

2025 年度 夏学期 25L1007 素粒子特論

濱口幸一

最終更新日時：2025 年 6 月 1 日 08:43

目次

§ 1	標準模型と標準模型を超える物理についての概要	1
§ 2	今後の予定	2
§ 3	場の量子論入門	3
§ 3.1	はじめに	3
§ 3.1.1	色々な場、標準模型	3
§ 3.1.2	量子力学と場の量子論	3
§ 3.1.3	Notation, convention	4
§ 3.1.4	(無限に) 多い粒子のヒルベルト空間とハミルトニアン	5
§ 3.1.5	調和振動子と場の量子論	9
§ 3.2	自由スカラー場	11
§ 3.2.1	自由スカラー場のラグランジアンと正準量子化	11
§ 3.2.2	運動方程式 (Equation of Motion, EOM)	14
§ 3.2.3	運動方程式の解	14
§ 3.2.4	a と a^\dagger の交換関係	16
§ 3.2.5	ハミルトニアンを a^\dagger と a で表す。	16
§ 3.2.6	a^\dagger と a は生成消滅演算子	17
§ 3.2.7	真空状態	18
§ 3.2.8	1 粒子状態と多粒子状態	19
§ 3.3	相互作用するスカラー場	20
§ 3.3.1	概略	21
§ 3.3.2	S 行列と散乱振幅 \mathcal{M}	22
§ 3.3.3	遷移確率：一般論	23
§ 3.3.4	$n = 2$ の場合、散乱断面積 σ	26
§ 3.3.5	散乱振幅 \mathcal{M} の計算の概要	29
§ 4	標準宇宙論入門	36
§ 5	暗黒物質	36
§ 6	素粒子の標準模型、ヒッグス機構	36

§ 7	ニュートリノ質量とその起源	36
§ 8	宇宙の物質反物質非対称性	36

はじめに

▶ 担当教員

濱口幸一、専門は素粒子論（+初期宇宙論）です。ウェブページは[こちら](#)。

▶ 講義のウェブページは[こちら](#)。

▶ 成績は、レポートによって評価します。

§ 1 標準模型と標準模型を超える物理についての概要

第1週 (4/15) と第2週 (4/22) はスライドを使って、標準模型と標準模型を超える物理について、概要をお話ししました。スライドは[こちら](#)から見ることができます。

————— [4/22、ここまで](#) —————

§ 2 今後の予定

さて、3週間ほど間が空きましたが、ここからしばらく板書を中心にして講義を行います。第1週に slido で講義で扱ってほしい内容を聞いたところ、上位は

- ▶ 場の量子論の基礎的な内容 (69%)
- ▶ 暗黒物質 (69%)
- ▶ 標準宇宙論入門 (63%)
- ▶ 素粒子の標準模型、ヒッグス機構 (50%)
- ▶ ニュートリノ質量とその起源 (44%)
- ▶ 宇宙の物質反物質非対称性 (44%)
- ▶ ...

というものでした。そこで今後しばらくは以下のように進めてみたいと思います。

§ 3 場の量子論入門

- 場の量子論の基礎的な内容。
- § 5 の暗黒物質の節で用いる、粒子の対消滅断面積の計算を目標とする。

§ 4 標準宇宙論入門

- 標準宇宙論の基礎。
- 膨張宇宙や宇宙の熱史について理解することを目標とする。

§ 5 暗黒物質

- まず暗黒物質の証拠や、候補の例について簡単に紹介。
- 次に WIMP 暗黒物質とその熱的残存量の計算について少し詳しく説明する。(ここで § 3 の結果を用いる予定。)
- 具体例として、Higgs portal 暗黒物質模型というものを紹介する。(状況を見て、次の § 6 のヒッグス機構と説明を前後するかも。) ここまで辿り着くのが当面の目標。

おそらくここまでで、講義日程の半分以上、もししたら大部分を費やすかと思います。それ以降は、残り日程の様子やを見ながら、§ 6 素粒子の標準模型とヒッグス機構、§ 7 ニュートリノ質量とその起源、§ 8 宇宙の物質反物質非対称性、、、と続けようと思っています。

§ 3 場の量子論入門

§ 3.1 はじめに

ここでは、場の量子論の基礎的な内容について紹介します。内容としては、2019年の私の講義から一部を抜粋して講義を行っていく予定です。

§ 3.1.1 色々な場、標準模型

		スピン	自由場の運動方程式	
スカラー場	$\phi(x)$	0	$(\square + m^2)\phi = 0$	Klein-Gordon eq.
フェルミオン場	$\psi_\alpha(x)$	1/2	$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$	Dirac eq.
ゲージ場 (ベクトル場)	$A_\mu(x)$	1	$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ $(F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$	Maxwell eq. (の一部)

素粒子の標準模型も場の量子論で記述されている。

- ▶ クォーク (u, d, s, c, b, t) とレプトン (e, μ, τ, ν_i)... フェルミオン場
- ▶ γ (光子), W^\pm, Z (weak bosons), g (グルーオン) ... ゲージ場 (ベクトル場)
- ▶ H (Higgs) ... スカラー場

この節では、主にスカラー場について扱う。

§ 3.1.2 量子力学と場の量子論

場の量子論は、量子力学の一種。場に対して量子力学を適用したもの。

- ▶ 量子力学: $q_i(t)$ ラベル $i = 1, 2, \dots$ は離散的
- ▶ 場の量子論: $\phi(\vec{x}, t)$ ($\phi_{\vec{x}}(t)$ と書いても良い。) \vec{x} は連続的 (自由度が無限個)

	量子力学	場の量子論
演算子 (ハイゼンベルグ描像)	$q_i(t), p_i(t)$ or $q_i(t), \dot{q}_i(t)$ $i = 1, 2, \dots$ 離散的 $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$	$\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}, t)$ or $\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t)$ $\vec{x} \dots$ 連続的 $[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$
状態	(例: 調和振動子) $ 0\rangle$: 基底状態 $a^\dagger 0\rangle, a^\dagger a^\dagger 0\rangle, \dots$ a^\dagger は q と p で書かれている	$ 0\rangle$: 基底状態 $a_{\vec{p}}^\dagger 0\rangle, a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}'}^\dagger 0\rangle, \dots$ $a_{\vec{p}}^\dagger$ は ϕ と π で書かれている
観測量 (期待値)	$\langle \cdot \vec{p} \cdot \rangle, \langle \cdot H \cdot \rangle, \dots$	$\langle \cdot \vec{p} \cdot \rangle, \langle \cdot H \cdot \rangle, \dots$
遷移確率	$P(i \rightarrow f) = \langle f i \rangle ^2$	$P(i \rightarrow f) = \langle f i \rangle ^2$

ここでは相対論的な場の量子論を考える。

(場の量子論自体は、物性で非相対論的な系でも広く使われている。)

相対論的な場の量子論は、量子力学と特殊相対論に基づいている

- ▶ 量子力学: $\hbar \neq 0$ (空間的に小さなスケールで重要)
- ▶ 特殊相対論: $c < \infty$ (速度が大きいときに重要)
- ▶ 場の量子論: $\hbar \neq 0$ and $c < \infty$
(スケールが小さくかつ速度が大きいような状況で重要: 素粒子物理、初期宇宙...)

§ 3.1.3 Notation, convention

- ▶ 自然単位系を用いる。

$$\hbar = c = 1, \quad \begin{cases} \hbar & \simeq 1.055 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1}, \\ c & = 2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-1}. \end{cases} \quad (1)$$

例えば

- $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ ではなく $E^2 = p^2 + m^2$ 、とか
- $[x, p] = i\hbar$ ではなく $[x, p] = i$ 、

のように書く。

▶ 以下の計量 (metric) を用いる

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

$g_{\mu\nu}$ は 4×4 行列で、 $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ 。それ以外はゼロ。

符号は教科書によって違うので注意。 $g_{\mu\nu}(\text{here}) = g_{\mu\nu}^{\text{Peskin}} = -g_{\mu\nu}^{\text{Srednicki}}$

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}) \quad (3)$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\vec{x}) \quad (4)$$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \vec{p}) \quad (5)$$

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = (E, -\vec{p}) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} p \cdot x &= p_\mu x^\mu = p^\mu x_\mu \\ &= p^0 x^0 - p^1 x^1 - p^2 x^2 - p^3 x^3 \\ &= p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x} \end{aligned} \quad (7)$$

$$= Et - \vec{p} \cdot \vec{x} \quad (8)$$

(繰り返しの足は和を取る。したがって $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ と書いたときは $x_\mu = \sum_{\nu=0,1,2,3} g_{\mu\nu}x^\nu$

という意味。例えば $\mu = 1$ とすると、 $x_1 = \sum_{\nu=0,1,2,3} g_{1\nu}x^\nu = g_{11}x^1 = -x^1$ となる。)

p^μ が質量 m を持つ粒子の 4 元運動量であるとき、

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 \quad (9)$$

$$= m^2. \quad (10)$$

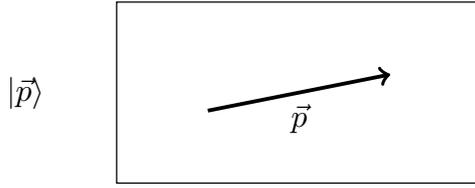
§ 3.1.4 (無限に) 多い粒子のヒルベルト空間とハミルトニアン

▶ 質量 m を持つスカラー粒子を考える。



$$\text{エネルギー } E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

▶ 運動量 \vec{p} を持つ 1 粒子状態を考えよう。



これはエネルギーが一定の状態、ハミルトニアンの固有状態。

$$H |\vec{p}\rangle = E_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} |\vec{p}\rangle. \quad (11)$$

