B. Zwiebach [*] 講演録

Seven-brane, String Junctions and Lie Algebra

記：大竹 由記子[†] 、 野口雅之[†]

要旨

これは、１９９８年１２月の１６、１７、１８日に行われた国際シンポジウム「ゲージ理論の力学と弦双対性」における、Barton Zwiebach 教授の二日間にわたる講義をノートとしてまとめたものです[‡]。

[*] Massachusetts Institute of Technology, zwiebach@irene.mit.edu

[†] 筑波大物理, ohtake, noguchi@het.ph.tsukuba.ac.jp

[‡] このノートは Zwiebach 教授の講義を忠実に再現したものではありません。記者の責任において、章立てや補足説明を加え講義内容を再構成したものです。

目 次

1 序 **3**

2 理論の枠組み **5**

3 モノドロミーと 7-brane 配位の分類 **10**

3.1 モノドロミーの分類 10

3.2 $SL(2,\mathbf{Z})$ の Abel 化 13

3.3 7-brane 配位の分類と対称性 16

4 対称性と表現 **21**

4.1 接合を持つ弦 22

4.2 根と弦の接合 25

4.3 重みと弦の接合 28

5 対称性の拡大 **30**

5.1 一般論 30

5.2 無限次元の対称性 32

5.3 K3 全体の対称性 35

1　序

この講義では私が MIT で一年半程前から研究していて、何人かの日本の研究者 (その内の何人かはのこ研究会に参加していると思いますが) も研究している課題、7-brane や Lie 代数、特に例外型の代数についての話をしたいと思います [1][2][3][4]。これらの問題を研究する理由は幾つかありますが、これからしばらくの間、我々が何故この問題に興味を持って研究するのか、ということについて話していきたいと思います。

長い間、我々が扱ってきた brane の理論は本質的に brane 間を飛ぶ開弦に由来する $U(1)$ ゲージ対称性を持つことが知られていました。一方で、ある種の弦理論は明らかに例外型の対称性を持っています。ここで、このような例外型の対称性が brane の立場からどのように表現されるか、ということが疑問になります。これが、我々がこの問題の研究を始めた直接の動機でした。

この問題を理解するためには、Vafa や Bershadsky 等 [5] によってその存在が指摘された F 理論と呼ばれる理論が重要な役割を果たします。この F 理論はある種のコンパクト化により IIB 型超弦理論を再現すると考えられている仮想的な 12 次元の理論です。弦理論のなかで例外型の対称性の発現を見る一つの方法としてこの F 理論を K3 曲面上にコンパクト化し、その K3 曲面に特異性を持たせるというものがあります。これは IIB 型超弦理論の立場では、背景として 7-brane を導入しこの 7-brane を適当に重ねる極限に対応しています。したがって、この対応をうまく解釈すれば、F 理論の K3 曲面へのコンパクト化で現れると考えられている例外型の対称性が、IIB 型超弦理論の brane や開弦の立場で理解できるはずで、実際にそれが可能なことが分ります [1][6]。この状況を具体的に解説することをこの講義の目的にしたいと思います。

実は、この例外型の対称性の発現を説明するには単に二つの brane の間を結ぶ開弦を考えるだけでは不十分で[1] 、多数の brane の間を結ぶ枝分かれした弦を考えることが必要となります。このような枝分かれした弦を弦の接合 (string junction) と呼びます [7]。実際、弦の接合が brane 上のゲージ理論の BPS 状態のスペクトラムを弦理論の立場から理解する上で必要不可欠であることが Bergman[8] に続き橋本-畑-笹倉 [9]、さらには今村 [10] による興味深い論文により示されました。

7-brane 上にどのような対称性が発現するかは、小平による楕円曲線の退化の分類 [11] によりある程度知ることができます[2] 。この小平の分類は K3 曲面にコンパクト化した F 理論のオービフォールド極限で得られる対称性と非常に深く関連しています [12]。したがって、F 理論と 7-brane 配位を持つ IIB 型超弦理論の対応を考えれば小平の分類はどのような 7-brane 配位がどのような代数を発現するかをある程度教えてくれます。しかしながら、

[1] A_n 型の対称性の場合は二つの brane 間を結ぶ開弦で説明可能。
[2] Appendix A 参照。

物理において重要な全ての 7-brane の配位を小平の分類が与えているわけではありません。実際、あの大変有名な Seiberg-Witten の理論 (4 次元、$N = 2$、$SU(2)$、Y-M 理論) [13] は IIB 型超弦理論にある 2 種類の 7-brane を背景として導入したときに、理論を調べる探針として入れた 3-brane 上のゲージ理論として実現されるのですが [14]、このときの 7-brane の配位は小平の分類に含まれていません。何故かというと、小平の分類は 7-brane がある一点に集まったときの対称性を教えてくれるのですが、今の場合、二つの 7-brane を一点に集めることは理論の無矛盾性から不可能だからです[3] 。この状況は Seiberg-Witten 理論において物質場の数を 1、2、3[4] としても変りません。物質場の数を 4 とすると状況が変り、小平の分類に現れる始めての理論になります。このように、小平の分類を越えて物理的に重要な全ての可能な 7-brane の配位を分類し、そこにどのような対称性が発現するかを調べることは大変、意義深いことと思えます。

今、一点に集められない 7-brane の配位を考えてみましょう。これらの 7-brane 達が全体として何らかの対称性を持っていたとしても、その対称性は決して完全には復活することはありません。7-brane 上の対称性は 7-brane の間を結ぶ弦達により担われているのですが、7-brane 達を一点に集められない場合、この対称性を担う全ての弦達の長さを同時に 0 にすることは出来ません。これは brane 上の場の理論の立場では全てのゲージ粒子の質量を同時に 0 にすることが出来ないことを意味します。したがって、この場合、完全に対称性を復活させることは出来ないのです。ある意味で、7-brane 達が離れて配置されている状況は brane を一点に集めたときに持っていると思われている対称性 (brane の配位から読み取れる対称性) が自発的に破れていることに対応しています。しかしながら、このような状況において、brane 配位から読み取れる対称性に全く興味がないわけではありません。それどころか、この対称性によって、弦理論や brane 上のゲージ理論の質量を持った状態 (質量を持った BPS 状態) を分類することができるのです [15]。このことは弦理論の質量を持った状態が何らかの自発的に破れた対称性の表現に属するのでは、という以前からの考えと適合しています。実際に、7-brane 達の配位を決めれば、その対称性が (例え自発的に破れていても) 理論の BPS 状態のスペクトラムを完全に統制していることが分ります。この状況は以前から物理学者に興味を持たれていた E_9、$\hat{E}_9$、E_{10}[5] やその他の拡張された対称性の表現として弦理論の BPS 状態のスペクトラムが与えられることを説明します。このことは大変興味深いことですが、しばらく先の応用として心に留めておくことにします。

これから、当面の目的として、どのように非自明な、そして、非 $U(n)$ の対称性が適当な brane 配位から現れるかを理解するかと探針上の理論の BPS 状態のスペクトラムがど

[3] このことは 3 章で説明します。
[4] これらも IIB 型超弦理論に背景としてある種の 7-brane 配位を導入すれば実現出来ます。
[5] これらの対称性の詳しい説明は 5 章で行います。

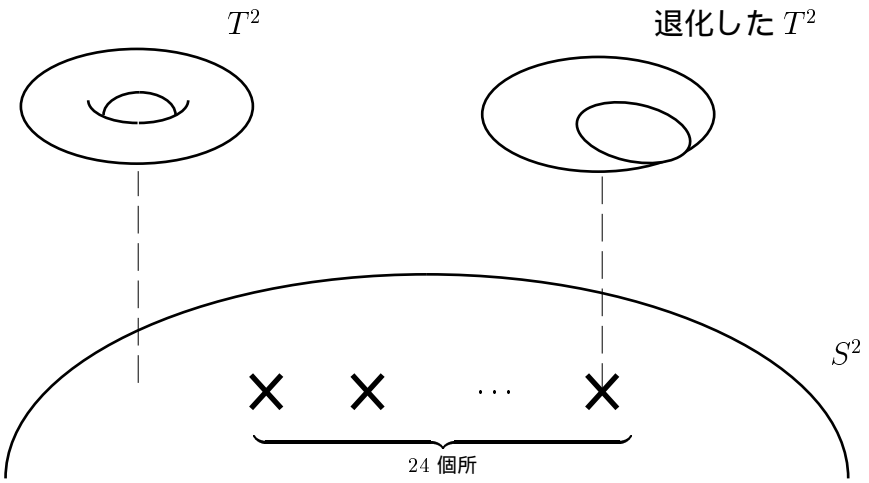

図 1: S^2 上の楕円曲線束

のように与えられるかという二点を説明することを考えていきましょう。このために、次章では扱う理論の枠組みを説明していきます。

2 理論の枠組み

では、どのような枠組みで考えるかを説明していきましょう。

まず、楕円曲線束を使って表わした K3 曲面上にコンパクト化された F 理論を考えます。これは、7-brane を背景として持つ IIB 型超弦理論を S^2 にコンパクト化したものと等価になっていると考えられます。ここで、この二つの描像を比較してみましょう。始めに楕円曲線束で表わされた K3 曲面上にコンパクト化された F 理論がどのようなものか考えていくことにします。この K3 曲面を構成するには、まず底空間として 2 次元球面 S^2 を持ってきます。この 2 次元球面の各点に 2 次元トーラス T^2 (すなわち、楕円曲線) を置きます。すると、局所的には $S^2 \times T^2$ で表わされる 4 次元の空間が得られたことになります。さらに、この空間から滑らかで、閉じた K3 曲面を得るには束として導入された楕円曲線が S^2 の 24 個所の特別な点で退化していなければならないことが知られています [16] (図 1)。この点上の楕円曲線の複素構造 τ は $i\infty$ と共役な値を持っています[6] 。ここで強調しておきますが、この S^2 上の特別な 24 点がバラバラに存在している限り、全体の K3 曲面は完全に滑らかで特異性を持ちません。ここで現れる楕円曲線の退化 (特異性) は束の特異性であって、曲面全体の特異性を表わしているわけではないのです。しかし、興味深い現象は S^2 上の特別な点がお互いに近づいたときに起ります。このときは K3 曲面に真の特異性が現れ、特別な現象が起きます。

[6] 楕円曲線 T^2 の複素構造 τ は複素平面の上半平面に値を取る。すなわち、$\mathrm{Im}\tau \geq 0$。

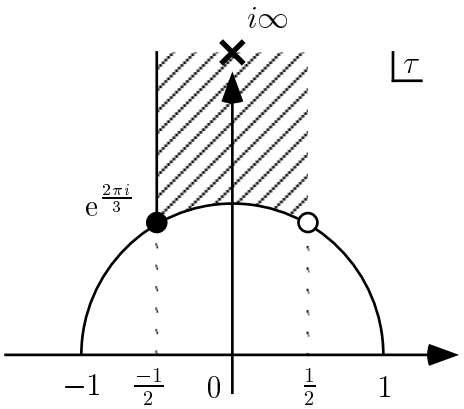

図 2: 基本領域 (斜線部)

この状況の IIB 型超弦理論への翻訳はある意味で明らかです。F 理論において K3 曲面の底空間として現れた 2 次元球面 S^2 は IIB 型超弦理論の立場でもコンパクト化の空間として現れます。また、K3 上にコンパクト化された F 理論の立場では、束である楕円曲線の複素構造 τ は底空間 S^2 の位置に依存し、S^2 の複素座標を z とすれば $\tau(z)$ と表わされます。この $\tau(z)$ は IIB 型超弦理論の立場では、ディラトン場 $\phi(z)$ とアクシオン場 $a(z)$ を用いて

$$\tau(z) = i\mathrm{e}^{-2\phi(z)} + a(z) \tag{1}$$

のように表わされると仮定します。ここで、この $\tau(z)$ は基本領域 (図 2) に値をとるものとします[7] 。いま、F 理論の立場では S^2 上の特別な点で $\tau(z) = i\infty$ となっていました。当然、IIB 型超弦理論の立場でも、同様にこの点 ($\tau(z) = i\infty$ となる点) が存在しなければなりません。これは、S^2 の座標と共にディラトン場 $\phi(z)$ やアクシオン場 $a(z)$ の真空期待値が変化することを意味しますが、このような変化は通常の (背景場を持たない) IIB 型超弦理論では考えられません。これらの変化は何らかの背景場を導入し、その影響により起ると考える必要があります。ここで、$\tau(z)$ がコンパクト化の空間 S^2 の座標にのみ依存していることを考えると、背景場はコンパクト化されていない残りの $7{+}1$ 次元空間全体に広がりを持っていなければなりません。したがって、ここで導入する背景場は 7-brane でなければならないということが分ります。実際、10 次元に於ける 0 形式 $\tau(z)$ の電磁双対場は 8 形式であり、磁荷は 7-brane によって担われることが知られているので[8] 、7-brane を背景場とすれば $\tau(z)$ の値は変化します。

ここで、7-brane のまわりで $\tau(z)$ はどのような依存性を持つかを考えてみましょう。アクシオン場 $a(z)$ が z 平面上の 7-brane が存在する点のまわりを一周すると、7-brane の R-R

[7] IIB 型超弦理論が持つ $SL(2,\mathbf{Z})$ 双対性により必ず基本領域に値を取ることができます。

[8] 一般に弦理論の超重力近似における $p+1$ 形式場の電荷は、弦理論の p-brane によって担われると解釈されます [17]。例えばアクシオン場 a は 0 形式で、その磁荷は D7-brane が担うことが知られています。

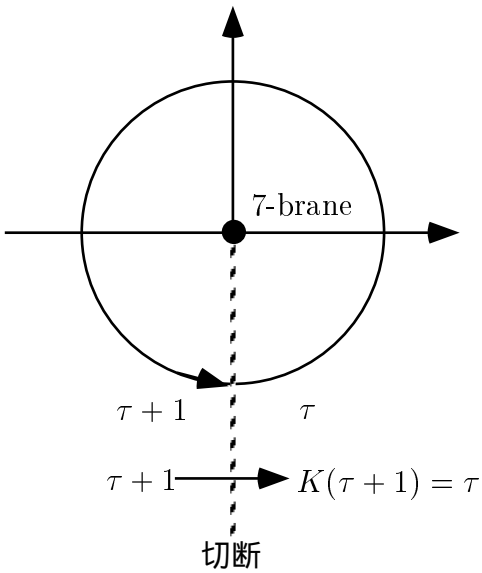

図 3: 7-brane のまわりのモノドロミー

磁荷を拾って $a(z) \to a(z)+1$ のような変換を受けます。いま、この変換性と $\tau(z)$ は $7{+}1$ 次元方向には均一で 2 次元方向のみに広がりを持つことを考え併せると、7-brane が z 平面の原点に存在するとしたときの $\tau(z)$ の z 依存性は

$$\tau(z) = \frac{1}{2\pi i}\log z \tag{2}$$

となることが分ります。ここで、$z \to 0$ とすると、$\tau \to i\infty$ となることから、K3 の底空間 S^2 に現れた特別な点 ($\tau = i\infty$ となる点) は IIB 型超弦理論では 7-brane が存在する点であるということが分ります。また、式 (2) のような $\tau(z)$ の依存性は 7-brane が切断 (branch cut) を導入することを意味します[9] 。具体的には切断の右側で τ だったものが、7-brane の存在する点を反時計回りにまわりって切断の左側に移動すると $\tau+1$ に変化するということになります。ここで、切断の上でこの変化を吸収するようにモノドロミー K[10] を導入します (図 3)。要するに、切断の左側では $\tau+1$ だったものが切断を乗り越えて右側に移動したときには $K(\tau+1)=\tau$ になっているものとします。今の場合、この K は

