§7 補足 ニュートリノ振動について　　2025 7/22(火)

まず量子力学の復習から…

ハミルトニアン $\hat{H}$ と、そのエネルギー固有状態が 2 つあるとする。

$$\begin{cases} |1\rangle : & \hat{H}\,|1\rangle = E_1\,|1\rangle\,, \\ |2\rangle : & \hat{H}\,|2\rangle = E_2\,|2\rangle\,, \end{cases} \quad E_1 \neq E_2.$$

$|1\rangle$、$|2\rangle$ は規格化されているとする（$\langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = 1$, $\langle 1|2\rangle = 0$）

このとき

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{-iE_1 t/\hbar}\,|1\rangle\,,$$
$$|\psi_2(t)\rangle = e^{-iE_2 t/\hbar}\,|2\rangle\,,$$

はそれぞれシュレディンガー方程式の解になっている。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi_n(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi_n(t)\rangle \quad (n = 1, 2).$$

初期状態として

$$|\psi(t=0)\rangle = \underbrace{\cos\theta\,|1\rangle + \sin\theta\,|2\rangle}_{\equiv|\alpha\rangle}$$

を考えると…

時刻 t での状態は、

$$|\psi(t)\rangle = \cos\theta\, \underbrace{e^{-i(E_1/\hbar)t}}_{e^{-i\omega_1 t}} |1\rangle + \sin\theta\, \underbrace{e^{-i(E_2/\hbar)t}}_{e^{-i\omega_2 t}} |2\rangle$$

時刻 t で測定を行って、元の状態 $|\alpha\rangle$ が観測される確率 は

$$\begin{aligned}
P(\alpha \to \alpha; t) &= |\langle\alpha|\psi(t)\rangle|^2 \\
&= \Big|(\cos\theta\,\langle 1| + \sin\theta\,\langle 2|)\left(\cos\theta\; e^{-i\omega_1 t}\,|1\rangle + \sin\theta\; e^{-i\omega_2 t}\,|2\rangle\right)\Big|^2 \\
&= \Big|\cos^2\theta e^{-i\omega_1 t}\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{=1} + \sin^2\theta e^{-i\omega_2 t}\underbrace{\langle 2|2\rangle}_{=1}\Big|^2 \\
&= \Big|\underbrace{e^{-i\omega_2 t}}_{|\cdots|=1}\Big(\cos^2\theta \underbrace{\underbrace{e^{i(\omega_2-\omega_1)t}}_{\equiv\, e^{i\omega_{21}t}}}_{=\cos\omega_{21}t + i\sin\omega_{21}t} + \sin^2\theta\Big)\Big|^2 \\
&= \left|\cos^2\theta\cos\omega_{21}t + \sin^2\theta + i\cos^2\theta\sin\omega_{21}t\right|^2 \\
&= (\cos^2\theta\cos\omega_{21}t + \sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta\sin\omega_{21}t)^2 \\
&= 1 - \sin^2 2\theta\ \sin^2\left(\frac{\omega_{21}}{2}t\right).
\end{aligned}$$

● 以上の結果をニュートリノ振動の場合に適用すると…

例えば $|\nu_\mu\rangle = \cos\theta\,|\nu_1\rangle + \sin\theta\,|\nu_2\rangle$

μニュートリノ　　　ニュートリノの質量固有状態

㊟式で

$\hbar = c = 1$. 自然単位系.

$$\omega_{21} = E_2 - E_1$$

$$= \sqrt{p^2 + m_2^2} - \sqrt{p^2 + m_1^2} \quad (m_i \text{ は } |\nu_i\rangle \text{ の質量})$$

$$\simeq \left(p + \frac{m_2^2}{2p}\right) - \left(p + \frac{m_1^2}{2p}\right) \quad (p \gg m_i)$$

$$\simeq \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E} \quad (p \simeq E)$$

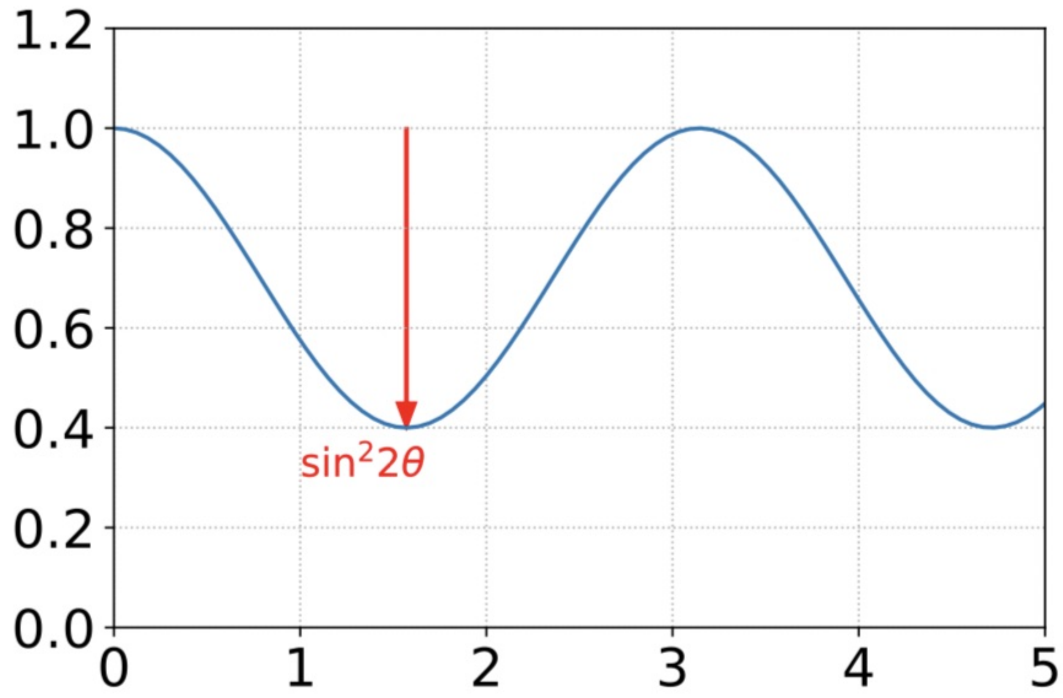
★式に代入して

$$P(\nu_\mu \to \nu_\mu, t) = 1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2\left(\frac{m_2^2 - m_1^2}{4E} L\right)$$

ニュートリノが飛んだ距離

(∵ $L \simeq ct$ ニュートリノはほぼ光速.)

μニュートリノとして作られた状態が
μニュートリノとして観測される確率



$$X_{ij} = \frac{(m_i^2 - m_j^2)L}{4E} = 1.267 \frac{\Delta m_{ij}^2}{\mathrm{eV}^2} \frac{L/E}{\mathrm{m/MeV}} .$$