Nikita Nekrasov 講義録

December, 1998

講義録作成[1] ： 橋本 幸士, 岸本 功 (京大理)

目 次

第 I 部　超共形ゲージ理論と AdS 超重力理論 **2**

1　Introduction と motivation **3**

2　Orbifold 理論 **6**

3　時空の状況 **12**

4　Orbifold から conifold への変形 **17**

5　まとめ **19**

第 II 部　$\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論における状態のカウント **21**

6　導入 **22**

7　D3-プローブ上の理論 **22**

8　M 理論への持ち上げ/引き落とし **27**

9　結論 **39**

[1] この講義録は「 Workshop "ゲージ理論の力学と弦双対性" 1998 年 12 月 16 日 (水) – 12 月 18 日 (金) 東京工業大学国際交流会館 」における Nekrasov 氏の講義に基づくものです。第 I 部が 16 日に、第 II 部が 18 日に行われました。

第 I 部

超共形ゲージ理論と AdS 超重力理論

(SUPER)CONFORMAL GAUGE THEORIES AND ANTI-DE-SITTER SUPERGRAVITY[2]

Nikita Nekrasov

1. Introduction と motivation
——哲学, D-brane と付随した場の理論, 特異な幾何からの conformal 理論

2. Orbifold 理論
——理論の構築 (：gauge 群, matter の内容, (超) 対称性) , β 関数の計算, 摂動論の解析

3. 時空の状況
——near-horizon limit, 超重力における変形

4. Orbifold から conifold への変形
——場の理論の実現, Higgs branch の幾何, 時空解釈 (conjecture)

[2]文献 [1, 2] に基づく。[3, 4, 5, 6, 7, 8] も見よ。

第 1 章 Introduction と motivation

双対性に関する動きの中でおそらく最も (そしておそらく唯一つの) 重要な教訓は、面白い物理は面白い幾何に関係しているという発想に立ち返るということである。Einstein の時代に比べての違いは、勿論量子的な物理量が古典的な幾何を通じて表現されうるという仮定である。例えば、$\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ gauge 理論の有効結合定数 (と長距離相関関数) は補佐的な楕円曲線 E_u の modular 変数 $\tau(u)$ を用いて表される :

$$y^2 = (x - u)(x^2 - \Lambda^4). \tag{1}$$

ここで $u = \langle \mathrm{Tr}\phi^2 \rangle$ は真空の moduli 空間を label する。

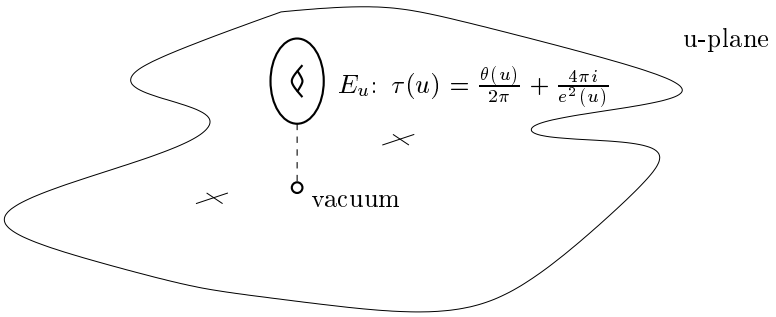


図 1: $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ gauge 理論の moduli 空間。

物理から幾何、また逆に幾何から物理への変換を理解するのに必要不可欠な道具は D-brane である。D-brane に関しての良い点は以下の二つである: (1) D-brane の上に弦が端点を持つので、いくつかの D-brane がお互いに重なるとその worldvolume 上に非可換 gauge boson が発生する。(2) D-brane は Ramond-Ramond 場の電荷を持っており、(適切な条件の下で) 弦理論における soliton として記述されうる。