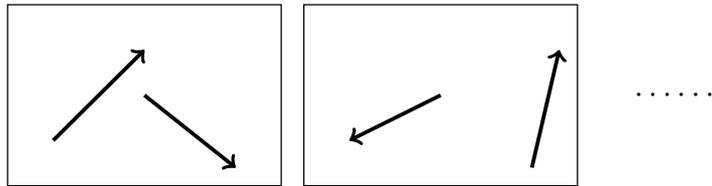
▶ もっとたくさんの（無限の）1粒子状態をヒルベルト空間（状態空間）に含めたい。

$$\begin{aligned} & \{ |\vec{p}_1\rangle, |\vec{p}_2\rangle, |\vec{p}_3\rangle, \dots \} \\ H |\vec{p}_i\rangle &= E_i |\vec{p}_i\rangle, \quad E_i = \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left(\begin{array}{c} H \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} |\vec{p}_1\rangle \\ |\vec{p}_2\rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} E_1 & & \\ & E_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \ddots \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} |\vec{p}_1\rangle \\ |\vec{p}_2\rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) \quad (13)$$

▶ さらに2粒子状態も含めたい。

$$\{ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle, |\vec{p}_3, \vec{p}_4\rangle, \dots \}$$

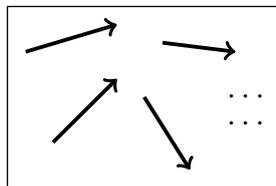


$$\begin{aligned} H |\vec{p}_i, \vec{p}_j\rangle &= (E_i + E_j) |\vec{p}_i, \vec{p}_j\rangle \\ &= \left(\sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m^2} + \sqrt{|\vec{p}_j|^2 + m^2} \right) |\vec{p}_i, \vec{p}_j\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

▶ さらに3粒子、4粒子、、、 n 粒子状態も。

$$\{ |\vec{p}_i, \vec{p}_j, \vec{p}_k\rangle, \dots |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle, \dots \}$$

$$H |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = (E_1 + \dots + E_n) |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad (15)$$



- ▶ これら全ての状態を同じヒルベルト空間で扱いたい。

$$\begin{pmatrix} H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\vec{p}_1\rangle \\ \vdots \\ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \\ \vdots \\ |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_1 + E_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sum_i^n E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\vec{p}_1\rangle \\ \vdots \\ |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \\ \vdots \\ |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (16)$$

相互作用があると、この行列の非対角成分がゼロでなくなって、状態どうしの遷移（粒子どうしの散乱とか、粒子の崩壊とか）が起きる。

- ▶ このヒルベルト空間と (16) 式のハミルトニアンは、以下のように生成消滅演算子を用いるとずっと簡単に記述できる。

$$|\vec{p}\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle, \quad (17)$$

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle, \quad (18)$$

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger \cdots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle, \quad (19)$$

$$H = \int \widetilde{d^3q} E_q a_q^\dagger a_{\vec{q}}, \quad \text{where } \boxed{\widetilde{d^3q} = \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q}}. \quad (20)$$

ここで、 $a_{\vec{p}}^\dagger$ and $a_{\vec{p}}$ は生成消滅演算子で、以下を満たすものとする。

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = a_{\vec{p}} a_{\vec{q}}^\dagger - a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}} = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (21)$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = 0, \quad (22)$$

$$[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0, \quad (23)$$

$$|0\rangle : \text{真空状態 (基底状態)}, \quad a_{\vec{p}} |0\rangle = 0. \quad (24)$$

▶ 確認してみよう。

$$H|0\rangle = \int \widetilde{d\vec{q}} E_q a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} |0\rangle = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} [H, a_{\vec{p}}^\dagger] &= \int \widetilde{d\vec{q}} E_q [a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}^\dagger] \\ &= \int \widetilde{d\vec{q}} E_q a_{\vec{q}}^\dagger [a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}^\dagger] \\ &= \int \widetilde{d\vec{q}} E_q a_{\vec{q}}^\dagger \cdot \underbrace{(2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p})}_{\text{}} \\ &= E_p a_{\vec{p}}^\dagger \end{aligned} \quad (26)$$

$$\therefore H a_{\vec{p}}^\dagger = a_{\vec{p}}^\dagger (E_p + H) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \therefore H (a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger \cdots a_{\vec{p}_n}^\dagger) |0\rangle &= a_{\vec{p}_1}^\dagger (E_1 + H) a_{\vec{p}_2}^\dagger \cdots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger (E_1 + E_2 + H) a_{\vec{p}_3}^\dagger \cdots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ &= \cdots \\ &= a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger \cdots a_{\vec{p}_n}^\dagger \underbrace{(H)}_{\rightarrow 0} + E_1 + \cdots + E_n |0\rangle \end{aligned} \quad (28)$$

$$H |\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_n\rangle = (E_1 + \cdots + E_n) |\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_n\rangle \quad (29)$$

▶ したがって、(16) 式の状態とハミルトニアンは、以下のようにずっと簡単に書ける。

$$|\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_n\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger \cdots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle, \quad (30)$$

$$H = \int \widetilde{d\vec{q}} E_q a_{\vec{q}}^\dagger a_{\vec{q}} \quad (31)$$

§ 3.2 で見るように、これらの状態ベクトルとハミルトニアンは、自由スカラー場の場の量子論から導ける。

▶ ところで、、、この表式は量子力学の調和振動子のときと良く似ている！

$$H = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + a^\dagger a \right) \quad (32)$$

§ 3.1.5 調和振動子と場の量子論

▶ 量子力学の調和振動子を思い出そう。以下のラグランジアンから始める。

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (\dot{q} = dq/dt). \quad (33)$$

共役運動量とハミルトニアンは

$$p = \frac{dL}{d\dot{q}} = m\dot{q}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p\dot{q} - L \\ &= \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \end{aligned} \quad (35)$$

q, p を演算子 \hat{q}, \hat{p} と置き換えて、正準量子化する。

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (36)$$

演算子 \hat{q}, \hat{p} とハミルトニアン \hat{H} は生成消滅演算子を用いて表すこともできる。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \quad (37)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) \quad (38)$$

とすると

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \\ &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

さらに

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad \iff \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (40)$$

基底状態、励起状態は

$$\text{基底状態: } |0\rangle, \quad \hat{a}|0\rangle = 0, \quad \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle, \quad (41)$$

$$\text{励起状態: } |n\rangle \propto (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle, \quad \hat{H}|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle. \quad (42)$$

▶ 複数の調和振動子があるときは

$$L = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 q_i^2 \right), \quad (43)$$

$$p_i = \frac{dL}{dq_i} = m_i \dot{q}_i, \quad (44)$$

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \iff [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (45)$$

$$\text{where } \hat{a}_i = \sqrt{\frac{m_i \omega_i}{2\hbar}} \left(\hat{q}_i + \frac{i}{m_i \omega_i} \hat{p}_i \right), \quad (46)$$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_i \left(\frac{1}{2m} \hat{p}_i^2 + \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 \hat{q}_i^2 \right) \\ &= \hbar \omega \sum_i \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

$$\text{基底状態: } |0\rangle, \quad \hat{a}_i |0\rangle = 0, \quad (49)$$

$$\text{励起状態: } |n_1, n_2, \dots\rangle \propto (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle, \quad (50)$$

$$\hat{H} |n_1, n_2, \dots\rangle = \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega. \quad (51)$$

▶ § 3.2 で見ると、場の量子論は無限に多い調和振動子の量子力学であるということもできる。

▶ ただし一つ大きな違いがあって、量子力学の調和振動子では

$$(a^\dagger)^n |0\rangle \quad (52)$$

は (1 粒子状態の) n 番目の励起状態であったが、場の量子論の

$$(a_{\vec{p}_1}^\dagger)^n |0\rangle \quad (53)$$

は n 粒子状態を表す。

一般に場の量子論での n 粒子状態は

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle \quad (54)$$

と表される。

- § 1 標準模型と標準模型を超える物理についての概要 (4/15 + 4/22、スライドで)
- § 3 場の量子論入門 (5/13~)
 - § 3.1 はじめに
 - § 3.1.1 色々な場、標準模型
 - § 3.1.2 量子力学と場の量子論
 - § 3.1.3 Notation, convention
 - § 3.1.4 (無限に) 多い粒子のヒルベルト空間とハミルトニアン
 - § 3.2 自由スカラー場 ← 今日ココから
- § 4 標準宇宙論入門
- § 5 暗黒物質
- ...