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と表わされるということになります。ここで、τ は一般の $SL(2,\mathbf{Z})$ の元 $K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に

[9] $\log z$ は多価関数なので必ず切断を持ちます。

[10] この定義は通常のモノドロミー行列の逆行列に対応しますが、このノートでは Zwiebach 氏に倣ってこの K をモノドロミーと呼ぶことにします。

対し

$$K\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{4}$$

のように変換を受けるものとします。

実は、IIB 型超弦理論の枠組みの中で背景場として導入できる 7-brane は一種類ではありません。そのことを説明しておきましょう。まず、IIB 型超弦理論の 7-brane のうちで通常の開弦 (基本弦) を止める (発する) ことの出来る brane は D7-brane と呼ばれます。式 (3) で求めてたモノドロミー行列は実はこの D7-brane に対するものでした。ところが、IIB 型超弦理論の超重力近似では NS-NS 2 形式場と R-R 2 形式場が存在します。さらに、これらの 2 形式場は $SL(2,\mathbf{Z})$ 双対性の変換で混ざりあいます。したがって、IIB 型超弦理論に現れる弦は R-R と NS-NS の二つの電荷を同時に持ち、この二つの電荷の値によって特徴づけられています。そこで、これからは NS-NS 電荷 p、R-R 電荷 q をもつ弦を (p,q) 弦と呼ぶことにします。この書き方を用いればいわゆる基本弦は $(1,0)$ 弦ということになります。ここで、D7-brane が基本弦 ($(1,0)$ 弦) を止めて (発して) いる状況の $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換を考えてみましょう。一般に適当な $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換で、基本弦を (p,q) 弦に変換することができるので[11] 、D7-brane もなにか (p,q) 弦を止める (発する) ことの出来る 7-brane に変換されていなければなりません。すなわち、IIB 型超弦理論では 7-brane も弦と同様に p、q で特徴づけられるということになります。ここで、この (p,q) 弦を止める (発する) ことの出来る 7-brane を $[p,q]$7-brane と呼ぶことにします。D7-brane は $[1,0]$7-brane ということになります。

いま、$[p,q]$7-brane のモノドロミーを考えてみましょう。$[p,q]$7-brane の構成法から D7-brane($=[1,0]$7-brane) との違いは $SL(2,\mathbf{Z})$ による変換分だけということになります。ここで、背景配位全体に $g \in SL(2,\mathbf{Z})$ という変換を作用させてみましょう。すると、τ は $g\tau$ に変換され、モノドロミーを感じた後の $K\tau$ は $gK\tau$ に変換されます。したがってこの場合のモノモドミーの変換は $g\tau \to gK\tau = gKg^{-1}g\tau$ となります。このことから $g \in SL(2,\mathbf{Z})$ による変換後のモノドロミーは gKg^{-1} であることが分ります。ところで、g は $(1,0)$ 弦を (p,q) 弦に変換するような $SL(2,\mathbf{Z})$ の元だとすると

$$g = \begin{pmatrix} p & * \\ q & * \end{pmatrix} \tag{5}$$

のような形に書けます[12] 。(弦の電荷 (p,q) の $g \in SL(2,\mathbf{Z})$ による変換は $g(p,q)^T$ で与えられるものとします。) ここで、K は $[1,0]$7-brane のモノドロミー (3) だったので、一般

[11] 厳密には p、q が互いに素なものに変換される。
[12] $*$ は $\det g = 1$ を満たす任意の整数。

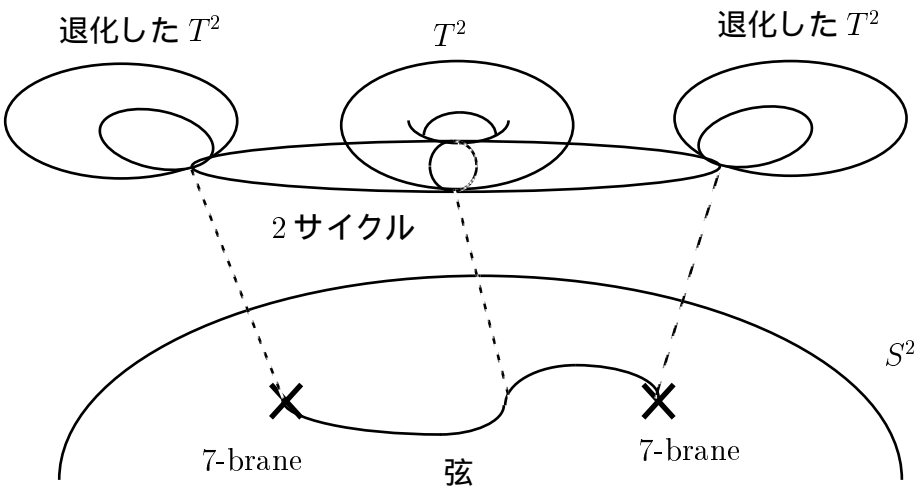

図 4: K3 曲面の 2 サイクルと弦

の $[p,q]$7-brane のモノドロミー $K_{[p,q]}$ は

$$K_{[p,q]} = gKg^{-1} = \begin{pmatrix} p & * \\ q & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & * \\ q & * \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1+pq & -p^2 \\ q^2 & 1-pq \end{pmatrix} \qquad (6)$$

で与えられます[13] 。

今までの議論で、F 理論においてコンパクト化した K3 曲面の底空間にあらわれる特別な点は IIB 型超弦理論では何らかの 7-brane を表わしていることが分りました。では、IIB 型超弦理論における (p,q) 弦は F 理論ではどのように解釈できるかを考えてみましょう。IIB 型超弦理論では 7-brane は弦の止れる点を表わしていました。F 理論の立場ではこの点は束である楕円曲線が退化する点です。したがって、楕円曲線束上のあるサイクルを考えると、この点上でサイクルは一点に退化し消えているように見えます。これは、IIB 型超弦理論の弦と (楕円曲線のあるサイクル)$\times$(S^2 上の線分) から作られる K3 曲面の 2 サイクルとが対応していることを意味します。より厳密には IIB 型超弦理論の (p,q) 弦 (S^2 上のある線分) と K3 の 2 サイクル ((楕円曲線のある $p\alpha+q\beta$ サイクル)$\times$(S^2 上の線分)) が対応していることになります (図 4)。また、IIB 型超弦理論の持つ $SL(2,\mathbf{Z})$ 双対性はそのまま、K3 上の F 理論においては束である楕円曲線の複素構造の $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換に対する不変性に対応します。

これで、理論の枠組み、特に F 理論と IIB 型超弦理論の対応の説明を終りたいと思います。

(質問) K3 の 2 サイクルには物理的な意味があるのですか ?

[13] この計算において $*$ 部分の詳しい情報は必要ではありません。$\det g = 1$ という条件だけで、計算が可能です。

(回答) それは分かりません。F 理論自体、まだ正体が分からないんです。しかし、M 理論の描像でみれば、2 サイクルは完全に物理的なものです。M 理論の描像は、今考えている IIB 理論を更に S^1 コンパクト化して T-dual をとり、11 次元方向をひらくことで得られます。このとき、IIB 理論の (p,q) 弦は M 理論の 2 サイクル $p\alpha + q\beta$ に M2-brane が巻き付いたものに移りますから、2 サイクルには物理的な意味があります。

3 モノドロミーと7-brane配位の分類

前章では 7-brane が一枚存在する場合のモノドロミーを求めました。しかし、実際の理論では複数枚の 7-brane が同時に存在し全体としてモノドロミーを持ちます。これは本質的に 7-brane が一枚のときとは異なるモノドロミーです。このような状況をふまえ、この章ではどのようなモノドロミーや 7-brane 配位が許され、どのような性質を持つのかを議論していきたいと思います[14] 。

3.1 モノドロミーの分類

モノドロミーの分類をするにあたって、$SL(2,\mathbf{Z})$ 変換で結び付いているモノドロミーは同一のものと考えることにします。例えばモノドロミー K に関していえば、$g \in SL(2,\mathbf{Z})$ としたとき

$$K \to gKg^{-1} \tag{7}$$

のような変換で移り変わるものは同一のものとする、ということです。これは、IIB 型超弦理論が持つ $SL(2,\mathbf{Z})$ 双対性を考えれば自然なことです。

いま、式 (7) の変換で $\mathrm{Tr}K$ は不変なので、この値によってモノドロミーの分類を行うことにしましょう。実はこの $\mathrm{Tr}K$ の値は $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換で不変である以上に重要な量になっています。何故重要かというと $\mathrm{Tr}K$ の値を

$$\begin{array}{lcl} |\mathrm{Tr}K| = 2 & : & \text{Parabolic} \\ |\mathrm{Tr}K| < 2 & : & \text{Elliptic} \\ |\mathrm{Tr}K| > 2 & : & \text{Hyperbolic} \end{array} \tag{8}$$

のように分類すると、モノドロミー変換による固定点の性質が分類出来るからです。ところで、IIB 型超弦理論において 7-brane 直上の τ の値は 7-brane の作り出すモノドロミーによって変換されません[15] 。したがって、モノドロミーの固定点とは 7-brane 直上の τ の

[14] この章の内容は [3] に詳しく書かれています。

[15] 一般に多価関数を考えた場合、分岐点での値は一価です。今の場合、7-brane の位置が分岐点であり τ がどのような多価関数であっても分岐点の直上での値は唯一定まり、当然、モノドロミーによる変換も受けません。

値に他なりません。このことは、固定点の性質の分類が 7-brane 配位の性質を知る上で重要な役割を持つことを意味します。このことを具体的に見ていくことにしましょう。

固定点とは $K=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (ここで、$\det K=1$) の作用によってある値を変換したとき、またもとに戻る値のことなので、この値を τ_* とすると

$$K\tau_* \equiv \frac{a\tau_*+b}{c\tau_*+d} = \tau_* \tag{9}$$

を満たします。この方程式の解は

$$\tau_* = \frac{1}{2c}\left\{(a-d) \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}K)^2-4}\right\} \tag{10}$$

で与えられます。ここで重要なのは $\mathrm{Tr}K$ の値を (8) のように分類することによってこの解の性質が大きく変ることです。このことを確かめるために、まずは、それぞれの場合での固定点の性質をおおまかに見てみましょう。

1) $\mathrm{Parabolic}(|\mathrm{Tr}K|=2)$ の場合。

式 (10) の判別式は 0 となり τ_* は有理数ということになります。有理数の固定点は基本領域の点 $i\infty$ と $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換で結び付いています (図 5a)。このことは、以下のようにして分ります。有理数の固定点を二つの互いに素な整数 r、s を使って $\tau_*=\frac{r}{s}$ と表わしたとします。この τ_* を $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換すると $\frac{e\tau_*+f}{g\tau_*+h}$ となり、g、h をうまくとれば分母を 0 にできるので、変換後の τ_* は発散します。ここで、複素平面に無限遠点を加えてコンパクト化しているとすれば、この発散した値は $i\infty$ と対応していることになります。このことは、式 (6) で与えられる一枚の 7-brane によるモノドロミー K が $\mathrm{Tr}K=2$ を満し、また 7-brane 直上で τ が $i\infty$ になることに正しく対応しています。

2) $\mathrm{Elliptic}(|\mathrm{Tr}K|<2)$ の場合。

判別式が負で τ_* は虚数となり、複素平面でみると上半平面の一点を与えます[16] 。このような点は $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換により、基本領域のなかの ($i\infty$ 以外の) 一点に移すことができます (図 5b)。このようなモノドロミーは一枚の 7-brane から構成することはできません。本質的に複数枚の 7-brane が必要で、これらの 7-brane 達が一点に集まった場合、そこでの τ の値はこの基本領域内の一点の値ということになります。

3) $\mathrm{Hyperbolic}(|\mathrm{Tr}K|>2)$ の場合。

τ_* は無理数[17] となりますが、この無理数の固定点は非常にやっかいです。証明はしませんが、この固定点を $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換で基本領域内に移すことはできません (図 5c)。言

[16] 式 (10) の二つの解のうち、$\mathrm{Im}\tau_* \geq 0$ となるものを選ぶということです。
[17] $\mathrm{Tr}K$ は整数なので $|\mathrm{Tr}K|>2$ であれば $\sqrt{(\mathrm{Tr}K)^2-4}$ は必ず無理数です。

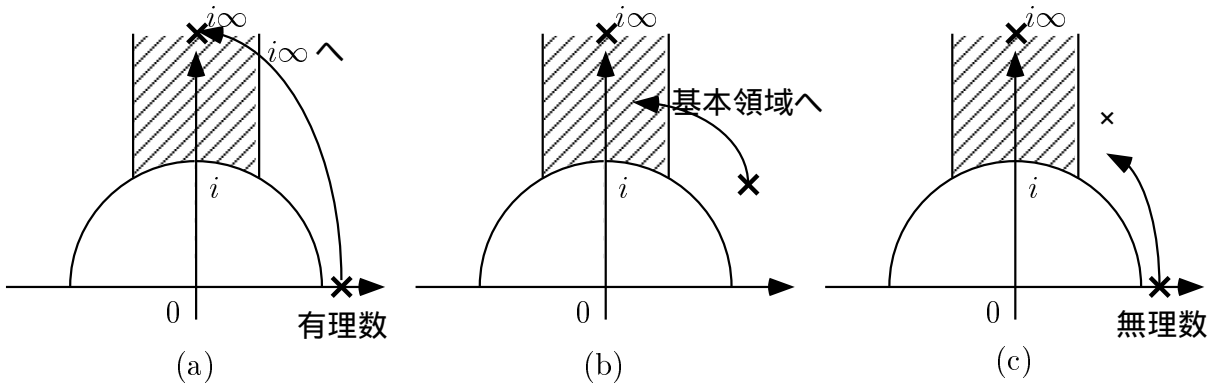

図 5: 基本領域への変換

い換えれば、このような値を複素構造として持つ楕円曲線は存在しないということです。このことは、ある 7-brane 配位が与えられたときに全体のモノドロミーが Hyperbolic になった場合、これらの 7-brane 達を一点に集めることが出来ないことを意味します。何故なら、これらが一点に集まるとその点での τ の値は無理数になるのですが、このような値を複素構造として持つ楕円曲線は存在せず、楕円曲線束を使った K3 曲面上の F 理論の描像が破綻してしまうからです。このように $\mathrm{Tr}K$ の値による分類は非常に重要であることが分ります。

