Lattice Gauge theory and chiral symmetry Numerical investigations

筑波大学 物理学系 青木 慎也

平成11年 9月 9日

Abstract

上記のタイトルの講演をSummer Institute '99 でおこなったが、この報告は、その講演内容について簡単にまとめたものです。

1 Introduction

格子上にフェルミオン場を定義しようとすると、格子上の運動量空間が周期的であることから、「連続極限において余分な自由度があらわれる」というダブリング問題が生じる。４次元の場合、１つの粒子極のかわりに、１６個の極 (ダブリング) が現れてしまう。この問題を回避するために、Wilson は次元が５の新しい項 (ウィルソン項) をフェルミオンの作用に付加えた。これによって、１５個の余分な極は格子カットオフ程度の質量を持ち、低エネルギーの連続極限に現れなくなったが、そのかわり、フェルミオンの質量パラメタがゼロの極限でもカイラル対称性が成り立たないという代償を払わなければならない。

さらに、この現象が一般的であることが、Nielsen-Ninomiya によって定理の形で証明された。この定理の内容は以下の通りである。「フェルミオンの作用が場の双一次形式で、カイラル対称性、平行移動不変性、エルミート性、局所性を持つとき、ダブリングが存在する。」この定理は、ＱＣＤのカイラル対称性がU (1) アノーマリーを持つことからも理解される。つまり、格子上でカイラル対称性があったら、アノーマリーは出ないはずで、実は、ダブリングによってアノーマリーが打ち消されてゼロになっているのである。したがって、U (1) アノーマリーを持つ正しいＱＣＤを格子上に定義しようとすると、カイラル対称性はあきらめなければならない。

現在の格子ＱＣＤの数値シミュレーションにおいては、(1) カイラル対称性を顕に破ってしまう Wilson/Clover タイプのクォーク作用と (2) カイラル対称性の一部は残すが、ダブリングの一部が残り、さらにフレーバー対称性も壊れてしまう Kogut-Susskind(KS) 型クォーク作用の２つがよく使われている。この講演では、最近脚光を浴びている、よりよいカイラル対称性を持つ新しいクォーク作用と、それを使った数値計算の結果に関して報告する。

2 Domain-Wall Fermion (DWF)

Domain-Wall fermion (DWF) は、 Kaplan によってカイラルゲージ理論を格子上で定式化する方法として提唱され、Shamir によって簡単な形に変更され、さらにヴェクトル型の相互作用で

ある QCD に応用された。(DWQCD)

DWF の作用は 5 次元の massive Wilson fermion に 4 次元のゲージ場を結合させ、さらにフェルミオンの 5 次元方向を自由境界条件にしたものである。作用をシンボリックに書くと以下のようになる。

$$S_F = \bar{\psi}\left[\gamma_\mu D_\mu(A) + \gamma_5\partial_5\right]\psi + \bar{\psi}\left[D_\mu(A)^2 + \partial_5^2\right]\psi + M_0\bar{\psi}\psi \tag{1}$$

さらに、 5 次元目の座標をフレーバーと解釈すると

$$S_F = \frac{1}{2}\bar{\psi}_{n,s}\gamma_\mu\left(U_{n,\mu}\psi_{n+\mu,s} - U^\dagger_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu,s}\right) + \bar{\psi}_{n,s}\left(MP_R + M^\dagger P_L\right)^{n,m}_{s,t}\psi_{m,t} \tag{2}$$

となる。ここで $U_{n,\mu}$ はリンク変数と呼ばれ、$U_{n,\mu} = e^{iagA_\mu(n)}$ という関係がある。上の式で第 1 項は kinetic term で、第 2 項は flavor-mixing "mass" term になっている。

この理論がカイラル対称性を持っていることを見るために、自由場の場合 $(U_{n,\mu} = 1)$ を考える。この時、運動量表示で

$$S_F = \bar{\psi}_s i\gamma_\mu \sin p_\mu a\psi_s + \bar{\psi}_s\left(MP_R + M^\dagger P_L\right)_{s,t}\psi_t \tag{3}$$