レポート問題を出題しました。こちらをご覧ください。

§ 3.2 自由スカラー場

実 スカラー 場 $\phi(x)$ を考える。

- ▶ 実: $\phi(x)^\dagger = \phi(x)$ (エルミート演算子)。
(エルミート演算子の定義は省略します。大雑把には複素共役みたいなもの。)
- ▶ スカラー: $\phi(x)$ のローレンツ変換は $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$
(ローレンツ変換についても省略します。例えばこちらの講義ノートに説明があります。)

§ 3.2.1 自由スカラー場のラグランジアンと正準量子化

量子力学 (QM) ではラグランジアン

$$L = L(\dot{q}, q) \quad \dot{} = \frac{\partial}{\partial t} . \quad (55)$$

を考えた。場の量子論 (QFT) でもラグランジアン

$$L = \int d^3x \underbrace{\mathcal{L}[\dot{\phi}(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}, t)]}_{\text{ラグランジアン密度}} \quad (56)$$

を考える。自由スカラー場の場合は

$$\begin{aligned} L = L_{\text{free}} &= \int d^3x \mathcal{L}[\dot{\phi}(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}, t)] \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \end{aligned} \quad (57)$$

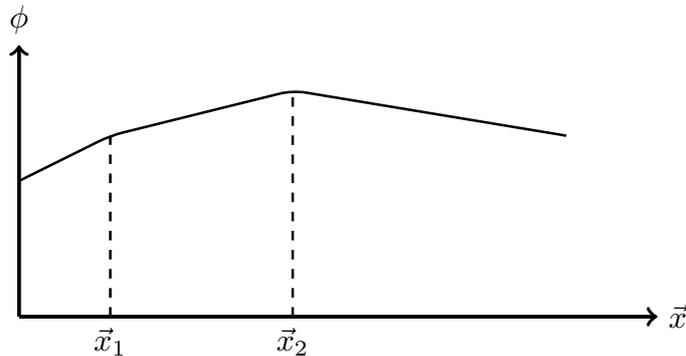
ここで m はスカラー粒子の質量であり、

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \left(\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (58)$$

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \phi \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \phi \right)^2 = \dot{\phi}^2 - \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi. \quad (59)$$

\vec{x} を単なるラベルと思うと、、、

$$\phi(\vec{x}, t) = \{ \phi_{\vec{x}_1}(t), \phi_{\vec{x}_2}(t), \dots \} \quad (60)$$



無限自由度の QM

$$\begin{aligned} L &= \sum_{\vec{x}} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}_{\vec{x}}(t)^2 + \dots \right) \\ &\iff \sum_i \frac{1}{2} \dot{q}_i(t)^2 + \dots \end{aligned}$$

	QM	QFT
共役運動量	$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} = \dot{\phi}(\vec{x}, t)$ (汎関数微分)
ハミルトニアン	$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$	$H = \int d^3x \left(\pi(\vec{x}, t) \dot{\phi}(\vec{x}, t) - \mathcal{L} \right)$ $= \int d^3x \left(\pi^2 - \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$ $= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">正準量子化</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">同時刻交換関係</div>	$[q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij}$ $[q_i(t), q_j(t)] = 0$ $[p_i(t), p_j(t)] = 0$	<div style="border: 2px solid red; padding: 5px;"> $[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ $[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0$ $[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = 0$ </div> <p style="color: red; margin-top: 10px;">↑ 同時刻</p>

コメント

(i) シュレディンガー表示とハイゼンベルグ表示

QFT では通常ハイゼンベルグ表示を用いる。

	状態	演算子
シュレディンガー表示	$ \Psi(t)\rangle_S$ 時間に依存する	\mathcal{O}_S 時間に依存しない
ハイゼンベルグ表示	$ \Psi\rangle_H$ 時間に依存しない	$\mathcal{O}_H(t)$ 時間に依存する

シュレディンガー表示

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_S = H(p, q) |\Psi(t)\rangle_S \quad (61)$$

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle_S \quad (62)$$

$$\text{演算子の期待値} : {}_S \langle \Psi(t) | \mathcal{O}_S | \Psi(t) \rangle_S \quad (63)$$

ハイゼンベルグ表示

$$\begin{cases} |\Psi\rangle_H & \equiv |\Psi(t_0)\rangle_S = e^{iH(t-t_0)} |\Psi(t)\rangle_S \\ \mathcal{O}_H(t) & \equiv e^{iH(t-t_0)} \mathcal{O}_S e^{-iH(t-t_0)} \end{cases} \quad (64)$$

$$\text{演算子の期待値: } {}_H\langle\Psi|\mathcal{O}_H(t)|\Psi\rangle_H = \dots = {}_S\langle\Psi(t)|\mathcal{O}_S|\Psi(t)\rangle_S \quad (65)$$

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\mathcal{O}_H(t) &= \left(-He^{iH(t-t_0)}\right)\mathcal{O}_S e^{-iH(t-t_0)} + e^{iH(t-t_0)}\mathcal{O}_S \left(He^{-iH(t-t_0)}\right) \\ &= -H\mathcal{O}_H(t) + \mathcal{O}_H(t)H \\ &= [\mathcal{O}_H(t), H]. \quad \text{ハイゼンベルグ方程式} \end{aligned} \quad (66)$$

§ 3.2.2 運動方程式 (Equation of Motion, EOM)

- ▶ 作用原理 $\delta S = \delta \int dt L = 0$ より、ラグランジアン $L = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$ に対して

$$\partial_\mu \frac{\delta L}{\delta(\partial_\mu \phi)} - \frac{\delta L}{\delta \phi} = \partial_\mu (\partial^\mu \phi) + m^2 \phi = 0 \quad (67)$$

あるいは $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$ を用いて

$$\text{EOM} \quad \boxed{(\square + m^2) \phi(x) = 0 \quad \text{Klein-Gordon 方程式}} \quad (68)$$

- ▶ さらにこれを用いてハイゼンベルグ方程式 (66)

$$\begin{cases} i\dot{\phi} = [\phi, H] \\ i\ddot{\phi} = [\dot{\phi}, H] \end{cases} \quad (69)$$

が成り立っていることも確認できる。 (証明略)

§ 3.2.3 運動方程式の解

- ▶ $\boxed{(\square + m^2) \phi(x) = 0 \text{ (Klein-Gordon eq.)}}$ の解 $\phi(x)$ は

$$\boxed{\phi(x) = \int \widetilde{d^3p} \left(a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \quad (70)$$

で与えられる。ただし $\phi(x)$, $a(\vec{p})$, $a^\dagger(\vec{p})$ は演算子で、
 $\widetilde{d^3p} = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}$, $p \cdot x = p_\mu x^\mu = p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x}$.

- ▶ 実際、(70) を EOM $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ の左辺に代入すると

$$(\square + m^2)\phi(x) = \int \widetilde{d\vec{p}} \left(a(\vec{p}) [(\square + m^2)e^{-ip \cdot x}] + a^\dagger(\vec{p}) [(\square + m^2)e^{ip \cdot x}] \right) \Big|_{p^0=E_p} \quad (71)$$

となり

$$\begin{aligned} (\square + m^2)e^{\pm ip \cdot x} &= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)e^{\pm ip \cdot x} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) e^{\pm ip \cdot x} \\ &= (-E_p^2 + \underbrace{\vec{p}^2}_{E_p^2} + m^2)e^{\pm ip \cdot x} = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

なので、確かに $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ が成り立つ。

- ▶ (フーリエ変換を使うなどして、(70) 式が EOM $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ の一般解になっていることも示せる。ここでは証明略。)
- ▶ (70) 式より、 $\phi(x)$ を用いて $a(\vec{p})$ と $a^\dagger(\vec{p})$ を表すこともできる。

$$\boxed{\begin{cases} a(\vec{p}) = \int d^3x e^{ip \cdot x} [i\dot{\phi}(x) + E_p \phi(x)] \\ a^\dagger(\vec{p}) = \int d^3x e^{-ip \cdot x} [-i\dot{\phi}(x) + E_p \phi(x)] \end{cases}} \quad (73)$$

- ▶ (70) \rightarrow (73) が成立することを示そう。

$$(70) \text{ より } \phi(x) = \int \widetilde{d\vec{q}} (a(\vec{q})e^{-iq \cdot x} + a^\dagger(\vec{q})e^{iq \cdot x}) \quad (74)$$

$$i\dot{\phi}(x) = \int \widetilde{d\vec{q}} (E_q a(\vec{q})e^{-iq \cdot x} - E_q a^\dagger(\vec{q})e^{iq \cdot x}) \quad (75)$$

$$i\dot{\phi}(x) + E_p \phi(x) = \int \widetilde{d\vec{q}} ((E_q + E_p)a(\vec{q})e^{-iq \cdot x} + (-E_q + E_p)a^\dagger(\vec{q})e^{-iq \cdot x}) \quad (76)$$

よって

$$\begin{aligned}
 (73) \text{ の右辺} &= \int d^3x e^{+ip \cdot x} \int \widetilde{d\vec{q}} \left((E_q + E_p) a(\vec{q}) e^{-iq \cdot x} + (-E_q + E_p) a^\dagger(\vec{q}) e^{+iq \cdot x} \right) \\
 &= \int d^3x e^{iE_p x^0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \cdot e^{-iE_q x^0} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \\
 &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \cdot e^{i(E_p - E_q)x^0} \quad (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) \cdot e^{i(E_p + E_q)x^0} \\
 &= \int \frac{d^3q}{2E_q} \left((E_q + E_p) a(\vec{q}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \underbrace{(-E_q + E_p)}_{\rightarrow 0} a^\dagger(\vec{q}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) e^{i(E_p + E_q)x^0} \right) \\
 &= a(\vec{p}) = (73) \text{ の左辺} \quad \blacksquare \tag{77}
 \end{aligned}$$

▶ (逆に (73) → (70) も示せる。証明略。)