では、$\mathrm{Tr}K$ の値によって具体的にどのようなモノドロミーが許されるのかを見ていきましょう。今考えてているモノドロミー K は $SL(2,\mathbf{Z})$ の元なので、2 行 2 列の行列で $\det K=1$ です。したがって、Caylay-Hamilton の公式により

$$K^2 - (\mathrm{Tr}K)K + \mathbf{1} = 0 \tag{11}$$

を満します。これにより、例えば $\mathrm{Tr}K=0$ のとき $K^2 = -\mathbf{1}$ となることが分ります。$SL(2,\mathbf{Z})$ 変換分を除いてこのような性質を持つモノドロミーは S、$S^{-1} = -S$ の二つがあります [18] 。ここで、S は

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

です。この二つのモノドロミーが $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換で移りあえないことは以下のようにして分ります。もし、この二つの行列がある $g \in SL(2,\mathbf{Z})$ による変換で移りあえるとすると

$$gS = -Sg \tag{13}$$

という関係があるはずです。ところが、$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおいて式 (13) を解いてみると

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \tag{14}$$

[18] Appendix B 参照。

となります。しかし、この行列の行列式は $\det g = -a^2 - b^2$ となり a、b が整数のとき 1 になり得ません。したがって g は $SL(2,\mathbf{Z})$ の元であるとすることに矛盾します。このことから S、S^{-1} は独立な二つのモノドロミーであることが分ります。同様な議論で $\mathrm{Tr}K = \pm 1$ のときも独立な元を求めることが出来ます。具体的には T を

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

とすると、独立なモノドロミーは $\mathrm{Tr}K = 1$ のとき ST、$(ST)^{-1}$、$\mathrm{Tr}K = -1$ のとき $-ST$、$-(ST)^{-1}$ で与えられることが分ります[19] 。

次に $\mathrm{Tr}K = \pm 2$ の場合、独立な元は

$$\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

で与えられます[20] 。この場合、n の値によって 7-brane 配位の性質が変ってくるので、それについて少し説明をしておきましょう。

いま、このモノドロミー変換により τ は $\tau \to \tau - n$ に変換されるので、この変換性を満足する (z が十分大きな領域での[21]) $\tau(z)$ の振る舞いは

$$\tau(z) \sim \frac{n}{2\pi i}\log z \tag{17}$$

で与えられます。ここで、式 (16) のようなモノドロミーを生成する 7-brane 達が一点に集まっているとすると z は限りなく 0 に近づくことができます。しかし、$n < 0$ の場合、この極限で τ の値は $-i\infty$ とってしまいます。これは F 理論の立場では束である楕円曲線が定義できず、IIB 型超弦理論の立場では τ を与えるディラトン場の真空期待値が虚数になることに対応します。したがって、$n < 0$ の場合は矛盾なく 7-brane 達を一点に集めることは出来ないことになります。この場合、7-brane 達が一点に集まれる条件は全体として $n \geq 0$ の場合のモノドロミーを持つことということになります。

この節での結果をまとめると表 1 のようになります。

3.2 $SL(2,\mathbf{Z})$ の Abel 化

これから、具体的に上で分類されたモノドロミーを与える 7-brane 配位とそこでの対称性を考える上で重要な定理の証明をしていきたいと思います。いま、あるモノドロミーが

[19] Appendix B 参照。
[20] Appendix B 参照。
[21] 7-brane 達がある程度離れて配置されているとして、その距離が無視出来るほど十分遠方という意味です。

表 1: $\mathrm{Tr}K$ の値によるモノドロミーの分類

$\mathrm{Tr}K$ の値	モノドロミー	7-brane 配位の性質
$\mathrm{Tr}K < -2$		7-brane 配位は一点に集まれない。
$\mathrm{Tr}K = -2$	$\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$n \geq 0$ のとき 7-brane 配位は一点に集まれる。
$\mathrm{Tr}K = -1$	$-ST$,$-(ST)^{-1}$	7-brane 配位は一点に集まれる。
$\mathrm{Tr}K = 0$	S,$S^{-1} = -S$	7-brane 配位は一点に集まれる。
$\mathrm{Tr}K = 1$	ST,$(ST)^{-1}$	7-brane 配位は一点に集まれる。
$\mathrm{Tr}K = 2$	$\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$n \geq 0$ のとき 7-brane 配位は一点に集まれる。
$\mathrm{Tr}K > 2$		7-brane 配位は一点に集まれない。

与えられたときに、そのモノドロミーを構成するために最低何枚の 7-brane が必要かを知ることは非常に重要なことです。この情報を引き出す上で重要な定理として

(定理): $SL(2,\mathbf{Z})$ の Abel 化は $\mathbf{Z}_{12}$ である。

というものがあります。これを以下の手順で証明していきたいと思います。

まず、$G = SL(2,\mathbf{Z})$ とし、G_c をこの G の交換子部分群とします。交換子部分群とは $g, h \in G$ とすると、$ghg^{-1}h^{-1}$ の形からなる全ての元で構成される部分群です。このとき、

i) G_c は正規部分群。

証明) ある群 G の部分群 H が正規部分群であることの定義は $^{\forall}a \in G$ に対して、$aH = Ha$ となることです。いま、$H = G_c$ とすると、$aghg^{-1}h^{-1} = g'h'g'^{-1}h'^{-1}a$ となる $g, g'h, h' \in G$ が存在すれば良いのですが、これは $g' = aga^{-1}$、$h' = aha^{-1}$ とすれば得られるので、G_c は正規部分群。証終。

G_c が正規部分群であることが示されたので、この部分群を使って G の商群 G/G_c を同値関係

$$a \sim aghg^{-1}h^{-1}, \quad a \in G, \quad ghg^{-1}h^{-1} \in G/G_c \tag{18}$$

で定義することができます[22] 。このとき、この商群に対して、以下のことが成り立ちます。

ii) G/G_c は Abel 群 (可換群)。

[22] この同値関係は $SL(2,\mathbf{Z})$ の変換で結び付くという意味での同値関係、式 (7) とは異なります。式 (18) において $g = a^{-1}$ とすれば、式 (7) は満たされますが、逆は成り立ちません。

証明）商群 G/G_c の元、A, B を $a, b \in G$ を用いて $A = aG_c$、$B = bG_c$ と表わすことにします。このとき、$AB = aG_cbG_c = abG_cG_c = abG_c$ となりますが、$G_c = b^{-1}a^{-1}baG_c$ と書き換えれば $AB = abb^{-1}a^{-1}baG_c = baG_c = BA$ となるので Abel 群（可換群）。証終。

ここで、$g \in G$ から $gG_c \in G/G_c$ の写像を $\mu : g \to gG_c$ と呼ぶことにします。このとき、この μ に対して以下のことが成り立ちます。

iii) μ は準同型写像。

証明）写像 μ が準同型であるとは、$g, h \in G$ に対し $\mu(gh) = \mu(g)\mu(h)$ が成り立つことです。今の場合 $\mu(gh) = ghG_c = ghG_cG_c = gG_chG_c = \mu(g)\mu(h)$ となり μ は準同型写像。証終。

また、$G = SL(2, \mathbf{Z})$ に対して以下の良く知られた事実があります。

iv) G は二つの元 $S, U = ST$ により生成される。ここで、$U^3 = S^2 = -\mathbf{1}$。

証明）良く知られた事実なので省きます [18]。ちなみに S, T は式 (12)、(15) で与えられます。証終。

この事実により、$G = SL(2, \mathbf{Z})$ の任意の元 g は U と S を適当な順番にかけたもので表わされることが分ります。もしこの元 g が U を n 回、S を m 回適当な順番でかけたものであるなら、ii)、iii) の事実により $\mu(g) = U^nS^mG_c$ となります。さらに、$U^3 = S^2 = -\mathbf{1}$ を考慮すると、G/G_c の独立な元として許される代表元は

$$\{\mathbf{1}, -U^2S, U, S, U^2, US, -\mathbf{1}, U^2S, -U, -S, -U^2, -US\} \tag{19}$$

の 12 個で尽くされることが分ります。さらに、$(-U^2S)^2 \sim U, (-U^2S)^3 \sim S, \cdots, (-U^2S)^{11} \sim -US, (-U^2S)^{12} \sim \mathbf{1}$ となるので、式 (19) は G/G_c が $-U^2S$ を生成元とする可換群 $\mathbf{Z}_{12}$ であることを示しています。一応、これで定理の証明ができたことになるのですが、7-brane の枚数とモノドロミーの関係を見るためにもう少しこの G/G_c の性質をみておくことにします。簡便のために式 (19) で与えた独立な元を順番に

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \tag{20}$$

と名付けておきます。このとき 1 枚の 7-brane からのモノドロミー $K_{[p,q]}$ に対して以下の事実が成り立ちます。

v) $\mu(K_{[p,q]}) = 1 \in \mathbf{Z}_{12}$、さらに $\mu(K_1 \cdots K_N) = N \in \mathbf{Z}_{12}$。ここで、$K_i = K_{[p_i,q_i]}$。

証明）$K_{[1,0]} = -U^2S$ なので、$\mu(K_{[1,0]}) = 1$。ここで、商群 G/G_c を作るときの同値関係は $K_{[1,0]} \sim K_{[1,0]}ghg^{-1}h^{-1} (g, h \in G)$ で与えられますが、$g = K_{[1,0]}^{-1}$ とすれば、$K_{[1,0]} \sim hK_{[1,0]}h^{-1}$ となります。したがって、どんな $[p, q]$7-brane のモノドロミー $K_{[p,q]}$ も $K_{[1,0]}$ と

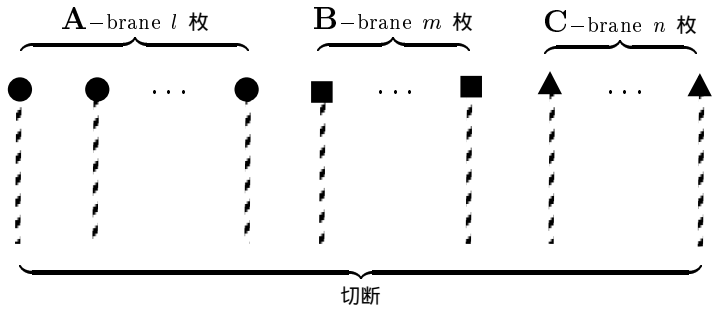

図 6: 7-brane の配位と切断

同じ同値類に入っていることになり、$\mu(K_{[p,q]}) = \mu(K_{[1,0]}) = 1$ となります。これにより $\mu(K_1 \cdots K_N) = N$ も明らかです。証終。

v) の結果からモノドロミー K が与えられたとき、$\mu(K)$ が必要な 7-brane の枚数を与えていることが分ります。具体的には $\mu(K) = N$ であれば、このモノドロミーをもつ 7-brane 配位を構成するには $N \bmod 12$ 枚必要であることが分ります。この事実をふまえ次節では 7-brane 配位の分類とその 7-brane 配位による対称性を考えていきたいと思います。

3.3 7-brane 配位の分類と対称性

では、先ほど $\mathrm{Tr}K$ の値で分類したモノドロミーがどのような 7-brane 背景で実現し、また、どのような対称性を持つかを具体的に見ていきましょう。まず、7-brane 配位の分類の便宜のため、幾つかの 7-brane に名前をつけておきたいと思います。まず、通常の D7-brane を **A**-brane と呼ぶことにします。また、**B**-brane や **C**-brane も以下ように定義します。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\text{-brane} &= [1,\ 0]\text{7-brane } (= \text{D7-brane}), \\ \mathbf{B}\text{-brane} &= [1,-1]\text{7-brane}, \\ \mathbf{C}\text{-brane} &= [1,\ 1]\text{7-brane}。 \end{aligned}$$

これらの 7-brane のモノドロミー行列を K_A、K_B、K_C と表わすことにすると式 (6) より

$$K_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, K_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

で与えられます。

ここで、**A**、**B**、**C**-brane を使った 7-brane 配位の与え方を統一しておきましょう。例えば、7-brane 配位を $\mathbf{A}^l\mathbf{B}^m\mathbf{C}^n$ ($l, m, n \geq 0, lmn \neq 0$) のように書いたとすると、これは左から **A**-brane を l 枚、**B**-brane を m 枚、**C**-brane を n 枚並べ、さらにそれぞれの 7-brane から下方に切断が走っているものとします (図 6)。したがって、この背景全体を反時計

回りにまわったときに感じるモノドロミーは切断を横切る順番にそれぞれの 7-brane のモノドロミーをかけて $K_C^n K_B^m K_A^l$ ということになります。

ではこれから、具体的にモノドロミーと 7-brane 配位の関係についてみていきたいと思います。

1) $\mathrm{Tr}K = 2$ のとき。

この場合、独立なモノドロミーは表 1 と式 (21) より $n > 0$ の場合 K_A^n で与えられます。このときの 7-brane 配位は $\mathbf{A}^n$ ということになります。ここで、良く知られた事実なのですが、同一の brane が n 枚重なったときに brane 上に現れる対称性は $SU(n) = A_{n-1}$ です。したがって、この場合もこの背景の持つ対称性は $SU(n) = A_{n-1}$ ということになります。これは 3.1 節で示したようにこれは 1 点に集まれる 7-brane 配位で小平の分類では A_{n-1} として知られるものです。

$n = 0$ の場合は事情が異なります。3.2 節で示したように、複数枚の 7-brane から単位行列のモノドロミーを出すには最低 12 枚必要であることが分ります。実際、$K_C K_B K_C K_B K_A^8 = \mathbf{1}$ となるので、7-brane 配位は $\mathbf{A}^8\mathbf{BCBC}$ ということになります。このときの対称性は $\hat{E}_9$ という対称性になります。

$n < 0$ の場合は一点に集まれない 7-brane 配位で、対称性は $\hat{E}_{9+n}$ となります。

ここで現れた $\hat{E}_n$ という対称性については 5 章で説明したいと思います。

2) $\mathrm{Tr}K = 1$ のとき。

この場合、独立なモノドロミーは ST、$(ST)^{-1}$ です。ここで、式 (19) より $\mu(ST) = 2$、$\mu((ST)^{-1}) = 10$ となることが分ります。したがって、それぞれのモノドロミーを出す 7-brane 配位にはそれぞれ、最低でも 2 枚と 10 枚の 7-brane が必要なことが分ります。さらに、これらのモノドロミーは $ST \sim K_C K_A$、$(ST)^{-1} \sim K_C^2 K_B K_A^7$ となっています[23] 。これより、7-brane 配位はそれぞれ、$\mathbf{AC}$、$\mathbf{A}^7\mathbf{BC}^2$ で与えられることが分ります。両者とも 1 点に集まれる 7-brane 配位です。

ここで、これらの 7-brane 配位の与える対称性を考えてみましょう。$\mathbf{AC}$ の場合、$\mathbf{A}$-brane と $\mathbf{C}$-brane の間には開弦を飛ばすことができません。したがって、brane 間に飛ぶ開弦に由来する対称性の拡大は起らず、なんの対称性も持たないことになります。$\mathbf{A}^7\mathbf{BC}^2$ の場合は brane 間に様々な開弦や接合を持つ開弦を飛ばすことができ、これらを注意深く解析することにより E_8 の対称性を持つことが分ります。このことは 4 章で詳しく述べます。これらの配位は小平の分類ではそれぞれ H_0、E_8 と呼ばれるものになっています。

