Octonionic Instanton on Quaternionic Line Bundle*

菅野浩明 (広島大・理・数学)

1 Instantons and Manifold of Special Holomomy

インスタントンやソリトンは，超対称ゲージ理論や超弦理論における非摂動的力学と双対性を考える上で非常に重要な役割を果たしている．この講演では，ゲージ理論における４次元インスタントンを高次元に拡張する試みについて，最近の研究に基づき紹介したい．超対称ゲージ理論における高次元インスタントン，あるいは，これと密接に関連している超弦理論のインスタントン解を考える際に登場するのが，特殊ホロノミー群をもつ多様体 (manifold of special holonomy) である．これは，このような多様体が共変的に不変なスピノル (covariantly constant spinor) を許容するためである．

超対称ゲージ理論では，ゲージ場のパートナーであるスピノル場 (gaugino) χ に対して，η をパラメータとする超対称変換は基本的に

$$\delta\chi = F_{AB}\Gamma^{AB}\eta \tag{1}$$

と書くことができる．ここで F_{AB} はゲージ場の曲率，Γ^{AB} はガンマ行列の反対称積である．一般に多様体 M 上で covariantly constant spinor ϵ が与えられると，パラメータ η に ϵ を代入したものを M 上での大域的な超対称変換とみなすことができる．ゲージ場の配位がこの変換で不変であるための条件は $F_{AB}\Gamma^{AB}\epsilon = 0$ と等価である．例えば４次元においては η を left spinor η_L と right spinor η_R に既約分解することにより

$$\delta\chi = F^{+}\eta_L + F^{-}\eta_R \tag{2}$$

と書ける．ここで $F^{\pm} = (1/2)(F \pm *F)$ は曲率の (反) 自己双対成分であり，$F^{+} = 0$ あるいは $F^{-} = 0$ のいずれか一方が成り立つものが (反) インスタントン配位である．もし空間が $\mathbf{R}^4$ や T^4 のように平坦ならば，ホロノミー群は自明で定数スピノル場はすべて

* SI99 (1999 年 8 月，日経連人材開発センター，富士吉田市) における講演

covariantly constant である（空間の幾何学は超対称性を完全に保つ）．したがって，超対称不変なゲージ場の配位は $F^+ = F^- = 0$ を満たし自明なものしかない．この場合のインスタントン配位は，通常，超対称性を半分破る BPS 状態として理解されている．一方，4 次元で $SU(2)$ ホロノミーをもつ多様体 (コンパクトな例は $K3$ 曲面，非コンパクトな例は ALE 空間) における covariantly constant spinor は，η_L と η_R のいずれか一方のみがゼロでないような定数スピノルである（空間の幾何学で超対称性が半分破れる）．この場合は，半分残った大域的超対称性によって不変なゲージ場の配位として（反）インスタントン解が特徴づけられる（特殊ホロノミーをもつ多様体上では，空間の幾何学によって破れた超対称性が，インスタントン配位によって，さらに破れることはない．）高次元においても，これと同様の考察を行うことにより，高次元インスタントン方程式（ゲージ場の曲率に対する線形の関係式）が自然な形で得られる．

一方，超弦理論では，多様体 M 上に covariantly constant spinor ϵ が存在すると，ガンマ行列の適当な反対称積 $\Gamma_{A_1 A_2 \cdots A_p}$ を用いて閉 p -形式

$$\phi_{A_1 A_2 \cdots A_p} = \epsilon^\dagger \Gamma_{A_1 A_2 \cdots A_p} \epsilon \tag{3}$$