§ 3.2.4 a と a^\dagger の交換関係

▶ § 3.2.1 の ϕ と $\pi (= \dot{\phi})$ の同時刻交換関係より a と a^\dagger の交換関係も導ける。

$$\left\{ \begin{array}{l} [\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t) = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \\ [\dot{\phi}(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ [a(\vec{p}), a(\vec{q})] = 0 \\ [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = 0 \end{array} \right. \tag{78}$$

– 右辺 → 左辺は (70) 式を用いて示せる。(省略。各自やってみましょう。)

– 左辺 → 右辺は (73) 式を用いて示せる。(省略。各自やってみましょう。)

§ 3.2.5 ハミルトニアンを a^\dagger と a で表す。

▶ ハミルトニアン

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \tag{79}$$

に (70) を代入して (頑張って) 計算すると、 (計算略、時間があれば講義中に概略を示すかも)

$$H = \int \widetilde{d\vec{q}} E_q a^\dagger(\vec{q}) a(\vec{q}) \quad (80)$$

が示せる。(ただし定数項は無視した。)

- ▶ これで、§ 3.1.4 で予告した式のうちハミルトニアン (31) については再現できた。

§ 3.2.6 a^\dagger と a は生成消滅演算子

- ▶ この節では以下のことを見ていく。

$a(\vec{p})$ はエネルギー E_p で運動量 \vec{p} の粒子を 1 つ消滅させる。

$a^\dagger(\vec{p})$ はエネルギー E_p で運動量 \vec{p} の粒子を 1 つ生成する。

- ▶ まず最初に

$$\begin{cases} [H, a^\dagger(\vec{p})] = E_p a^\dagger(\vec{p}) \\ [H, a(\vec{p})] = -E_p a(\vec{p}) \end{cases} \quad (81)$$

を示す。

- ▶ ハミルトニアン (80) および a, a^\dagger の交換関係 (78) より

$$\begin{aligned} [H, a^\dagger(\vec{p})] &= \left[\int \widetilde{d\vec{q}} E_q a^\dagger(\vec{q}) a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{p}) \right] \\ &= \int \widetilde{d\vec{q}} E_q a^\dagger(\vec{q}) [a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{p})] \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} E_q a^\dagger(\vec{q}) (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ &= E_p a^\dagger(\vec{p}). \end{aligned} \quad (82)$$

$[H, a^\dagger(\vec{p})] = E_p a^\dagger(\vec{p})$ も同様に示せる。

- ▶ 同様にして運動量演算子 \hat{P} に対して

$$\begin{cases} [\hat{P}, a^\dagger(\vec{p})] = \vec{p} a^\dagger(\vec{p}) \\ [\hat{P}, a(\vec{p})] = -\vec{p} a(\vec{p}) \end{cases} \quad (83)$$

も示せる。ただし

$$\hat{P} = - \int d^3x \pi \vec{\nabla} \phi = \int \widetilde{d\vec{q}} \vec{q} a^\dagger(\vec{q}) a(\vec{q}) \quad (84)$$

である。(並進対称性のネーターカレントから示せる。省略。)

- ▶ さて、以上を用いて a^\dagger と a は1粒子の生成消滅演算子であることを見ていこう。
 まず、エネルギーが E_X 、運動量が \vec{p}_X である状態 $|X\rangle$ を考える。

$$|X\rangle : \begin{cases} H |X\rangle = E_X |X\rangle \\ \hat{P} |X\rangle = \vec{p}_X |X\rangle \end{cases} \quad (85)$$

すると、状態 $a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle$ に対して、

$$H (a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle) = ([H, a^\dagger(\vec{p})] + a^\dagger(\vec{p})H) |X\rangle \quad (86)$$

$$= (E_p a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p})E_X) |X\rangle \quad (87)$$

$$= (E_p + E_X) (a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle), \quad (88)$$

$$\hat{P} (a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle) = ([\hat{P}, a^\dagger(\vec{p})] + a^\dagger(\vec{p})\hat{P}) |X\rangle \quad (89)$$

$$= (\vec{p} a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p})\vec{p}_X) |X\rangle \quad (90)$$

$$= (\vec{p} + \vec{p}_X) (a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle). \quad (91)$$

したがって、状態 $a^\dagger(\vec{p}) |X\rangle$ はエネルギーが $E_p + E_X$ で運動量が $\vec{p} + \vec{p}_X$ になっている。
つまり $a^\dagger(\vec{p})$ はエネルギー E_p と運動量 \vec{p} を加える演算子（生成演算子）である。

- ▶ 同様に

$$H (a(\vec{p}) |X\rangle) = (E_X - E_p) (a(\vec{p}) |X\rangle), \quad (92)$$

$$\hat{P} (a(\vec{p}) |X\rangle) = (\vec{p}_X - \vec{p}) (a(\vec{p}) |X\rangle). \quad (93)$$

が示せる。したがって $a(\vec{p})$ は消滅演算子である。

§ 3.2.7 真空状態

消滅演算子 $a(\vec{p})$ はエネルギーを減らす。

$$\begin{array}{ccccccc} & |X\rangle & \rightarrow & a(\vec{p}) |X\rangle & \rightarrow & a(\vec{q})a(\vec{p}) |X\rangle & \cdots \\ \text{エネルギー} & E_X & & E_X - E_p & & E_X - E_p - E_q & \end{array} \quad (94)$$

基底状態（真空状態） $|0\rangle$ は

$$a(\vec{p}) |0\rangle = 0 \quad (95)$$

を満たす状態。

§ 3.2.8 1 粒子状態と多粒子状態

▶ 1 粒子状態は

$$|\vec{p}\rangle = a^\dagger(\vec{p})|0\rangle. \quad (96)$$

規格化

$$\langle\vec{q}|\vec{p}\rangle = \langle 0|a(\vec{q})a^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (97)$$

$$= \langle 0|\left(\underbrace{[a(\vec{q}), a^\dagger(\vec{p})]}_{(2\pi)^3 2E_q \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})} + a^\dagger(\vec{p}) \underbrace{a(\vec{q})}_{\rightarrow 0} \right)|0\rangle \quad (98)$$

$$= (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}). \quad (99)$$

ただし真空状態は $\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化されているとした。

▶ n 粒子状態は

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1) \dots a^\dagger(\vec{p}_n)|0\rangle \quad (100)$$

で与えられ、

$$H|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = (E_1 + \dots + E_n)|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad (101)$$

$$\hat{P}|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = (\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n)|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad (102)$$

を満たす。これで § 3.1.4 で予告したもう 1 つの式 (30) が示せた！

————— 5/20、ここまで —————

————— 5/27、ここから —————

————— ここまでのあらすじ —————

§ 1 標準模型と標準模型を超える物理についての概要 (4/15 + 4/22、スライドで)

§ 2 今後の予定

§ 3 場の量子論入門 (5/13~)

§ 3.1 はじめに

§ 3.2 自由スカラー場 (5/20)

§ 3.3 相互作用するスカラー場 (5/27~) ← 今日ココから

§ 4 標準宇宙論入門

§ 5 暗黒物質

...

§ 3.3 相互作用するスカラー場

この節の目標：相互作用する場の量子論における 散乱断面積の計算の概要 を理解する。

- ▶ 例として、2つのスカラー場 $\phi(x) = \phi(t, \vec{x})$ と $S(x) = S(t, \vec{x})$ に関する以下のラグランジアンを考える。

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad (103)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}}^{\phi} + \mathcal{L}_{\text{free}}^S + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (104)$$

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^{\phi} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} m_{\phi}^2 \phi^2 \quad (105)$$

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^S = \frac{1}{2} \partial_{\mu} S \partial^{\mu} S - \frac{1}{2} m_S^2 S^2 \quad (106)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4} S^2 \phi^2 \quad (107)$$

$\mathcal{L}_{\text{free}}^{\phi}$ と $\mathcal{L}_{\text{free}}^S$ はそれぞれ前の節でやった自由スカラー場のラグランジアン。

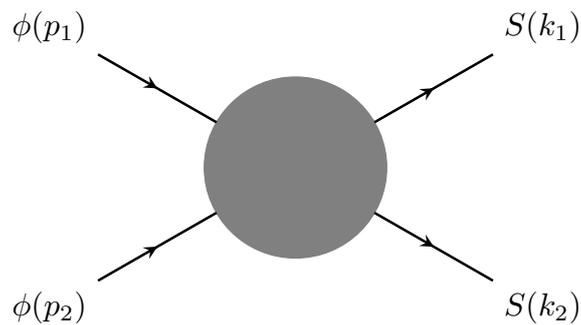
((107) 式の \mathcal{L}_{int} の前の符号を修正しました。(5/31))

