1 つの実変数 x の関数であるとする。このとき、$y(x)$ とその微分 $y(x), y'(x), y''(x), \cdots y^{(n)}(x)$ および x との間の関係式

$$F\left(x, y, y', y'', \cdots y^{(n)}\right) = 0, \tag{277}$$

を常微分方程式 (Ordinary Differential Equation, ODE) という。

一般には、関数の数を複数にして $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \cdots)$ に関する連立常微分方程式を考えることも出来るが、以下では主に関数が 1 つの場合を考える。

[ここから先、pdf では「常微分方程式」を単に「微分方程式」と書いてしまいます。また板書では「微分方程式」と書くのが面倒なので、「ODE」と書いてしまおうと思います。]

- 最高次の微分が $y^{(n)}(x)$ のときは n 階の微分方程式という。
- 最高次の微分が低次の微分で書けている

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', y'', \cdots y^{(n-1)}\right), \tag{278}$$

の形の微分方程式を正規形という。以下では主にこの形の微分方程式を扱う。

- n 階の微分方程式は、常に 1 階の連立微分方程式に帰着できる。実際

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', y'', \cdots y^{(n-1)}\right), \tag{279}$$

に対して、$y_0 = y, y_1 = y', y_2 = y'', \cdots y_{n-1} = y^{(n-1)}$ と定義すると、上の式は

$$y'_{n-1}(x) = f\left(x, y_0, y_1, \cdots y_{n-1}\right), \tag{280}$$
$$y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x), \tag{281}$$
$$\cdots \tag{282}$$
$$y'_1(x) = y_2(x), \tag{283}$$
$$y'_0(x) = y_1(x). \tag{284}$$

となり、n 個の関数に対する 1 階の連立微分方程式に帰着する。(数値計算でもこの形にしてから解くことが多いと思います。) この連立微分方程式は初期条件 $x = x_0$ での値 $y_i(x_0)$ $(i = 0, \cdots n-1)$ を与えれば解が定まる。つまり元の n 階微分方程式も、n 個の初期条件 $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \cdots y^{(n-1)}(x_0)$ を与えると解が定まることになる。

► 関数 $y(x)$ とその微分に関して線形な

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)\right) y(x) = b(x), \tag{285}$$

の形の微分方程式を<u>線形微分方程式</u>という。ただし $a_{n-1}(x), \cdots a_0(x), b(x)$ は与えられた関数とする。$b(x) = 0$ の場合<u>斉次 (同次) 微分方程式</u>という。

$$\text{微分方程式}\begin{cases}\text{線形微分方程式}\begin{cases}\text{斉次 (同次) 微分方程式} & (b(x) = 0)\\ \text{非斉次線形微分方程式} & (b(x) \neq 0)\end{cases}\\ \text{非線形微分方程式}\end{cases}$$

► <u>常微分方程式の例</u>

- 古典調和振動子 (単振動)。変数は時間 t。 $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x(t) = 0.$ (2 階斉次)
- 量子力学：1 次元の時間に依存しないシュレディンガー方程式。変数は座標 x。

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\varphi(x) = E\varphi(x). \quad (\leftarrow \text{量子力学 1}) \quad (2\text{ 階斉次})$$

- 量子力学：3 次元球対称ポテンシャル中の動径方向波動関数のシュレディンガー方程式。変数は動径座標 r。

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) + V(r)\right] R(r) = ER(r). \quad (\leftarrow \text{量子力学 2}) \quad (2\text{ 階斉次})$$

- 場の量子論：くりこみ群方程式。変数はスケール μ。

$$\mu\frac{d}{d\mu}g(\mu) = \beta(g(\mu)) \ (\text{例えば QED だと}) \ = \frac{g^3(\mu)}{12\pi^2} + \cdots \quad (1\text{ 階非線形}).$$

2.3 一階微分方程式の解法の例

一階微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ の解法のうち、簡単なものをいくつか紹介する。

2.3.1 変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = \frac{X(x)}{Y(y)}, \tag{286}$$

