

2014 年度夏学期 量子力学 II (浜口) 期末テスト

2014 年 7 月 22 日 (火) 実施

【 2 】の解答を訂正しました。(7/23) 【 3-5 】の解説に一言追加しました。(9/5)

解答例と解説

問題【 1 】 角運動量の合成

スピン $3/2$ と $1/2$ の合成ですので、スピンの大きさが $J = 2$ の状態と $J = 1$ の状態が現れます。求める同時固有状態を $|J, M\rangle$ と表し

$$\begin{cases} \hat{J}_A^2 |J, M\rangle = \frac{15}{4} \hbar^2 |J, M\rangle \\ \hat{J}_B^2 |J, M\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |J, M\rangle \\ \hat{J}^2 |J, M\rangle = J(J+1) \hbar^2 |J, M\rangle \quad (J = 1, 2) \\ \hat{J}_3 |J, M\rangle = M \hbar |J, M\rangle \quad (M = -J, \dots, J) \end{cases}$$

とすると

$$\begin{cases} |2, 2\rangle = |+\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |2, 1\rangle = \frac{1}{2} |+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |2, -1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{2} |-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |2, -2\rangle = |-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} |1, 1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |+\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{2} |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |1, -1\rangle = \frac{1}{2} |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} |-\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$$

となります。ノートを持ち込んだ方は CG 係数のプリントを見るのが楽だったと思いますが、 $|2, 2\rangle$ から始めて、以下のように昇降演算子を作用させていって上の式を導いてもそれほど手間ではないでしょう。

$$\begin{cases} \hat{J}_- |2, 2\rangle = 2 |2, 1\rangle \\ \hat{J}_- |2, 1\rangle = \sqrt{6} |2, 0\rangle \\ \hat{J}_- |2, 0\rangle = \sqrt{6} |2, -1\rangle \\ \hat{J}_- |2, -1\rangle = 2 |2, -2\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{J}_- |1, 1\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle \\ \hat{J}_- |1, 0\rangle = \sqrt{2} |1, -1\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{J}_{A-} |+\frac{3}{2}, *\rangle = \sqrt{3} |+\frac{1}{2}, *\rangle \\ \hat{J}_{A-} |+\frac{1}{2}, *\rangle = 2 |-\frac{1}{2}, *\rangle \\ \hat{J}_{A-} |-\frac{1}{2}, *\rangle = \sqrt{3} |-\frac{3}{2}, *\rangle \\ \hat{J}_{B-} |*, +\frac{1}{2}\rangle = |*, -\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$$

問題【2】一様磁場中のスピン

(講義ノート一般の磁場の方向の式を既知としてやってもいいですが、この解答例ではノートを見ないでやってみましょう。) Schrödinger 方程式に素直に代入すると

$$i\hbar(\dot{\alpha}|\uparrow\rangle + \dot{\beta}|\downarrow\rangle) = \frac{-geB_z}{2m}(\alpha\hat{S}_z|\uparrow\rangle + \beta\hat{S}_z|\downarrow\rangle).$$

左から $\langle\uparrow|$ 、 $\langle\downarrow|$ を作用させると

$$i\hbar\dot{\alpha} = \frac{-geB_z}{2m}\frac{\hbar}{2}\alpha, \quad i\hbar\dot{\beta} = \frac{-geB_z}{2m}\frac{-\hbar}{2}\beta.$$

したがって

$$\alpha(t) = \alpha(0) \exp\left(i\frac{geB_z}{4m}t\right), \quad \beta(t) = \beta(0) \exp\left(-i\frac{geB_z}{4m}t\right).$$

よって (… 以下、 $1/4m \rightarrow 1/2m$ と訂正しました。(7/23))

$$\begin{aligned} \langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle &= (\alpha^*(t)\langle\uparrow| + \beta^*(t)\langle\downarrow|)\hat{S}_x(\alpha(t)|\uparrow\rangle + \beta(t)|\downarrow\rangle) \\ &= (\alpha^*(t)\beta(t) + \beta^*(t)\alpha(t))\frac{\hbar}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}2\cos\left(\frac{geB_z}{2m}t\right)\frac{\hbar}{2} \\ &= \frac{\hbar}{2}\cos\left(\frac{geB_z}{2m}t\right) \end{aligned}$$