\mathcal{L}_{int} が相互作用項で λ は結合定数。相互作用があると ϕ と S の反応が起きる。

- ▶ 具体例として

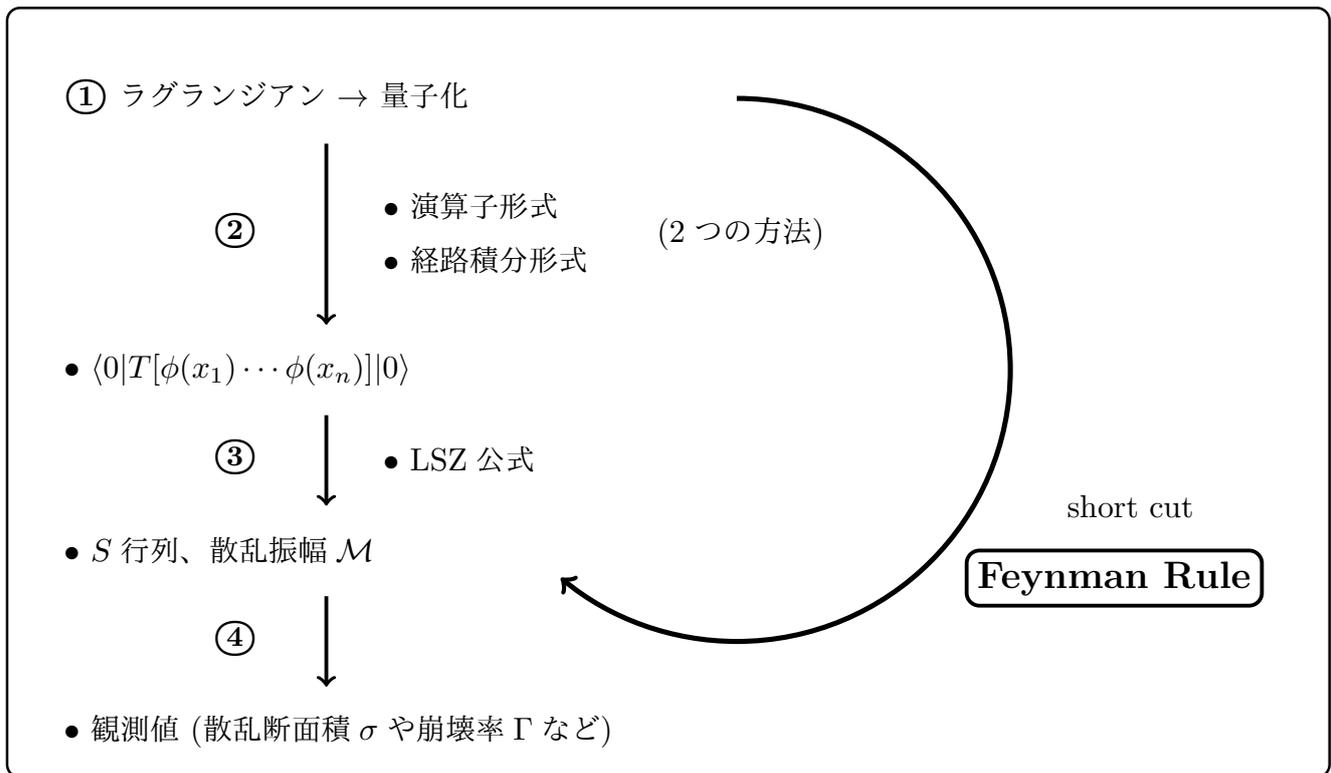
$$\phi + \phi \rightarrow S + S \quad (108)$$

という、2つの ϕ 粒子が2つの S 粒子に對消滅するプロセス を考える。



§ 3.3.1 概略

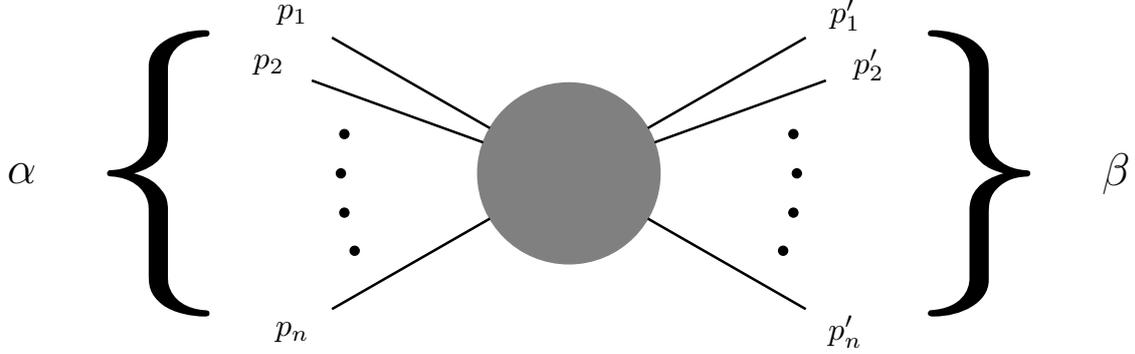
一般に、場の量子論において、散乱断面積 σ や崩壊率 Γ などの計算は、摂動論では **Feynman Rule** と呼ばれる計算方法で計算される。以下に概略図を示す。



- ▶ この講義では、①～③ の詳細は省略して、概要だけ説明します。→ § 3.3.5 節。
(より詳細については場の量子論の教科書やこちらの講義ノートを参照して下さい。)
- ▶ その前にまず次の § 3.3.2～§ 3.3.4 節で ④ をやる。

§ 3.3.2 S 行列と散乱振幅 \mathcal{M}

以下のようなプロセス $P(\alpha \rightarrow \beta)$ を考えたい。



▶ 始状態と終状態の間の振幅

$$\langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_m ; \text{out} | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n ; \text{in} \rangle = \langle \vec{p}'_1, \dots, \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \rangle \quad (109)$$

を S 行列という。

(“in” と “out” の定義については省略。§ 3.3.5 で少しコメントする。)

▶ エネルギーと運動量が保存すると仮定して

$$\langle \vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n \rangle \propto \delta\left(\underbrace{\sum_f E'_f}_{\text{final}} - \underbrace{\sum_i E_i}_{\text{initial}}\right) \times \delta^{(3)}\left(\sum_f \vec{p}'_f - \sum_i \vec{p}_i\right) \quad (110)$$

$$= \delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right) \quad (111)$$

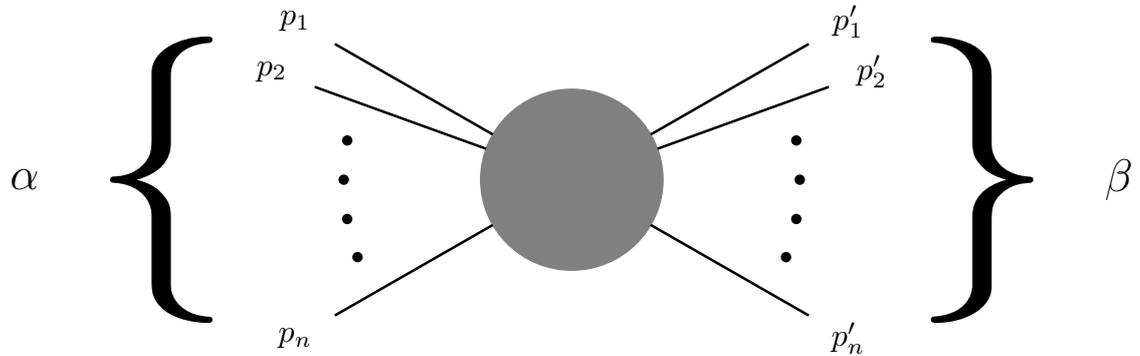
そこで以下のように散乱振幅（不変散乱振幅、不変行列要素などともいう） \mathcal{M} を定義する。

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i\right) \cdot i\mathcal{M}(\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_m) \end{aligned} \quad (112)$$

この散乱振幅 \mathcal{M} は Feynman Rule で計算できる。(§ 3.3.5 節で概要を説明する。)

§ 3.3.3 遷移確率：一般論

- ▶ さて、今考えているプロセスの 確率 $P(\alpha \rightarrow \beta)$ を考えたい。



- ▶ もし始状態と終状態が $\langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ のように規格化されていたら

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |\langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle|^2 \quad (113)$$

となるはず。

- ▶ しかし、今考えたいのは

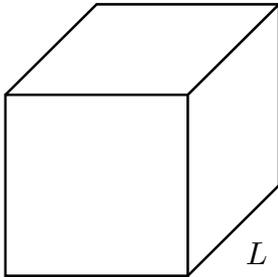
$$|\alpha\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle, \quad (114)$$

みたいな状態で、規格化は

$$\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (115)$$

となっていた (§ 3.2.8 参照)。

- ▶ そこで規格化のために、以下のような箱で考える。



$$V = L^3, \quad \vec{p} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$$

すると、(115) 式より

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle &= 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\
 &= 2E_p \int d^3x e^{i(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{x}} \\
 &= 2E_p \underbrace{\left(\int_V d^3x \right)}_{\text{離散的}} \delta_{\vec{p}, \vec{q}}.
 \end{aligned} \tag{116}$$

そこで

$$|\vec{p}\rangle_{\text{Box}} = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} |\vec{p}\rangle. \tag{117}$$

と定義すると、(116) と (117) より

$${}_{\text{Box}} \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle_{\text{Box}} = \delta_{\vec{p}, \vec{q}}. \tag{118}$$

よって $|\vec{p}\rangle_{\text{Box}}$ は確率を求めるために良い規格化になっている。例えば、もし何も相互作用がなければ

$$P(\vec{p} \rightarrow \vec{p}') = \left| {}_{\text{Box}} \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle_{\text{Box}} \right|^2 = \delta_{\vec{p}', \vec{p}} = \begin{cases} 1 & (\vec{p}' = \vec{p}) \\ 0 & (\vec{p}' \neq \vec{p}) \end{cases} \tag{119}$$