の形の微分方程式（変数分離形）は以下のように解ける。

$$X(x) = Y(y)\frac{dy}{dx}, \tag{287}$$

$$\therefore \int X(x)dx = \int Y(y)\frac{dy}{dx}dx + C \tag{288}$$

$$= \int Y(y)dy + C. \tag{289}$$

レポート問題

[b-36] 変数分離形の常微分方程式を 1 つ考え、解け。 ($Y(y) \neq$ 定数とする。)

2.3.2 同次形

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{290}$$

の形の微分方程式に対して、$f(kx, ky) = f(x, y)$ が成り立つとき（同次形）は、変数分離形に帰着する。$u = y/x \Longleftrightarrow y = xu$ として代入すると

$$\frac{d(xu)}{dx} = f(x, xu) = f(1, u) \equiv g(u). \tag{291}$$

$$\therefore \quad u + x\frac{du}{dx} = g(u). \tag{292}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x} \qquad \leftarrow \text{変数分離形}. \tag{293}$$

レポート問題

[b-37] 同次形の常微分方程式を 1 つ考え、解け。 ($f(x, y) \neq$ 定数とする。)

2.3.3 完全形／全微分方程式

2 変数関数 $P(x,y), Q(x,y)$ が $\partial_x P = \partial_y Q$ を満たすとき、

$$P(x,y)\frac{dy}{dx} + Q(x,y) = 0. \tag{294}$$

という形の微分方程式（完全形／全微分方程式）は以下の手順で解ける。

1. $\partial_x P = \partial_y Q$ より、$P = \partial_y f$ かつ $Q = \partial_x f$ を満たす関数 $f(x,y)$ が存在することが言える。
2. $f(x, y(x)) = C$ (定数) が元の微分方程式の解である。

(証明)

1. 適当な x_0, y_0 に対して

$$f(x,y) = \int_{y_0}^{y} P(x,y')dy' + \int_{x_0}^{x} Q(x',y_0)dx' + C \tag{295}$$

とおけばよい。第二項は y によらないので、$\partial_y f = P$ を満たす。また x で偏微分すると、仮定 $\partial_x P = \partial_y Q$ より

$$\partial_x f(x,y) = \int_{y_0}^{y} \underbrace{\partial_x P(x,y')}_{=\partial_{y'} Q(x,y')} dy' + Q(x,y_0) \tag{296}$$

$$= Q(x,y')|_{y_0}^{y} + Q(x,y_0) \tag{297}$$

$$= Q(x,y). \quad \blacksquare \tag{298}$$

2. $f(x, y(x)) = C$ のとき、

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) \tag{299}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \tag{300}$$

$$= Q(x,y) + \frac{dy}{dx} P(x,y). \quad \blacksquare \tag{301}$$

(補足): 元の常微分方程式 $P\dfrac{dy}{dx} + Q = 0$ を $f(x,y)$ で書き直すと $(\partial_y f)\dfrac{dy}{dx} + \partial_x f = 0$, あるいは $(\partial_y f)dy + (\partial_x f)dx = df = 0$ と全微分の形で書ける。$df = 0$ なので $f = C$ (定数) が解となる。

レポート問題

[b-38] 完全形の常微分方程式を 1 つ考え、解け. ($f(x,y) \neq$ 定数とする.)

2.3.4 一階線形微分方程式

一階線形微分方程式 (正規形) は一般に

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x). \tag{302}$$

と書ける。ただし $a(x), b(x)$ は与えられた関数である。これは以下のように解ける。

1. まず $b(x) = 0$ の場合の斉次微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = a(x)y$ の解を求める。これは変数分離形なので $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = a(x) \ \rightarrow \ \ln y = \displaystyle\int a(x)dx + C$ として解けて

$$y(x) = C\exp\left(\int^x a(x')dx'\right) \qquad (\text{for } b(x) = 0). \tag{303}$$

