Brane 上での Chern-Simons 理論の実現について

京大基研 ・ 太田和俊

1 はじめに

Brane 上の有効理論としての場の理論を考え、その dynamics と brane が置かれている背景時空との関係を調べることが近年盛んに研究されてきました。最近の AdS/CFT 対応などもその一例であるといえると思います。それ以前には Hanany と Witten が 3 次元の超対称 Yang-Mills 理論をいわゆる brane 配置と呼ばれるやり方で brane 上に実現する方法を与え [1]、超対称 gauge 理論の dynamics と brane の配置空間との対応を議論しました。その仕事が契機となって、その後 brane 配置は様々な次元で様々な超対称性を持った理論に拡張されたり、gauge 群や matter の種類が異なるものが数多く構成されました。[2, 3, 4, 5]

これらの拡張はすべて Yang-Mills 理論の範囲で行われました。しかし一方で、奇数次元、特に 3 次元ではこれら Yang-Mills 作用のほかに Chern-Simons 項を加えることが出来ることが知られています。この Chern-Simons 理論は通常の Yang-Mills 理論では見られないような面白い性質を数多く持っており、様々な系のモデルとなることからそれ自身非常に興味を持って研究されています。

今回の研究会では、Hanany-Witten 型の brane 配置を拡張して Chern-Simons 理論を brane 上の有効理論として実現する方法 [6] についてお話ししたいと思います。 この brane 上で実現された Chern-Simons 理論は超対称性を持ちますが、その理論の真空のモジュライ空間と brane の配置との関係について議論します。最後に、今後の応用や発展についていくつか意見を述べたいと思います。

2 Hanany-Witten 型の Brane の配置とその拡張

はじめに Hanany-Witten 型と呼ばれる brane の配置について説明したいと思います。もともと Hanany と Witten によって初めて与えられたのは 3 次元の Yang-Mills 理論を実現するような配置ですが、今回の話も 3 次元の Chern-Simons 理論に関してなので結果的にはこのモデルを拡張することになります。

Brane の配置は IIB 型の理論で考えます。まず用意するものは 2 枚の NS5-brane です。この NS5-brane は $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$ 方向に広がっているので、この worldvolume の方向を明記して、NS5(012345) という記号で表すことにします。この 2 枚の NS5-brane は x^6, x^7, x^8, x^9 空間に位置を持っていますが、今これらの NS5-brane は x^6 方向にだけ距離 L だけ離れているとします。他の座標では重なっているとします。

さて、これら 2 枚の NS5-brane は x^6 方向に距離を持って離れていますから、その間に D3-brane を張ることが出来ます。その D3-brane を D3$(012|6|)$ という記号で表すことにします。$|6|$ という記号はその方向には D3-brane の worldvolume が NS5-brane に挟まれて有限の長さに制限されていることを意味します。

もともと D3-brane の worldvolume は $1+3$ 次元なんですが、今の場合 NS5-brane によって 1 次元方向を有限の長さに制限していますからこれがちょうどコンパクト化と同じことになって、worldvolume の有効理論は実質 $1+2$ 次元になります。さらに、NS5-brane、D3-brane それぞれが超対称性をそれぞれ半分ずつ破りますから、$1+2$ 次元で N=4 の超対称性を持った理論ということになります。

結局、D3-brane の枚数を N_c 枚とするとこの brane 配置上の低エネルギー有効理論は、$1+2$ 次元の N=4 の超対称性を持った $SU(N_c)$ Yang-Mills 理論であるということになります。この理論の gauge coupling は 1 方向が長さ L でコンパクト化されているということから、

$$\frac{1}{g^2} = \frac{L}{g_s} \tag{1}$$

であたえられます。ここで g_s は IIB 型理論の string coupling です。

この配置では (x^3, x^4, x^5) 空間に沿って D3-brane が自由に動くことが出来ますが、この空間での D3-brane の位置が N=4 Yang-Mills 理論が持つ 3 つの adjoint scalar の真空期待値と対応していると考えられます。また、この理論に基本表現に属するような matter を N_f 個入れたいと思えば、この配置の NS5-brane の間に N_f 個の D5(012789) を加えてやります。その matter は D5-brane と D3-brane の間をつなぐ open string に対応しています。