3) $\mathrm{Tr}K = 0$ のとき。

[23] ここで、等号 “=” ではなく同値関係 “∼” を使ったのは両者は完全には一致せず、$SL(2, \mathbf{Z})$ による変換で結び付いているからです。

この場合、独立なモノドロミーは S、$-S$ の二つでした。ここで、$\mu(S)=3$、$\mu(-S)=9$ となります。このことからこれらのノモドロミーを出すには 3 枚と 9 枚の 7-brane が必要なのですが、実際に $K_CK_AK_A \sim S$、$K_C^2K_BK_A^6 \sim -S$ となっていることが分ります。したがって、モノドロミー S、$-S$ を持つ 7-brane 配位はそれぞれ $\mathbf{AAC}$、$\mathbf{A}^6\mathbf{BC}^2$ ということになります。

これらの 7-brane 配位の持つ対称性ですが、$\mathbf{AAC}$ の場合は $\mathbf{A}$-brane 間を飛ぶ開弦により $SU(2)$ の対称性を持ちます。また、$\mathbf{A}^6\mathbf{BC}^2$ は $\mathbf{A}^7\mathbf{BC}^2$ の場合と同様の解析により E_7 の対称性を持つことが分ります[24] 。これらの背景は小平の分類では H_1、E_7 と呼ばれるものです。

4) $\mathrm{Tr}K=-1$ のとき。

この場合、独立なモノドロミーは $-ST$、$-(ST)^{-1}$ の二つでした。$\mu(-ST)=4$、$\mu(-(ST)^{-1})=8$ で、$K_CK_AK_AK_A \sim -ST$、$K_C^2K_BK_A^5 \sim -(ST)^{-1}$ となっているので、7-brane 配位はそれぞれ、$\mathbf{AAAC}$、$\mathbf{A}^5\mathbf{BC}^2$ ということになります。

これらの背景の持つ対称性は前の場合と同様の理由により $\mathbf{AAAC}$ が $SU(3)$ で $\mathbf{A}^5\mathbf{BC}^2$ が E_6 ということが分ります[25] 。これらは小平の分類により H_2、E_6 として知られています。

5) $\mathrm{Tr}K=-2$ のとき。

この場合のモノドロミーは $-\mathbf{1}K_A^n$ のように考えることができます。したがって、$-\mathbf{1}$ となる 7-brane 配位を見つければ、それに $\mathbf{A}$-brane を加えることにより、7-brane 配位を構成することができます。このことから、まずはモノドロミー $-\mathbf{1}$ を与える 7-brane 配位を考えることにしましょう。いま、$\mu(-\mathbf{1})=6$ であり、さらに $K_CK_BK_A^4=-\mathbf{1}$ なのでモノドロミー $-\mathbf{1}$ を与える 7-brane 配位は $\mathbf{A}^4\mathbf{BC}$ であることが分ります。ここで、この配位に $\mathbf{A}$-brane を加えていくことによって $n\geq 0$ の系列が得られます。また、元々$-\mathbf{1}$ のモノドロミーを与える配位は 4 枚の $\mathbf{A}$-brane を含んでいるので、これを取り除いていくことによって、$n=-1,-2,-3,-4$ の場合の 7-brane 配位も得られます。具体的にはこれらの配位は $\mathbf{A}^{n+4}\mathbf{BC}$ で与えられます。このとき、対称性は $SO(2n+8)$ で与えられます[26] 。特に $n=-1,-2,-3$ の場合はそれぞれ $SO(6)\sim SU(4)$、$SO(4)\sim SU(2)\times SU(2)$、$SO(2)\sim U(1)$ で、$n=-4$ のときは対称性はありません。ここで、$n\geq 0$ は一点に集まれる 7-brane 配位で、小平の分類では D_{n+4} で知られる理論になっています。また、$n=-4,-3,-2,-1,0$ での 7-brane 背景を D3-brane による探針で調べると、D3-brane 上の理論が $N_f=4+n$ の Seiberg-Witten 理論なっています。

[24] 4 章参照。
[25] 4 章参照。
[26] 4 章参照。

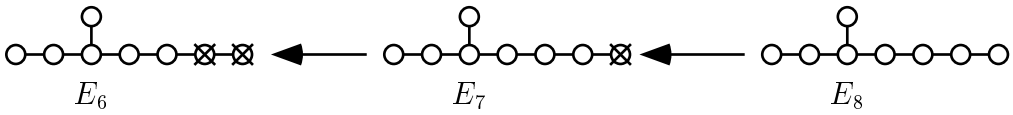

図 7: E 型の Dynkin 図

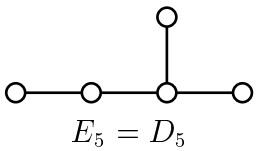

図 8: E_5 の Dynkin 図

6) その他の場合。

今までの結果から A_n、D_n、E_n $(n = 6, 7, 8)$、H_n($n = 0, 1, 2$) の四つの系列が得られ、それぞれの 7-brane 配位は $\mathbf{A}^{n+1}$、$\mathbf{A}^{n+4}\mathbf{BC}$、$\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{BC}^2$、$\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{C}$ で与えられることが分りました。ここで、E_n や H_n の系列の拡張を考えてみましょう。

E_n の場合、E_8 の 7-brane 配位から 1 枚づつ $\mathbf{A}$-brane を取り除くことによって、E_7、E_6 が得られます。この様子を Dynkin 図でみると (図 7) のように単純根を表わす点を端から一つづつ取り除くことに対応します。逆に $\mathbf{A}$-brane の数を増やせば $E_n, (n \geq 9)$ を得ることもできます。

ここで、E_6 の Dynkin 図からもうひとつ $\mathbf{A}$-brane を取り除くことを考えましょう。このときの、7-brane 配位は $\mathbf{A}^4\mathbf{BC}^2$ で与えられますがこれを E_5 と呼ぶことにします。このとき様子を Dynkin 図でみると (図 8) のようになり、$D_5 \sim SO(10)$ の Dynkin 図と一致します。したがって、この背景の持つ対称性は $D_5 \sim SO(10)$ であることが予想されます。しかし、D_5 の 7-brane 配位は $\mathbf{A}^5\mathbf{BC}$ であり、一見すると異なる配位のように思われますが、これらは本当に違うものなのでしょうか。

この問題を考えるために、ある配位における 7-brane の順番の入れ替え、すなわち切断の取り方を変えたときにどのような変化が起るかを考えてみましょう。

まず、2 枚の 7-brane がある場合を考えましょう(図 9a)。ここで、それぞれを $\mathbf{X}_{z_1}$、$\mathbf{X}_{z_2}$ と呼び、それぞれのモノドロミーを K_1、K_2 とします。また、

$$z_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}、z_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}、z_1 \times z_2 = -z_1^T S z_2 = \det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

としておきます。いま、$\mathbf{X}_{z_1}$ から延びる切断を $\mathbf{X}_{z_2}$ の右側に移動さることを考えましょう (図 9b)。切断の移動前、$\mathbf{X}_{z_1}$ から延びる切断の左側では τ、右側では $\mathbf{X}_{z_1}$ のモノドロミーの影響で $K_1\tau$ となっていました。切断を移動させた後はこのモノドロミーの影響がなくるので、図 9b の斜線部分の τ は最初に比べて $(K_1)^{-1}$ の作用の分だけずれます。このため、

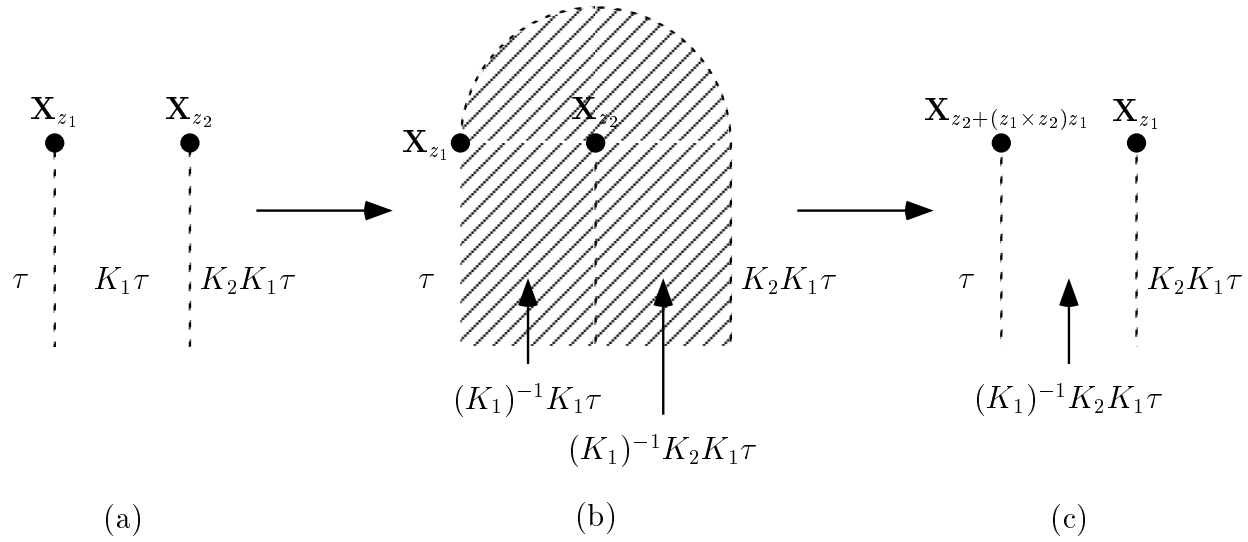

図 9: 切断の取り替え：最初の状態 (a)、切断の移動 (b)、最後の状態 (c)

$K_1\tau$ だった部分は τ となります。一方、$\mathbf{X}_{z_2}$ から延びた切断を横切ると τ は $(K_1)^{-1}K_2K_1\tau$ になります。これは、最初 K_2 だったモノドロミーが切断の移動後では $(K_1)^{-1}K_2K_1$ になったことを意味します。このことは、もともと z_2 というラベルを持っていた $\mathbf{X}_{z_2}$ が切断の移動により $z_2+(z_1\times z_2)z_1$ というラベルをもつ $\mathbf{X}_{z_2+(z_1\times z_2)z_1}$ に変化したことに対応します。結局 7-brane 配位は $\mathbf{X}_{z_1}\mathbf{X}_{z_2}$ から $\mathbf{X}_{z_2+(z_1\times z_2)z_1}\mathbf{X}_{z_1}$ に変化したことになります。同様な議論で 2 枚の 7-brane を逆に入れ替えることも可能です。この場合、7-brane 配位は $\mathbf{X}_{z_1}\mathbf{X}_{z_2}$ から $\mathbf{X}_{z_2}\mathbf{X}_{z_1+(z_1\times z_2)z_2}$ に変化します。

ここで、具体例として E_5 と D_5 の配位の比較をしてみましょう。まず、それぞれのモノドロミーは

$$K_C^2K_BK_A^4=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&0\end{pmatrix}=-K_{[1,1]},\ K_CK_BK_A^5=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}=-K_{[1,0]} \tag{23}$$

となっているので、両者は $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換 g により

$$K_{[1,1]}=gK_{[1,0]}g^{-1},\quad g=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \tag{24}$$

のように結び付いています。ここで、この変換 g で $\mathbf{A}^5\mathbf{BC}$ の 7-brane 配位は $\mathbf{C}^5\mathbf{A}\mathbf{X}_{[1,2]}$ のように変換されます。この配位に上で考えた 7-brane の順番の取り替えを適当に行うと

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^5\mathbf{A}\mathbf{X}_{[1,2]} &= \mathbf{A}\mathbf{X}_{[0,1]})^5\mathbf{X}_{[1,2]}=\mathbf{A}(\mathbf{X}_{[0,1]})^4(\mathbf{X}_{[0,1]}\mathbf{X}_{[1,2]})=\mathbf{A}(\mathbf{X}_{[0,1]})^4\mathbf{C}\mathbf{X}_{[0,1]}\\ &= \mathbf{A}(\mathbf{X}_{[0,1]})^2\mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{X}_{[0,1]}=\mathbf{A}(\mathbf{X}_{[0,1]})^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{X}_{[0,1]}\\ &= \mathbf{A}((\mathbf{X}_{[0,1]})^2\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{X}_{[0,1]})=\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}\\ &= \mathbf{A}^4(\mathbf{X}_{[3,-1]})^2\mathbf{B}=\mathbf{A}^4\mathbf{B}\mathbf{C}^2\end{aligned} \tag{25}$$

のように変換されます。これにより、E_5 と D_5 の 7-brane 配位の同等性が示せました。

では、E_n 系列の話に戻りましょう。E_5 からもう一枚 **A**-brane を取り除くと 7-brane 配位は $\mathbf{A}^3\mathbf{B}\mathbf{C}^2$ になり、これを E_4 と呼びます。この場合の Dynkin 図は $A_4 = SU(5)$ のものと同じものになり、対称性は $SU(5)$ を持ちます。しかし、A_4 の 7-brane 配位は $\mathbf{A}^5$ であり 7-brane の枚数が違うので本質的に違う配位になっています。実はこの E_4 は SU 型の対称性を持つもう一つの系列 H_n のうち、H_4 と同等であることが示せます。H_1、H_2 はそれぞれ対称性として $SU(2)$、$SU(3)$ を持ち、その 7-brane 配位は $\mathbf{AAC}$、$\mathbf{AAAC}$ で与えられます。これを拡張して、H_n 系列の 7-brane 配位を $\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{C}$ で与えるとします。この系列は $n+1$ 枚の **A**-brane 間を飛ぶ開弦に由来する $SU(n)$ の対称性を持ちます。ここで、H_3 は $SU(4) \sim D_3$ の対称性を持つので D_3 と等価であると考えられます。同様に H_4 は E_4 と等価と考えられます。これらの等価性は E_5 と D_5 の等価性を示したときと同様に、$SL(2,\mathbf{Z})$ 変換と 7-brane 配位の順番の取り替えにより証明することが出来ます。E 型の **A**-brane の数をさらに減らしていくと E_3、E_2、E_1 も同様に定義できて、それらの対称性はそれぞれ $SU(3)\times SU(2)$、$SU(2)\times U(1)$、$SU(2)$ であることが分ります。また、E_n の 7-brane 配位は

$$\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^2 = \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{X}_{[0,1]}\mathbf{C}^2 = \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{A}^2\mathbf{X}_{[0,1]} = \mathbf{A}^n\mathbf{X}_{[3,-1]}\mathbf{X}_{[0,1]} \overset{K_A^{-1}}{\sim} \mathbf{A}^n\mathbf{X}_{[2,-1]}\mathbf{C} \quad (26)$$

