

物理数学 II 追レポート

担当：浜口幸一

名前と番号を忘れずに書くこと !!

講義中で導いた関係式などは既知として用いて構いません。

以下の期末試験の全ての問題に解答し提出すること

提出期限：2012年3月9日（金）17:00

提出場所：物理学専攻教務（本郷理学部1号館西棟208号室）

[1] 周期 2π の周期関数 $f(x) = f(x+2\pi)$ に対してその Fourier 級数展開は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx, \quad (1)$$

で与えられる。次式を証明せよ。[15 点]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (2)$$

[2] 格子間隔 a の三次元格子上のランダムウォークを考える。ある時刻にある格子点上にいた人が、時間 Δt 毎にランダムに一つ隣の点に移る（上下、前後、左右のいずれかに等確率で移る）とするとき、連続極限として確率密度が満たすべき偏微分方程式を導け。[20 点]

[3] 熱伝導率 $\nu (> 0)$ の材質で出来た円盤（二次元）の熱伝導方程式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \nabla^2 \phi = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi \quad (3)$$

を考える。

1. 温度 ϕ が中心からの距離 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ と時間 t だけの関数 $\phi(r, t)$ だとして、 $\phi(r, t)$ のみたすべき方程式を書け。[5 点]
2. $\phi(r, t) = R(r)T(t)$ と変数分離したとき、 $T(t)$, $R(r)$ がそれぞれみたすべき方程式を書け。[5 点]
3. $R(r)$ の解を求めよ。ただし $R(r)$ は $r = 0$ で有限とする。[10 点]
(注：講義では示さなかったが、ノイマン関数は原点で発散する。)

裏面に続く

[4] $f_n(x)$ を区間 $[0, 1]$ 、重み x の直交多項式とする ($f_n(x)$ は n 次実多項式)。

$$\int_0^1 x f_n(x) f_m(x) dx = N_n \delta_{n,m} \quad (4)$$

$f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ を求めよ。[各 5 点]

(規格化は気にしなくてよい。例えば $f_n(x) = x^n + \dots$ としてよい。)

[5] ルジャンドル多項式について以下の問いに答えよ。

1. ルジャンドル多項式の、微分を含む漸化式を 2 つ書け。[各 5 点]
2. 上の漸化式を用いて、ルジャンドル多項式の満たすべき微分方程式を導け。[10 点]

[6] 講義ではロドリゲスの公式を用いて直交多項式の直交性を示したが、別の方法として母関数表示を用いて直交性を示すことも出来る。このことをラゲール多項式に関して見てみよう。

1. ラゲール多項式 $L_n(x)$ の母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{t}{1-t}x\right) \quad (5)$$

で与えられる。これを用いて

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^n s^m}{n! m!} \int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx \quad (6)$$

を求めよ。ただし $0 < s < 1, 0 < t < 1$ とする。[15 点]

2. 上の結果を用いて

$$\int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx \quad (7)$$

を求めよ。[15 点]

以上