この Hanany-Witten の配置を拡張することはいろいろと行われてきました。T-dual をとって worldvolume の次元を変えたり、2 枚ある NS5-brane のうち一方を回転させて超対称性をいくつか破って $1+2$ 次元の N=2 や N=1 のモデルを構成することが出来ます。しかしここでは、別の拡張を考えます。今考えている Hanany-Witten の brane 配置では IIB 型弦理論の D3-brane と NS5-brane と D5-brane を用いて構成していましたが、IIB 型理論には NS5-brane と D5-brane の bound state である (p,q)5-brane と呼ばれるものが存在することが知られています。[7] ここで、p は R-R の charge で q は NS-NS charge です。この (p,q)5-brane は worldvolume の次元が NS5-brane と同じですから、Hanany-Witten の配置の 2 枚の NS5-brane のうち一方をこの (p,q)5-brane で置き換えることが出来ます。なぜ、片方だけを置き換えるかというと、両方を (p,q)5-brane で置き換えてしまうと IIB 型弦理論の $SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性を使ってやることで、結局 Hanany-Witten の brane 配置と同じものになってしまうからです。

今、片方の NS5-brane を (p,q)5-brane で置き換えてやればいいといいましたが、単純に (p,q)5-brane の worldvolume の方向を (012345) としてしまうと理論の超対称性がすべて破れてしまいます。超対称性を残すためには (p,q)5-brane を (x^3, x^4, x^5) 空間と (x^7, x^8, x^9) 空間である適当な角度で回転させてやる必要が出てきます。当面の目標としては brane 上の有効理論として超対称性を持った理論を考えたいので、$1+2$ 次元で少なくとも N=1 の

超対称性を持つような場合にどのような配置が許されるか分類してみることにします。

その分類をするためには、今考えている IIB 型での brane 配置を x^2 方向への T-dual と M/IIA 理論の双対性を使って M 理論の空間に持ち上げてみるのが便利です。というのも、NS5-brane と D5-brane はこの双対性で M 理論ではそれぞれ x^2 方向と x^{10} 方向に巻きついた M5-brane になるので、それらの bound state である (p,q)5-brane は x^2 方向に q 回、x^{10} 方向に p 回巻きついた M5-brane ということになります。これは、結局この M5-brane は (x^2, x^{10}) 平面で斜めに傾いているということを意味していて、この時の回転の角度 θ と IIB 型理論での (p,q) charge との間は、

$$\tan\theta = g_s \frac{p}{q} \tag{2}$$

という関係で結びついています。

というわけで、IIB 型理論での Hanany-Witten の brane 配置を拡張した配置は、M 理論で次のような一般的な配置で与えられます。

$$\begin{aligned} \text{M5} &: (012345), \\ N_c \times \text{M2} &: (01|6|), \\ \text{M5}' &: \left(01 \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}_\theta \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}_\psi \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}_\varphi \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}_\rho\right), \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、$\left[\begin{smallmatrix}\mu \\ \nu\end{smallmatrix}\right]_\theta$ という記号は (x^μ, x^ν) 平面で角度 θ を持って M5-brane が傾いているということを意味しています。

さて、このような brane が M 理論の空間に存在していると、11 次元の Killing spinor ϵ は次のような constraint を満たさなくてはなりません。[8]

$$\begin{aligned} \text{M5} &: \Gamma_{012345}\epsilon = \epsilon, \\ \text{M2} &: \Gamma_{016}\epsilon = \epsilon, \\ \text{M5}' &: R\Gamma_{012345}R^{-1}\epsilon = \epsilon, \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、R は M5′ の 4 つの回転角度でパラメトライズされた回転行列で、

$$R = \exp\left\{\frac{\theta}{2}\Gamma_{2,10} + \frac{\psi}{2}\Gamma_{37} + \frac{\varphi}{2}\Gamma_{48} + \frac{\rho}{2}\Gamma_{59}\right\}. \tag{5}$$

で、与えられます。結局、4 つの角度に対していろいろな条件を与えた時に、この方程式を満たして生き残る Killing spinor の成分の個数を数えてやることによって最終的に $1+2$ 次元で得られる超対称性の数がわかります。この結果をまとめたものが表 1 です。