が定義できる．この閉形式 ϕ は数学的に calibration form と呼ばれるものになっており，多様体 M の任意の p 次元部分多様体 N の体積に関する不等式

$$\mathrm{Vol}\ (N) \geq \left| \int_N f^*(\phi) \right| \tag{4}$$

が成り立つ．ここで $f^*(\phi)$ は部分多様体の埋め込み写像 $f : N \longrightarrow M$ による ϕ の引き戻しである．この不等式は超対称性の表現論における BPS bound の式に相当するものであり，等号が成り立つような p 次元部分多様体 Σ を超対称サイクルと呼ぶ．超弦理論や M 理論におけるソリトンやインスタントンは，超対称サイクル Σ に各種の brane が巻き付いたものと考えることができる．

一般に n 次元リーマン多様体のホロノミー群は $SO(n)$ の部分群であるが（直積の形にならない）既約な特殊ホロノミー群としてどのようなものが可能かは数学的に分類されている（表 1 を参照）．表から分かるように，一連の系列となって現れる Calabi-Yau 多様体, hyperKähler 多様体以外に，7 次元と 8 次元では残っている超対称性がわずか 1 個だけという例外型のホロノミー群が存在する．以下では，このうち 8 次元の $Spin(7)$ 多様体について考える．

表 1: Special holonomy group in dimension d and the number n (in odd d) or (n_L, n_R) (in even d) of covariantly constant spinor(s)

dimensions	holonomy	geometry	n or (n_L, n_R)
$4m+2$	$SU(2m+1)$	Calabi-Yau	(1,1)
$4m$	$SU(2m)$	Calabi-Yau	(2,0)
$4m$	$Sp(m)$	hyperKähler	$(m+1, 0)$
7	G_2	exceptional	1
8	$Spin(7)$	exceptional	(1,0)

2 $Spin(7)$ as a subgroup of $SO(8)$

群 $SO(8)$ の部分群 $SO(7)$ は，ベクトル表現 $\mathbf{8}_V$ において，ある一つの軸 (ゼロでないベクトル) を固定する部分群として定義することができ，$SO(7)$ の下で 8 次元のスピノル表現 $\mathbf{8}_S$ と共役スピノル表現 $\mathbf{8}_C$ は同値な表現である．よく知られているように $SO(8)$ の trial ity によって 3 つの表現 $\mathbf{8}_V, \mathbf{8}_S, \mathbf{8}_C$ は互いに移り合う．ベクトル表現 $\mathbf{8}_V$ の代わりに表現 $\mathbf{8}_S$ あるいは $\mathbf{8}_C$ を考えることにより部分群 $Spin^{\pm}(7)$ が定義される．以下では簡単のため $Spin^{+}(7)$ を考え，これを単に $Spin(7)$ と呼ぶことにする．$Spin(7)$ 部分群の下で $\mathbf{8}_S$ 表現に 1 次元の不変部分空間が存在する．これが covariantly constant spinor に他ならない．また $Spin(7)$ の下で表現 $\mathbf{8}_V$ と $\mathbf{8}_C$ は同一視される．この事実は $Spin(7)$ ホロノミーをもつ多様体上でコホモロジー的ゲージ理論を構成する際に重要な役割を果たす．

部分群 $Spin(7)$ は，8 元数 (octonion) の構造定数 c_{abc} を用いて次のように特徴づけられることが知られている．8 元数の生成元を $\{\mathbf{1}, e_a\}$ $(a = 1, \cdots 7)$ とするとき，その構造定数は

$$e_a \cdot e_b = c_{abc} e_c - \delta_{ab}\mathbf{1} \tag{5}$$

により定義される．c_{abc} は完全反対称であり，あるひとつの表示においてゼロにならない成分は

$$c_{123} = c_{516} = c_{624} = c_{435} = c_{471} = c_{673} = c_{572} = +1 \tag{6}$$

とその置換により得られるものである．ここで 4 階完全反対称テンソル ψ_{ABCD} $(1 \leq$

$A,B,C,D \leq 8)$ を

$$\psi_{abc8} = c_{abc} \ , \quad \psi_{abcd} = \frac{1}{3!}\epsilon^{abcdijk}c_{ijk} \ , \quad (1 \leq a,b,c,d \leq 7) \tag{7}$$