2. 次にこの積分定数 C を x に依存するとし（定数変化法）

$$y(x) = C(x)\exp\left(\int^x a(x')dx'\right). \tag{304}$$

とおいて、元の微分方程式に代入して $C(x)$ に関する微分方程式を得る。

$$a(x)y(x) + b(x) = \frac{d}{dx}y(x) \tag{305}$$

$$= \frac{dC}{dx}\exp\left(\int^x a(x')dx'\right) + a(x)y(x). \tag{306}$$

$$\therefore \ \frac{dC}{dx} = b(x)\exp\left(-\int^x a(x')dx'\right). \tag{307}$$

3. これを解いて代入すれば $y(x)$ の解を得る。

$$C(x) = \int^x b(x')\exp\left(-\int^{x'} a(x'')dx''\right)dx' + C'. \tag{308}$$

$$\therefore \ y(x) = \left[\int^x b(x')\exp\left(-\int^{x'} a(x'')dx''\right)dx' + C'\right]\exp\left(\int^x a(x')dx'\right). \tag{309}$$

レポート問題

[b-39] 一階線形微分方程式を 1 つ考え、解け。 ($a(x) \neq 0, b(x) \neq 0$ とする.)

2.4 線形微分方程式

ここでは線形微分方程式

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)\right)y(x)=b(x), \tag{310}$$

を考える。

2.4.1 解の線型性

- 斉次微分方程式

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)\right)y(x)=0 \quad \text{———}(\star). \tag{311}$$

を満たす解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ があったとき、その線形和

$$y(x)=ay_1(x)+by_2(x), \tag{312}$$

も $(\star)$ の解である。

- n 階斉次微分方程式 $(\star)$ の線形独立な n 個の解 $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ が与えられたとすれば、その線型和

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}c_ky_k(x)=c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x). \tag{313}$$

が一般解となる。$c_1, \cdots c_n$ は積分定数である。(n 階なので積分定数は n 個ある。)

- 非斉次線型微分方程式

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)\right)y(x)=b(x) \quad \text{—}(\star\star). \tag{314}$$

の場合は、その解 $y_0(x)$ が 1 つ見つかれば（特解とよばれる)、斉次解との和

$$y(x)=y_0(x)+\sum_{k=1}^{n}c_ky_k(x) \tag{315}$$

が $(\star\star)$ の一般解となる。

2.4.2 ロンスキアン

▶ 斉次微分方程式

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)\right)y(x)=0. \tag{316}$$

を満たす n 個の解 $y_1(x),\cdots y_n(x)$ があったとき、ロンスキアン

$$W(x)=W(y_1,\cdots y_n)=\det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{317}$$

を考えると議論の見通しが良くなることがある。

レポート問題

[b-40] 上の斉次微分方程式を満たす $y_1,\cdots y_n$ に対するロンスキアン $W(x)$ に関して、$\dfrac{d}{dx}W(x)=-a_{n-1}(x)W(x)$ を示せ。

▶ 上の結果より、$W(x)=W(x_0)\exp\left(-\displaystyle\int_{x_0}^{x}a_{n-1}(x')dx'\right)$ なので、$W(x)$ は恒等的にゼロか常にゼロでないかのいずれかである。ここから

$$y_1,\cdots,y_n \text{ が線形従属.} \tag{318}$$

$$\longleftrightarrow \quad \exists\vec{c}=(c_1,\cdots c_n)^t\neq\vec{0},\ \text{s.t. } c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)=0 \text{ for } \forall x. \tag{319}$$

$$\overset{(\star)}{\longleftrightarrow} \quad \exists x_0, W(x_0)=0. \quad \longleftrightarrow \quad \forall x, W(x)=0. \tag{320}$$

対偶をとれば

$$y_1,\cdots,y_n \text{ が線形独立.} \longleftrightarrow \exists x_0, W(x_0)\neq 0. \longleftrightarrow \forall x, W(x)\neq 0. \tag{321}$$