となる。ここで

$$M = \begin{pmatrix} -W & 1 & & & & \\ & -W & 1 & & & \\ & & -W & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & -W \end{pmatrix}, \quad M^\dagger = \begin{pmatrix} -W & & & & & \\ 1 & -W & & & & \\ & 1 & -W & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -W \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$W(p) = 1 - M_0 + \sum_\mu(1 - \cos p_\mu a)$ である。この式を見ると、M $(M^\dagger)$ にゼロ固有値があれば Right-handed (Left-handed) massless fermion が存在することがわかる。実際、$|W(p)| < 1$ なら、フレーバー数 (5 次元方向の大きさ) N_sが無限大の極限で、M, $M^\dagger$の両方にゼロ固有値が存在することがわかる。この条件は

$$0 < M_0 + \sum_\mu(\cos p_\mu a - 1) < 2 \tag{5}$$

と書き換えることができ、 $0 < M_0 < 2$ では, $p_\mu a \simeq 0$、つまり、 physical fermion に対して、massless Dirac (Right+Left) fermion が存在する。M_0の範囲を変えるとダブリングに対応する粒子が massless fermion になる。つまり、M_0が極の数と性質をコントロールしている。これから以降では phyical fermion だけを考える。

DWF は massless Dirac fermion を記述することがわかったが、詳しく調べると Right-handed zero mode は $s = 1$ 付近に、Left-handed zero mode は $s = N_s$付近に局在していることがわかる。このことから、 4 次元のクォーク場を

$$q_n \equiv P_R\psi_{n,1} + P_L\psi_{n,N_s}, \qquad \bar{q}_n \equiv \bar{\psi}_{n,1}P_L + \bar{\psi}_{n,N_s}P_R, \tag{6}$$

とおけばいいことがわかる。

このクォーク場を用いると、current quark mass term は$-m_f\bar{q}_n q_n$ と書ける。また、pole mass $m_{\rm pole}$ は

$$m_{\rm pole} = M_0(2 - M_0)[m_f + (1 - M)^{N_s}] \tag{7}$$

となり、$0 < M_0 < 2$ であれば、$N_s \to \infty$ で、additive な補正項は消えることがわかる。したがって、$N_s \to \infty$ と $m_f = 0$ とすれば、 $m_{\rm pole} = 0$ となり、確かにカイラル対称性を持っているように見える。この性質は自由場の場合に導いたものであるが、摂動の１ループの補正を加えても成り立っている。

DWF を用いて QCD を定式化したものが Domain-Wall QCD (DWQCD) であり、次章では DWQCD の最近の数値計算の結果を簡単に紹介する。

3 Numerical investigations in DWQCD

3.1 Wilson fermion vs. DWF

Wilson fermion のカイラル対称性の壊れは $O(a)$ であり、同時にスケーリングの破れも $O(a)$ である。したがって、 a を小さくしないかぎり、カイラルの破れを小さくすることができない。一方、DWF の場合は、カイラルの破れは $O(e^{-\alpha N_s})$ となる。ここでα は正のある定数である。また、スケーリングの破れは $O(ae^{-\alpha N_s})$ もしくは $O(a^2)$ である。したがって、N_sを充分大きく取れば、a とは無関係にカイラル対称性がよくなっていく。また、スケーリングの破れも $O(a^2)$ になるのでより改良されることが期待される。このように、DWF はカイラル対称性の振舞いが Wilson fermion に比べて良いので、カイラル対称性に強く制限されている物理量、例えば、Ｋ中間子の混合パラメタ B_Kなど、の計算により適していると思われる。

このように DWQCD は Wilson fermion を使った QCD より優れているが、実際の数値計算は余分な次元 / フレーバー N_sの存在のために、N_s倍の計算時間が必要になる。したがって、むやみやたらに N_s を大きくすることは不可能である。このことから、$O(e^{-\alpha N_s})$ エラーのコントロール、とくにカイラル対称性の破れの大きさの評価、が重要になってくる。現在、この点に関する数値計算が行われ始めており、$m_f = 0$ でのパイ中間子の質量、パイ中間子の m_f依存性、カイラル Ward-Takahashi 恒等式の破れの項、などが調べられている。

3.2 Expectations and Results on finer lattices

DWQCD では、パイ中間子の質量は次のように振舞うはずである。

$$m_\pi^2 = Am_f + B + Ce^{-\alpha N_s} \tag{8}$$

ここで最後の 2 項はカイラル対称性の破れを表す項であり、以下ではδm_π^2 と書くことにする。もし、$B = 0$ であれば、$N_s \to \infty$ の極限で

$$m_\pi^2 = Am_f \tag{9}$$

という PCAC 関係式が成り立ち、カイラル対称性がよくなり、DWQCD はうまくいっていることになる。もし、$B \neq 0$ なら、カイラル対称性は壊れたままで、DWQCD はうまくいかないことになる。