により定義すると c_{abc} の性質から

$$\psi_{ABPQ}\psi^{CDPQ} = 6(\delta_A^C\delta_B^D - \delta_A^D\delta_B^C) - 4\psi_{AB}{}^{CD} \tag{8}$$

が成り立つ．さて $SO(8)$ のリー代数 L の生成元を $\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA}$ とする．上の恒等式は $\psi_{AB}{}^{CD}$ を L の上の線形写像 2Ψ の成分と見なすとき $\Psi^2 + 2\Psi - 3 = (\Psi - 1)(\Psi + 3) = 0$ が成り立つことを意味する．したがって Ψ の固有値は 1 と -3 であり，固有空間分解 $L = E(1) \oplus E(-3)$ に対する直交射影は

$$P_1 = \frac{3}{4}\left(E + \frac{1}{3}\Psi\right) \ , \quad P_{-3} = \frac{1}{4}\left(E - \Psi\right) \tag{9}$$

で与えられる．Ψ のトレースがゼロであることを考慮すると，固有空間 $E(1)$ は 21 次元である．この空間が $Spin(7)$ のリー代数と見なされるものである．したがって，直交射影 P_1 を用いて $Spin(7)$ の生成元 G_{AB} を

$$G_{AB} = \frac{3}{4}\left(\Gamma_{AB} + \frac{1}{6}\psi_{ABCD}\Gamma^{CD}\right) \tag{10}$$

と定義することができる．このとき G_{AB} は $E(-3)$ 成分が消え

$$G_{AB} - \frac{1}{2}\psi_{ABCD}G^{CD} = 0 \tag{11}$$

が成り立つ．

8 次元のスピン接続 $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$ は $SO(8)$ のリー代数に値をとるが，ホロノミー群が $Spin(7)$ であるためには，実際の ω の値は，上で与えた拘束条件で特徴づけられる部分代数 $Spin(7)$ でなければならない．したがって $Spin(7)$ 多様体のスピン接続 ω が満たすべき条件として

$$\omega_{AB} - \frac{1}{2}\psi_{ABCD}\omega^{CD} = 0 \tag{12}$$

が得られる．この条件式が 8 次元における一般化自己双対方程式であり，8 元数の構造定数を用いていることから 8 元数的インスタントン (octonionic insta nton) 方程式と呼ばれている．なお，4 次元のインスタントン方程式は 4 元数 (quaternion) の構造定数に基づいていると見ることもでき，このような見方をすると，8 元数的インスタントン方程式

は最も自然な拡張ということができる．また，8 次元多様体が 2 つの 4 次元多様体の直積 (便宜的に底空間と内部空間とみなす) である場合に，この条件式を対応する $SO(8)$ の分解 $SO(4)_B \times SO(4)_I$ に従って分解すると，内部空間の $SO(4)_I$ に含まれる $SU(2)$ 成分を底空間の $SO(4)_B$ に含まれる一つの $SU(2)$ 成分と同一視するという条件が得られる．これは 4 次元の topological twist と解釈できる．

3 Metric of $Spin(7)$ holonomy

8 次元の $Spin(7)$ 多様体の具体例は余り多く知られていない．対応する 4 次元の $SU(2)$ 多様体の例は，重力的インスタントン解として知られており，コンパクトな場合は $K3$ 曲面，非コンパクトな場合が ALE 空間である．8 次元の場合，$K3$ 曲面に相当するコンパクトな例は Joyce によって構成されているが，具体的計量を与えることはほぼ絶望的である ($K3$ 曲面の場合でさえ $SU(2)$ ホロノミーを与える具体的計量は知られていない)．これに対して ALE 空間の計量は具体的に書き下すことができ，この最も基本的な場合が Eguchi-Hanson 計量である．8 次元において計量が具体的に知られている $Spin(7)$ 多様体の例は，この Eguchi -Hanson 空間の高次元版と見なされるものである．Eguchi-Hanson 空間は位相的には複素射影空間 CP^1 の余接束 $T^*(CP^1)$ の全空間と見なされる．また，余接束 $T^*(CP^1)$ は CP^1 の正準複素直線束と一致している．この空間の高次元化は，複素数を 4 元数に置き換えることによって実現される．4 元数的射影空間 HP^1 は 4 次元球面 S^4 に同相であり，この上に 4 元数 $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$ をファイバーとする 4 元数的正準直線束を構成する．このようにして構成した空間は，実は S^4 上の (複素化された) スピノル束と一致している．この 8 次元空間の計量を