証明は、$\overset{(\star)}{\longleftarrow}$ が少し非自明だが、

$$\exists x_0, W(x_0)=0 \tag{322}$$

$$\longrightarrow \exists(c_1,\cdots c_n)^t\neq\vec{0},\ \text{s.t. } c_1\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}(x_0)+\cdots+c_n\begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}(x_0)=0. \tag{323}$$

よって $f(x)=c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)$ とすると、$f(x)$ は元の斉次微分方程式の解であり初期条件 $f(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ を満たすので、$f(x)=0$. ■

▶ 解から微分方程式へ

逆に、線型独立な n 個の関数 $y_1(x), \cdots y_n(x)$ が与えられたとき、$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ を一般解として持つような n 階斉次微分方程式は

$$W(\underbrace{y, y_1, \cdots y_n}_{(n+1)\text{ 個}}) = 0. \tag{324}$$

で与えられる。($\because$ 左辺は $y^{(n)}(x)$ を含んでおり、かつ $y(x) = \sum c_k y_k(x)$ を代入するとゼロになる。)

▶ 2 階斉次微分方程式の場合

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx} + b(x)\right) y(x) = 0. \tag{325}$$

の解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ に対して、ロンスキアンは

$$W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(x')dx'\right). \tag{326}$$

例えば

- $a(x) = 0$ のときは $W(x) = W(x_0) =$ 定数.
- $a(x) = a$(定数) のときは $W(x) = W(0)e^{-ax}$.
- $a(x) = ax$ のときは $W(x) = W(0)e^{-(1/2)ax^2}$.

またロンスキアンを用いると、解を一つしか知らないときにもう一つの独立な解を構成できる。$y_1(x)$ を既知の解とすると、もう一つの解 y_2 は

$$y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 = \frac{W}{y_1}, \quad W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(x')dx'\right). \tag{327}$$

を満たすので、2.3.4 節の 1 階線形微分方程式の解法を用いて (中略)

$$y_2(x) = y_1(x)\left(\int^{x} \frac{W(x')}{y_1(x')^2} dx' + C\right). \tag{328}$$

と求まる。

2.4.3 べき級数展開による 2 階斉次微分方程式の解法

▶ 2 階斉次微分方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+p(x)\frac{d}{dx}+q(x)\right)y(x)=0. \tag{329}$$

を複素関数に拡張した

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+p(z)\frac{d}{dz}+q(z)\right)f(z)=0. \quad \text{———}(\star) \tag{330}$$

を考える [久しぶりの複素関数！] 。これを $z=\alpha$ の周りでべき級数展開して解くことを考えたい。

▶ 特に、以下では

- $p(z), q(z)$ が $z=\alpha$ で正則な場合。
- $p(z), q(z)$ が $z=\alpha$ で極をもつが、$p(z)(z-\alpha)$ および $q(z)(z-\alpha)^2$ が $z=\alpha$ で正則な場合。 ($\longleftrightarrow$ $z=\alpha$ が $p(z)$ のたかだか 1 位の極、かつ $q(z)$ のたかだか 2 位の極の場合。) ...このとき $z=\alpha$ を上の微分方程式の確定特異点という。

の場合に限って考える。具体例としては以下ものなど。

微分方程式の名前	微分方程式	確定特異点	正則な点の例
ベッセルの微分方程式	$f''+\frac{1}{z}f'+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)f=0.$	$z=0$	
エルミートの微分方程式	$f''-2zf'+2\nu f=0.$		$z=0.$
ルジャンドルの微分方程式	$(1-z^2)f''-2zf'+\nu(\nu+1)f=0.$	$z=\pm1,\infty$	$z=0.$
ラゲールの微分方程式	$zf''+(1-z)f'+\nu f=0.$	$z=0$	
超幾何微分方程式	$z(1-z)f''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]f'$ $-\alpha\beta f=0.$	$z=0,1,\infty$	

($z=\infty$ については $w=1/z$ の微分方程式に書き直して考える。)