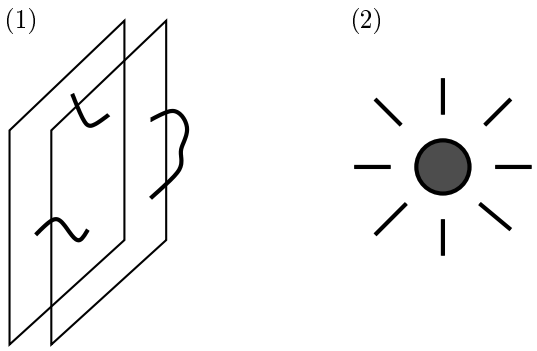


図 2: D-brane の二つの描像。(1) 開弦の端点としての D-brane、(2) 弦理論の soliton としての D-brane。

一般的な発想は、gauge 理論とそれに対応する soliton の背景を伝播する弦の理論を等しくするように、D-brane を用いる、ということである。もし (IIB 型超弦理論で) N 枚の D3-brane が平坦な空間内でお互いに重なっていると、この重なった brane は二つの記述法を持つ:

1. $\boxed{\mathcal{N} = 4\ U(N) \text{ gauge 理論}}$

   R 対称性は $SO(6)$ でそれは brane の transverse 方向 (横切る方向) における回転に対応する。この理論の場は (全て gauge 群の随伴表現で)

A_μ^{ij} : gluon
$\lambda_\alpha^{ij;b}$: gluino ($SO(6)$ の **4** 表現)
$\phi^{ij;I}$: 随伴表現の scalar ($SO(6)$ の **6** 表現)

(ここで、添字は $\mu = 1, \cdots, 4$, $i, j = 1, \cdots, N$, $b = 1, \cdots, 4$, $\alpha = 1, 2$, $I = 1, \cdots, 6$ を走る。)
理論における次元の無い結合定数は

$$\tau = \frac{4\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi} \tag{2}$$

であり, その時空における対応物は単に複素に組んだ弦の結合定数である: $\tau = \frac{i}{g_s} + a$, ここで g_s は弦理論の結合定数, a は RR axion である。作用には potential 項が含まれている:

$$\sum_{I<J} \mathrm{Tr}\left[\phi^I, \phi^J\right]^2. \tag{3}$$

低エネルギーの枠組みではこれは ϕ^I を互いに可換になるようにする。すると $\phi^I = \mathrm{diag}\,(\phi_1^I, \cdots, \phi_N^I)$ という gauge にいくことが出来、これは幾何的には、brane が離れており i 番目の brane の I 番目の座標が ϕ_i^I である、と解釈される (図 4 参照)。言い換えると、gauge 理論の scalar 場は D-brane の transverse 方向の動きを記述しているということである。

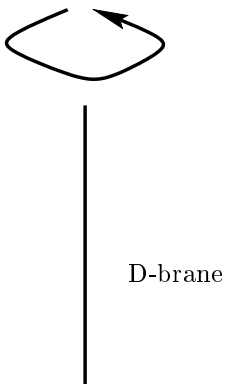


図 3: D-brane を横切る方向の回転。

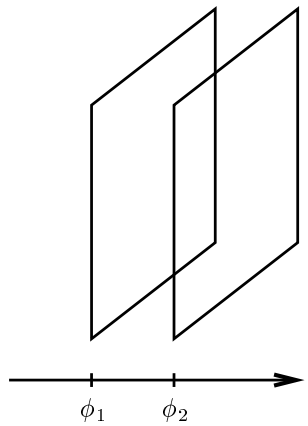


図 4: scalar 場の期待値は D-brane の位置を与える。

2. 超弦の背景での記述

metric は

$$ds^2 = f^{-\frac{1}{2}}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2\right) + f^{\frac{1}{2}}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right) \tag{4}$$

でありここで

$$f = 1 + \frac{4\pi N g_s l_s^4}{r^4} \tag{5}$$

となっている。r は brane を横切る方向の半径座標であり、$(t, \vec{x})$ は brane にそった 4 次元 worldvolume 座標である。source があるということが、transverse 空間の調和関数 f の形 (5) に現れている。N 枚の D-brane があるということもまた (5) 式に反映されている。また自明でない five-form の flux がある:

$$\int_{S^5} dA_4 = N. \tag{6}$$

ここで S^5 は brane を囲む。この背景は、brane の近くと、それに加えて遠くの漸近的平坦な領域の両方を記述している。$r \to \infty$ で (4) は平坦な空間となる。
さて、D3-brane の essence を見るために near-horizon 極限 $r \to 0$ を取ると、f の中の第一項 1 が落ちて、$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ という幾何になる。AdS_5 は一定の負の曲率 $-L^{-2}$ を持つ Anti-de-Sitter(AdS) 空間であり、曲率の半径は