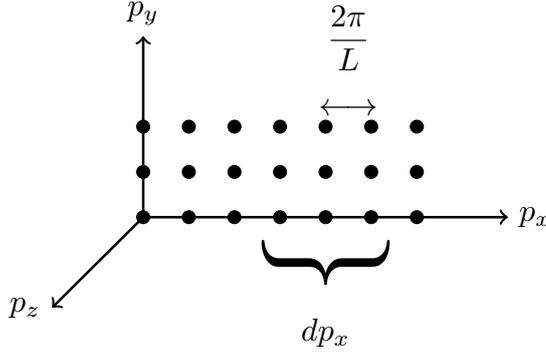
▶ したがって、求めたい確率は (117) を用いて

$$\begin{aligned}
 &\text{確率 } P(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m) \\
 &= \left| {}_{\text{Box}} \langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle_{\text{Box}} \right|^2 \\
 &= \left(\prod_{f=1}^m \frac{1}{2E'_f} \right) \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2E_i} \right) \left(\frac{1}{V} \right)^{n+m} \left| \langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle \right|^2
 \end{aligned} \tag{120}$$

▶ しかしこれは $V \rightarrow \infty$ でゼロになってしまう。

▶ そこで終状態が $[\vec{p}'_f, \vec{p}'_f + d\vec{p}'_f]$ にある微小確率はいくつかを考える。

$$dP = P(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m) \times \underbrace{dN}_{[\vec{p}'_f, \vec{p}'_f + d\vec{p}'_f] \text{ にある状態の数}} \quad (121)$$



$$dN = \frac{d^3 p}{(2\pi/L)^3} = \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot V$$

終状態に m 個の粒子 $\vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m$ がある場合、

$$dN = \prod_{f=1}^m \left(\frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3} \cdot V \right) \quad (122)$$

(120), (121), (122) より

$$\begin{aligned} dP &= P(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m) \times dN \\ &= \left(\prod_{f=1}^m \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'_f} \right) \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2E_i} \right) \left(\frac{1}{V} \right)^n \left| \langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (123)$$

ここで (112) を思い出すと

$$\langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot i\mathcal{M}(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m)$$

これを二乗すると

$$\begin{aligned} \left| \langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle \right|^2 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot |\mathcal{M}|^2 \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) \cdot |\mathcal{M}|^2 \\ &\quad \left(\delta^{(4)}(0) = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{i0 \cdot x} = \frac{V \cdot T}{(2\pi)^4} \quad T: \text{時間} (\rightarrow \infty) \right) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot V \cdot T \cdot |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (124)$$

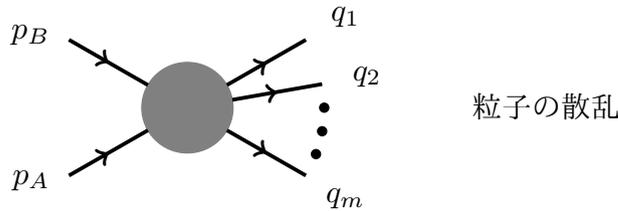
▶ よって (123) を時間 T で割ると

$$\frac{dP}{T} = V^{1-n} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{2E_i} \right) \underbrace{\left(\prod_{f=1}^m \widetilde{dp'_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum p'_f - \sum p'_i \right) \cdot |\mathcal{M}(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m)|^2}_{\equiv d\Phi_m} \quad (125)$$

▶ 一般論はここまで。次に始状態が 2 粒子の場合、 $n = 2$ を考える。

($n = 1$ の場合は粒子の崩壊率が計算できる。ここでは省略。)

§ 3.3.4 $n = 2$ の場合、散乱断面積 σ

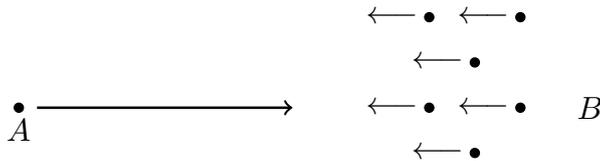


▶ (125) 式より、単位時間あたりに終状態の粒子が運動量 $[\vec{q}_f, \vec{q}_f + d\vec{q}_f]$ に遷移する確率は

$$\frac{dP(p_A, p_B \rightarrow q_1 \cdots q_m)}{T} = \frac{1}{V} \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B} d\Phi_m |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \cdots q_m)|^2 \quad (126)$$

▶ 始状態が 2 粒子の場合、散乱断面積 (あるいは単に断面積) という物理量を考える。

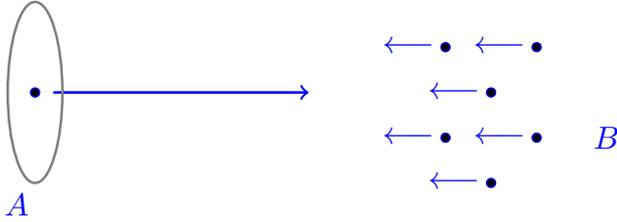
▶ 粒子 A が多くの粒子 B (数密度 n_B) と相対速度 v_{rel} で衝突することを考える。



単位時間あたりに散乱 $A, B \rightarrow 1, 2 \cdots$ が起こる確率は

$$\frac{P(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \cdots)}{T} = n_B \cdot v_{\text{rel}} \cdot \underbrace{\sigma(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \cdots)}_{\text{散乱断面積}} \quad (127)$$

なぜ「断面積」なのか？



面積 σ の円盤を考えると、時間 T の間にこの円盤を通る粒子 B の数は

$$N_B = \sigma \cdot v_{\text{rel}} \cdot T \cdot n_B. \quad (128)$$

これは (127) と整合している。(時間 T が短いとき、 $N_B < 1$ は確率を与える。)

- ▶ いま考えている状況では、粒子 B は1つしかないから、 $n_B = 1/V$ 。したがって、終状態が $[\vec{p}'_f, \vec{p}'_f + d\vec{p}'_f]$ となる散乱断面積 (微分散乱断面積) は

$$\begin{aligned} d\sigma(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \dots) &= \frac{1}{v_{\text{rel}}} V \frac{dP(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \dots)}{T} \quad [\because (127)] \\ &= \frac{1}{v_{\text{rel}}} \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B} d\Phi_m |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \dots q_m)|^2 \quad [\because (126)] \end{aligned} \quad (129)$$

終状態の運動量で積分して

散乱断面積

$$\begin{aligned} \sigma(p_A, p_B \rightarrow 1, 2 \dots) &= \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B \cdot v_{\text{rel}}} \int d\Phi_m |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \dots q_m)|^2 \\ &= \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B \cdot v_{\text{rel}}} \left(\prod_{f=1}^m \int \widetilde{dq}_f \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_f q_f) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \dots)|^2 \end{aligned} \quad (130)$$

コメント

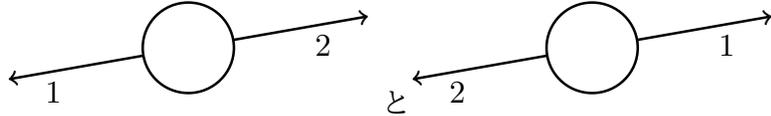
- (i) 次元の確認 : σ の次元は (エネルギー) $^{-2} \sim$ (長さ) $^2 \sim$ (面積).
(ii) 相対速度 v_{rel} は

$$v_{\text{rel}} = \left| \frac{\vec{p}_A}{E_A} - \frac{\vec{p}_B}{E_B} \right| \quad (131)$$

(光速で正面衝突する場合は $v_{\text{rel}} = 2$.)

(iii) 終状態に同種粒子がある場合は対称因子で割る必要がある。

(例) 粒子 1 と粒子 2 が同種粒子のとき



は区別がつかない。

よって

- ① 積分範囲を半分にする ($\theta = [0, \pi] \rightarrow [0, \pi/2]$) か、
- ② 積分したあとで対称因子 (= 2) で割る。

5/27、ここまで

(修正 : (107) 式の \mathcal{L}_{int} の前の符号を修正しました。)

