4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論の Seiberg-Witten 幾何におけるゲージ群の表現

東京大学理学部 寺嶋 靖治

1 Introduction

4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論は、Seiberg と Witten によるゲージ群が $SU(2)$ の場合の厳密解の導出がなされた後 [1]、その様々な非摂動的性質が明らかにされてきました。特に、適当な背景を持った超弦理論の中に埋め込んで考えることによって、厳密解を導く補助的な複素曲線 (SW 曲線) を、物理的に意味のある幾何学的な対象と考えられることがわかってきました。この超弦理論を使ったアプローチでは、理論のパラメーター (超弦理論の結合定数や背景の形や大きさなど) をうまく選ぶことによって、ゲージ群や物質場の表現が読み取れる極限と、非摂動的な寄与も完全に取り入れた SW 曲線を読み取れる極限が同じ低エネルギー物理を与えるようにします。そこでは、超弦理論の双対性を使うことで、二つの極限を解析することが可能になっています。

例えば、MQCD と呼ばれる手法では [2]、IIA 型超弦理論の D-brane のコンフィグレーションで、低エネルギーで 4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論になるようなものを構成してやります。そして、超弦理論の結合定数を無限大にすることによって、(さらに、他のパラメーターをうまくとることによって)、M 理論の中の滑らかな M5-brane による記述が良くなるようにします。これは、brane 上の低エネルギー物理を変えず、しかも、M5-brane は対応する SW 曲線に 2 次元分がコンパクト化されていて、その低エネルギー有効理論は、非摂動的な寄与も取り入れた、厳密なものであることがわかります。

さらに幾何学的にゲージ理論を記述するのが、geometric engineering と呼ばれる手法です [3]。これは、IIA 型超弦理論を Calabi-Yau 空間にコンパクト化します。特に、$\mathbf{CP}^1$ 上に K3 空間がファイバーされた形の Calabi-Yau 空間を考えると、これは、そのモジュライをうまくとることによって、低エネルギーでは 4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論を与えます。IIA 型超弦理論は、摂動的には非可換ゲージ理論を含みませんが、D2-brane に結合する 3-form をファイバーである K3 空間の 2-cycle に対応する 2-form ω^a を使って次元削減 $A^3 = A^a \wedge \omega^a$ をすることにより、$U(1)$ ゲージ場 A^a が現れ、D2-brane がその 2-cycle に巻き付くことによって、その $U(1)$ に結合したゲージ粒子がでて、非可換ゲージ理論を含み

得ます。この時、その 2-cycle の面積が非常に小さくなることが要求されるので、特異点を持つ Calabi-Yau に近いところ考えること意味します。K3 空間が ADE 型の特異点を持つと、その型の Dynkin 図に対応した交わり方をした 2-cycle があるので、ゲージ群は特異点の型の群に一致します。この方法はゲージ群が $SU(n)$、つまり、A 型で物質場がないときには、MQCD と同じことをしていることが、NS5-brane に対する拡張された T-dual をすることでわかります [4] [5]。

今は、ADE 型の特異点という幾何によって、ADE 型のゲージ理論を導きましたが、この特異点を持った幾何を、その近くに置いた brane 上の低エネルギー有効理論の立場から見れば、ADE 型の大域的対称性として見えます。実際、F 理論を elliptic K3 にコンパクト化した理論を D3-brane でプローブすることによって、ADE 型の大域的対称性を持った 4 次元 $N = 2$ 超対称ゲージ理論を得ることができます [6] [7]。

これらの例のように、超弦理論の中では、ADE 型の群は、その型の特異点を持った幾何を使って、様々な次元や超対称性を持ったゲージ理論に出現させることができます。しかし、クォークなどの物質場が入っている理論を考えたい場合は、その場に対するゲージ群の表現という概念が入ってきます。この ADE 型の群の表現というものが、幾何学的に理解することができれば、一般の物質場を持った理論の厳密解などが得られることが期待できるので、非常に有用であると考えられます。しかし、これに対する明確な理解は、今のところ得られていません。そこで、この問題に対する手がかりを得るために、この群の表現というものの幾何学的な意味が比較的はっきりしている、D3-brane プローブ上の Seiberg-Witten form の例を次節で紹介します [8] [9]。