この一連の超対称な配置の中で特に特徴的なのが $1+2$ 次元で N=3 の超対称性を実現している 4-(iii) の場合です。N=1, 2 の配置は NS5-brane を用いても構成できるのですが、N=3 の超対称性を持つような配置は (p,q)5-brane を用いた場合でだけ実現できています。

	angles	condition	SUSY	d=3	M5′
1	$\theta(2\natural)$	θ=0	$\frac{1}{4}$	N=4	NS5(12345)
2-(i)	$\varphi(48), \rho(59)$	ρ=φ	$\frac{1}{8}$	N=2	NS5$\left(123 \begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}_\varphi \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}_\varphi\right)$
2-(ii)	$\theta(2\natural), \rho(59)$	ρ=θ	$\frac{1}{8}$	N=2	$(p,q)5\left(1234 \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}_\theta\right)$
3-(i)	$\psi(37), \varphi(48), \rho(59)$	ρ=ψ+φ	$\frac{1}{16}$	N=1	NS5$\left(12 \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}_\psi \begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}_\varphi \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}_{\psi+\varphi}\right)$
3-(ii)	$\theta(2\natural), \varphi(48), \rho(59)$	ρ=θ+φ	$\frac{1}{16}$	N=1	$(p,q)5\left(123 \begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}_\varphi \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}_{\theta+\varphi}\right)$
4-(i)	$\theta(2\natural), \psi(37),$ $\varphi(48), \rho(59)$	ρ=θ+ψ+φ	$\frac{1}{16}$	N=1	$(p,q)5\left(12 \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}_\psi \begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}_\varphi \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}_{\psi-\varphi-\theta}\right)$
4-(ii)		φ=ψ, ρ=θ	$\frac{1}{8}$	N=2	$(p,q)5\left(12 \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}_\psi \begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}_\psi \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}_{-\theta}\right)$
4-(iii)		θ=ψ=φ=$-\rho$	$\frac{3}{16}$	N=3	$(p,q)5\left(12 \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}_\theta \begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}_\theta \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}_{-\theta}\right)$

表 1: Brane configurations at angles and various supersymmetric theories in 3 dimensions.

一方で、$1+2$ 次元の場の理論では N=3 の超対称性を実現するには Chern-Simons 項を導入すれば良いということが知られています。[9, 10, 11] というわけで、もし超対称な場の理論と brane 配置の間の対応がうまくいっているとすると、(p,q)5-brane を含んでいるような配置は Chern-Simons 項を導入したものと対応していることを強く示唆しています。

実際、この Chern-Simons 理論の導入は弦理論の立場から次のように説明することが出来ます。まず、(p,q)5-brane の SUGRA 解を解析すると、(p,q)5-brane の周りには IIB 型弦理論の RR-scalar 場 (axion 場) が次のような真空期待値を持ちます。

$$\chi = \frac{1}{g_s}\frac{\sin\theta\cos\theta(1-H)}{\sin^2\theta + H\cos^2\theta} \tag{6}$$

ここで、H は (p,q)5-brane を中心とした harmonic function で、(p,q)5-brane からの距離が string scale l_s よりも非常に近いところでは発散します。しかし、H が発散するようなところでは χ の値そのものは $-g_s^{-1}\tan\theta = -p/q$ という一定の値に収束します。

今考えている brane 配置では NS5-brane と (p,q)5-brane の間の距離 L は弦理論における通常のコンパクト化と同じように $L \ll l_s$ であるような領域を考えています。したがって、その間にある D3-brane は一定の $\chi = -p/q$ という background の中に存在しているということになります。この様な D3-brane 上には gauge 場と axion の相互作用項

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{M}^4} \chi F\wedge F \tag{7}$$

が導入されます。ここで、$\mathcal{M}^4 = \mathbb{R}^3\times I$ で I は x^6 方向の有限線分 $I=[-L/2, L/2]$ です。従って、式 (7) を部分積分してやることによって、Chern-Simons 項

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{M}^4}\chi F\wedge F &= -\frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{M}^4} d(AdA)\\ &= \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2\times S^1} AdA\end{aligned} \tag{8}$$

を得ることが出来ます。ここでは $\kappa \equiv p/q$ と定義して、(p,q)5-brane 上での gauge 場に対する Dirichlet 境界条件 $dA = 0$ を使いました。

3 真空のモジュライ空間と brane 配置の対応

この節では前節で得られた brane の配置と超対称 Chern-Simons 理論の真空のモジュライ空間との関係をもう少し詳しく見ていきたいと思います。[12, 13]