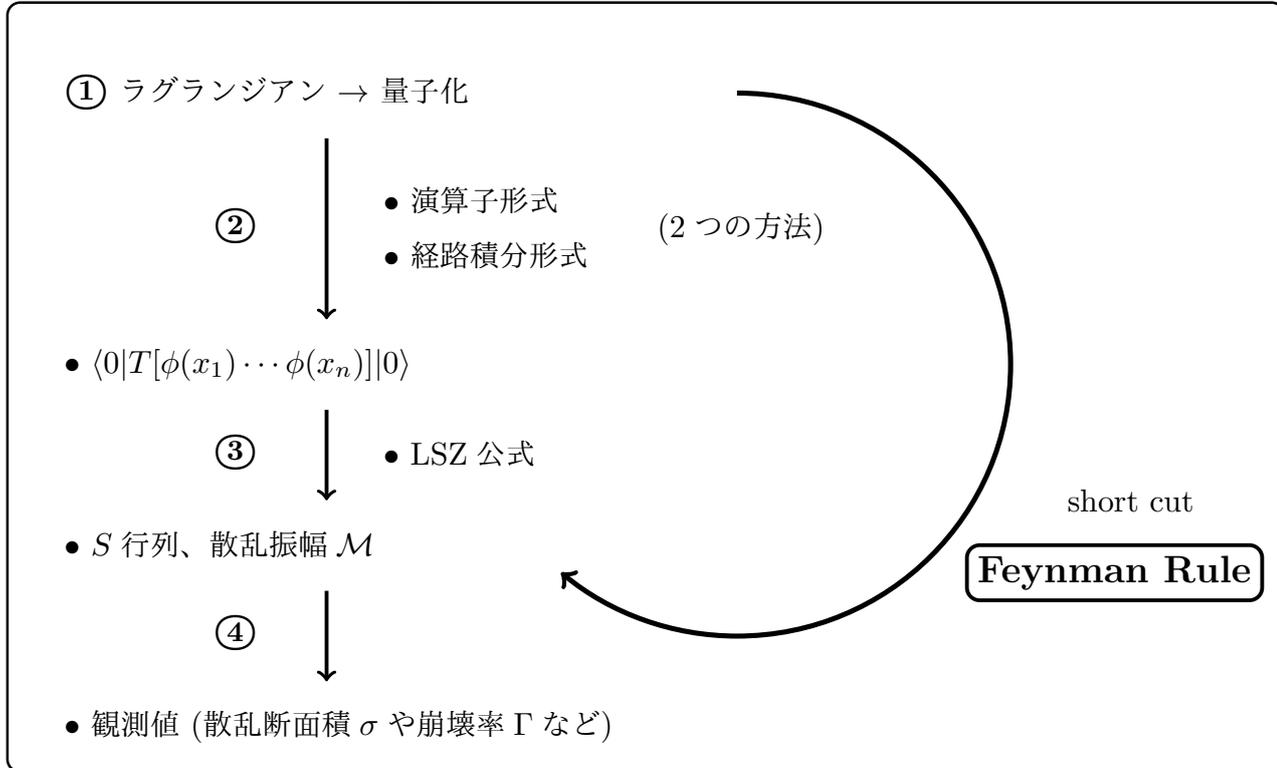
6/3、ここから

ここまでのあらすじ

- § 1 標準模型と標準模型を超える物理についての概要 (4/15 + 4/22、スライドで)
- § 2 今後の予定
- § 3 場の量子論入門 (5/13~)
 - § 3.1 はじめに
 - § 3.2 自由スカラー場 (5/20)
 - § 3.3 相互作用するスカラー場 (5/27~)
 - § 3.3.1 概略
 - § 3.3.2 S 行列と散乱振幅 \mathcal{M}
 - § 3.3.3 遷移確率 : 一般論
 - § 3.3.4 $n = 2$ の場合、散乱断面積 σ
 - § 3.3.5 散乱振幅 \mathcal{M} の計算の概要 ← 今日ココから
- § 4 標準宇宙論入門
- § 5 暗黒物質
- ...

§ 3.3.5 散乱振幅 \mathcal{M} の計算の概要

▶ ここまでで、以下の概略図の ④ を見てきた。



▶ 前回の最後、(130) 式で見たように、断面積は

$$\sigma(p_A, p_B \rightarrow 1, 2, \dots) = \frac{1}{2E_A \cdot 2E_B \cdot v_{\text{rel}}} \int d\Phi_m |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow q_1 \cdots q_m)|^2$$

$$d\Phi_m = \left(\prod_{f=1}^m \int \widetilde{dq}_f \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_f q_f)$$

$$= \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \cdots \frac{d^3 q_m}{(2\pi)^3 2E_{q_m}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_f q_f) \quad (132)$$

で与えられた。

▶ あとは散乱振幅 \mathcal{M} が計算できれば良い。... が、これをラグランジアンからちゃんと導くのは大変。

② には (演算子形式の場合) 相互作用表示、Wick の定理... が必要

③ には § 3.3.2 で出てきた “in” “out” 状態の定義、LSZ 公式などが必要。

この講義ではこれらの詳細は省略して、概要のみ説明する。

(より詳細については場の量子論の教科書やこちらの講義ノートを参照して下さい。)

- ▶ 具体例として、§ 3.3 の冒頭で導入した

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}}^\phi + \mathcal{L}_{\text{free}}^S + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (133)$$

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 \quad (134)$$

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^S = \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S - \frac{1}{2} m_S^2 S^2 \quad (135)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4} S^2 \phi^2 \quad (136)$$

という模型における $\phi + \phi \rightarrow S + S$ という散乱を考える。

- ▶ 量子力学のときと同様、散乱振幅は

$$\langle \text{終} | e^{-iHt} | \text{始} \rangle \quad (137)$$

のような量で与えられる。(始状態・終状態の定義とか時間 t の扱いが曖昧なのでとごまかした書き方をしています...。)

- ▶ $H = H_{\text{free}} + H_{\text{int}}$ として、 H_{int} での摂動を考える。今の模型の場合は

$$H_{\text{int}} = -L_{\text{int}} = - \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^3x = \int \left(\frac{\lambda}{4} S^2 \phi^2 \right) d^3x \quad (138)$$

なので、摂動展開は λ での展開となる。

$$\text{散乱振幅} \sim \mathcal{O}(\lambda) \text{ の項} + \mathcal{O}(\lambda^2) \text{ の項} + \dots \quad (139)$$

相互作用表示を用いて展開すると (詳細は省略、、、) 摂動の 1 次では

$$\langle \text{終} | (-i) \int H_{\text{int}} dt | \text{始} \rangle \quad (140)$$

を計算することになる。時間積分の範囲は (ここも詳細は省くが、、、始状態と終状態を $t \rightarrow \pm\infty$ の漸近状態で定義して、、、) $t = -\infty \rightarrow \infty$ 。(138) 式を代入すると

- ▶ したがって、相互作用ハミルトニアンは $H_{\text{int}} = -L_{\text{int}}$ なので、

$$(-i) \int H_{\text{int}} dt = i \int L_{\text{int}} dt = i \int \left(\int \mathcal{L}_{\text{int}} d^3x \right) dt = i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x. \quad (141)$$

したがって摂動の 1 次で、振幅は

$$\langle \text{終} | i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x | \text{始} \rangle \quad (142)$$

を計算することで与えられる。

▶ 積分はあとで考えることにして

$$\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle \quad (143)$$

を考えよう。始状態と終状態は

$$| \text{始} \rangle = | \phi(\vec{p}_1) \phi(\vec{p}_2) \rangle \sim a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \quad (144)$$

$$| \text{終} \rangle = | S(\vec{k}_1) S(\vec{k}_2) \rangle \sim a_S^\dagger(\vec{k}_1) a_S^\dagger(\vec{k}_2) | 0 \rangle \quad (145)$$

(本当は漸近状態としての $|\text{in}\rangle$ と $|\text{out}\rangle$ を考える必要があるが、詳細は略。)

ただし $a_\phi^\dagger(\vec{p})$ と $a_S^\dagger(\vec{k})$ はそれぞれ粒子 ϕ と S の生成演算子で、

$$\left[a_\phi(\vec{p}), a_\phi^\dagger(\vec{p}') \right] = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (146)$$

$$\left[a_S(\vec{k}), a_S^\dagger(\vec{k}') \right] = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (147)$$

$$\text{それ以外の交換子} = 0 \quad (148)$$

を満たす。

▶ したがって $\langle \text{終} | = \left(| \text{終} \rangle \right)^\dagger \sim \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2)$ を用いて

$$\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle \sim \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) \mathcal{L}_{\text{int}} a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \quad (149)$$

▶ ここで、例えば $a_S(\vec{k}_2)$ に注目する。もし \mathcal{L}_{int} に $a_S^\dagger(\vec{k}_2)$ が含まれていないと、

$$\left[a_S(\vec{k}_2), \mathcal{L}_{\text{int}} \Big|_{a_S^\dagger(\vec{k}_2) \text{ がない場合}} \right] = 0 \quad (150)$$

なので

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) \underbrace{a_S(\vec{k}_2)}_{\rightarrow} \left(\mathcal{L}_{\text{int}} \Big|_{a_S^\dagger(\vec{k}_2) \text{ がない場合}} \right) a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) \left(\mathcal{L}_{\text{int}} \Big|_{a_S^\dagger(\vec{k}_2) \text{ がない場合}} \right) \underbrace{a_S(\vec{k}_2)}_{\rightarrow} a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) \left(\mathcal{L}_{\text{int}} \Big|_{a_S^\dagger(\vec{k}_2) \text{ がない場合}} \right) a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) \underbrace{a_S(\vec{k}_2)}_{=0} | 0 \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (151)$$

同様に、 \mathcal{L}_{int} に $a_S^\dagger(\vec{k}_1)$ がないとゼロになってしまう。

▶ また

$$\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle \sim \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) \mathcal{L}_{\text{int}} a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \quad (152)$$

の $a_\phi^\dagger(\vec{p}_1)$ に注目すると、もし \mathcal{L}_{int} に $a_\phi(\vec{p}_1)$ が含まれていないと

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) (\mathcal{L}_{\text{int}} |_{a_\phi(\vec{p}_1) \text{ がない場合}}) \underbrace{a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2)}_{\leftarrow} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) \underbrace{a_\phi^\dagger(\vec{p}_1)}_{\leftarrow} (\mathcal{L}_{\text{int}} |_{a_\phi(\vec{p}_1) \text{ がない場合}}) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \\ &= \underbrace{\langle 0 | a_\phi^\dagger(\vec{p}_1)}_{=0} a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) (\mathcal{L}_{\text{int}} |_{a_\phi(\vec{p}_1) \text{ がない場合}}) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (153)$$