と変形されますから、$\mathbf{X}_{[2,-1]}\mathbf{C}$ から E_0 が得られます。E_0 は対称性を持ちません。

上記の変形は $n=1$ では成り立ちませんから、$\mathbf{E}_1 = \mathbf{B}\mathbf{C}^2$ と $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{X}_{[2,-1]}\mathbf{C}$ が等しいことは示されていません。実際、$\mathbf{E}_1$ では 7-brane の電荷を $z_i (i=1,2,3)$ とすると、切断の取り方を変えても $z_i \times z_j$ は偶数にしかなりませんから、$\tilde{\mathbf{E}}_1$ には等しくありません。この違いは、D3-brane 探針上ではスペクトラムの違いとして観測されます[27] 。モノドロミーと brane の枚数が同じであっても、異なる理論を与える場合があるわけです。数学的には、特異点の次元を 1 上げて E_2 になるような del Pezzos 面が二種類あることに対応しています。

この節での結果をまとめると表 2 のようになります。

ここで、それぞれの系列の 7-brane 配位は $A_n : \mathbf{A}^{n+1}$、$D_n : \mathbf{A}^n\mathbf{B}\mathbf{C}$、$E_n : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^2$、$H_n : \mathbf{A}^{n+1}\mathbf{C}$ で与えられます。

4 対称性と表現

前章では異なる物理を与える 7-brane 配位を分類し、表 2 を得ました。表には、各配位に対して現れると推察される対称性が書いてあります。馴染みのある結果は、$\mathbf{A}^{n+1}$ とい

[27] $\mathbf{E}_1$ を背景場としてとった場合、D3-brane 上に現れる粒子の電荷には $p+q=0(\mathrm{mod}2)$ という制限がつきますが、$\tilde{E}_1$ にはこのような制限はつきません。

表 2: $\mathrm{Tr}K$ の値による 7-brane 配位と対称性の分類

$\mathrm{Tr}K$	H 系列	E 系列	
$\mathrm{Tr}K \leq -8$	$H_n,\ n \geq 9$		
$\mathrm{Tr}K = -7$	$H_8\ (SU(9))$	E_0(対称性無し)	
$\mathrm{Tr}K = -6$	$H_7\ (SU(8))$	$E_1\ (SU(2)) \neq \tilde{E}_1\ (U(1))$	
$\mathrm{Tr}K = -5$	$H_6\ (SU(7))$	$E_2\ (SU(2) \times U(1))$	
$\mathrm{Tr}K = -4$	$H_5\ (SU(6))$	$E_3\ (SU(3) \times SU(2))$	
$\mathrm{Tr}K = -3$	$H_4 = E_4\ (SU(5))$		
$\mathrm{Tr}K = -2$	D_0(無し),D_1,D_2, $D_3 = H_3$,D_4,$D_5 = E_5$,$\cdots$		D 系列
$\mathrm{Tr}K = -1$	$H_2\ (SU(3))$	E_6	
$\mathrm{Tr}K = 0$	$H_1\ (SU(2))$	E_7	
$\mathrm{Tr}K = 1$	H_0 (無し)	E_8	
$\mathrm{Tr}K = 2$	$\cdots$,$\hat{E}_8 = E_9$,$\hat{E}_9$, A_0 (無し),A_1,A_2, $\cdots$		A 系列
$\mathrm{Tr}K \geq 3$		$E_n,\ n \geq 10$	

う brane 配位の下で A_n の対称性が現れるというものでしょう。これは、開弦を群の生成子に対応付けることで説明されています。この説明を任意の brane 配位の場合に拡張して、対称性を理解するのがこの章の目標です[28] 。

4.1 接合を持つ弦

基本弦 ($(1,0)$ 弦) は、D1-brane ($(0,1)$ 弦) に端点を持つことができます (図 10a)。しかし電荷の保存が成り立つことを要請すると、図 10b のように $(1,0),(0,1)$ 弦と $(1,1)$ 弦が一点で交わっているべきです。これが Schwartz によって導入された弦の接合 (string junction) です [7]。一般には $\sum_{i=1}^{3}(p_i,q_i) = (0,0)$ を満たす 3 本の弦が一点に流れ込んでいるようなものが考えられます。

接合を持つ弦は、IIB 理論において開弦と同じ役割を果します。理由は次のようなものです。$[p,q]$7-brane の切断を (r,s) 弦が横切ったとします (図 11a)。このとき弦の電荷は、モノドロミーにより切断の前後で

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \to K_{[p,q]} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+pq & -p^2 \\ q^2 & 1-pq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + (qr-ps) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{27}$$

と変換されます。ここで、(r,s) 弦を上方に動かして $[p,q]$-brane を横切らせた場合を考

[28] この章の内容は [2][3] に詳しく書かれています。

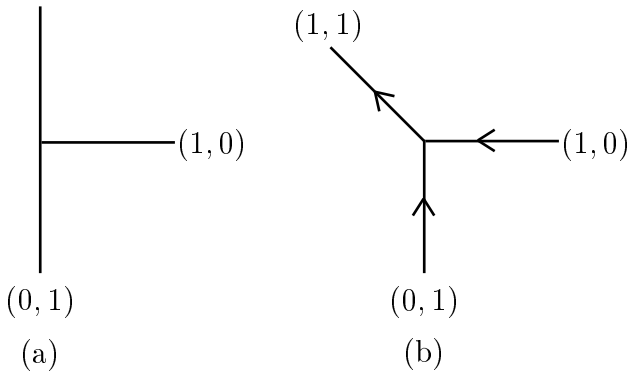

図 10: (a)D1-brane を端点に持つ基本弦 ; (b) 接合を持つ弦

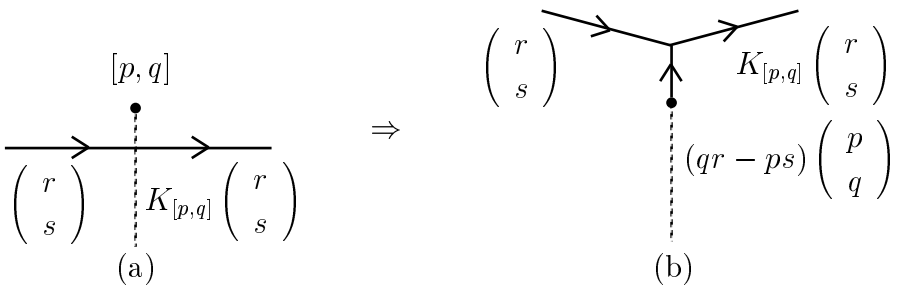

図 11: 開弦と弦の接合 (Hanany-Witten 効果)

えてみて下さい (図 11b)。左右にのびた弦の電荷は (27) 式の分だけ異なりますから、電荷が保存しているためには $[p,q]$7-brane から $(qr-ps)$ 本の (p,q) 弦が出てくる必要があります (Hanany-Witten 効果 [19])。このように、7-brane の背景がある IIB 型弦理論において開弦を考えると自然に接合を持つ弦も出てくるのです。

では、一般の 7-brane 配位の下にはどのような開弦や接合が存在するでしょうか。この講義では、無限遠にのびる弦が高々一本であるような接合のうち、BPS 条件を満たすもののみを考えることにします[29] 。単純には、各 7-brane から何本か弦が出て底空間上に軌跡を描き、最終的に一本にまとまるような接合が考えられます。この中には Hanany-Witten 効果のような連続変形で互いに移り変わる接合が含まれていますが、その中で BPS 状態でありうるのは質量最小のものだけです。そこで、連続変形で移り変わる接合は同一視し、一つの代表元で表すことにします。ある接合の代表元としては、弦の一部が切断を横切っている場合は Hanany-Witten 効果により 7-brane からの弦と接合を作り、切断を横切る弦が全くない形に変形したものをとります。これを正準表現 (canonical representation) と呼びます。正準表現は、左から μ 番目の 7-brane から出る開弦 $\mathbf{s}_\mu$ の本数 Q^μ によって分

[29] これらは、探針となる D3-brane を一枚とし、その上に実現される理論の BPS 状態や大域的対称性を調べる場合に考慮すべきものです。

類されます。この Q^μ を不変電荷と呼び、不変電荷で指定される接合 $\mathbf{J}$ を

$$\mathbf{J} = \sum_\mu Q^\mu \mathbf{s}_\mu \tag{28}$$

と表すことにします。不変電荷は整数ですから、$\mathbf{J}$ の集合は 7-brane の枚数の次元を持った格子をなします。これを接合格子と呼びます。

接合格子に計量を入れると、二つの接合 $\mathbf{J}, \mathbf{J}'$ に対して双線形形式 $(\mathbf{J}, \mathbf{J}')$ が定義されます。$\mathbf{J}$ は F 理論でみると K3 上の 2 サイクル J に相当しますから、これともう一つの 2 サイクル J' の双線形形式としては交叉数 $\#(J \cdot J')$ を取るのが自然です。そこで、

$$(\mathbf{J}, \mathbf{J}') = \#(J \cdot J') \tag{29}$$

となるように計量 $S_{\mu\nu} = (\mathbf{s}_\mu, \mathbf{s}_\nu)$ を定義します。2 サイクルの交叉数は $\#(J \cdot J') = \#(J' \cdot J)$ を満たしますから、$S_{\mu\nu}$ は明らかに対称です。

この方針に従って、7-brane 配位 $\mathbf{X}_{[p_1,q_1]}\mathbf{X}_{[p_2,q_2]}\cdots\mathbf{X}_{[p_n,q_n]}$ に対する接合格子の計量を求めてみましょう。まず BPS 条件を満たす 2 サイクルは正則であることが分かっています [20]。更に数学の知識として、種数 g で b 個の境界を持つ正則な 2 サイクル J の自己交叉数は

$$\#(J \cdot J) = 2g - 2 + b \tag{30}$$

で与えられることが知られています。μ 番目の 7-brane からのびる開弦 $\mathbf{s}_\mu$ は S^1 を境界に持つ曲面 (種数 0、境界の数 1 の曲面) に対応しますから、(30) 式より自己交叉数は

$$(\mathbf{s}_\mu, \mathbf{s}_\mu) = -1$$

です。また、$\mathbf{J} = \mathbf{s}_\mu + \mathbf{s}_\nu$ $(\mu < \nu)$ の自己交叉数は図 12 のように少しずらした場合の交叉の数を数えると、二つの 7-brane からの寄与 $2 \times (-1)$ に加えて (p_μ, q_μ) 弦と (p_ν, q_ν) 弦の交わりからくる寄与 $(p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu)$ [30] を合わせて

$$\begin{aligned}(\mathbf{J}, \mathbf{J}) &= -2 + 2(\mathbf{s}_\mu, \mathbf{s}_\nu) \\ &= -2 + \begin{vmatrix} p_\mu & p_\nu \\ q_\mu & q_\nu \end{vmatrix}\end{aligned}$$

となります。従って、

$$(\mathbf{s}_\mu, \mathbf{s}_\nu) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_\mu & p_\nu \\ q_\mu & q_\nu \end{vmatrix}$$

[30] 底空間上 $\vec{k}$ 方向にのびた (p, q) 弦に対応する 2 サイクルは、楕円曲線上の基底 1 サイクルを α、β とおいて $k(p\alpha + q\beta)$ で表されます。k は $\vec{k}$ に対応する底空間上の 1 サイクルです。$(\alpha, \beta) = -(\beta, \alpha) = 1$, $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 0$ ととり、$\vec{k}$ と $\vec{k}'$ が時計回りに交わっているとき $(k, k') = 1$、逆のとき $(k, k') = -1$ とします。この規則に従うと、図 12 の二つの弦の交わる点からの寄与は $p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu$ になります。

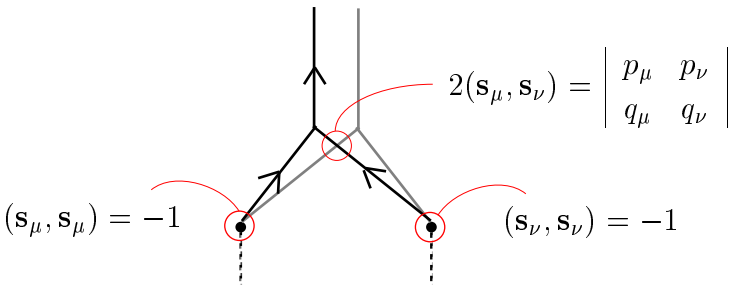

図 12: 弦の接合の自己交叉数

です。双線形形式は、こうして求められた計量と $\mathbf{J}, \mathbf{J}'$ の不変電荷 $Q^\mu(\mathbf{J}), Q^\mu(\mathbf{J}')$ を用いて

$$(\mathbf{J}, \mathbf{J}') = \sum_{\mu,\nu} Q^\mu(\mathbf{J}) S_{\mu\nu} Q^\nu(\mathbf{J}')$$

で与えられます。

4.2 根と弦の接合

7-brane の間を結ぶ開弦は球面に対応しますから、自己交叉数は -2 です。そこで A_n 対称性が現れる場合の理解を拡張し、対称性の生成子は自己交叉数が -2 で無限遠での電荷が 0 の接合を持つ弦であるとしましょう。

まず $\mathbf{A}_n$ の 7-brane 配位について、接合と代数の関係を確認します。7-brane 配位は $n+1$ 枚の A-brane ですから、計量は $S_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$ です。従って、Q^μ $(\mu = 1, 2, \ldots, n+1)$ で定まる接合 $\mathbf{J}$ の自己交叉数は

$$(\mathbf{J}, \mathbf{J}) = -\sum_{\mu=1}^{n+1} (Q^\mu)^2$$

となります。また、無限遠での電荷が 0 であるには $\sum_\mu Q^\mu = 0$ でなければなりません。この二つの条件を満たす接合は

$$\pm(\mathbf{s}_\mu - \mathbf{s}_\nu), \quad 1 \le \mu < \nu \le n+1$$

と求められます。これらは二つの異る A-brane 間をつないでいる開弦であり、確かに既知の根に対応しています。

更に、Lie 代数では群 G の単純根 $\vec{\alpha}_i$ から Cartan 行列が $A_{ij}(G) = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j$ のように与えられました。そこで単純根に対応する接合を

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ととり Lie 代数の内積 $\cdot$ を交叉数に置き換えて計算してみると、Lie 代数での内積の (-1) 倍の結果

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = -A_{ij}(A_n)$$

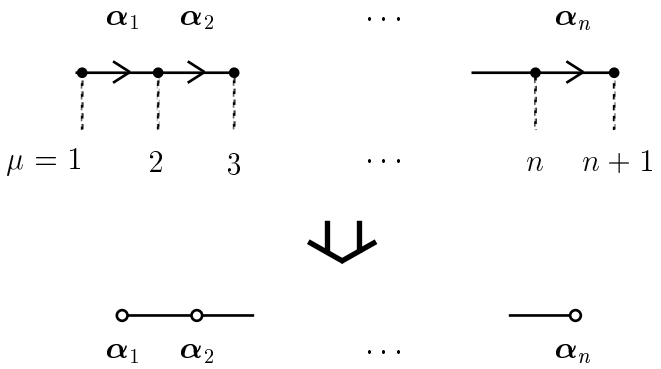

図 13: A_n の根と接合

が得られます。単純根を白丸で表し、交叉している根の間を線でつなぐと Dynkin 図になります (図 13)。

以上の計算を E_6 の場合に繰り返してみます。7-brane の配位は $\mathbf{A}^5\mathbf{BC}^2$ で、(25) 式により $\mathbf{A}^6\mathbf{X}_{[2,-1]}\mathbf{C}$ と等価でした。後者の配位に対する不変電荷 $Q^\mu(\mu=1,2,\ldots,8)$ の接合の自己交叉数は

$$(\mathbf{J},\mathbf{J}) = -\sum_{\mu=1}^{8}(Q^\mu)^2 - (Q^7-Q^8)\sum_{\mu=1}^{6}Q^\mu + 3Q^7Q^8$$