3.1 Coulomb 相

まず、超対称な Chern-Simons 理論にはどのような場が含まれているかを考えてみましょう。はじめに 3 次元の N=2 理論を構成することを考えます。3 次元の N=2 理論は D3-brane 上の 4 次元の N=1 の超対称性を持った理論を x^6 方向にコンパクト化して dimensional reduction することで得ることが出来ます。4 次元の N=1 の vector multiplet は gauge 場 A_μ、Majorana spinor λ、補助場 D を含みます。この場を 3 次元へ dimensional reduction することによって、3 次元で gauge 場 A_μ、adjoint scalar $X_3 \equiv A_6$、2 つの spin 1/2 spinor λ_a、補助場 D になります。この dimensional reduction によって得られた 3 次元の理論は N=2 の Yang-Mills 理論ですが、この N=2 の超対称性を壊すことなく超対称な Chern-Simons 項

$$\frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\left\{\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(A_\mu\partial_\nu A_\rho - \frac{2}{3}iA_\mu A_\nu A_\rho\right) - \bar{\lambda}_a\lambda_a + X_3 D\right\} \tag{9}$$

を導入することが出来ます。この Chern-Simons 項によって gauge 場は (gauge 対称性を壊さない) topological な質量 $\frac{\kappa g^2}{4\pi}$ を得ます。同様に、on-shell で spinor λ_a、adjoint scalar X_3 も同じ質量を持つ事がわかり、結局 vector multiplet として質量 $\frac{\kappa g^2}{4\pi}$ を持つようになります。

この、N=2 Yang-Mills Chern-Simons 理論から N=3 理論を得るには adjoint 表現の質量を持った chiral supermultiplet を導入します。この chiral multiplet は on-shell の成分として 2 つの adjoint scalar 場 X_1, X_2、spin 1/2 spinor 場 λ_3、spin -1/2 spinor 場 χ を含んでいますので、chiral multiplet の質量を gauge 場の topological 質量 $\frac{\kappa g^2}{4\pi}$ と等しくとってやることによって、N=3 の massive vector multiplet $(A_\mu, \lambda_i, X_i, \chi)_{i=1,2,3}$ を組んで超対称性が N=3 に enhance します。ここで、λ_i, X_i はそれぞれ、N=3 理論の R-対称性 $SU(2)_D$ の triplet となっています。

今得られた N=2, 3 Yang-Mills Chern-Simons 理論の場、特に adjoint scalar のモジュライと前節で得られた brane 配置との対応を見てみます。関係式 (1) と (2) から vector multiplet の質量は、L と θ を用いて

$$\frac{\kappa g^2}{4\pi} = \frac{1}{4\pi L}|\tan\theta| \tag{10}$$

と表すことが出来るので、M 理論での (2,10) 空間での M5 の回転が IIB 理論での gauge 場の質量、(37),(48),(59) 空間での (p,q)5-brane の回転が 3 つの adjoint scalar の質量と関係があるということがわかります。例えば、表 1 で (p,q)5-brane を含む N=2 の配置は 2-(ii)、4-(ii) ですが、これらの配置は 3 つの (p,q)5-brane の回転角度のうち一つの角度は必ず (符合を除いて) θ と等しく、残り 2 つの角度は θ とは違う値で等しい値になっています。これはそれぞれの (37),(48) 空間での回転の角度が、加えた chiral multiplet の質量と解釈すると場の理論と対応しています。実際、(37),(48) 空間での回転の角度を θ と等しくとってやると N=3 の brane 配置 4-(iii) になります。これは場の理論で chiral multiplet の質量を $\frac{\kappa g^2}{4\pi}$ にとって超対称性が N=3 に enhance することに相当しています。

Hanany-Witten の配置の場合には (x^3,x^4,x^5) 空間で D3-brane が自由に動くことが出来たので、(x^3,x^4,x^5) 空間での D3-brane の位置が 3 次元の N=4 Yang-Mills 理論の 3 つの adjoint scalar の真空期待値と対応していました。今の Chern-Simons 理論の場合には vector multiplet が質量を持つので理論の Coulomb branch は持ちあがってしまってモジュライ空間は点になってしまいます。一方、brane の配置の方を見ると、adjoint scalar が質量を持つような場合には NS5-brane と (p,q)5-brane が完全にねじれの位置関係になって D3-brane がどの方向にも自由に動くことができなくなります。ちょうどこの事が Coulomb branch が持ちあがってモジュライ空間が無くなってしまうことと対応しているわけです。

