2014 年度夏学期　量子力学 II （浜口）期末テスト

2014 年 7 月 22 日（火）

- 問題は全部で **３ページ（２枚）** ある。
- **解答用紙２枚ともに氏名、学籍番号**を明記する事。
- 講義中に導いた関係式や、配布したプリントの内容は既知として用いても構わない。
- 問題に不適切な設定があると思われる場合は適宜訂正して解いて下さい。

問題【１】角運動量の合成

２つの角運動量演算子 $\hat{j}_{A,k}$, $\hat{j}_{B,k}$（$k = 1, 2, 3$）を考える。これらは以下の関係式を満たすとする。

$$\left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{A,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{A,m}$$
$$\left[\hat{j}_{B,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = i\hbar \sum_m \epsilon_{k\ell m}\, \hat{j}_{B,m}$$
$$\left[\hat{j}_{A,k}, \hat{j}_{B,\ell}\right] = 0$$

また $\hat{j}_A^2 = \sum_k (\hat{j}_{A,k})^2$、$\hat{j}_B^2 = \sum_k (\hat{j}_{B,k})^2$ とする。今、$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{j}_{A,3}$, $\hat{j}_{B,3}$ の同時固有状態 $|m_1, m_2\rangle$ があり、

$$\hat{j}_A^2 |m_1, m_2\rangle = \frac{15}{4}\hbar^2\, |m_1, m_2\rangle$$
$$\hat{j}_B^2 |m_1, m_2\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\, |m_1, m_2\rangle$$
$$\hat{j}_{A,3} |m_1, m_2\rangle = m_1\hbar\, |m_1, m_2\rangle \quad (m_1 = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2})$$
$$\hat{j}_{B,3} |m_1, m_2\rangle = m_2\hbar\, |m_1, m_2\rangle \quad (m_2 = \pm\frac{1}{2})$$

が成立しているとする。合成角運動量を $\hat{J}_k = \hat{j}_{A,k} + \hat{j}_{B,k}$（$k = 1, 2, 3$）とし、$\hat{J}^2 = \sum_k (\hat{J}_k)^2$ とするとき、<u>$\hat{j}_A^2$, $\hat{j}_B^2$, $\hat{J}^2$, $\hat{J}_3$ の同時固有状態を $|m_1, m_2\rangle$ の線形結合として表せ。答だけでよい。</u>８つの独立な状態ベクトルについて具体的に係数を書くこと。

（２ページ目に続く）

問題【2】一様磁場中のスピン

スピン 1/2 の状態

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)\,|\uparrow\rangle + \beta(t)\,|\downarrow\rangle$$

が z 軸方向の一様磁場中の Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle\,, \qquad \hat{H} = -g\frac{e}{2m}\hat{S}_z B_z$$

にしたがって時間発展しているとする。初期条件を $\alpha(0) = \beta(0) = 1/\sqrt{2}$ とするとき、時刻 t における x 方向のスピンの期待値 $\langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle$ を求めよ。ただしスピン演算子 $\hat{S}_x$、$\hat{S}_z$ の行列要素は

$$\begin{pmatrix} \langle\uparrow|\hat{S}_x|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\hat{S}_x|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\hat{S}_x|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\hat{S}_x|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\hat{S}_z|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\hat{S}_z|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

問題【3】水素原子と Hidden Photon

素粒子の標準模型を超える物理の候補として、Hidden Photon 模型というものがある。この模型では、質量を持った新粒子 "Hidden Photon" が新たな力を媒介することによって、水素原子のエネルギースペクトルが変更を受ける。量子力学 2 で勉強したことを用いて、このことを考察してみよう。(簡単のため、スピンの効果や相対論的効果は無視することにする。)

【3-1】 まず復習から。3 次元空間 (x, y, z) での定常状態の Schrödinger 方程式(束縛状態)は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(x, y, z)\right]\varphi(x, y, z) = E\varphi(x, y, z) \qquad (E < 0)$$

で表される。以下ではポテンシャルが球対称で $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ にしかよらない場合を考え、$V = V(r)$ とする。さらに角度方向の波動関数は既知であるとし

$$\varphi(x, y, z) = R(r)Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$$

とおいてしまおう。ただし (r, θ, ϕ) は球座標であり、$Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ は球面調和関数である。<u>$R(r)$ のみたすべき方程式を E, $V(r)$, ℓ などを用いて表せ。答えだけでよい。</u>

【3-2】 水素原子のポテンシャルは

$$V(r) = -\alpha\frac{\hbar c}{r} \qquad \left(\alpha \simeq \frac{1}{137},\ c = \text{光速}\right)$$

で与えられる。このポテンシャル中の粒子のエネルギー基底状態(最低エネルギー状態)について、<u>エネルギー固有値 E_1 および波動関数の具体形を書け。答だけでよい。</u>(ボーア半径 a_B を用いて表す場合は、a_B と α や m の関係も書くこと。)

(3ページ目に続く)

さて、Hidden Photon なる新粒子が本当に存在すると仮定すると、水素原子のポテンシャルが修正を受ける。修正されたポテンシャルは

$$V(r) = -\alpha\frac{\hbar c}{r} - \epsilon\alpha\frac{\hbar c}{r}\exp\left(-\frac{c}{\hbar}Mr\right)$$

で与えられる。第二項が Hidden Photon の影響を表している。M は Hidden Photon の質量、$\epsilon \ll 1$ は Hidden Photon の結合の強さを表すパラメータ（無次元量）である。

$$\left(\text{以下、必要があれば}\quad \int_0^x x^n e^{-x} = n! \quad \text{を用いてよい。}\right)$$

【3-3】 修正されたポテンシャルによって角度方向の波動関数はどのような変更を受けるか、理由と共に簡潔に説明せよ。

【3-4】 修正されたポテンシャルにおける基底状態のエネルギー固有値 E_1' を ϵ に関する摂動の 1 次までで求めよ。

【3-5】 摂動の前と後とのエネルギーの相対的な差

$$\frac{E_1' - E_1}{E_1}$$

を m、M、ϵ、α などを用いて表せ。例えば Hidden Photon の質量が電子の質量の 100 倍で、結合定数のパラメータが $\epsilon = 10^{-3}$ だったとすると、上の比はどの程度になるか見積もれ。

【3-6】 基底状態のときと同様にして、摂動前の第 1 励起状態（４つの状態が縮退している）について摂動後のエネルギー固有値を ϵ の 1 次までで求めよ。ただし $M \gg m$ として (m/M) の高次の項は無視してよい。

また、$M \gg m$ のとき、４つの状態の中で摂動によるエネルギーの変化が最も大きいのはどの状態かを答え、その理由を考察せよ。

以上です。