であり、無限遠での電荷が 0 である条件は

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{6}Q^\mu + 2Q^7 + Q^8 &= 0,\\ -Q^7+Q^8 &= 0\end{aligned}$$

となります。これを解くと、根に対応する 72 個の解

$$\begin{aligned}\pm(\mathbf{s}_\mu-\mathbf{s}_\nu), &\qquad 1\le\mu<\nu\le 6, &&(\text{ 30 個 }),\\ \pm(\mathbf{s}_\mu+\mathbf{s}_\nu+\mathbf{s}_\rho-\mathbf{s}_7-\mathbf{s}_8), &\qquad 1\le\mu<\nu<\rho\le 6, &&(\text{ 40 個 }),\\ \pm(\sum_{\mu=1}^{6}\mathbf{s}_\mu-2\mathbf{s}_7-2\mathbf{s}_8) & &&(\text{ 2 個 })\end{aligned}$$

が得られます。単純根に対応する接合として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_i &= \mathbf{s}_i-\mathbf{s}_{i+1} \qquad 1\le i\le 5\\ \boldsymbol{\alpha}_6 &= \mathbf{s}_4+\mathbf{s}_5+\mathbf{s}_6-\mathbf{s}_7-\mathbf{s}_8\end{aligned}$$

を取ると、$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j) = -A_{ij}(E_6)$ であることが確認できます。$\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_5$ は隣り合う A-brane 間をつなぐ開弦であり、Dynkin 図でいうと A_n と同じく一本線でつながれた 5 つの根に相当します (図 14)。$\boldsymbol{\alpha}_6$ は $\boldsymbol{\alpha}_3$ とのみ交叉しているので、Dynkin 図では上に一個飛

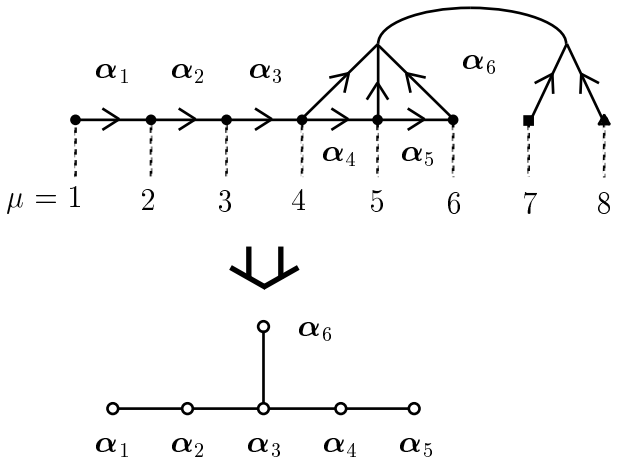

図 14: E_6 の根と接合

び出した根に当たります。以上のように、$\mathbf{A}^5\mathbf{B}\mathbf{C}^2$ の 7-brane 配位の下では $(\mathbf{J},\mathbf{J}) = -2$ で無限遠での電荷が 0 の接合によって E_6 の代数が実現していることが分かりました。

A_n や E_6 以外の場合についても、代数を求めるためにやるべきことは同じです。自己交叉数 -2 の接合を求め、単純根に対応する接合を選び、そこから Cartan 行列を導く、それだけです。ADE 型の Lie 代数のルートは $\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j = 2$ ですから、少なくとも ADE 型の Lie 代数についてはこれで理解できます。

接合による代数の構成は、調べれば調べるほど Cartan 行列から Lie 代数を構成する方法と非常に良く対応していることが分かります。一例を挙げましょう。単純根から全ての根を導くことを考えます。単純根 $\boldsymbol{\alpha}_i$ の一次接合 $\boldsymbol{\alpha}' = n\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\alpha}_j$ が根 (BPS 状態) であるためには、式 (30) より

$$(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}') = -2n^2 + 2n(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) - 2 \geq -2$$

を満たさなくてはなりません[31] 。つまり、$n \geq 1 - A_{ij}$ のとき $\boldsymbol{\alpha}'$ は根に対応しません。このことは Lie 代数側でも見ることができて、Serre の関係

$$(\mathrm{ad}E_{\vec{\alpha}_i})^{1-A_{ij}} E_{\vec{\alpha}_j} = E_{(1-A_{ij})\vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_j} = 0$$

より $(1 - A_{ij})\vec{\alpha}_i + \vec{\alpha}_j$ が根ではないことが分かります。ここで、$E_{\vec{\alpha}_i}$ は随伴表現における根 $\vec{\alpha}_i$ 対応する元で、また、

$$(\mathrm{ad}A)^n\ B = \underbrace{[A, [A, [\cdots [A}_{n\text{ 回}}, B]] \cdots]$$

です。

[31] いまの場合、境界の数は 0 で種数 g は 0 以上なので、正則な 2 サイクルの自己交叉数は -2 以上。

(質問) 切断の取り方を変えても、ここでの議論は変わらないのでしょうか。

(回答) 多分そうだと思いますが。証明はしていません。

4.3 重みと弦の接合

7-brane 配位に対して現れる Lie 代数が前節の方法で分かったとして、次に知りたいことは、与えられた接合が Lie 代数のどのような表現に属しているかということです。

Lie 代数の立場からは、単純根 $\vec{\alpha}_i$ が求められればその双対として基本の重み $\vec{\omega}^i$ が定義できます。つまり、Lie 代数での内積を $\cdot$ で表すことにすると、

$$\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\omega}^j = \delta_i^j$$

となるような $\vec{\omega}^i$ が基本の重みです。任意の重み $\vec{\lambda}$ は、Dynkin 指数を a_i とおくと

$$\vec{\lambda} = \sum_i a_i \vec{\omega}^i$$

で与えられますから、Dynkin 指数は

$$a_i = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\lambda}$$

と求められます。

接合の言葉で考えると、内積は交叉数にあたります。ただし、単純根に対応する接合の交叉数から出てくるのは Cartan 行列に -1 をかけたものでしたから、両者の内積は -1 倍だけ異ります。したがって基本の重みに対応する接合 $\boldsymbol{\omega}^i$ は

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\omega}^j) = -\delta_i^j \tag{31}$$

で与えられますし、ある接合 $\mathbf{J}$ に対応する Dynkin 指数は

$$a_i(\mathbf{J}) = -(\boldsymbol{\alpha}_i, \mathbf{J})$$

となります[32] 。

しかし、任意の接合を表すには $\boldsymbol{\omega}^i$ だけでは足りません。単純根に対応する接合を考えたとき、無限遠での電荷 (p, q) が 0 であることを要請しています。この条件により、単純根の数 (群の階数) は接合格子の次元より 2 下がってしまっています[33] 。無限遠での電荷分を表すために、あと二つの接合が必要です。これを $\boldsymbol{\omega}^p, \boldsymbol{\omega}^q$ と書くと、任意の接合は

$$\mathbf{J} = \sum_i a_i \boldsymbol{\omega}^i + p\boldsymbol{\omega}^p + q\boldsymbol{\omega}^q$$

[32] 代数中に $U(1)$ 因子がある場合、(31) 式で求められる $\boldsymbol{\omega}^i$ に加えて、単位 $U(1)$ 電荷を持つ無限遠での (p, q) 電荷が 0 の接合 $\boldsymbol{\omega}^u$ を作り重み空間を拡張します。拡張された重み空間の双対から新たな根 $\boldsymbol{\alpha}_u$ が求められ、$a_u(\mathbf{J}) = -(\boldsymbol{\alpha}_u, \mathbf{J})$ の形で $\mathbf{J}$ の $U(1)$ が与えられます。

[33] A_n の場合は常に $q = 0$ なので、単純根の数 (群の階数) は接合格子の次元より 1 だけ下がります。

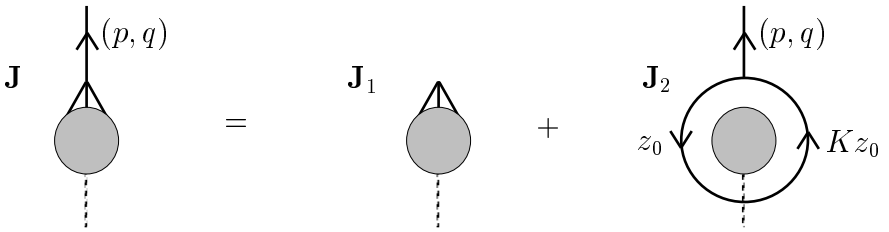

図 15: 接合 J の分割

と表されます。なお、J の表現は $\boldsymbol{\omega}^i$ で決ってしまっているのですから、$\boldsymbol{\omega}^p, \boldsymbol{\omega}^q$ はゲージ群の一重項でなくてはいけません。よって、

$$(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\omega}^p) = 0, \quad (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\omega}^q) = 0 \tag{32}$$

を満たすようにとります。また、無限遠での電荷はそれぞれ $(1,0), (0,1)$ を持つように決めます[34] 。

以上のことから、一般の接合は $\sum a_i \boldsymbol{\omega}^i$ で表される無限遠での電荷を持たない部分 $\mathbf{J}_1$ と、7-brane に端点を持たない形に変形できる無限遠での電荷 (p,q) を持った部分 $\mathbf{J}_2 = p\boldsymbol{\omega}^p + q\boldsymbol{\omega}^q$ の二つに分けられることが分かります (図 15)。図の $\mathbf{J}_2$ について、切断の前までの開弦の電荷を z_0、切断でのモノドロミーを K、$z = (p,q)^T$ と置くと、

$$z = (K - \mathbf{1})z_0 \tag{33}$$

を満たします。

では、J の自己交叉数を考えましょう。ここで、式 (31)、(32) より、$(\boldsymbol{\omega}^i, \mathbf{J}_2) = 0$ となり、$\boldsymbol{\omega}^i$ と $\mathbf{J}_2$ は交叉しません。また $\mathbf{J}_1 = \sum a_i \boldsymbol{\omega}^i$ なので J の自己交叉数は

$$(\mathbf{J}, \mathbf{J}) = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1) + (\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_2)$$

となります。ここで、$(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1)$ は重み $\vec{\lambda}$ を用いて $-\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}$ と書けますし、$(\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_2)$ は無限遠での電荷 (p,q) とモノドロミー K によって定まる関数 $f_K(p,q)$ になります。

$f_K(p,q)$ は図 15 から評価すると

$$f_K(p,q) = z \times z_0 = -z^T S(K - \mathbf{1})^{-1} z$$

です。二つ目の等号では式 (33) を使いました。更に $t \equiv \mathrm{Tr}K$ とし、$\det(K - \mathbf{1}) = 2 - t$、$t\mathbf{1} = K + K^{-1}$、$(K - \mathbf{1})^{-1} = \frac{1}{\det(K-\mathbf{1})}(K^{-1} - \mathbf{1})$ 及び $z^t S z = 0$ を用いると、

$$f_K(p,q) = \frac{1}{2-t} z^t S K z \equiv \frac{1}{2-t} Q_K(p,q) \tag{34}$$

[34] J の不変電荷は整数ですが、$\boldsymbol{\omega}^i, \boldsymbol{\omega}^p, \boldsymbol{\omega}^q$ 各々の不変電荷は必ずしも整数でないことに注意。

となります。ここで

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$Q_K(p,q) = -cp^2 + (a-d)pq + bq^2$$

と求まります。$Q_K(p,q)$ の判別式は $t^2 - 4$ です。

数学的には、このような二次形式 Q と t によって $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換で結び付くモノドロミーを分類できることが知られています。実際、$g \in SL(2,\mathbf{Z})$ に対して

$$K' = gKg^{-1} \Leftrightarrow Q_{K'}(z) = Q_K(g^{-1}z)$$

を示すことができます。$\Rightarrow$ は計算してみれば分かるので、$\Leftarrow$ を証明しておきましょう。K と K' は同じトレースを持つ $SL(2,\mathbf{Z})$ 行列であるとします。任意の z に対して $Q_{K'}(z) = Q_K(g^{-1}z)$ が成り立つためには

$$z^T S K' z = z^T g^{-T} S K g^{-1} z$$

でなくてはなりませんから、ある数 m を使って

$$SK' + mS = SgKg^{-1}$$

と書けるはずです。ここで両辺の左から S を作用させてトレースをとると、$m = 0$ であることがわかります。

今までに得た解釈を使うと、様々な対称性が出てくる場合に、探針として入れた D3-brane 上の 4 次元理論にどのような BPS 状態がありうるか、そしてそれはどんな表現に属しているかを調べることができます。D_0 の背景場のもとでは D3-brane 探針上に $N = 2$ の $SU(2)$SYM が実現しますが、この場合については Nekrasov の講演を参考にして下さい。

5 対称性の拡大

5.1 一般論

前章では 7-brane 配位が与えられたときに現れる代数を評価する方法を導きました。しかし、これを実行するのは結構面倒です。そこで、3 章で調べた既知の 7-brane 配位 **G**(表 3) に新たな $[p,q]$7-brane を加えたとき、全体としてどのようなゲージ群が得られるのかを考えてみましょう[35] 。

[35] この節の内容は [3] に詳しく書かれています。

$\mathcal{G}$	7-brane 配位 $\mathbf{G}$	K	$f_K(p,q)$
A_N	$\mathbf{A_N} = \mathbf{A}^{N+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & -N-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-\frac{1}{N+1}\,p^2$
	$\mathbf{H_N} = \mathbf{A}^{N+1}\mathbf{C}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3-2N \\ 1 & -N-1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{N+1}\{-p^2+(N+3)pq-(3+2N)q^2\}$
D_N	$\mathbf{D_N} = \mathbf{A}^{N}\mathbf{BC}$	$\begin{pmatrix} -1 & N-4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{N-4}{4}\,q^2$
E_N	$\mathbf{E_N} = \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{BCC}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2N-9 \\ -1 & N-5 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{9-N}\{p^2+(3-N)pq+(2N-9)q^2\}$
	$\tilde{\mathbf{E}}_\mathbf{N} = \mathbf{A}^{N}\mathbf{X}_{[2,-1]}\mathbf{C}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3N-11 \\ -1 & N-4 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{9-N}\{p^2+(1-N)pq+(3N-11)q^2\}$

表 3: 7-brane 配位と $f_K(p,q)$

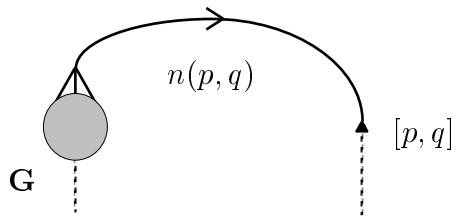

図 16: 新たに加わる根

新たに加わる根は、$\mathbf{G}$ から出た $z=(p,q)$ の電荷を持った弦が $\mathbf{X}_z$ で終わるようなものに対応します (図 16)。z 弦の本数を n とすると、このような接合 $\mathbf{J}$ は

$$\mathbf{J} = \sum a_i \boldsymbol{\omega}^i + n(p\boldsymbol{\omega}^p + q\boldsymbol{\omega}^q) - n\mathbf{z}$$