3.2 Higgs branch

次にここでは Yang-Mills Chern-Simons 理論の Higgs 相と brane の配置との対応についてみていくことにします。簡単の為に gauge 群が $U(1)$ で massless の matter hypermultiplet が 1 つだけあるようなモデルを考えます。さらに、余計な adjoint chiral multiplet の質量は無限大にして decouple させてしまうことにします。これは brane 配置の方では D3-brane と NS5-brane と (p,q)5-brane の間の D3 の上にに後から加える D5(012789) はそれぞれ 1 枚で、表 1 の 4-(ii) の配置で角度 ψ を $\pi/2$ にとることに対応しています。

この理論の Lagrangian を調べてみると bosonic な場に対するポテンシャルが、

$$V=-\frac{g^2}{2}\left(|q|^2-|\widetilde{q}|^2-\zeta+\frac{\kappa}{4\pi}X_3\right)^2-{X_3}^2\left(|q|^2+|\widetilde{q}|^2\right) \tag{11}$$

で与えられることがわかります。ここで、$q,\widetilde{q}$ は hypermultiplet に含まれる scalar 場で、ζ は Fayet-Iliopoulos (FI) parameter です。$\kappa=X_3=0$ としてやると超対称 Yang-Mills 理論で良く知られているポテンシャルと一致します。

さて、このポテンシャルを見てみると Yang-Mills 理論の場合と違って、2 種類の真空の相が存在することがわかります。一つは gauge 対称性が破れてしまう asymmetric phase と呼ばれる相で $|q|^2-|\widetilde{q}|^2=\zeta$, $X_3=0$ という真空期待値で与えられます。この相は通常の Yang-Mills 理論でも存在します。もう一つの相は Chern-Simons 理論に特徴的で symmetric phase と呼ばれる gauge 対称性が破れない、$q=\widetilde{q}=0$, $X_3=4\pi\zeta/\kappa$ という真空期待値で与えられます。

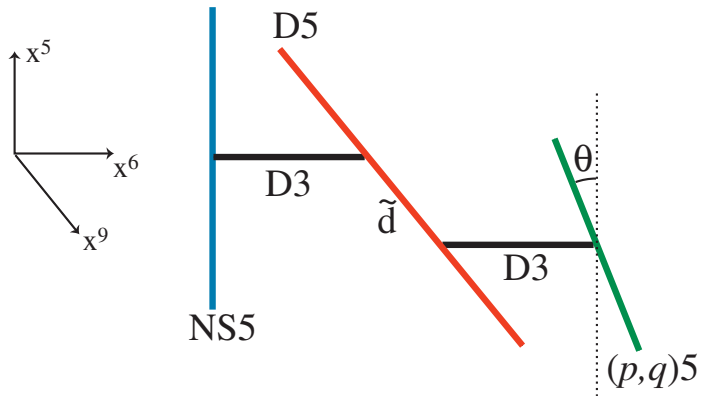

図 1: Brane configuration of the asymmetric phase.

Symmetric phase と brane 配置との対応は、Chern-Simons 理論特有の現象なので非常に面白いのですが、今回は時間の関係で asymmetric phase の方だけ注目することにします。Asymmetric phase ですが、これは Yang-Mills 理論のほうでも存在していると言いました。Yang-Mills 理論の brane 配置では D3-brane の上に乗った D5-brane が D3-brane を分断することによって 2 枚の NS5-brane の x^9 方向にそって相対的に異なる位置に動くことが出来るようになり Higgs 相に入ります。D3-brane が D5-brane で分断されるので gauge 対称性が破れるというわけです。FI parameter は 2 枚の NS5-brane の x^9 方向での位置の相対的な差と考えることが出来ます。Chern-Simons 理論の brane の配置でもこれとまったく同じように考えることが出来て、FI parameter は NS5-brane と (p,q)5-brane の x^9 での位置の相対的な差になります。(図 1)

この様な Higgs 相では場の理論の解析から magnetic charge を持った vortex state が現れることが知られています。[14, 15] その vortex の質量は FI parameter ζ に比例しています。Yang-Mills 理論のときはこの vortex state は Higgs 相で D5-brane によって分断された 2 つの D3-brane の断片の間に張っている D-string と解釈されています。この D-string に対応する state の質量は D-string の長さ、すなわち FI parameter に比例しているというわけです。