2 D3-brane プローブ上の Seiberg-Witten form

ここでは、F 理論を elliptic K3 にコンパクト化した理論に置かれた、一枚の D3-brane 上の低エネルギー有効理論を考えます。ここで、elliptic K3 とは、$\mathbf{CP}^1$ を底に、トーラスをファイバーに持つ空間として表せるような K3 空間で、底の非斉次座標を z とすると、

$$y^2 = x^3 + f(z)x + g(z), \tag{1}$$

のような方程式で書けます。ここで、$f(z)$ は次数 8、$g(z)$ は次数 12 の多項式です。この空間にコンパクト化された F 理論は、$\mathbf{CP}^1$ 上にコンパクト化された IIB 型超弦理論の、$4f(z)^3 - 27g(z)^2 = 0$ を満たす 24 個所の z の点に、7-brane がいるものと同じです [10]。弦

の結合定数は、ファイバーのトーラス (IIB では補助的なことに注意) の複素構造で与えられ、そのトーラスの 1-cycle が縮退するところが、7-brane のいる場所となっています。ここで、f, g をうまく選べば、この K3 に ADE 型の特異性 $W_{ADE}(x_i) = 0$ を持たすことができます。ここで、

$$\begin{aligned} W_{A_N} &= x_1^{N+1} + x_2^2 + x_3^2, \\ W_{D_N} &= x_1^{N-1} + x_1 x_2^2 + x_3^2, \\ W_{E_6} &= x_1^4 + x_2^3 + x_3^2, \quad W_{E_7} = x_1^3 + x_1 x_2^3 + x_3^2, \quad W_{E_8} = x_1^3 + x_2^5 + x_3^2, \end{aligned} \tag{2}$$

です。この特異点直上の D3-brane 上の理論は、質量スケールのないことから、ADE 型の大域的対称性を持つ、4 次元 $N = 2$ 超対称共形場の理論になります。

この F 理論中の、z 方向に広がっていない D3-brane 上の理論の SW 曲線は、その D3-brane のいる場所のトーラスそのもので与えられることが、4 次元理論のゲージ結合定数が弦の結合定数と同じことなどから予想できます。Seiberg-Witten の処方にしたがって、厳密解を得るには、さらに、SW form と呼ばれるトーラス上の特別な 1-form が必要になります。それを導出するために、M 理論による記述に移ります [11]。

まず、この F 理論 (IIB 理論) を、さらに S^1 にコンパクト化します。この S^1 は、D3-brane の広がっていない方向とします。S^1 上の IIB 理論と T^2 上の M 理論の双対性を fiberwise に使ってやると、これは、M 理論を、底が $\mathbf{CP}^1$ でファイバーが T^2 である複素 2 次元空間にコンパクト化したものと等価です。(ここで、IIB 理論の結合定数と T^2 の複素構造が移りあうことと、$\mathbf{CP}^1$ 上でその結合定数が一定でないことに注意してください。) これは、M 理論を元の K3 空間にコンパクト化したものです。つまり、

$$\begin{aligned} F \text{ 理論 } on\ (K3 \times S^1) &= IIB \text{ 理論 } on\ (\mathbf{CP}^1 \times S^1) \\ &= M \text{ 理論 } on\ (\mathbf{CP}^1 \text{上の } T^2 fibration) = M \text{ 理論 } on\ K3, \end{aligned} \tag{3}$$

となります。D3-brane は、M 理論側では、ファイバーの T^2 に巻き付いた M5-brane に見えて、その上の低エネルギー有効理論のモジュライ空間は、M5-brane が動ける空間である $\mathbf{CP}^1$ で与えられ、さらに、それが巻き付いた T^2 が SW 曲線です。これは、MQCD と同じような記述に見えますが、実際、D_{N_f} 型特異点の時は、orientifold を使った 4 次元 $N = 2$ $SP(1)$ ゲージ理論に N_f 個の hypermultiplets が結合した理論 ($=SU(2)$ N_f flavor SQCD)