$$L = (4\pi N g_{\mathrm{s}})^{\frac{1}{4}} l_{\mathrm{s}} \tag{7}$$

となっている。これは S^5 の曲率でもある。Yang-Mills 理論の量にこれを翻訳すると、$4\pi g_{\mathrm{s}} = g^2_{\mathrm{YM}}$ なので $4\pi N g_{\mathrm{s}} = \lambda_{\prime \mathrm{tHooft}}$ となる。もし $\lambda_{\prime \mathrm{tHooft}}$ が大きければ $L \gg l_s$ なので、弦理論の補正が小さく、metric(4) が信用できる。

超重力理論の記述は $\lambda_{\prime \mathrm{tHooft}}$ が大きければよい。その一方で gauge 理論は g_{s} や N が小さい方がうまく記述される。故に我々は二つの相補的な記述を持っていてそれらは異なる対象であるように見える。しかし、J. Maldacena は対応する弦理論の背景が exact に gauge 理論に等価であると示唆した [3]。この提案から意味あるものを引き出すため、gauge 理論の相関関数と弦理論の Green 関数を同一視する [5]:

$$\left\langle e^{\int_X {}^{A_i \mathcal{O}_i}} \right\rangle = Z\left[\widetilde{A}_i\right] \tag{8}$$

ここで X は 4 次元時空、$\mathcal{O}_i$ は gauge 理論の何らかの (chiral primary) operator、$\widetilde{A}_i$ は弦が伝播する 10 次元時空内の超重力理論の場であり、A_i はその境界での値である。

この提案の困難は、$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 上の弦理論を誰も理解していないということである。従ってしばらくの間、$g_{\mathrm{s}} \to 0$、$\alpha' L^{-2} \ll 1$ というその古典極限[3]のみを用いる。場の理論の言葉にこれらの条件を翻訳すると、'tHooft 極限

$$N \to \infty, \qquad \lambda = N g^2_{\mathrm{YM}} : \text{fixed and large} \tag{9}$$

となっている。この極限で AdS/CFT 対応は以下のようになる [4, 5]:

$$W_{\mathrm{YM}}[A_i] = S_{\text{cl. SUGRA}}\left(\tilde{A}_i\right) \tag{10}$$

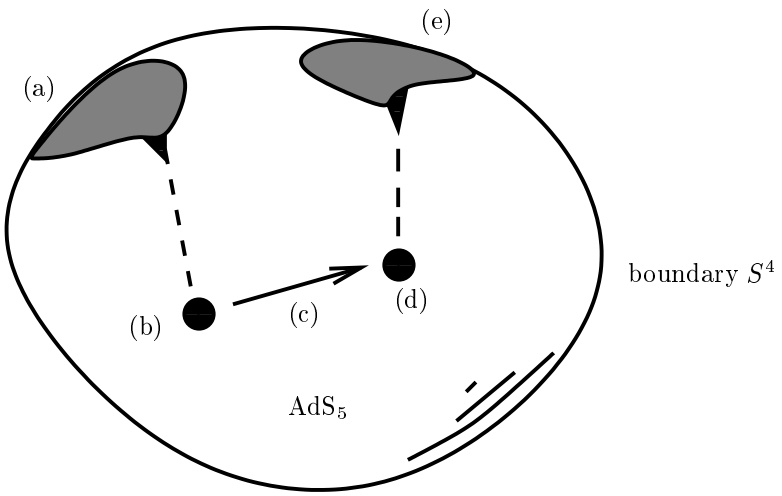


図 5: AdS 空間の isometry と boundary の対称性の模式図。(a): boundary S^4 上の現象、(b): その現象に対応する AdS 空間内の点、(c): isometry、(d): isometry で写った AdS 空間内の点、(e): 点 (d) に対応する boundary 上の現象。 (a) と (e) は $\mathcal{N} = 4$ SYM の対称性で結ばれている。