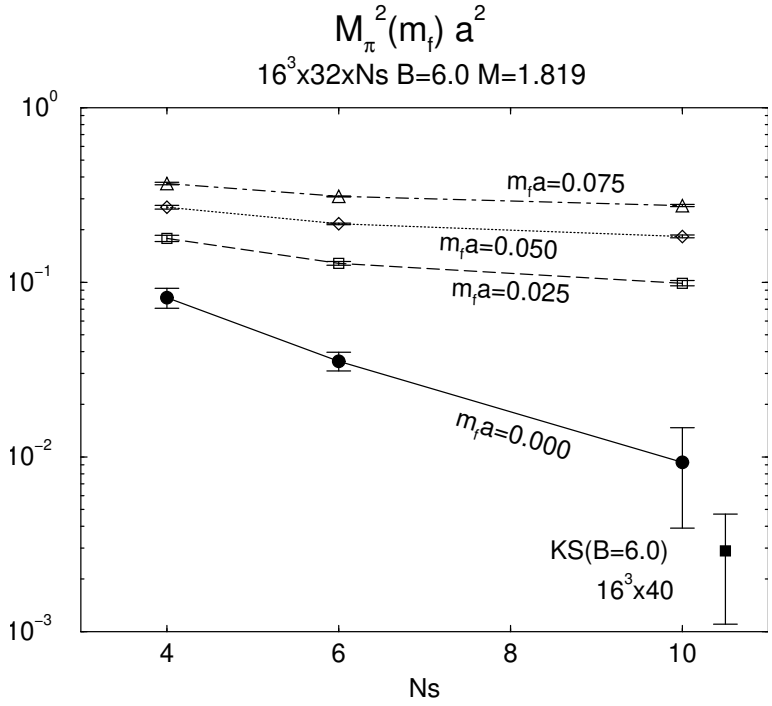

図 1: Pion mass squared as a function of N_s at $M_0 = 1.819$. Filled square shows the value for the NG pion of the KS fermion at $\beta = 6.0$ on a $16^3 \times 40$ lattice.

ここでは、格子間隔 a が比較的小さな場合に対して我々が行ったテストの結果の一部を紹介する。

ゲージ場の作用としては通常のプラケット作用を使い、パラメタとしては、$\beta = 6.0$ をとった。我々はクォークの真空偏極を無視するクエンチ近似を用いたので、これは格子間隔 (の逆数) として、$1/a \simeq 2$ GeV に相当する。4 次元方向の格子サイズは $16^3 \times 32$ で、5 次元方向のサイズ N_s は、$N_s = 4, 6, 10$ を用いた。また、M_0の値としては平均場近似の計算で得られた最適な値 $M_0 = 1.819$ を主に使った。

パイ中間子の質量の 2 乗、m_π^2を、クォークの質量 m_fの関数として見るの線型性は極めて良い。そこで m_π^2 を m_f の 1 次関数として外挿して $m_f = 0$ での m_π^2の値を得る。これが δm_π^2である。この量を N_s の関数として図示したのが、図 1 である。図からδm_π^2 が N_s が増大するとともに指数関数的に小さくなっていく様子が見え、$N_s = 10$ においては KS quark の場合のパイ中間子の質量にほぼ等しくなっている。このことから、

$$\delta m_\pi^2 = Ce^{-\alpha N_s} \tag{10}$$

と振舞っていることが示唆される。カイラル Ward-Takahashi 恒等式の破れを表す項の N_sにたいする振舞いも同様の結果を与えている。

これらの結果から、格子間隔がある程度小さくなっていれば (1/$a \sim 2$ GeV 程度)、DWQCD では massless fermion が存在し、カイラル対称性が実現されていると考えられる。

3.3 Chiral symmetry on coarse lattices

DWQCD は通常の４次元の理論に比べて N_s倍の計算時間が必要なため、現在の計算機の能力では、たとえクエンチ近似の計算だとしても、$1/a \sim 2$ GeV 程度までの計算しか可能にならない。したがって、連続極限 $(a \to 0)$ をとるには、$1/a = 1,\ 1.5$ GeV など格子間隔が比較的大きい場合の計算が必要になってくる。ここで問題となってくるのは、このようなあらい格子間隔時に DWQCD で massless fermion が現れるかどうかである。