に対する構成と同じです。$(\tilde{x}, \tilde{y}, v)$ で張られる空間の $v = 0$ にいる orientifold は、

$$\tilde{x}\tilde{y} = v^{-4} \prod_{k=1}^{N_f} (v^2 - (m_k)^2), \tag{4}$$

という式で表され [12] [13]、M5-brane は、モジュライを z とすると、$v^2 + z = i(\tilde{x} + \tilde{y} + 2(\prod_{i=4}^{N_f} m_i)/v^2)/2$ という配置で与えられます。変数変換

$$x_1 = v^2, \quad -2ix_2 = \tilde{x} + \tilde{y} + 2\frac{1}{v^2} \prod_{i=4}^{N_f} m_i, \quad 2x_3 = v(\tilde{x} - \tilde{y}), \tag{5}$$

を行うと、orientifold (4) は、D_{N_f} 特異点 $0 = x_1^{N_f - 1} + x_1 x_2^2 + x_3^2$ になることがわかります。

MQCD では、SW form を背景の複素 2 次元空間の holomorphic 2-form Ω から構成することができていたので [14] [15]、それを今の ADE 型の特異点を持つ場合に拡張することを考えます。まず、IIB 型理論では、BPS 状態は、7-branes と D3-brane を結ぶ string junction により表現されました。これは、M 理論では、D3-brane に端を持つ M2-brane なので、

$$\text{質量} \sim M2 \text{の面積} \geq \left| \int_{M2} \Omega \right|, \tag{6}$$

が成り立ち、等号は BPS 状態の時となります。この Ω から SW form λ_{SW} を作りたいわけです。ここで、この ADE 型の特異点を持つ複素 2 次元空間の、その型のリー環の全ての表現 R に対応した sections $x = x_a(z)$, $a = 1, \ldots, \mathrm{dim}R$ を、具体的に作ることが可能です。ある表現 R を決めた後、それに対応する sections を使って、複素 2 次元空間上の 1-form $\tilde{\lambda}$ を

$$\tilde{\lambda} \sim \sum_{a=1}^{\mathrm{dimR}} \frac{v_a}{x - x_a(z)} dx + (*)dz, \tag{7}$$

と作ってやります。そして、$(*)$ をうまく選んでやると、$\Omega = d\tilde{\lambda}$ が、$x = x_a(z)$ を除いたすべての点で成り立つようにできます [16] [17] [8]。ここで、v_a は、deformation のパラメーター m_i (これは物質場の質量と見なせる) に比例していて、その表現の a 番目の重みそのものです。そして、トーラス上の 1-form を

$$\lambda_{SW} = \sum_{a=1}^{\mathrm{dimR}} \frac{v_a}{x - x_a(z)} dx, \tag{8}$$

とすれば、

$$\text{質量} \sim \left| \int_{M2} \Omega \right| = \left| \int_{\partial(M2) + M2 \cap (x = x_a(z))} \tilde{\lambda} \right| = \left| \int_{(p,q)cycles + poles} \lambda_{SW} \right| = \left| pa + qa_D + \sum_i s_i m_i \right|, \tag{9}$$

とD3-brane が乗っているトーラス上の積分に書き換えることができるので、SW form が超弦理論の立場から導出されました。その規格化は、$l(R)$ を表現 R の index として、

$$2\pi i Res(\lambda_{SW}) = \frac{1}{2l(R)}\frac{v_a}{\sqrt{2}}, \tag{10}$$

と決まっています [8]。これは、Seiberg-Witten の論文 [1] での $2\pi i Res(\lambda_{SW})$ が $\frac{m_a}{\sqrt{2}}$ の整数倍という仮定が正しくないことを意味しています。

このようにして、表現 R が sections という形で表され、それぞれの表現 R に応じて λ_{SW} を構成することができました。しかも、どの表現に基づいた λ_{SW} を使ってやっても、(2,0)form Ω の書き換えをしているだけなので、物理的には等価なことが結論されます。

