# 2011年度夏学期　総合科目物質・生命一般
# 「基礎方程式とその意味を考える」
# レポート課題（量子力学：浜口担当分）

2011年7月13日（水）出題

- 締切：７／２９（金）１６：００
- 提出先：アドミニストレーション棟のレポートボックス
- レポートは講義前半の電磁気学（平野担当）の分（**出題済み**）と、講義後半の量子力学（浜口担当）の分（**本レポート**）の２つがあるので注意すること。成績は２つのレポートを合わせて評価する。
- **レポートには科目名、氏名、学籍番号、学年、所属クラス名**を明記し、提出する事。

---

1. 【5/25 講義中出題分】エネルギー量子仮説からプランク分布

$$U(T,\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp[h\nu/kT]-1} \tag{1}$$

を導け。（各自教科書や参考書で調べること。）

2. 【6/29 講義中出題分】１次元のシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\psi(x,t) \tag{2}$$

において、$V \neq V^*$ のとき、全確率 $\int dx|\psi(x,t)|^2$ がどのように時間変化するか答えよ。ただし簡単のため $\mathrm{Im}V = (V-V^*)/(2i) =$ 定数（$x$ に依らない）としてよい。

**（次ページに続く）**

3. 【調和振動子】1 次元中で、ポテンシャル

$$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{3}$$

の下での粒子を考える。$m$ は粒子の質量、$\omega$ は角振動数である。以下の設問に答えよ。必要なら以下の公式を用いてよい。$(a>0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}xe^{-ax^2}dx=0\,,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \tag{4}$$

(a) 古典力学の下、粒子の位置 $x(t)$ の満たすべき方程式と、その解を求めよ。

(b) 以下、量子力学の下で考える。シュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{H}\psi(x,t) \tag{5}$$

で与えられる。ただし

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x) \tag{6}$$

はハミルトニアン演算子である。$\varphi_n(x)$ を $\hat{H}$ の固有関数、$E_n$ をその固有値とする。すなわち

$$\hat{H}\varphi_n(x)=E_n\varphi_n(x) \tag{7}$$

このとき、

$$\psi_n(x,t)=\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)\varphi_n(x) \tag{8}$$

がシュレディンガー方程式 (5) の解になっていることを示せ。

(c) 基底状態（エネルギーが一番低い状態）の波動関数は

$$\varphi_0(x)=N_0\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \tag{9}$$

で与えられる。これがハミルトニアンの固有関数になっていることを示し、その固有値 $E_0$ を求めよ。

(d) 波動関数が規格化されているとして（$\int dx|\psi_0(x,t)|^2=\int dx|\varphi_0(x)|^2=1$）、規格化因子 $N_0$ を求めよ。

(e) 基底状態に対して、粒子の位置の期待値 $\langle x\rangle$ を求めよ。

(f) 基底状態に対して、粒子の運動量の期待値 $\langle p\rangle$ を求めよ。

(g) 基底状態に対して、$(\Delta x)^2\equiv\langle\Big(x-\langle x\rangle\Big)^2\rangle$ を求めよ。

(h) 基底状態に対して、$(\Delta p)^2\equiv\langle\Big(p-\langle p\rangle\Big)^2\rangle$ を求めよ。

(i) (g)(h) より $\Delta x\cdot\Delta p$ を求め、不確定性関係が成り立っていることを確認せよ。

以上