[3]これは上の $L \gg l_s$ と同じ。

この対応の美しい点は gauge 理論の (局所的な[4]) 対称性が幾何的に実現されていることである。殊に、$\mathcal{N}=4$ SYM は conformal 理論であり $SO(2,4)$ の不変群を持っている。conformal 群の Euclid 版は $SO(1,5)$ でありそして AdS_5 の Euclid 版は実際等質空間

$$\mathrm{AdS}_5 = SO(1,5)/SO(5) \tag{11}$$

となっていて、4 次元の conformal 群が 5 次元における isometry の群となっている。また $SO(6)$ の isometry をもつ S^5 もある。

$$S^5 = SO(6)/SO(5) \tag{12}$$

この群もまた gauge 理論の対称性—— R 対称性である。 全部合わせて、これらの群は超重力理論の対称性の部分群の中に統一される。

第 2 章 Orbifold 理論

この描像は unique だろうか、言い換えると、**gauge** 理論に対応する他の幾何があるのだろうか？

$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ の代わりに、他の面白い背景を探してみよう。一つの直接の一般化は、曲率 L^{-2} をもつ compact Einstein 多様体で S^5 を置き換えることである。(dA_4 という flux が通り抜けるような内部多様体が望ましい。) Einstein 多様体とは宇宙項を持つ Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = c g_{\mu\nu} \tag{13}$$

の解である。

さて、定数 $c=4$ をもつ 5 次元 Einstein 多様体 M^5 を与えて、その上に錘を作ることによって 6 次元 Ricci 平坦空間 Y^6 を作ることが出来る。M^5 を与え、r が小さくなるにしたがってその体積が小さくなるように、extra 次元を付け加える。錘の上の metric は

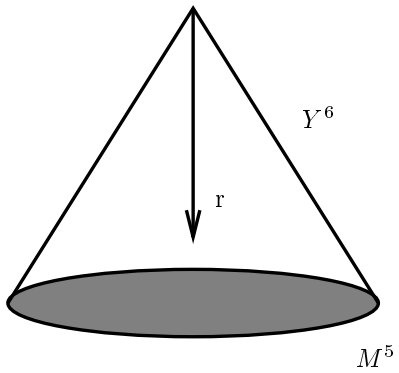


図 6: 錐 Y^6 と horizon 多様体 M^5。

$$ds_6^2 = dr^2 + r^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{14}$$

で与えられ、実際 Ricci 平坦である[5]。つまり $M^5 \leftrightarrow Y^6$ である。幾何 $\mathrm{AdS}_5 \times M^5$ は、M^5 上の錘 Y^6 の先端に位置した D3-brane の束の near-horizon 極限である、と言うことが出来る。最も簡単な例は勿論局所平坦な Y^6 である:

$$Y^6 = \mathbb{R}^6/\Gamma, \qquad M^5 = S^5/\Gamma, \tag{15}$$

ここで Γ は $SO(6)$ の何らかの離散部分群である。

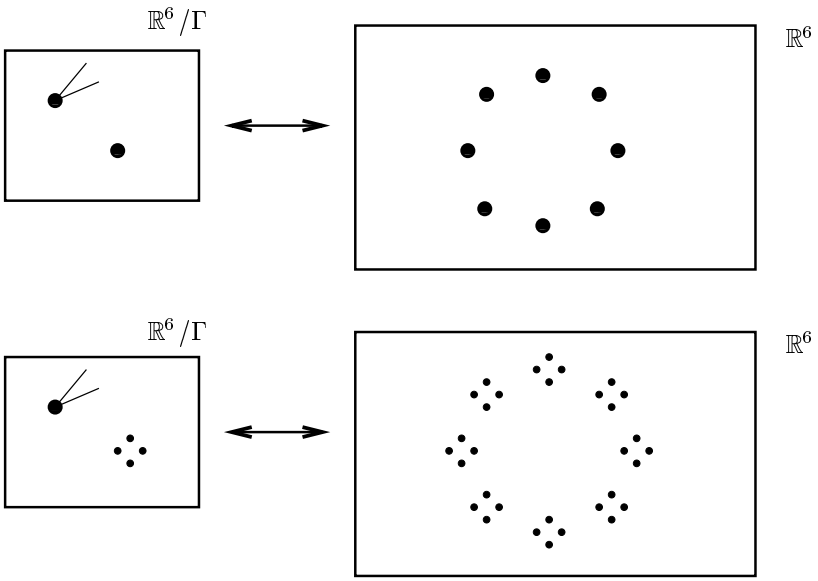


図 7: Γ で割った空間とその展開。$\bullet\!\!<$ は orbifold の固定点を表す。

この幾何に対応する gauge 理論はどんなものだろうか？$\Gamma \subset SO(6)$ は $\mathcal{N}=4$ gauge 理論の R 対称性の一部であるので、naive でしかも正しい推測は、$\mathcal{N}=4$ 理論を Γ の作用で不変なものに落とすということである。この時一つ微妙な点がある。もし一つの D-brane が $\mathbb{R}^6/\Gamma$ 上にあったとしよう、すると被覆空間 $\mathbb{R}^6$ 上には $|\Gamma|$ 枚の D-brane があるように見える。(図 7 を見よ。) brane の数 =gauge 群の color の数、であるので、商空間 $\mathbb{R}^6/\Gamma$ の上に N 枚の D-brane を持ってこようとすると、$U(N|\Gamma|)$ の $\mathcal{N}=4$ gauge 理論から始める必要がある。群 Γ は被覆空間内で brane の入れ替えとして作用し、それゆえ Chan-Paton 添字 i,j に作用する、ということを忘れないでおこう。color 添字は、Γ の正則表現の N 個の copy として変換しなければならない。これから、次の recipe を得る:
color 添字 $i=1,\cdots,N|\Gamma|$ を $(i,g): i=1,\cdots,N, g\in\Gamma$ という組にして (図 8 参照)、元々の場を不変なものに制限せよ:

$$A_\mu^{(i,gh)(j,g'h)} = A_\mu^{(i,g)(j,g')}, \tag{16}$$

$$h_{b'}^b \lambda_\alpha^{(i,gh)(j,g'h);b} = \lambda_\alpha^{(i,g)(j,g')b}, \tag{17}$$

$$h_{I'}^I \phi^{(i,gh)(j,g'h);I'} = \phi^{ij;I}. \tag{18}$$

ここで $h_{b'}^b$ は $SO(6)$ の **4** 表現に属する要素 $h\in\Gamma$ の行列要素であり、$h_{I'}^I$ は **6** 表現のそれである。

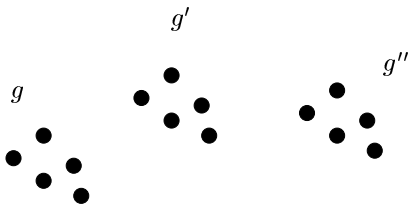


図 8: g, g', g'' は群 Γ の要素であり、群の orbit をなす。

この時点で、これが無矛盾な gauge 理論に導くもっとも一般的な射影の仕方であろうか、という疑問がわく。答えはもちろん否である。しかし、もし D-brane を用いた弦での記述を持つ様な射影を得たいのであれば、これがただ一つの

[4]これは非局所的な対称性 (例えば $\mathcal{N}=4$ SYM の対称性であると考えられている S-duality) は除く、という意味である。
[5]Ricci tensor を計算すると、$R_{\mu\nu}^{(6)} = R_{\mu\nu}^{(5)} - 4g_{\mu\nu}$ により、$R^{(6)} = 5(c-4)/r^2$ となる。ゆえに、$c=4$ の時 Ricci 平坦である。

tachyon の無い射影である[6]。

(質問) AdS 空間があったとして、それに対応する場の理論は unique に gauge 理論だということは分かるんですか？ つまり superconformal 対称性がわかっているだけなので $\cdots$

(回答) そうです。AdS 空間は superconformal 対称性に対応してます。

(質問) 対応を見るには多分超対称性が重要に思えますね。

(回答) そうですね、理論がただ一つの記述を持っているかは分かりません。つまり相関関数が何か他の conformal 理論で再現出来るかもしれません。けれど、重要なのは我々が制御しやすい場の理論は gauge 理論であるということです。私は、$\mathcal{N}=4$ superconformal 対称性をもつ場の理論で gauge 理論でないものを知りません。

さて、先の射影 (16-18) の式は代数的で少々複雑だが、結果として出てくる理論の場の内容を記述する、quiver diagram と呼ばれる[7]簡単な図がある [9]。$\mathbf{r}_0=\mathbb{C}$ と Γ の既約表現 $\mathbf{r}_1,\cdots,\mathbf{r}_k$ を頂点とする図を書き、そして次の規則に従って矢 $--\to$ と点線の矢 $\longrightarrow$ を頂点の間に引く。引き方は次の通り：