Chern-Simons 理論の brane 配置の場合でも vortex を D1-string とみなしたいわけですが、Yang-Mills 理論の場合と若干状況が異なっています。前節で述べたように今考えている NS5-brane と (p,q)5-brane の間には一定の axion 場 $\chi = -\kappa$ が存在しています。この様な background の中に D-string が存在しているとこの D-string は Witten 効果によって κ の NS-NS charge を持つように見えます。すなわち、$(\kappa, 1)$-string が断片的な D3-brane の間に張っているということになります。場の理論の立場からこの $(\kappa, 1)$-string を見てみると、NS-NS charge、R-R charge はそれぞれ electric charge、magnetic charge に見えますから、結局 Chern-Simons 理論の vortex は κ の electric charge と 1 の magnetic charge を同時に持つということになります。

実際に Chern-Simons 場の理論を見てみると、Q を electric charge、Φ を magnetic flux

とすると、Gauss low constraint により

$$Q = \kappa\Phi \tag{12}$$

という関係が成り立たなければならないということがわかります。つまり、magnetic な charge を持ったものは必ず electric charge も持たないといけないわけです。この事と brane 配置で D-string が Witten 効果によって κ の NS-NS charge を得たことと正確に一致しています。

Vortex に対する理解はこれで良かったのですが、しかしその様に考えると良くわからないことが出てきます。先ほど matter を導入するために D5-brane を NS5-brane と (p,q)5-brane の間に入れたのですが、electric charge を持った matter は D5-brane と D3-brane の間の fundamental string とみなしていました。Yang-Mills 理論の時はそれでうまくいっていたのですが、Chern-Simons 理論の場合には先ほど述べた様に electric charge と magnetic charge は Gauss law constraint により必ず比例関係に無ければなりません。今の場合だと $(1,1/\kappa)$-string とでも呼ぶべきものが D5-brane と D3-brane の間に存在しなければなりませんが、弦理論の立場からどの様に理解すべきかまだよくわかりません。さらに、この様な Chern-Simons 理論における荷電粒子は anyon 統計に従わなければならないのですが、この様な統計性を弦理論の枠内でどの様に理解できるかもわからない部分が多いです。ただ、anyon 統計などの Chern-Simons 理論特有の性質は次節で述べる非可換幾何学との関係も非常に深いと考えられるので、弦理論における非可換幾何学の理解を通じてこれらの問題に関しても何かわかるのかもしれません。

4　非可換幾何学との関係

この節では、今回の研究会でいろいろと話題になっていた非可換幾何といままで扱ってきた brane 配置との関係を見てみます。Chern-Simons 理論と非可換幾何が深い関係にあることが brane 配置の立場からも理解することが出来ます。

まず初めに Maxwell Chern-Simons 理論の Lagrangian を考えます。今は理論の真空の配位に注目したいので、$F_{12} = 0$ として gauge 場の空間微分を落としたものを考えることにすると、Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2g^2}\dot{A}_i^2 + \frac{\kappa}{2}\epsilon^{ij}\dot{A}_i A_j \quad (i,j = 1,2) \tag{13}$$

という形になります。この Lagrangian は磁場中の非相対論的な荷電粒子の運動を扱う Landau 問題の Lagrangian とまったく同じ形をしています。

ここで、表 1 の 4-(ii) で $\psi = \pi/2$ とした N=2 の brane 配置に対して、x^1, x^2 方向に T-dual

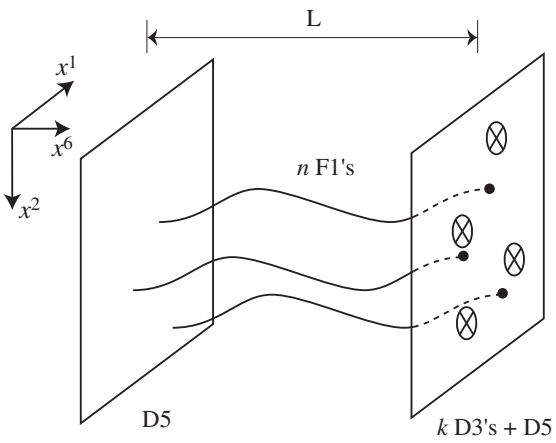

図 2: The Landau system on the D3-D5 bound state.