と表されます。自己交叉数は

$$(\mathbf{J},\mathbf{J}) = -\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda} + n^2\,[f_K(z)-1] \tag{35}$$

です。最初の項と次の項は $\mathbf{G}$ からくる寄与で、K は $\mathbf{G}$ のモノドロミーです。最後の $-n^2$ は z 弦の $\mathbf{X}_z$ 側の端点から来る寄与です。$\mathbf{J}$ の BPS 条件は $(\mathbf{J},\mathbf{J}) \geq -2$ ですから、$f_k(z)-1$ が負であれば解の個数は有限であり、正の場合は無限個の解が出てきて無限次元の代数が現れることが分かります。

では、$f_K(z)$ の値ごとに代数の拡大の仕方を調べてみましょう。$f_K(z) < -1$ の場合、$(\mathbf{J},\mathbf{J}) < -2n^2$ なので BPS 条件を満たす解は存在しません。新たな根は現れず、$\mathbf{G}$ で実現する代数を $\mathcal{G}$ としたとき新たな代数は $\mathcal{G}\oplus u(1)$ となります。$f_K(z) = -1$ の場合は $(\mathbf{J},\mathbf{J}) = -\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda} - 2n^2$ です。BPS 条件を満たすような接合は $\vec{\lambda}=0$ かつ $n=\pm 1$ のもの

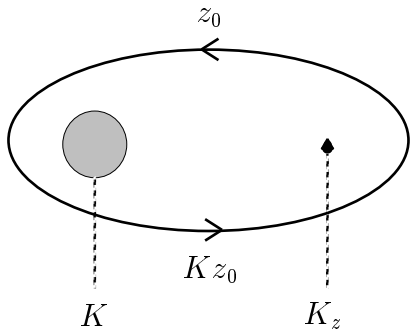

図 17: 虚根 $\boldsymbol{\delta}$ に対応する接合

だけです。したがって新たな根は $\mathcal{G}$ に対して一重項であり、$SU(2)$ 代数を表しています。従って全体の代数は $\mathcal{G} \oplus A_1$ に拡大します。$-1 < f_K(z) < 1$ の場合は c_0 を正定数として $(\mathbf{J}, \mathbf{J}) = -\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} - c_0^2 n^2$ と書けますから、解が存在するとしても有限個です。従って全体の代数は $\mathcal{G}$ より大きな有限 Lie 代数 $\mathcal{G}_{\text{fin}}$ で、c_0 と n の取り得る値から決められます。

$f_K(z) \geq 1$ では無限個の解が存在して、全体の代数は無限次元に拡大します。$f_K(z) = 1$ の場合、自己交叉数は $(\mathbf{J}, \mathbf{J}) = -\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}$ となり n に依存しませんから、$\vec{\lambda}$ として $\mathcal{G}$ の根を取れば $(\mathbf{J}, \mathbf{J}) = -2$ の解として無限個の根が得られます。もし $\mathcal{G}$ が根以外に長さ 2 の重みを持たなければ、各 n 毎に $\mathcal{G}$ の根の組が出てきます。このとき代数は $\mathcal{G}$ をアフィン化した $\hat{\mathcal{G}}$ になります。$f_K(z) > 1$ の場合は、$\tilde{c}_0$ を正定数として $(\mathbf{J}, \mathbf{J}) = -\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} + \tilde{c}_0 n^2$ となります。n が大きくなればなるほど、沢山の $\vec{\lambda}$ に対して $J^2 \geq -2$ の解が存在します。有限 Lie 代数の根は $J^2 = -2$ でしたが、この場合にはいくらでも大きな $(\mathbf{J}, \mathbf{J})$ が出てきます。数学ではこのような代数として indefinite 代数が知られています。

5.2 無限次元の対称性

この節では、$f_K(z) \geq 1$ の場合の代数を具体的に調べていきます[36] 。

前節で、$f_K(z) = 1$ の場合にはアフィン化が起こると述べました。数学の知識として、アフィン Lie 代数 $\hat{\mathcal{G}}$ の根には長さが 2 のもの以外に長さが 0 のものが含まれていることが知られています。これを虚根 $\vec{\delta}$ と呼びます。$\vec{\delta}$ は長さ 2 の単純根の線形接合で与えられ、全ての根 $\vec{\alpha}$ に対して $\vec{\delta} \cdot \vec{\alpha} = 0$ を満たします。弦の接合で虚根に対応するものは、$(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta}) = 0$ を満たすことから種数 1、境界の数が 0 ですから、底空間上のループであることが分かります。また $(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ より、このループは 7-brane 配位全体の周りを回っています (図 17)。

接合 $\boldsymbol{\delta}$ がとれるのは $f_K(z) = 1$ のときだけであることが示せます。前節に引続き、既知

[36] この節の内容は [4] に詳しく書かれています。

の brane 配位を $\mathbf{G}$ とし、そのモノドロミーを K とします。新たに加える 7-brane の電荷は z でモノドロミーは K_z です。このとき z_0 弦のループが作れるための条件は

$$K_z K z_0 = z_0 \tag{36}$$

です。ループのうち $\mathbf{X}_z$ の切断を横切る部分に注目すると、ある整数 n に対して $Kz_0 - z_0 = nz$ が成り立つことが分かります。さらに $t = \mathrm{Tr}K$ として $(K-\mathbf{1})^{-1} = (K^{-1}-\mathbf{1})/(2-t)$ が成り立つことを使うと

$$z_0 = \frac{n}{2-t}(K^{-1}-\mathbf{1})z$$

となります。これを (36) に代入すると

$$(\mathbf{1}+zz^T S)(\mathbf{1}-K)z = (K^{-1}-\mathbf{1})z$$

です。ここで (6) から $K_z = \mathbf{1}+zz^T S$ と書けることを使いました。これを $K^{-1} = t\mathbf{1}-K$ 及び $z^T Sz = 0$ を使って変形すると

$$(z^T SKz)z = (2-t)z$$

を得ます。(34) 式より、これが成り立つのは $f_K(z) = 1$ のときだけであることが分かります。

$\mathbf{G}$ に対してどのような z を選べば $f_K(z) = 1$ になるのかは、表 3 から調べてやることができます。例えば $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n, \tilde{\mathbf{E}}_n$ に対して $z = (3,1)$ がとれます。全体のモノドロミーは

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 9-N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で、このとき固有値 1 の固有ベクトル $(1,0)^T$ を持ちます。つまり、7-brane 配位全体を一周するループ δ は $(1,0)$ 弦によって作られます。E_N には根の他に長さが 2 の重みはありませんから、代数は $\hat{E}_N$ に拡大します。

以上の知識を使うと、数学的に知られた事実 $\hat{E}_8 = E_9$ を 7-brane の立場で示すことができます。$\mathbf{E}_8$ の代数は $[3,1]$7-brane を加えることでアフィン化し、$\hat{E}_8$ を与えます。一方、$\mathbf{E}_8$ に $\mathbf{A}$-brane を加えれば $\mathbf{E}_9$ になりますが、$\mathbf{E}_9$ のモノドロミーには固有ベクトル $(3,1)^T$ が取れるので、$(3,1)$ 弦のループ δ が現れてアフィン代数になっていることが分かります。$\hat{\mathbf{E}}_8$ と $\mathbf{E}_9$ は切断の取り替えと $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ による $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換で結び付きますから、確かに $\hat{E}_8 = E_9$ であることが分かります。

さて、E_8 に $\mathbf{A}$-brane と $(3,1)$-brane を加えればアフィン化した E_9 が得られます。これはどんな代数でしょうか。ループは二種類、$\mathbf{A}$-brane と $\mathbf{E}_8$ の周りを回る $(3,1)$ 弦及び $\mathbf{E}_8$ と $[3,1]$-brane の周りを回る $(1,0)$ 弦があります（図 18）。$(3,1)$ 弦は $[3,1]$-brane を飛び越

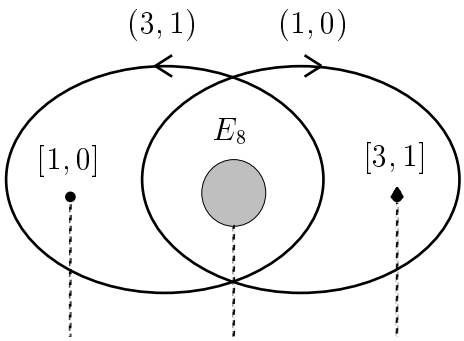

図 18: $\hat{E}_9$ のループ

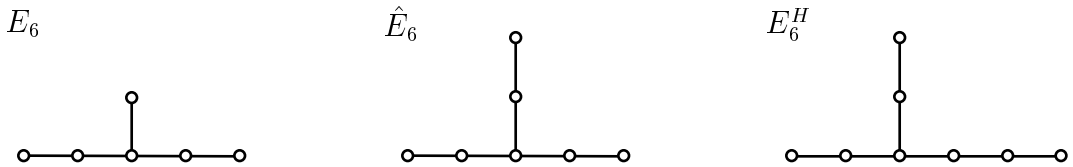

図 19: hyperbolic 代数の Dynkin 図:E_6 の場合

えて全体を一周する δ になりますし、$(1,0)$ 弦についても同じことが言えます。つまり、$\hat{E}_9$ は虚根を二つ含むループ代数です。実際 $\hat{\mathbf{E}}_9$ のモノドロミーは $\mathbf{1}$ ですから 2 つの固有ベクトルとれます。4.2 節の方法で $\hat{E}_9$ の単純根を求めると、E_8 の単純根に加えて出てくる 2 つの単純根の間の内積が正であることが分かります。Kac-Moody 代数では異なる単純根の間の内積は 0 以下ですから、$\hat{E}_9$ は Kac-Moody 代数の枠外にあります。

E_n 以外の系列について表 3 からアフィン化の可能性を調べると、まず $\mathbf{A}_n$ はアフィン化できないことが分かります。$\mathbf{H}_n, \mathbf{D}_n$ についてはいくつかの n で $f_K(z) = 1$ を満たす z が存在します。しかしこれらを詳しく調べてみると、$\mathbf{D}_5 = \mathbf{E}_5$ のように E_n の系列と等価なものであるか、あるいは $\mathbf{D}_8$ のように長さ 2 の重みが根以外に存在し、このために単にアフィン化された代数が現れるのではなく $\hat{E}_n$ が現れていることがわかります。つまり、7-brane 配位で実現できるアフィン代数は E_n 起源のものだけです。

$f_K(z) > 1$ の場合についても具体例を紹介しておきます。$\mathbf{E}_n$ に $[3,1]$7-brane を加えてアフィン化し、更にもう一枚の $[3,1]$7-brane を加えて $\mathbf{E}_n^H = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^2\mathbf{X}_{[3,1]}^2$ を考えると、$f_K(z) > 1$ になります。このとき Dynkin 図は、アフィン化した時に現れる新しい単純根に、2 枚の $[3,1]$7-brane を結ぶ開弦に相当する単純根が付け加わったものになります (図 19)。このような Dynkin 図に対応する Kac-Moody 代数は hyperbolic 代数と呼ばれています[37] 。

数学的には $E_8^H = E_{10}$ であることが知られていて、これは brane の立場からも示すことができます。なお、$\mathbf{E}_{10}$ は $\mathbf{E}_8$ に二枚の $\mathbf{A}$-brane を加えたものです。$\hat{\mathbf{E}}_9$ に似て $\mathbf{E}_8$ と各 $\mathbf{A}$

[37] 但し $n > 8$ ではアフィン化の時点で Kac-Moody 代数から外れ、hyperbolic 代数とは言いません。

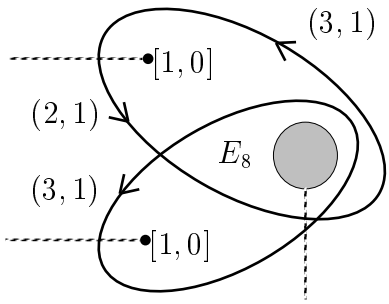

図 20: E_{10} のループ

を回る 2 個のループが存在しますが、これらは交叉していて全体を回るループにはなりません (図 20)。

以上、この節までに出てきた brane 配位を、$|\mathrm{Tr}K| = 7$ まで表にまとめておきます。表中の $H(t)$ は $t = \mathrm{Tr}K$ の関数で、数学的に調べられた $SL(2, \mathbf{Z})$ で同一視出来ないモノドロミーの数を与えています。

5.3 K3 全体の対称性

この講義の最後に $K3$ 全体の代数を考察しましょう。これは非常に大きな代数で、理論のスペクトラムを支配していると考えられます。

$K3$ 全体には 24 枚の 7-brane が含まれおり、$(\mathbf{D}_4)^4$ に等しいことが知られています [12]。$(\mathbf{D}_4)^2 = \hat{E}_9$ を示すことができるので、まずは $(\hat{\mathbf{E}}_9)^2$ で $K3$ 全体の代数を表せるかどうか考えてみます。$\hat{E}_9$ にはループが存在しましたが、K3 全体の大域的構造を考えると二つの $\hat{E}_9$ の代数の間で同一視されるべきです (図 21)。したがってループ代数のレベルを $k = \delta \cdot \lambda$ とすると、全体の代数は $\hat{E}_9 \oplus \hat{E}_9$ を $k_1 + \tilde{k}_1$、$k_2 + \tilde{k}_2$ で割ったものになります。この代数の重さは 18 個の整数で指定されます。一方 K3 の代数の階数は、24 次元の接合格子上で電荷の保存則から 2 つ条件がつき、さらに全体のモノドロミーが **1** なので 2 つのループがとれて大域的構造を考慮すると消えるので、最大で $24 - 2 - 2 = 20$ です。したがって K3 全体を記述するには、$\hat{E}_9 \oplus \hat{E}_9/\sim$ では不十分であることが分かります。

そこで、24 枚の brane を別の形に並べてやります。例えば、

$$K3 = (\mathbf{A}^8\mathbf{BCBC})^2 = (\mathbf{AE}_8\mathbf{X}_{[3,1]})^2 = (\mathbf{AE}_8\mathbf{A})(\mathbf{E}_8\mathbf{X}_{[3,1]}\mathbf{X}_{[3,1]})$$

とできます。最初の $\mathbf{AE}_8\mathbf{A}$ の部分は $\mathbf{E}_{10}$ に相当します。残りの部分は何になるでしょうか。K3 全体のモノドロミーは **1** ですから、残り部分のモノドロミーは $\mathbf{E}_{10}$ のモノドロミーの逆行列になります。トレースは $\mathbf{E}_{10}$ と同じく 3 です。$\mathrm{Tr}K = 3$ の brane 配位は $\mathbf{E}_{10}$ しかないことを知っていますから、残りの部分からもう一個の $\mathbf{E}_{10}$ が出てくることが分かりま