このことを調べるために、我々は以下のような計算を行った。

- 格子間隔はクエンチ近似で約 $1/a = 1$ GeV
- ゲージ作用としては、通常のプラケット作用 (plaqutte action) の他に、繰込み群によって改良された作用 (RG action) を用いた。$1/a = 1$ GeV に対応するパラメタは $\beta = 5.65$ (plaqutte action), $\beta = 2.2$ (RG action) である。
- 格子サイズは、 $12^3 \times 24 \times N_s$ で、 $N_s = 10, 20, 30, 50$ をとった。
- クォーク質量は $m_f = 0.03, 0.05, 0.1$ の３点をとり、これを用いて $m_f = 0$ に外挿した。
- Domain-Wall height として $M_0 = 1.3, 1.7, 2.1, 2.5$ をとった

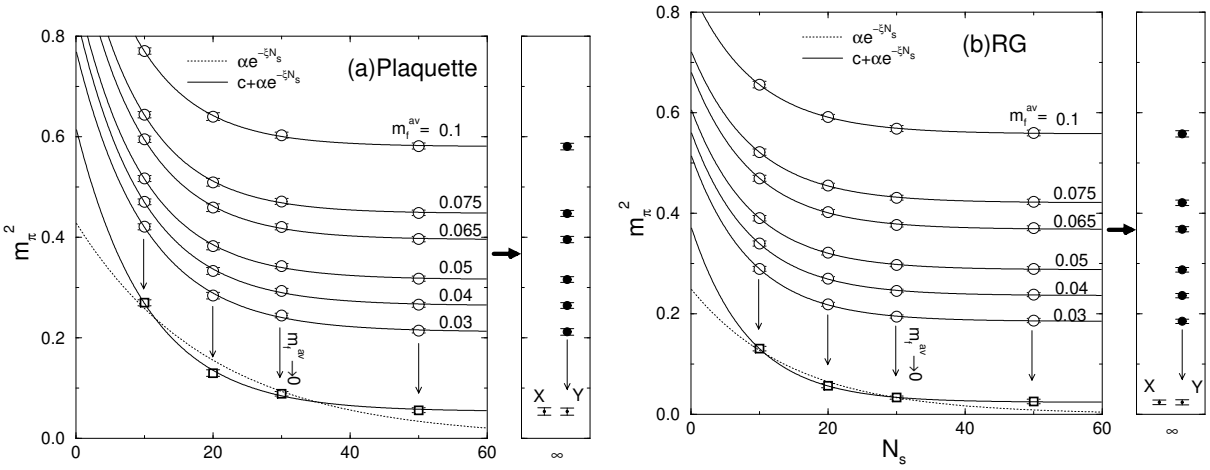

図 2: Pion mass squared as a function of N_s at $M = 1.7$ for the plaquette (left) and RG (right) actions. Two limits $m_f^{av} \to 0$ and $N_s \to \infty$, and their combinations in two possible orders denoted by "X" and "Y" are shown.

得られた結果は以下の通りである。 図 2 には m_π^2 を N_s の関数としてプロットした。白抜きの四角が $m_f = 0$ に外挿した値である。この値を $Ce^{-\alpha N_s}$ でフィットしたのが、図中の点線であり、実践は $B + Ce^{-\alpha N_s}$ とフィットしたものである。明らかに、後者の方がよいフィットになっている。また、今とは逆に、有限の m_fで $B + Ce^{-\alpha N_s}$ と先に $N_s \to \infty$ という外挿をやり、その結果を $m_f = 0$ に外挿したものも計算した。その結果を同時に図中に載せたが、はじめの結果で $B \neq 0$ としたものとよく一致している。このことから、$1/a = 1$ GeV で現在の格子サイズ $12^3 \times 24$ では

$N_s \to \infty$ でも $\delta m_\pi^2 \neq 0$ ということが結論される。この結果はゲージ作用を RG action に代えても変らない。

4 Conclusion and Discussion

DWQCD はある程度格子間隔が小さくなれば目論み通りうまくいっているが、格子間隔が粗くなると、たとでば $1/a = 1$ GeV、パイ中間子の質量が

$$m_\pi^2 = Am_f + B + Ce^{-\alpha N_s} \tag{11}$$

となってしまい、カイラル極限 $(m_f = 0,\ N_s = \infty)$ でもパイ中間子の質量はゼロにならない。この原因としては、(1) 有限サイズ効果 (2) クエンチ効果 (3) DWQCD の失敗などが考えられる。格子サイズを $12^3 \times 24$ から $16^3 \times 24$ に変えて同じ計算をしたが、結果は変らず、(1) の可能性は否定された。また、Ward-Takahashi 恒等式を見ることにより、(2) の可能性も排除される。したがって、粗い格子間隔の時は (3) である可能性が大きい。今後の課題は、この現象の原因を理解することと、どうやったら粗い格子上で DWQCD をつかってカイラル対称性を実現するか、である。