問題【3】水素原子と Hidden Photon

(冒頭にちょっとコメント) 実はこの問題の元ネタは2年ほど前に書いた論文だったりします¹。話の背景としては、以前からミュオンの磁気モーメントの「標準模型の予言値」と「観測値」の間に 3σ 以上のズレが報告されており、そのズレの原因がもしかすると Hidden Photon² かもしれない… という話があります³。ところが Hidden Photon はミュオンの磁気モーメントに影響を与えるだけではなく、電子の磁気モーメントや水素原子のエネルギースペクトルにも影響を与えます。これらを(先行研究よりちょっと丁寧に)再解析したのが上記の論文です。それで、このうち水素原子のスペクトルに与える影響の解析(の基本的な部分)は量子力学2の知識で理解出来るので、それを期末テストに出してみよう… と思って出してみたのがこの問題なのでした。

前置きが長くなりましたが、まあやってる事は単なる水素原子の摂動ですね。

¹ M. Endo, K. Hamaguchi and G. Mishima, “Constraints on Hidden Photon Models from Electron $g-2$ and Hydrogen Spectroscopy,” Phys. Rev. D **86** (2012) 095029 [arXiv:1209.2558]. <http://arxiv.org/abs/1209.2558>.

² “Dark Photon” と言ったりもします。

³ ズレの原因としては色んな可能性があります。● 実験の統計誤差、● 実験の系統誤差、● 標準模型の予言の評価が甘かった、● Hidden Photon ではない何か別の新物理(例えば超対称性)の寄与… などなどです。新しい実験の計画もあるようですので、近いうちに決着がつくといいなあ、と思いながら注目しています。

【3-1】答えだけで良い、とありますので、答えだけ：

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] R(r) = ER(r)$$

【3-2】これも答えだけで良い、とあるので答えだけ。ノートに散っている情報を合わせると

$$\begin{aligned} \underline{E_1} &= -\frac{\alpha^2}{2} mc^2 \\ \underline{\varphi_{1,0,0}(r, \theta, \phi)} &= R_{1,0}(r) Y_{0,0}(\theta, \phi) \\ &= \tilde{R}_{1,0} \left(\frac{2r}{a_B} \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \left(a_B = \frac{\hbar}{\alpha mc} \right) \\ &= N_{1,0} e^{-r/a_B} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ &= \frac{2}{a_B^{3/2}} e^{-r/a_B} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \end{aligned}$$

(ラゲール多項式の符号を気にすれば (-1) がかかるかも。まあ符号はどちらでも良いです。)

(念のため規格化を確認すると

$$\begin{aligned} \int 4\pi r^2 dr |\varphi_{1,0,0}(r)|^2 &= \int 4\pi r^2 dr \frac{4}{a_B^3} e^{-2r/a_B} \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2} \int dx x^2 e^{-x} \quad \left(x = \frac{2r}{a_B} \right) \\ &= \frac{1}{2} 2! = 1 \quad \dots \dots \text{合ってますね。} \end{aligned}$$

【3-3】修正されたポテンシャルも球対称ですので、角運動量演算子 $\hat{L}_k$ とハミルトニアン $\hat{H}$ は可換です。したがって $\hat{H}$ と $\hat{L}^2$ 、 $\hat{L}_3$ との同時固有状態を取れる、という点は水素原子の場合と変わらず、角度方向の波動関数は $\hat{L}^2$ 、 $\hat{L}_3$ の固有関数として決まっていますので 水素原子の場合と変わらず、球面調和関数のまま となります。(あるいは変数分離で説明しても良いです。)

【3-4】摂動ハミルトニアンが

$$\hat{H}' = V'(r)$$

のように r だけの関数のとき、1 次の摂動では

$$\begin{aligned} E'_1 - E_1 &= E_{1,0,0}^{(1)} = \langle 1, 0, 0 | \hat{H}' | 1, 0, 0 \rangle \\ &= \int d^3x \int d^3x' \langle 1, 0, 0 | x' \rangle \cdot \langle x' | \hat{H}' | x \rangle \cdot \langle x | 1, 0, 0 \rangle \\ &= \int d^3x \int d^3x' \varphi_{1,0,0}(x)^* \cdot V'(r) \delta^3(x - x') \cdot \varphi_{1,0,0}(x) \\ &= \int 4\pi r^2 dr |\varphi_{1,0,0}(r)|^2 V'(r) \end{aligned}$$

ですね。(ブラケット経由せずいきなり以下の式から始めても OK です。) いま

$$\hat{H}' = V'(r) = -\epsilon\alpha \frac{\hbar c}{r} \exp\left(-\frac{c}{\hbar} M r\right)$$