$$d\hat{s}^2 = f^2 dr^2 + g^2 ds^2 + h^2(\sigma^i - A^i)^2 \ , \tag{13}$$

と仮定しよう．ここで

$$ds^2 = d\mu^2 + \frac{1}{4} sin^2\mu \cdot \Sigma_i^2 \tag{14}$$

は底空間 S^4 の標準的な計量であり，関数 f, g, h は動径座標 r のみの関数である．また Σ_i と σ_i は

$$d\Sigma_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Sigma_j \wedge \Sigma_k \ , \quad d\sigma_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_j \wedge \sigma_k \ . \tag{15}$$

を満たす $SU(2)$ の左不変 1 形式である．ここで $SU(2) \cong Sp(1)$ を長さ 1 をもつ 4 元数全体の空間と同一視している．さらに A^i は S^4 上のインスタントン数 1 をもつ BPS T

instanton

$$A_i = \cos^2 \frac{\mu}{2} \cdot \Sigma_i \tag{16}$$

を表している (Eguchi-Hanson 計量を書く際に S^2 上の Dirac monopole を用いることに相当) . この仮定の下で vielbein (余接束の直交基底) を

$$\begin{aligned} e^i = \frac{1}{2} g(r) \sin\mu \cdot \Sigma_i \ , \qquad e^{\hat{i}} = h(r)\,(\sigma_i - A_i) \ , \\ e^7 = f(r) dr \ , \qquad e^8 = g(r) d\mu \end{aligned} \tag{17}$$

とする . ここで $i = 1, 2, 3$ と $\hat{i} = 4, 5, 6 = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ であり , $(1, 2, 3, 8)$ は底空間方向 $(4, 5, 6, 7)$ はファイバー方向の添え字である . この vielbein から定まるスピン接続 ω に対して 8 元数的自己双対性を課すことにより未知関数 $f(r), g(r), h(r)$ に対する 1 階の微分方程式

$$\frac{g'}{fg} = -\frac{3}{2}\frac{h}{g^2} \ , \quad \frac{h'}{fh} = -\frac{1}{2h} + \frac{h}{g^2} \tag{18}$$

が得られる . なお , 自己双対性の条件が $Spin(7)$ 多様体上の大域的超対称性に由来することから , この微分方程式を $f(r), g(r), h(r)$ を力学変数とする超対称量子力学の時間発展方程式として導くこともできる . そして , そのひとつの解として

$$f(r) = \left(1 - (\frac{m}{r})^{10/3}\right)^{-1/2} \ , \quad g(r)^2 = \frac{9}{20} r^2 \ , \quad h(r) = -\frac{3}{10} r f(r)^{-1} \tag{19}$$

が存在する . これが S^4 上のスピノル束の全空間上で $Spin(7)$ ホロノミーをもつ計量の具体的表示である . この計量は Ricci flat 計量の例として Gibbons-Page-Po pe により最初に与えられた . また , 最近 Bakas-Floratos-Kehagias によって 8 元数的重力インスタントンとしての解釈を与えられている .