▶ 上の条件が満たされるとき、$p(z), q(z)$ は以下のように展開できる。

$$p(z)=\sum_{m=0}^{\infty}p_m(z-\alpha)^{m-1}=\frac{p_0}{z-\alpha}+p_1+p_2(z-\alpha)+p_3(z-\alpha)^2+\cdots \tag{331}$$

$$q(z)=\sum_{m=0}^{\infty}q_m(z-\alpha)^{m-2}=\frac{q_0}{(z-\alpha)^2}+\frac{q_1}{z-\alpha}+q_2+q_3(z-\alpha)+\cdots \tag{332}$$

▶ $f(z)$ の解として、$z=\alpha$ まわりで $f(z)\sim(z-\alpha)^s$ $(s\in\mathbb{C})$ となるもの、

$$f(z)=(z-\alpha)^s\left[1+a_1(z-\alpha)+a_2(z-\alpha)^2+\cdots\right] \tag{333}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^{s+n}.\quad (a_0=1) \tag{334}$$

があると仮定し、微分方程式 $(\star): f''+pf'+q=0$ の各項に代入してみる。すると

$$f''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n(z-\alpha)^{s+n-2}. \tag{335}$$

$$p(z)f'(z)=\sum_{m=0}^{\infty}p_m(z-\alpha)^{m-1}\sum_{\ell=0}^{\infty}(s+\ell)a_\ell(z-\alpha)^{s+\ell-1}. \tag{336}$$

$$q(z)f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}q_m(z-\alpha)^{m-2}\sum_{\ell=0}^{\infty}a_\ell(z-\alpha)^{s+\ell}. \tag{337}$$

これらの和がゼロになるので、$(z-\alpha)^{s+n-2}$ の係数から

$$(s+n)(s+n-1)a_n+\sum_{m=0}^{n}p_m(s+n-m)a_{n-m}+\sum_{m=0}^{n}q_ma_{n-m}=0.\quad (n=0,1,\cdots)$$

$$\therefore\quad\begin{cases} s(s-1)+p_0s+q_0=0.\quad (\because a_0=1\neq 0) \\ \underbrace{\Big((s+n)(s+n-1)+p_0(s+n)+q_0\Big)}_{A_n(s)}a_n=\quad -\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\Big(p_m(s+n-m)+q_m\Big)a_{n-m}. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,2,\cdots). \end{cases}$$

1 つ目の式、$\underline{s^2+(p_0-1)s+q_0=0}$ は解 $f(z)\sim(z-\alpha)^s$ の<u>指数 s</u> を決める式であり、決定方程式と呼ばれる。2 次式なので解は 2 つある。それらを s_1, s_2 $(\mathrm{Re}s_1\geq\mathrm{Re}s_2)$ と置こう。

▶ s が決まれば、2 つ目の式 (漸化式) を用いて、$a_1,a_2,\cdots$ が順次決まっていく。ただし $s=s_2$ に関しては、決定方程式の解と係数の関係から

$$A_n(s_2)=n(n-(s_1-s_2)). \tag{338}$$

となるので、<u>$s_1-s_2=0,1,2,\cdots$ のときは漸化式が止まってしまい、2 つ目の級数解は求まらない。</u>この場合、もう 1 つの独立な解を求めるには別の方法が必要となる。(ここでは省略する。)

▶ ここでは、$s = s_1$ の場合の級数解

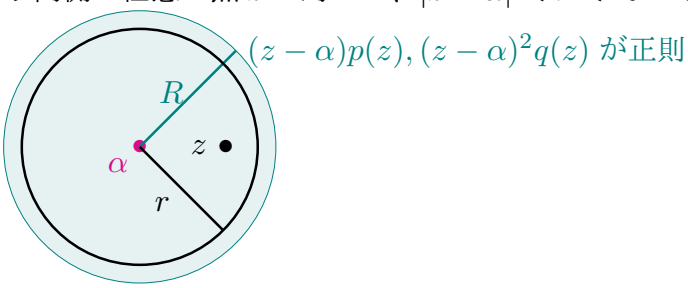
$$f(z) = (z-\alpha)^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n, \tag{339}$$