3 Geometric Engineering

IIA 型超弦理論を ADE 型特異点を持つ Calabi-Yau 空間にコンパクト化すると、その型のゲージ群が特異点を通じて現れます。この場合、その特異点の近くだけを考えたミラー対称性を使って、IIB 型超弦理論の記述に移ります。すると、IIB 型理論がコンパクト化されているミラー多様体が、SW 曲線に対応するもので、Seiberg-Witten geometry と呼ばれています。この空間から、SW 曲線の時と同じように、低エネルギー有効理論を計算することが可能です。

この SW geometry は、元の Calabi-Yau 空間が ADE 型特異点を $\mathbf{CP}^1$ 上にファイバーしているという構造を反映して、

$$\xi + \frac{1}{\xi}X_R(x_1, x_2, x_3) + W_{ADE}(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{11}$$

という形をしています [4]。ここで、物質場がどんなゲージ群の表現であるかによって、$X_R(x_i)$ という多項式の形が変わってきます。この多項式の具体的な形は、一般にはわかっていませんが、非常に non-trivial な座標依存性を持った例が得られてます [18] [19] [20]。例えば、E_6 ゲージ理論に基本表現で変換する場がある時は、deformation パラメーターを零にすると、

$$X_{\mathbf{27}} = m^6 - 8m^3x_1 - 12x_2m^2 - 8x_1^2 + ix_3, \tag{12}$$

が得られています。この多項式は、前節での結果と深く関係していると思えますが、今のところ、その関係ははっきりとは解っていません。しかし、この多項式の意味を理解できれば、いろいろな応用が可能であろうと考えられます。

Acknowledgements

この話の内容は、主に羽柴次郎さん、野口雅之さん、梁成吉さんとの共同研究の結果に基づいています。また、この機会を与えてくださった世話人の方々、井上さん、横田さんにもこの場を借りて心より感謝いたします。

References

参考文献

[1] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19, Erratum-ibid. **B430** (1994) 485, hep-th/9407087; Nucl. Phys. **B431** (1994) 484, hep-th/9408099

[2] E. Witten, Nucl. Phys. **B500** (1997) 3, hep-th/9703166

[3] For an elementary review, see P. Mayr, Fortsch. Phys. **47** (1999) 39, hep-th/9807096

[4] A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr, C. Vafa and N. Warner, Nucl. Phys. **B477** (1996) 746, hep-th/9604034

[5] H. Ooguri and C. Vafa, Nucl. Phys. **B463** (1996) 55, hep-th/9511164

[6] A. Sen, Nucl. Phys. **B475** (1996) 562, hep-th/9605150

[7] T. Banks, M. Douglas and N. Seiberg, Phys. Lett. **B387** (1996) 278, hep-th/9605199

[8] M. Noguchi, S. Terashima and S.-K. Yang, Nucl. Phys. **B556** (1999) 115, hep-th/9903215

[9] S. Terashima, to appear

[10] C. Vafa, Nucl. Phys. **B469** (1996) 403, hep-th/9602022

[11] A. Mikhailov, N. Nekrasov and S. Sethi, Nucl. Phys. **B531** (1998) 345, hep-th/9803142.

[12] K. Landsteiner and E. Lopez, Nucl. Phys. **B516** (1998) 273, hep-th/9708118

[13] K. Landsteiner, E. Lopez and D.A. Lowe, JHEP. **7** (1998) 11, hep-th/9805158

[14] M. Henningson and P. Yi, Phys. Rev. **D57** (1998) 1291, hep-th/9707251

[15] A. Mikhailov, Nucl. Phys. **B533** (1998) 243, hep-th/9708068

[16] J.A. Minahan and D. Nemeschansky, Nucl. Phys. **B482** (1996) 142, hep-th/9608047

[17] J.A. Minahan and D. Nemeschansky, Nucl. Phys. **B489** (1997) 24, hep-th/9610076

[18] S. Terashima and S.-K. Yang, Phys. Lett. **B430** (1998) 102, hep-th/9803014

[19] S. Terashima and S.-K. Yang, Nucl. Phys. **B537** (1999) 344, hep-th/9808022

[20] J. Hashiba and S. Terashima, "Geometry and N = 2 exceptional gauge theories," hep-th/9909032