をとってから IIB 型理論の S-dual をとったものを考えると、

$$\begin{array}{l} \mathrm{D5}(012345) \\ \mathrm{F1}(0|6|) \\ \kappa\mathrm{D3}\left(078\begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}_{-\theta}\right) \oplus \mathrm{D5}\left(01278\begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}_{-\theta}\right) \end{array} \tag{14}$$

という配置を得ます。(図 2) ここで、κD3 $\oplus$ D5 は κ 個の D3-brane と D5-brane の bound state です。最初の 2 回の T-dual によって $x^{1,2}$ 方向の gauge 場の配位は $x^{1,2}$ 方向の D-brane の位置に map されますので、最後の S-dual で得られる fundamental string の $x^{1,2}$ 平面での位置を X_i とすると Lagrangian (13) から、X_i に対する Lagrangian が

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2\pi l_s^2}\right)\dot{X}_i^2 + \frac{\widetilde{\kappa}}{2}\epsilon^{ij}\dot{X}_i X_j, \tag{15}$$

となることがわかります。ここで、$\widetilde{\kappa} = \frac{\kappa}{2\pi l_s^2 g_s}$ と定義しました。この Lagrangian は、まさしく $\frac{L}{2\pi l_s^2}$ を質量として持つ荷電粒子が磁束密度 $\widetilde{\kappa}$ の中を運動している Landau 問題の Lagrangian そのものになっています。

このことは次の様に理解できます。brane 配置の方を見てみると、k 個の D3-brane を D5-brane の bound state は $x^{1,2}$ 平面で見てみると、k に比例した磁束が D5-brane 上にあるのと同じに見えます。その平面上に fundamental string が端を持っていて荷電粒子に見えるので、その端の位置、すなわち fundamental string の $x^{1,2}$ 平面での位置は (15) という Lagrangian に従っているというわけです。String の端の荷電粒子が持つ質量も (string tension)$\times$(length) で与えられますから、(15) から読み取れる質量とぴったり一致しています。

次に、今考えている系の ground state の構造に着目してみましょう。それは、荷電粒子の質量を無限大、すなわち $L \ll l_s$ とすることで見ることが出来ます。すると、Lagrangian

(15) は、

$$L = \frac{\widetilde{k}}{2}\epsilon^{ij}\dot{X}_i X_j \tag{16}$$

という Lagrangian になります。この Lagrangian から位置 X_1 と X_2 はお互いに正準共役の関係にあることがわかり、交換関係

$$[X_i, X_j] = i\epsilon_{ij}/\widetilde{\kappa} \tag{17}$$

により、座標が非可換になります。この様な string の位置の非可換性は zero でない B 場の background によってもたらされるという事が知られています。[16, 17] 実際、D3-D5 bound state の SUGRA 解を調べてみると $B_{12} = \widetilde{\kappa}$ となることがわかり、非可換性 (17) はこの様な B 場の存在によって説明することが可能です。[18]

このことをもともとの Chern-Simons 理論に戻って考えると、string の位置の非可換性は Chern-Simons 理論における $x^{1,2}$ 方向の Wilson line $W_{1,2}$ の非可換性

$$W_1 W_2 = e^{2\pi i/\kappa} W_2 W_1 \tag{18}$$

になります。このように、Chern-Simons 理論の持つ非可換な性質は string duality を通じて弦理論における非可換幾何学を通じても理解することが可能です。

5 今後の展望

今までの研究で brane の dynamics と Chern-Simons 理論との関係が少しずつわかってきたわけですが、まだまだよくわからないことも多くあります。3 節のところで述べた anyon の問題もそうですが、Chern-Simons 理論は Yang-Mills 理論には無いような面白い性質を数多く持っています。そのような面白い現象と brane の dynamics との対応がもっと明らかになってくると弦理論に対する理解ももっと深まると期待しています。また、Chern-Simons 理論に対する幾何学的な理解が深まることで、超対称な理論における mirror 対称性や双対性など場の理論に対しても今まで知られていなかったような現象が見つかる可能性もあります。[19]

Brane 上の Chern-Simons 理論を今後さらに理解するためには、今まで考えてきた brane 配置を string duality 等を使って別の角度から眺める必要もあると考えています。例えば、今まで考えてきた brane 配置を x^6 方向に T-dual をとってみると IIA 型理論で transverse の空間が non-trivial な 7 次元多様体であるような D2-brane 上の理論や、それを M 理論に持ち上げた transverse が 8 次元の M2-brane 上の理論に map されます。この 8 次元多様対は超対称性な理論では hyper-Kähler になります。[20] いずれの場合も 3 次元の理論ですからこれらの brane 上には同じ Chern-Simons 理論が実現されているはずと思われるのですが、どの様に実現されているのかは今のところよくわかっていません。ただ、この様な picture で Chern-Simons 理論を考えると AdS/CFT 対応の時の様に brane からの距離

