2014年度夏学期　量子力学 II （浜口）追レポート

2014年8月7日（木）出題

- **追レポート対象者は物理学科掲示板（理学部１号館２階）に掲載。**（出来るだけ掲示板での確認をお願いしますが、しばらく大学に来る予定がなく、自分が追レポート対象者かどうかメールで確認したい場合は浜口（ hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp ）までメール下さい。）
- **提出期限：８月２１日（木）１２：００、締め切り厳守**
- 提出先：メールで浜口（ hamaguchi@phys.s.u-tokyo.ac.jp ）まで送るか、物理学科教務係（理学部１号館２０８号室）まで提出すること。
- レポートには **名前と学生番号** を忘れず明記すること。
- 以下の問題に解答して提出すること。講義のホームページ
`http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~hama/lectures/lecture.html`
にある 講義ノートおよび過去３年間の期末試験の問題と解答 が参考になるはずである。

問題【１】角運動量の合成

２つの角運動量演算子 $\hat{j}_{A,k}$, $\hat{j}_{B,k}$（$k = 1, 2, 3$）を考える。これらは以下の関係式を満たすとする。

$$\left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{A,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{A,m} \qquad \left[\hat{j}_{B,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{B,m} \qquad \left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = 0$$

また $\hat{j}_A^2 = \sum_k (\hat{j}_{A,k})^2$、$\hat{j}_B^2 = \sum_k (\hat{j}_{B,k})^2$ とする。今、$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{j}_{A,3}$, $\hat{j}_{B,3}$ の同時固有状態 $|m_1, m_2\rangle$ があり、

$$\begin{aligned}
\hat{j}_A^2 |m_1, m_2\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2\, |m_1, m_2\rangle \\
\hat{j}_B^2 |m_1, m_2\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2\, |m_1, m_2\rangle \\
\hat{j}_{A,3} |m_1, m_2\rangle &= m_1\hbar\, |m_1, m_2\rangle \quad (m_1 = \pm\frac{1}{2}) \\
\hat{j}_{B,3} |m_1, m_2\rangle &= m_2\hbar\, |m_1, m_2\rangle \quad (m_2 = \pm\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

が成立しているとする。合成角運動量を $\hat{J}_k = \hat{j}_{A,k} + \hat{j}_{B,k}$（$k = 1, 2, 3$）とし、$\hat{J}^2 = \sum_k (\hat{J}_k)^2$ とするとき、$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_3$ の同時固有状態を $|m_1, m_2\rangle$ の線形結合として表せ。答だけでよい。４つの独立な状態ベクトルについて具体的に係数を書くこと。

（２ページ目に続く）

問題【2】一様磁場中のスピン

スピン 1/2 の状態

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\uparrow\rangle + \beta(t)\,|\downarrow\rangle$$

が z 軸方向の一様磁場中の Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle\,, \qquad \hat{H} = -g\frac{e}{2m}\hat{S}_z B_z$$

にしたがって時間発展しているとする。初期条件を $\alpha(0) = \beta(0) = 1/\sqrt{2}$ とするとき、時刻 t における y 方向のスピンの期待値 $\langle\psi(t)|\hat{S}_y|\psi(t)\rangle$ を求めよ。ただしスピン演算子 $\hat{S}_y$、$\hat{S}_z$ の行列要素は

$$\begin{pmatrix} \langle\uparrow|\hat{S}_y|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\hat{S}_y|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\hat{S}_y|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\hat{S}_y|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

問題【3】摂動論

【3-1】 1次元中の以下のハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$
$$\text{where} \quad V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 \le x \le a) \\ \infty & (x > a) \end{cases}$$

のエネルギー固有状態を考える。

$$\hat{H}_0\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$
$$\int |\varphi_n(x)|^2 dx = 1$$

基底状態の波動関数 $\varphi_1(x)$ と基底エネルギー E_1 を求めよ。

【3-2】 上のハミルトニアンに、摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}' = \lambda E_1 a\,\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

を加えたとき、基底状態のエネルギーを λ の1次までで求めよ。

以上です。