ですから、

$$\begin{aligned}
 E'_1 - E_1 &= \int 4\pi r^2 dr |\varphi_{1,0,0}(r)|^2 \left[-\epsilon\alpha \frac{\hbar c}{r} \exp\left(-\frac{c}{\hbar}Mr\right) \right] \\
 &= \int 4\pi r^2 dr \frac{4}{a_B^3} e^{-2r/a_B} \frac{1}{4\pi} \left[-\epsilon\alpha \frac{\hbar c}{r} \exp\left(-\frac{c}{\hbar}Mr\right) \right] \\
 &= \frac{4}{a_B^3} (-\epsilon\alpha\hbar c) \int dr \cdot r \exp\left[-\left(\frac{Mc}{\hbar} + \frac{2}{a_B}\right)r\right]
 \end{aligned}$$

ここで

$$x = \left(\frac{Mc}{\hbar} + \frac{2}{a_B}\right)r$$

とすると

$$\begin{aligned}
 E'_1 - E_1 &= \frac{4}{a_B^3} (-\epsilon\alpha\hbar c) \left(\frac{Mc}{\hbar} + \frac{2}{a_B}\right)^{-2} \underbrace{\int dx \cdot x e^{-x}}_{=1} \\
 &= -\frac{4\alpha^3 m^3 c^3}{\hbar^3} \epsilon\alpha\hbar c \left(\frac{Mc}{\hbar} + \frac{2\alpha mc}{\hbar}\right)^{-2} \\
 &= -4\epsilon\alpha^4 mc^2 \left(\frac{m}{M + 2\alpha m}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } E'_1 = \underline{-\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 - 4\epsilon\alpha^4 mc^2 \left(\frac{m}{M + 2\alpha m}\right)^2}$$

まあ合っていれば表式はどんな形でも良いです。(少なくとも次元はチェックしましょう。)

【3-5】

$$\frac{E'_1 - E_1}{E_1} = \underline{8\epsilon\alpha^2 \left(\frac{m}{M + 2\alpha m}\right)^2}$$

$M = 100m$ 、 $\epsilon = 10^{-3}$ 、 $\alpha \simeq 1/137$ を代入すると およそ 4×10^{-11} となります。

(またまたちょっとコメント…)

- さすがにこんな 10^{-11} なんていう精度ではエネルギーは分かるまい・・・と思うかもしれませんが、実は実験の精度はこれよりさらに良くて、ココで例として挙げた $M = 100m$ 、 $\epsilon = 10^{-3}$ というモデルポイントはすでに排除されています。逆にエネルギーが精度良く測定されればされるほど、 (M, ϵ) への制限が厳しくなる(あるいはいつか有限の $E'_1 - E_1$ が発見される?!) ことになります。
- 実際に測定しているのはエネルギーの絶対値ではなく、エネルギー準位の差 $E_a - E_b$ ですので、摂動の方もいくつかのエネルギー準位で計算する必要があります。
- 実際にはさらに話がややこしくて、実は微細構造定数 α の測定精度が水素原子のエネルギー準位の差の測定精度より悪いので、上の式から直接 ϵ に対する制限を得ると精度が悪くなってしまいます。しかし $(E_b - E_c)/(E_a - E_b)$ のようにエネルギー差の比をとると、うまい具合に精度よく ϵ に対する制限を得ることが出来ます⁴。

⁴ ... というようなことを脚注 1 の論文でやりました。

- Hidden Photon 模型は水素原子のエネルギースペクトル以外にも様々な実験によって探索 / 制限されています。(今のところ、 (M, ϵ) の全パラメータ領域において、水素原子スペクトルによる制限よりも厳しい制限が他の実験によって与えられています。)
- 9/5 追記：その後、ミューオンの磁気モーメントのズレを説明出来るパラメータ領域はほぼ全て exclude されてしまったようです。 <http://arxiv.org/abs/1409.0851>.

【3-6】まず、摂動前のエネルギーは

$$E_2 = \frac{1}{2^2} E_1 = -\frac{\alpha^2}{8} mc^2$$

で、これに対応する状態は縮退していて4つあります。

$$\begin{cases} \varphi_{2,0,0} = R_{2,0}(r)Y_{0,0}(\theta, \phi) \\ R_{2,0}(r) = N_{2,0} \cdot e^{-r/2a_B} \cdot L_2^1(r/a_B) \\ N_{2,0} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 2^3 \cdot a_B^3}} \\ L_2^1(x) = 2x - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_{2,1,m} = R_{2,1}(r)Y_{1,m}(\theta, \phi) \quad (m = -1, 0, 1) \\ R_{2,1}(r) = N_{2,1} \cdot e^{-r/2a_B} \cdot (r/a_B) \cdot L_3^3(r/a_B) \\ N_{2,1} = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 6^3 \cdot a_B^3}} \\ L_3^3(x) = -6 \end{cases}$$