4 が Γ の表現であることを思い起こすと、**4** と $\mathbf{r}_i$ との tensor 積を取りそれを $\mathbf{r}_j$ に分解するのは簡単である。**6** も同様にする。

$$i \overset{a_{ij}^{\mathbf{6}}}{\longrightarrow} j, \qquad \mathbf{6}\otimes\mathbf{r}_i=\bigoplus_j a_{ij}^{\mathbf{6}}\mathbf{r}_j \tag{19}$$

$$i \overset{a_{ij}^{\mathbf{4}}}{--\to} j, \qquad \mathbf{4}\otimes\mathbf{r}_i=\bigoplus_j a_{ij}^{\mathbf{4}}\mathbf{r}_j \tag{20}$$

この様にすると、数の set $\{a_{ij}^{\mathbf{6}}\},\{a_{ij}^{\mathbf{4}}\}$ を得る。図の i から j を $\{a_{ij}^{\mathbf{6}}\}$ 本 ($\{a_{ij}^{\mathbf{4}}\}$ 本) の実線の (点線の) 矢で結ぶ。この図の読み方は次の通り：頂点は gluon となっており、それゆえ gauge 群は

$$U(N)\times U(Nn_1)\times\cdots\times U(Nn_k) \tag{21}$$

である ($n_l=\dim\mathbf{r}_l$)。i から j へ向く矢 $\longrightarrow$ は $(Nn_i,\overline{Nn_j})$ 表現の bi-fundamental scalar であり、点線の矢 $--\to$ は $(Nn_i,\overline{Nn_j})$ 表現の bi-fundamental fermion である。

図 9: quiver(Nekrasov 画)。

[6]これは次のように示される。まず、R を Chan-Paton 空間における orbifold 群の表現とすると、tachyon-free である条件は、$g\in\Gamma$ に対して

$$^\forall g\neq 1,\quad \mathrm{Tr}_R[g]=0$$

となる。これは次式に読み替えられる：

$$\mathrm{Tr}_R[g]=c\delta_{g,1}.$$

ここで c はなんらかの正整数である。
さて、表現 R は群 Γ の既約表現の和に分解できる：

$$R=\oplus_i\mathbf{r}_i\otimes\mathbb{C}^{w_i}.$$

この w_i は multiplicity である。群の δ 関数に対する有名な公式 $\delta_{g,1}=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_i(\dim\mathbf{r}_i)\mathrm{Tr}_{\mathbf{r}_i}[g]$ によって、tachyon-free の条件は

$$\mathrm{Tr}_R[g]=\frac{c}{|\Gamma|}\sum_i(\dim\mathbf{r}_i)\mathrm{Tr}_{\mathbf{r}_i}[g]$$

と書ける。すなわちこれは、

$$R=\mathbb{C}^{(c/|\Gamma|)}\otimes\left(\bigoplus_i(\mathbb{C}^{\dim\mathbf{r}_i}\otimes\mathbf{r}_i)\right),$$

つまり、R が $c/|\Gamma|$ 重の正則表現となっていることを示している。

[7]quiver とは、日本語で「 箙 (えびら) 矢筒 」である (9 図)。矢を入れておく入れ物のことで、ここで紹介する quiver diagram は矢がたくさん出てくることからそう呼ばれている。これに関する詳しい由来等は、http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/ebira-j.html を参考のこと。

もう少し明らかにするために、例を少し引こう。 $\Gamma = \mathbb{Z}_5$ とし、$\mathbb{Z}_5$ が次のように表現されるとしよう。$\mathbb{Z}_5$ は Γ の部分群であり、

$$\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \in SU(4) \approx SO(6), \qquad \omega^5 = 1 \tag{22}$$

で生成されるとする。$\mathbb{Z}_5$ の既約表現はすべて 1 次元であり、それらは自明な表現 $\mathbf{r}_0$ を含めて五つある。それらを $\mathbf{r}_l$ と書くと、この ω は $\exp(2\pi i l/5)$ のように作用する。すると式 (22) より、fermion に対しては図 10 左、scalar に対しては図 10 右の様な図を得る[8]。この図により、先ほどのように、例えば fermion は $SU(N) \times SU(N) \times SU(N) \times SU(N) \times SU(N)$ の、まず $(\mathbf{N}, \overline{\mathbf{N}}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ が三つ、次に $(\mathbf{N}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{N}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ が一つ、$\cdots$ というように読み取れる。