K-type	TrK	det $A(\mathcal{G})$	7-brane 配位 $\mathbf{G}$	K	$H(t)$
hyp.	-7	9	$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{0}}\,,\mathbf{H}_{\mathbf{8}}$	$\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	2
	-6	(2,8),8	$(\mathbf{E}_{\mathbf{1}},\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{1}})\,,\mathbf{H}_{\mathbf{7}}$	$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	2
	-5	7	$\mathbf{E}_{\mathbf{2}}\,,\mathbf{H}_{\mathbf{6}}$	$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	2
	-4	6	$\mathbf{E}_{\mathbf{3}}\,,\mathbf{H}_{\mathbf{5}}$	$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	2
	-3	5	$\mathbf{E}_{\mathbf{4}}=\mathbf{H}_{\mathbf{4}}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	1
par.	-2	4	$\mathbf{D}_{\mathbf{N+4\geq 0}}$ $(\mathbf{E}_{\mathbf{5}}=\mathbf{D}_{\mathbf{5}}\,,\mathbf{H}_{\mathbf{3}}=\mathbf{D}_{\mathbf{3}})$	$\begin{pmatrix} -1 & N \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	∞
ell.	-1	3	$\mathbf{E}_{\mathbf{6}}\,,\mathbf{H}_{\mathbf{2}}$	$-(ST)^{\mp 1}$	2
	0	2	$\mathbf{E}_{\mathbf{7}}\,,\mathbf{H}_{\mathbf{1}}$	$S^{\pm 1}$	2
	1	1	$\mathbf{E}_{\mathbf{8}}\,,\mathbf{H}_{\mathbf{0}}$	$(ST)^{\pm 1}$	2
par.	2	N	$\mathbf{A}_{\mathbf{N-1\geq 0}}$	$\begin{pmatrix} 1 & -N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	∞
		0	$\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{N+9\geq 0}},\hat{\tilde{\mathbf{E}}}_{\mathbf{1}},(\mathbf{E}_{\mathbf{9}}=\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{8}})$		
hyp.	3	-1	$\mathbf{E}_{\mathbf{10}}=\mathbf{E}_{\mathbf{8}}^{\mathbf{H}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	1
	4	-2	$\mathbf{E}_{\mathbf{11}}\,,\mathbf{E}_{\mathbf{7}}^{\mathbf{H}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	2
	5	-3	$\mathbf{E}_{\mathbf{12}}\,,\mathbf{E}_{\mathbf{6}}^{\mathbf{H}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	2
	6	-4	$\mathbf{E}_{\mathbf{13}}\,,\mathbf{E}_{\mathbf{5}}^{\mathbf{H}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	2
	7	-5	$\mathbf{E}_{\mathbf{14}}\,,\mathbf{E}_{\mathbf{4}}^{\mathbf{H}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}^{\pm 1}$	2

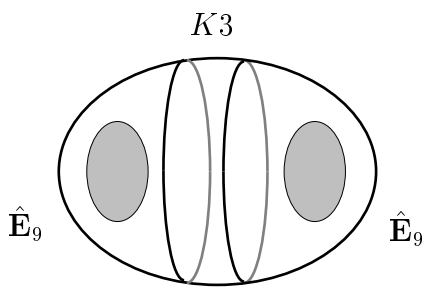

図 21: $(\hat{\mathbf{E}}_9)^2$

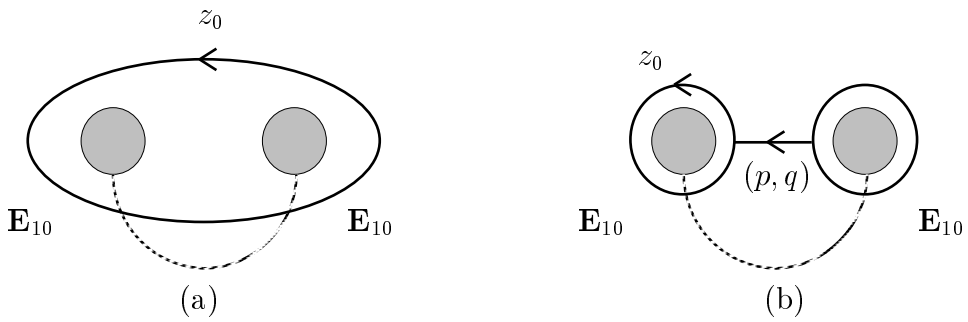

図 22: $(\mathbf{E}_{10})^2$

す。$\mathbf{E}_{10}$ の接合格子の次元は電荷の保存則から条件がついて $12-2=10$ ですから、2 つ合わせて 20 です。$\mathbf{E}_{10}$ は $\hat{\mathbf{E}}_9$ と違って全体を回るループがありませんから、K3 の大域的構造を考えても階数が減ることはありません。したがって、K3 の代数の Dynkin 指数と $E_{10}\oplus E_{10}$ の Dynkin 指数の間には一対一対応があり、$(\mathbf{E}_{10})^2$ という配位の下で現れる接合によって理論のスペクトラムを調べることができると考えられます。

$(\mathbf{E}_{10})^2$ という配位では面白いことに、一方の $\mathbf{E}_{10}$ の BPS 接合は局在していて他方の $\mathbf{E}_{10}$ とはつながりません。この配位では、図 22a のような自明なループを変形し、2 つの $\mathbf{E}_{10}$ の間に任意の (p,q) が飛んだ図 22b のような接合を得ることができるので、$\mathbf{E}_{10}$ の間の (p,q) 弦は消されてしまうのです。しかし、これは各 $\mathbf{E}_{10}$ においては BPS 条件を満たさず、K3 全体を考えて初めて BPS 条件を満たすような接合まで排除するものではありません。

（質問）K3 全体の代数は $E_{10}\oplus E_{10}$ なんですか？

（回答）いや、分かりません。分かったのは、K3 の代数の Cartan 行列には $E_{10}\oplus E_{10}$ が含まれるということだけです。非対角成分として何が出てくるかは評価していません。

（質問）非対角成分も、BPS 条件を満たす接合を書き出せば分かるのではないですか？

（回答）$J^2\geq -2$ の条件を満たす全ての根を書き出すのは困難です。もし書き出せれば、K3 の代数がどうなっているかということも分かるでしょう。または、弦の双対変換で結び付いたヘテロの弦理論からも BPS スペクトラムが評価できますから、これを調べれば K3 の代数が得られるかもしれません。確信は持てませんが。

Appendix A　楕円曲線の退化の分類

この Appendix では楕円曲線の退化の分類を与えておきます。まず、楕円曲線は

$$y^2 = x^3 + f(z)x + g(z) \tag{A.1}$$

の形で表わします。ここで、x, y, z は重み付きの複素射影空間の同次座標です。また、$z = 0$ で楕円曲線が退化するものとします。このとき、楕円曲線の退化のしかたは f, g の z の次数と、判別式 $\Delta = 4f^3 + 27g^2$ の次数により以下のように分類されます。

$\mathrm{Tr}K$	特異型	モノドロミー K	K の固定点 τ_*	f の次数	g の次数	Δ の次数
2	-	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	基本領域内	≥ 0	≥ 0	0
2	A_{n-1}	$\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$i\infty$	0	0	n
1	H_0	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}$	≥ 1	1	2
1	E_8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}$	≥ 4	5	10
0	H_1	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	i	1	≥ 2	3
0	E_7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	i	3	≥ 5	9
-1	H_2	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}$	≥ 2	2	4
-1	E_6	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}$	≥ 3	4	8
-2	D_{n+4}	$\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$i\infty$	2 ≥ 2	≥ 3 3	$n+6$
-2	D_4	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	基本領域内	≥ 1	≥ 1	6

注１) ここであげたモノドロミーは通常の意味でのモノドロミーの逆行列になっています。

注２) Δ の次数が必要な 7-brane の最低の枚数になっています。

Appendix B　$\mathrm{Tr}K = 0, \pm 1 \pm 2$のモノドロミー

このappendixでは$\mathrm{Tr}K = 0, \pm 1, \pm 2$を満たすモノドロミーが$SL(2, \mathbf{Z})$の変換分を除いて、それぞれ、$\{S, -S\}$, $\{\pm ST, \pm (ST)^{-1}\}$, $\pm T^n$のみで与えられることを示します。

まず、$\mathrm{Tr}K = 0$のときを考えましょう。モノドロミーKを

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

とおきます。いま$\mathrm{Tr}K = 0$なので$d = -a$です。このとき、Kの固定点を与える式(10)の解は

$$\tau_* = \frac{1}{c}(a \pm i) \tag{B.2}$$

で与えられます。この解が基本領域に入っているとすると少くとも

$$\mathrm{Im}\tau_* \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\tau_* < \frac{1}{2} \tag{B.3}$$

の二つの条件を満たさなければなりません。これを満たせるのは$a = 0, c = \pm 1$のときのみです。ここで、$d = -a$, $\det K = ad - bc = 1$より$b = -c = \mp 1$です。したがって、固定点が基本領域内にある場合、$\tau_* = i$でありこのときのモノドロミーは

$$\pm S = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

ということになります。この場合、全ての固定点は$SL(2, \mathbf{Z})$変換で基本領域に移せるので式(B.4)で$SL(2, \mathbf{Z})$変換での共役類が全て尽きていることになります。

$\mathrm{Tr}K = \pm 1$の場合、固定点は

$$\tau_* = \frac{1}{c}\left(a \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \tag{B.5}$$

(符号は順不同)で与えられます。このとき、条件(B.3)を満たすためには$c = \pm 1, a = 0, \pm 1$(順不同)でなければなりません。このとき$\tau_* = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{3}}$です。ここで、$\det K = 1, \mathrm{Tr}K = \pm 1$を考え合わせると許されるモノドロミーは$\pm ST, \pm (ST)^{-1}$であることが分ります。

$\mathrm{Tr}K = \pm 2$の場合、基本領域内の固定点は発散していることが分っています。実際に、式(4)において無限大が固定点であるためには$c = 0$が必要になります。ここで、$\det K = 1$であることを考えると、$a = d = \pm 1$でbは任意であることが分ります。したがって、許されるモノドロミーの$SL(2, \mathbf{Z})$共役類は$\pm T^n$であることが分ります。

参考文献

[1] M. R. Gaberdiel and B. Zwiebach "Exceptional groups from open strings", Nucl. Phys. **B518** (1998) 151. hep-th/9709013.

[2] O. DeWolfe and B. Zwiebach, "Sting Junctions for Arbitrary Lie Algebra Representations", hep-th/9804210.

[3] O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, "Uncovering the Symmetries on [p,q] 7-branes: Beyond the Kodaira Classilicaton", hep-th/9812028.

[4] O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, "Uncovering Infinite Symmetries on [p,q] 7-branes: Kac-Moody Algebras and Beyond", hep-th/9812209.

[5] C. Vafa "Evidence for F-Theory", Nucl. Phys. **B469** (1996) 403, hep-th/9602022.

D. Morrison and C. Vafa "Compactification of F-theory on Calabi-Yau Threefolds - I,II", Nucl. Phys. **B473** (1996) 74, hep-th/9602114, Nucl. Phys. **B476** (1996) 437, hep-th/9603161.

M. Bershadsky, K. Intriligator, S. Kachru, D.R. Morrison, V. Sadov and C. Vafa, "Geometric Singularities and Enhanced Gauge Symmetries", Nucl. Phys. **B481** (1996) 215, hep-th/9605200.

[6] A. Johansen, "A Comment on BPS States in F-Theory in 8 Dimensions", Phys. Lett. **B395** (1997) 36, hep-th/9608186.

[7] O.Aharony, J. Sonnenschein, S. Yankielowicz, "Interactions of strings and D-branes form M theory", Nucl. Phys. **B474** (1996) 309, hep-th/9603009.

J.H. Schwarz, "Lectures on Superstrings and M-Theory Dualities", hep-th/9607201.

[8] O. Bergman, "Three-Pronged Strings and 1/4 BPS States in N=4 Super-Yang-Mills Theory", Nucl. Phys. **B525** (1998) 104, hep-th/9712211.

O. Bergman and A. Fayyazuddin, "String Junction and BPS states in Seiberg-Witten theory" Nucl. Phys. **B531** (1998) 108, hep-th/9802033.

O. Bergman and A. Fayyazuddin, "String Junction Transitions in the Moduli Space of N=2 SYM" Nucl. Phys. **B535** (1998) 139, hep-th/9806011.

[9] K. Hashimoto, H. Hata and N. Sasakura, "3-String Junction and BPS Saturated Solutions in SU(3) Supersymmetric Yang-Mills Theory", Phys. Lett. **B431** (1998) 303. hep-th/9803127.

K. Hashimoto, H. Hata and N. Sasakura, "Multi-Pronged Strings and BPS Saturated Solutions in SU(N) Supersymmetric Yang-Mills Theory", Nucl. Phys. **B535** (1998) 83, hep-th/9804164.

K. Hashimoto, "String Junction form Worldsheet Gauge Theory", hep-th/9808185.

[10] Y. Imamura, "E_8 flavour multiplets", Phys. Rev. **D58** (1998) 106005, hep-th/9802189.

Y. Imamura, "String Junctions and Their Duals in Heterotic String Theory", hep-th/9901001!

[11] K. Kodaira, "On Compact Analytic Surfaces I, II, III ", Annals of Math. **71** (1960) 111, **77** (1963) 563, **78** (1963) 1.

[12] E. Witten, "Phase Transitions in M-Theory and F-Theory", Nucl. Phys. **B471** (1996) 195, hep-th/9603150.

A. Sen, "F-theory and Orientifolds", Nucl. Phys. **B475** (1996) 562, hep-th/9605150.

K. Dasgupta and S. Mukhi, "F-theory at Constant Coupling", Phys. Lett. **B385** (1996) 125, hep-th/9606044.

[13] N. Seiberg and E. Witten, "Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinment in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory", Nucl. Phys. **B426** (1994) 19, hep-th/9407087.

N. Seiberg and E. Witten, "Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD", Nucl. Phys. **B431** (1994) 484, hep-th/9408099.

[14] T. Banks, M. Douglas and N. Seiberg, "Probing F-theory With Branes", Phys. Lett. **B387** (1996) 278, hep-th/9605199.

[15] O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, "Constraints On The BPS Spectrum Of $N = 2$, D=4 Theories With A-D-E Flavor Symmetry", Nucl. Phys. **B534** (1998) 261, hep-th/9805220.

[16] B. Greene, A. Shapere, C. Vafa and S,-T, Yau, "Stringy Cosmic Strings and Noncompact Calabi-Yau Manifolds" Nucl. Phys. **B337** (1990) 1.

[17] J. Polchinski, S. Chaudhuri and C.V. Johnson, "Notes on D-Branes", hep-th/9602052.

[18] David Mumford, "Tata Lectures on Theta I" (Progress in mathematics:28), Birkhaeuser (1983) 202.

[19] A. Hanany and E. Witten, "Type IIB superstrings, BPS monopoles, and three-dimensional gauge dynamics", Nucl. Phys. **B492** (1997) 152, hep-th/9611230.

[20] M. Krogh and S. Lee, "String network from M-theory", Nucl. Phys. **B516** (1998) 241, hep-th/9712050.

Y. Matsuo and K. Okuyama, "BPS condition of string junction from M theory", Phys. Lett. **B426** (1998) 294, hep-th/9712070.