しかし摂動ハミルトニアンに対する行列要素は対角なので ($\langle 2, \ell', m' | \hat{H}' | 2, \ell, m \rangle \propto \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}$) 対角化の必要はなく、縮退のない場合と同様に計算すればよい。

まず $\ell = 0$ の状態に対しては

$$\begin{aligned} E'_{2,0,0} - E_2 &= \underbrace{\int d\cos\theta d\phi |Y_{0,0}|^2}_{=1} \int dr \cdot r^2 |R_{2,0}(r)|^2 \left[-\epsilon\alpha \frac{\hbar c}{r} \exp\left(-\frac{c}{\hbar} Mr\right) \right] \\ &\quad (r = a_B x) \\ &= \int dx \cdot x^2 \frac{1}{4 \cdot 2^3} e^{-x} (2x - 4)^2 \left(-\frac{\epsilon\alpha \hbar c}{a_B} \right) \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{Mca_B}{\hbar} x\right) \\ &= \frac{1}{4 \cdot 2^3} (-\epsilon\alpha^2 mc^2) \int dx \cdot x^2 e^{-x} (2x - 4)^2 \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{M}{\alpha m} x\right) \end{aligned}$$

ここで、 $M \gg m$ のとき

$$\int dx x^n \exp\left[-\left(1 + \frac{M}{\alpha m}\right)x\right] = n! \left(1 + \frac{M}{\alpha m}\right)^{-(n+1)} \simeq n! \left(\frac{\alpha m}{M}\right)^{n+1}$$

なので、 $M \gg m$ では x のベキが一番小さい項のみが効く。したがって

$$\begin{aligned} E'_{2,0,0} - E_2 &\simeq \frac{1}{4 \cdot 2^3} (-\epsilon\alpha^2 mc^2) \cdot 4^2 \cdot 1! \left(\frac{\alpha m}{M}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{m}{M}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon\alpha^2 mc^2 \left(\frac{\alpha m}{M}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha m}{M}\right)^3 \\ E'_{2,0,0} &= E_2 \left(1 + 4\epsilon \left(\frac{\alpha m}{M}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha m}{M}\right)^3\right) \end{aligned}$$

次に $\ell = 1$ の状態に対しては

$$\begin{aligned}
E'_{2,1,m} - E_2 &= \underbrace{\int d \cos \theta d \phi |Y_{1,m}|^2}_{=1} \int dr \cdot r^2 |R_{2,1}(r)|^2 \left[-\epsilon \alpha \frac{\hbar c}{r} \exp \left(-\frac{c}{\hbar} M r \right) \right] \\
&\quad (r = a_B x) \\
&= \int dx \cdot x^2 \frac{1}{4 \cdot 6^3} e^{-x} \cdot x^2 \cdot (-6)^2 \cdot \left(-\frac{\epsilon \alpha \hbar c}{a_B} \right) \frac{1}{x} \exp \left(-\frac{M c a_B}{\hbar} x \right) \\
&= \frac{(-6)^2}{4 \cdot 6^3} (-\epsilon \alpha^2 m c^2) \int dx \cdot e^{-x} x^3 \cdot \exp \left(-\frac{M}{\alpha m} x \right) \\
&\simeq \frac{(-6)^2}{4 \cdot 6^3} (-\epsilon \alpha^2 m c^2) 3! \left(\frac{\alpha m}{M} \right)^4 \\
&= -\frac{1}{4} \epsilon \alpha^2 m c^2 \left(\frac{\alpha m}{M} \right)^4 \\
E'_{2,1,m} &= E_2 \left(1 + 2\epsilon \left(\frac{\alpha m}{M} \right)^4 + \mathcal{O} \left(\frac{\alpha m}{M} \right)^5 \right)
\end{aligned}$$

$\ell = 1$ の状態の方が $\ell = 0$ の状態よりも摂動の影響が $\mathcal{O}(\alpha m/M)^2$ だけ小さいことが分かります。この理由は以下のように理解出来ます。摂動前の波動関数の典型的な広がり $a_B = \hbar/(\alpha m c)$ ですが、一方で摂動ポテンシャルの影響は (指数関数のせいで) せいぜい原点まわりの $\delta r \sim \hbar/(M c)$ 程度の範囲にしか及びません。 $M \gg m$ のとき $\delta r \ll a_B$ なので、原点近くで大きな値を持つ波動関数ほど摂動の影響を大きく受けることになります。 $\ell = 1$ の状態は (遠心力ポテンシャルによって) 原点近くでの波動関数の値が小さいため、原点近くで値を持つ $\ell = 0$ の状態に比べて摂動の影響が小さいということになります。

以上です。