4 Octonionic Yang-Mills Instanton

我々の目標は , 前節で与えた $Spin(7)$ 多様体の上で Yang-Mills 理論を考え , そのインスタントン解を具体的に求めることである . これは 4 次元における $K3$ 曲面や ALE 空間上のインスタントンの高次元化に相当するものである . 曲率 F_{MN} に対するインスタントン方程式は

$$F_{MN} = \frac{1}{2} \psi_{MNPQ} F^{PQ} \tag{20}$$

である . この方程式はスピン接続 ω に対する方程式と同じ形をしているが , その意味は違うことに注意しなければならない . すなわち ω の場合は $SO(8)$ のリー代数 (内部空

間) の添え字に関する自己双対性であるのに対して , ゲージ場の曲率 F の場合は時空の微分形式の添え字に関する自己双対性である . また Bianchi の恒等式よりインスタントン方程式の解はゲージ場の運動方程式を満たしている . $Spin(7)$ ホロノミーをもつスピン接続から定義されるリーマン曲率テンソルは , 添え字の入れ替えに関する対称性から微分形式の添え字に関する自己双対性も同時に満たしている . したがって , スピン接続 ω は上の意味でのゲージ・インスタントン解を与えている . 我々は , この点に着目した . すなわち , スピン接続の具体形を参考にして $Spin(7)$ ゲージ場 A_M に対する Ansatz をおき , インスタントン方程式を具体的に書き下した . 我々の Ansatz は動径座標 r のみに依存する 3 つの未知関数を含むが , インスタントン方程式はそれらに対する 1 階の非線形微分方程式となる . ここで r が無限大となる漸近領域での解の振る舞いを分類してみると , 解は 6 つのクラスに分類されることが分かった . このうち初めの 4 つのクラスについては , 解の様子が比較的よく分かっていて , これらの解はいくつかの 4 次元 $SU(2)$ インスタントン解を 8 次元に埋め込んで " 重ね合わせた " ものと解釈できる . 実際 , これらのクラスの解について実際のゲージ群は $Spin(7)$ から $SU(2)$ の直積 (最大 3 個) で書ける部分群に落ちていることが確かめられる . その意味で真に 8 次元的なインスタントン解は残りの 2 つのクラスに属するものと考えられるのだが , 残念ながら現段階でそのような解の様子はよく分かっていない . 4 次元の $SU(2)$ インスタントン解の呪縛から抜け出すのは , 容易なことではないようである . なお , スピン接続 ω がゲージ・インスタントン解を与えていることは , すでに注意したが , これは第 5 のクラスに属している . また第 6 のクラスの解については , 無限遠での漸近挙動を参考にして級数解の形で解を求めることを試みている .

最後に高次元におけるインスタントン解のエネルギー・運動量テンソルに関わる問題点を指摘しておかなければならない . 4 次元のインスタントン配位については , インスタントン方程式からゲージ場のエネルギー・運動量テンソルが消えていることを示すことができる . しかし高次元ではこの証明は通用せず , 一般にインスタントン配位のエネルギー・運動量テンソルは消えていない . 背景の重力場は Ricci-flat であるので , このままでは Einstein 方程式と矛盾してしまう . これは 4 次元インスタントンを高次元 (例えば 1 0 次元) に埋め込んだ場合にも起こる現象で , このときインスタントンが存在する 4 次元に平行な方向ではエネルギー・運動量テンソルの成分は消えているが , それに直交する 6 次元成分は消えることはない . この問題を回避する方法としては Callan-Harvey-Strominger によって与えられているような超弦理論の brane 解に埋め込むことが考えられる . この

場合にはゲージ場以外に反対称テンソル場や dilaton 場が存在しているので，それらにより全体としてバランスをとることができる．同様に，8 次元のゲージ・インスタントンについてもこれを 1 1 次元の super membrane 理論に埋め込んで考えるのが物理的に自然ではないかと考えている．

付記：最終節の内容は，大阪市立大学の安井幸則氏との共同研究に基づくものです．また，この報告では参考文献を挙げることを省略しました．詳細については，近日中に hep-th に投稿予定の安井氏との共著論文とその文献表を参照して下さい．