をエネルギースケールとして繰り込みの flow を幾何学的に理解することが出来る可能性があります。この様な方法で、Yang-Mills 項が落ちて Chern-Simons 項だけになった pure Chern-Simons limit などの理論のいろいろな極限が brane の立場からもっと正確に理解できる様になれば良いと考えています。

謝辞

すばらしい環境の中での研究会を開催していただき、この講義を行う機会を与えてくれた世話人の方々に心より感謝いたします。また、期間中に多くの有益な議論の相手をして頂いた Summer Institute '99 の参加者の皆さんに感謝いたします。

参考文献

[1] A. Hanany and E. Witten, "Type IIB Superstrings, BPS Monopoles, And Three-Dimensional Gauge Dynamics," Nucl. Phys. **B492** (1997) 152-190, `hep-th/9611230`.

[2] J. de Boer, K. Hori, Y. Oz and Z. Yin, "Branes and Mirror Symmetry in N=2 Supersymmetric Gauge Theories in Three Dimensions," Nucl. Phys. **B502** (1997) 107-124, `hep-th/9702154`.

[3] J. de Boer, K. Hori and Y. Oz, "Dynamics of N=2 Supersymmetric Gauge Theories in Three Dimensions," Nucl. Phys. **B500** (1997) 163-191, `hep-th/9703100`.

[4] A. Giveon and D. Kutasov, "Brane Dynamics and Gauge Theory," `hep-th/9802067`.

[5] A. Karch, "Field Theory Dynamics from Branes in String Theory," `hep-th/9812072`.

[6] T. Kitao, K. Ohta and N. Ohta, "Three-Dimensional Gauge Dynamics from Brane Configurations with (p,q)-Fivebrane," Nucl. Phys. **B539** (1999) 79-106, `hep-th/9808111`.

[7] J.H. Schwarz, "An SL(2,Z) Multiplet of Type IIB Superstrings," Phys. Lett. **B360** (1995) 13-18; Erratum-ibid. **B364** (1995) 252 , `hep-th/9508143`.

[8] N. Ohta and P. K. Townsend, "Supersymmetry of M-Branes at Angles," Phys. Lett. **B418** (1998) 77-84, `hep-th/9710129`.

[9] B.M. Zupnik and D.G. Pak, "Topologically Massive Gauge Theories in Superspace," Sov. Phys. J. **31** (1988) 962-965; B.M. Zupnik and D.V. Khetselius, "Three-Dimensional Extended Supersymmetry in the Harmonic Superspace," Yad. Fiz. **47** (1988) 1147-1156.

[10] H.-C. Kao and K. Lee, "Self-Dual Chern-Simons Higgs Systems with an N=3 Extended Supersymmetry," Phys. Rev. **D46** (1992) 4691-4697, `hep-th/9205115`.

[11] H.-C. Kao, "Self-Dual Yang-Mills Chern-Simons Higgs Systems with an N=3 Extended Supersymmetry," Phys. Rev. **D50** (1994) 2881-2892.

[12] K. Ohta, "Moduli space of vacua of supersymmetric Chern-Simons theories and type IIB branes," JHEP **06** (1999) 025, `hep-th/9904118`.

[13] B.-H. Lee, H. jae Lee, N. Ohta, and H. S. Yang, "Maxwell Chern-Simons solitons from type IIB string theory," `hep-th/9904181`.

[14] R. Jackiw and E. Weinberg, "Self-Dual Chern-Simons Vortices," Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2334.

[15] R. Jackiw, K. Lee and E. Weinberg, "Self-Dual Chern-Simons Solitons," Phys. Rev. **D42** (1990) 3488.

[16] A. Connes, M.R. Douglas and A. Schwarz, "Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori," JHEP **02** (1998) 003, `hep-th/9711162`.

[17] M.R. Douglas and C. Hull, "D-branes and the Noncommutative Torus," JHEP **02** (1998) 008, `hep-th/9711165`.

[18] N. Seiberg and E. Witten, "String Theory and Noncommutative Geometry," `hep-th/9908142`.

[19] A. Kapustin and M.J. Strassler, "On Mirror Symmetry in Three Dimensional Abelian Gauge Theories," `hep-th/9902033`.

[20] J.P. Gauntlett, G.W. Gibbons, G. Papadopoulos and P.K. Townsend, "Hyper-Kahler manifolds and multiply-intersecting branes," Nucl. Phys. **B500** (1997) 133-162, `hep-th/9702202`.