$a_\phi^\dagger(\vec{p}_2)$ も同様。

▶ したがって、相互作用 \mathcal{L}_{int} の中に、ちょうど 1 回ずつ

$$a_S^\dagger(\vec{k}_1), a_S^\dagger(\vec{k}_2), a_\phi(\vec{p}_1), a_\phi(\vec{p}_2) \quad (154)$$

を含む項がないと $\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle$ はゼロになってしまう。

▶ さて、ここで

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4} S(x)^2 \phi(x)^2 \quad (155)$$

を思い出すと、自由場のところで見たとように

$$\phi(x) \sim \int \widetilde{d\vec{q}} (a_\phi(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot x} + a_\phi^\dagger(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot x}) \quad (156)$$

$$S(x) \sim \int \widetilde{d\vec{q}} (a_S(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot x} + a_S^\dagger(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot x}) \quad (157)$$

なので、積分範囲が全運動量を取ることを考えると、 \mathcal{L}_{int} の中に $a_S^\dagger(\vec{k}_1), a_S^\dagger(\vec{k}_2), a_\phi(\vec{p}_1), a_\phi(\vec{p}_2)$ を 1 回ずつ含む項があるとわかる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &\sim -\frac{\lambda}{4} \int \widetilde{d\vec{q}} (\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot x}) \int \widetilde{d\vec{q}'} (\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}') e^{-i\vec{q}'\cdot x}) \\ &\quad \times \int \widetilde{d\vec{q}''} (a_\phi(\vec{q}'') e^{i\vec{q}''\cdot x} + \cdots) \int \widetilde{d\vec{q}'''} (a_\phi(\vec{q}''') e^{i\vec{q}'''\cdot x} + \cdots) \end{aligned} \quad (158)$$

▶ よって

$$\begin{aligned} \langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle &\sim -\frac{\lambda}{4} \langle 0 | a_S(\vec{k}_1) a_S(\vec{k}_2) \int \left(\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}) e^{\cdots} \right) \left(\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}') e^{\cdots} \right) \\ &\quad \times \left(a_\phi(\vec{q}'') e^{\cdots} + \cdots \right) \left(a_\phi(\vec{q}''') e^{\cdots} + \cdots \right) a_\phi^\dagger(\vec{p}_1) a_\phi^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (159)$$

例えば $a_S(\vec{k}_2)$ は

$$\begin{aligned} &\cdots a_S(\vec{k}_2) \int \widetilde{d\vec{q}} \left(\cdots + a_S^\dagger(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right) \cdots \\ &= \cdots \int \widetilde{d\vec{q}} \left(\cdots + \underbrace{a_S(\vec{k}_2) a_S^\dagger(\vec{q})}_{[a_S(\vec{k}_2), a_S^\dagger(\vec{q})] + a_S^\dagger(\vec{q}) a_S(\vec{k}_2)} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right) \cdots \\ &= \cdots \int \widetilde{d\vec{q}} \left(\cdots + (2\pi)^3 2E_{k_2} \delta^{(3)}(\vec{k}_2 - \vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + a_S^\dagger(\vec{q}) a_S(\vec{k}_2) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right) \cdots \\ &= \cdots e^{ik_2\cdot\vec{x}} \cdots \end{aligned} \quad (160)$$

のようになって、ゼロでない項が残る。

▶ $| \text{始} \rangle$ と $\langle \text{終} |$ の4つの生成消滅演算子を全て同様にやると

$$\langle \text{終} | \mathcal{L}_{\text{int}} | \text{始} \rangle = -\lambda \cdot e^{ik_1\cdot\vec{x}} \cdot e^{ik_2\cdot\vec{x}} \cdot e^{-ip_1\cdot\vec{x}} \cdot e^{-ip_2\cdot\vec{x}} \quad (161)$$

係数の1/4は、

- (始状態の a_ϕ^\dagger 2つが ϕ^2 の中のどちらの a と交換するかの場合の数) = 2
 - (終状態の a_S 2つが S^2 の中のどちらの a^\dagger と交換するかの場合の数) = 2
- とキャンセルする。(ここでキャンセルするように、最初に1/4をかけておいた。)

▶ 積分があったことを思い出すと、(142) と上の式より

$$\begin{aligned} \langle \text{終} | i \int \mathcal{L}_{\text{int}} d^4x | \text{始} \rangle &= -i\lambda \int d^4x e^{i(k_1+k_2-p_1-p_2)\cdot\vec{x}} \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \end{aligned} \quad (162)$$

▶ § 3.3.2 の S 行列と散乱振幅 \mathcal{M} の一般論で出てきた関係式 (112)

$$\langle \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m | S | \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_f p'_f - \sum_i p_i \right) \cdot i\mathcal{M}(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n \rightarrow \vec{p}'_1 \cdots \vec{p}'_m)$$

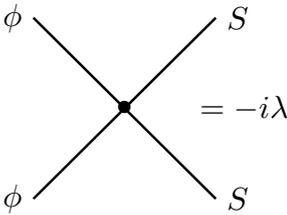
の通り、エネルギー・運動量保存則のデルタ関数が出てきた。

- ▶ 以上が散乱振幅 \mathcal{M} の計算の概要。(概略図にあった LSZ 公式などなどをちゃんとやると... 略) 最終的には λ に関する摂動の 1 次で

$$i\mathcal{M}(\phi(p_1) + \phi(p_2) \rightarrow S(k_1) + S(k_2)) = -i\lambda \quad (163)$$

となる。

- ▶ 最終結果はとてもシンプル! これは「Feynman Rule (Feynman 図)」では以下のように表される。

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\lambda}{4} S^2 \phi^2$$


$$= -i\lambda$$

- ▶ より一般には、Feynman Rule には「propagator」という重要な量が出てくるが、ここでは省略。
- ▶ 最後に、 \mathcal{M} を断面積の公式 (132) に代入すると、、、

$$\sigma(\phi(p_1)\phi(p_2) \rightarrow SS) = \frac{1}{2E_{p_1} \cdot 2E_{p_2} \cdot v_{\text{rel}}} \int d\Phi_2 \underbrace{|\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow k_1, k_2)|^2}_{=\lambda^2} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{対称因子}} \quad (164)$$

- ▶ 以下、重心系 ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$) で考える。すると終状態の位相積分 $d\Phi_2$ は

$$\begin{aligned} \int d\Phi_2 &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2E_{k_1}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2E_{k_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \\ &= \dots \text{(頑張って計算すると、、、 略)} \\ &= \frac{\beta_S}{8\pi}, \quad \beta_S = \sqrt{1 - \frac{m_S^2}{E_{p_1}^2}} \end{aligned} \quad (165)$$

β_S は S の速さ。($m_S = 0$ だと $\beta_S = 1$ となり光速。)

(164) 式に代入して

$$\begin{aligned} \sigma(\phi(p_1)\phi(p_2) \rightarrow SS) &= \frac{1}{4E_{p_1}^2 \cdot v_{\text{rel}}} \cdot \frac{\beta_S}{8\pi} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\lambda^2}{64\pi} \cdot \frac{\beta_S}{E_{p_1}^2 \cdot v_{\text{rel}}}, \quad \beta_S = \sqrt{1 - \frac{m_S^2}{E_{p_1}^2}} \end{aligned} \quad (166)$$

ついに計算できた!

- ▶ せっかく式が出たので、試しに具体的な数字を入れてみよう。粒子の質量を $m_\phi = m_S = 100 \text{ GeV}$ として、結合定数を $\lambda = 0.1$ としてみる。
 重心系で、始状態のエネルギー $E_{p_1} = E_{p_2} = 200 \text{ GeV}$ で対消滅することを考えると、終状態も $E_{k_1} = E_{k_2} = 200 \text{ GeV}$ となるので、

$$\beta_S = \sqrt{1 - \frac{(100)^2}{(200)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad v_{\text{rel}} = 2\beta_S. \quad (167)$$

よって、

$$\begin{aligned} \sigma(\phi(p_1)\phi(p_2) \rightarrow SS) &= \frac{\lambda^2}{128\pi} \cdot \frac{1}{E_{p_1}^2} \\ &\simeq 2.5 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2} \left(\frac{\lambda}{0.1}\right)^2 \left(\frac{100 \text{ GeV}}{E_{p_1}}\right)^2 \\ &\simeq \underbrace{1.0 \times 10^{-36} \text{ cm}^2}_{=1 \text{ pb}} \left(\frac{\lambda}{0.1}\right)^2 \left(\frac{100 \text{ GeV}}{E_{p_1}}\right)^2 \end{aligned} \quad (168)$$

この 1 pb という断面積の大きさは、WIMP 暗黒物質シナリオで出てくる典型的な値。→ § 5 で見る。

§ 4 標準宇宙論入門

すいません、ノートを書き直す時間がなかったので、ここからしばらく過去のノートの切り貼りです。あとで時間があるときに書き直します。

暫定ノートへのリンクを講義の [web ページ](#) に貼っておきました。

([こちらのリンク](#)からも直接開けます。)

§ 5 暗黒物質

§ 6 素粒子の標準模型、ヒッグス機構

§ 7 ニュートリノ質量とその起源

§ 8 宇宙の物質反物質非対称性