が有限の収束半径をもつことを確認しよう。

$$(z-\alpha)p(z) = p_0 + p_1(z-\alpha) + \cdots . \tag{340}$$

$$(z-\alpha)^2 q(z) = q_0 + q_1(z-\alpha) + \cdots . \tag{341}$$

は正則な級数なので、これらの収束半径のうち小さい方を R とおく。収束半径より内側の任意の点 z に対して、$|z-\alpha| < r < R$ となる正の実数 r がとれる。



収束性から $|p_m|r^m, |q_m|r^m < \infty$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$。よって適当な実数 M があって

$$1 < \exists M < \infty,\ \text{s.t. } |p_m|r^m < M,\ |p_m s_1 + q_m|r^m < M \text{ for } \forall m. \tag{342}$$

このとき帰納法により

$$|a_k r^k| < M^{k+1}. \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{343}$$

が言える。

(証明) まず $k = 0$ では $a_0 = 1$, $M > 1$ より成り立つ。次に $k = 1, 2, \cdots n-1$ で成り立つと仮定する。漸化式より

$$a_n r^n = \frac{1}{A_n(s_1)} \sum_{m=1}^{n} \Big(p_m(s_1 + n - m) + q_m \Big) a_{n-m} r^n. \tag{344}$$

決定方程式の解と係数の関係を用いて

$$|A_n(s_1)| = |n(n + s_1 - s_2)| \geq n^2. \quad (\because \mathrm{Re}s_1 \geq \mathrm{Re}s_2.) \tag{345}$$

一方、

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\Big(p_m(s_1+n-m)+q_m\Big)a_{n-m}r^n\right| \tag{346}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{n}\left|\Big(p_m(s_1+n-m)+q_m\Big)a_{n-m}r^n\right| \tag{347}$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\Big|(p_m s_1+q_m)r^m+(n-m)p_m r^m\Big||a_{n-m}r^{n-m}| \tag{348}$$

$$< \left(nM+\frac{n(n-1)}{2}M\right)M^n \tag{349}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}M^{n+1}. \tag{350}$$

よって

$$|a_n r^n| < \frac{n+1}{2n}M^{n+1} \leq M^{n+1}. \quad (n=1,2,\cdots). \quad \blacksquare \tag{351}$$

よって級数解

$$f(z)=(z-\alpha)^s\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n, \tag{352}$$

の級数部分は

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(z-\alpha)^n| = M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{a_n r^n}{M^{n+1}}\right|\left|\left(\frac{z-\alpha}{r/M}\right)^n\right| \leq M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\left(\frac{z-\alpha}{r/M}\right)^n\right|. \tag{353}$$

となり、有限な領域 $|z-\alpha|\leq\dfrac{r}{M}$ $(0<\forall r<R)$ で収束することが分かった。

- こうして得られた関数 $f(z)$ を解析接続すれば、z 平面全体で元の微分方程式を満たす解が得られる。

- 実際に物理に応用する場合には、考えたい領域全体での収束を要求する。（波動関数の積分が有限、など。）
  → すると多くの場合、級数が途中で止まる（漸化式の右辺 $=0$ となり $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0$ となる）ような特別な場合を要求することになり、級数解は多項式となる。（レポート [d-2] も参照。）
  → この「級数が途中で止まる特別な場合」の要求は、微分方程式のパラメータに

も特別な値を要求することになり、これが固有値の量子化などに結びつく。先にあげた具体例ではベッセル、エルミート、ルジャンドル、ラゲールのそれぞれの微分方程式で、$\nu = n = 0, 1, 2 \cdots$ の場合がそれに相当する。 具体的な計算はここでは省略します。量子力学などで該当する微分方程式が出てきたとき、この辺りの議論を思い出してもらえればと思います。

11/12、ここまで

おしまい。お疲れ様でした。質問などあればご連絡下さい。