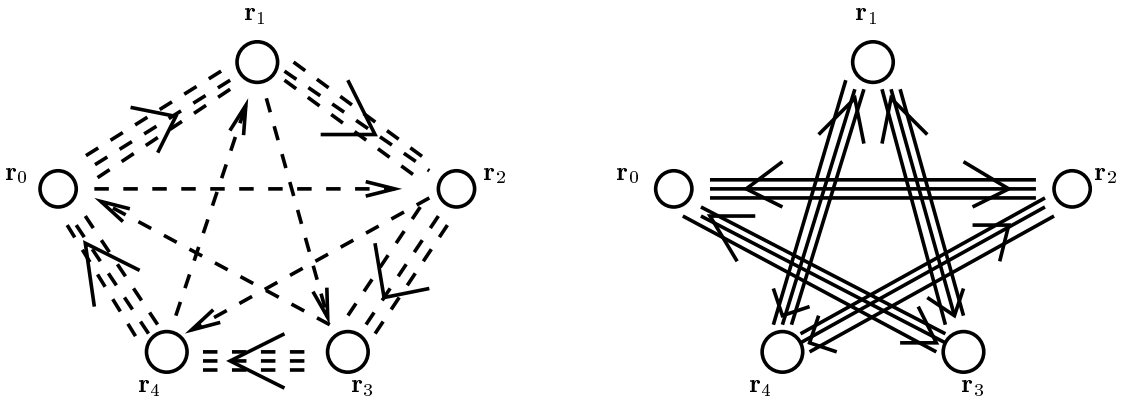


図 10: 左: fermion に対する quiver diagram。右: boson に対する quiver diagram。

この例の場合、fermion と boson では図の形が違う、即ち matter の数や内容が違うので、超対称性はない。つまり、$\mathcal{N} = 0$ である。次に超対称性の話をしよう。

超対称性

もし群 Γ が $SO(6)$ よりも小さい群の部分群ならば、gauge 理論はうまい具合に超対称性を持つだろう。もし $\Gamma \subset SU(2)$ なら (ここで $SU(2)$ では $\mathbf{6} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{c.c.}$ のように分解される)、$\mathcal{N} = 2$ 理論となる。もし $\Gamma \subset SU(3)$ なら (ここで $SU(3)$ では $\mathbf{6} = \mathbf{3} \oplus \overline{\mathbf{3}}$ のように分解される)、$\mathcal{N} = 1$ 理論となる。 Γ が $SO(6)$ の generic な部分群なら、超対称性はない。

このことは quiver diagram から読み取れると言ったが、超対称性があれば実線の数と点線の数は関係がある。これは、$SO(6)$ の $\mathbf{4}$ 表現や $\mathbf{6}$ 表現を部分群 $SU(2)$ や $SU(3)$ で分解した表式に関係している。例として $\Gamma \subset SU(2)$ の場合の場の内容を見てみよう。a_{ij} を次のように定義しよう:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{r}_i = \bigoplus_j a_{ij} \mathbf{r}_j. \tag{23}$$

すると $a^{\mathbf{4}}_{ij} = 2\delta_{ij} + a_{ij}$, $a^{\mathbf{6}}_{ij} = 2\delta_{ij} + 2a_{ij}$ となり、場を $\mathcal{N} = 2$ の $U(Nn_i)$ vector multiplet (δ_{ij} の部分) と $(Nn_i, \overline{Nn_j})$ 表現の bi-fundamental hypermultiplet (a_{ij} の部分) に組み直すことが出来る[9]。

[8] fermion の場合の quiver 図は (22) 式により簡単に読み取れる。つまり、対角成分のうち、三つが ω、一つが ω^2 なのでその分だけ頂点を動かして矢印で結べば良い。一方、boson の場合はこの $SU(4)$ の表現を $SO(6)$ に作用する形に焼き直せば分かる。$SU(4)$ の $\mathbf{4}$ 表現の作用する空間の添字を $a = 1, 2, 3, 4$ とすると、$\mathbf{6}$ 表現は反対称表現となっているので、$\mathbf{6}$ 表現の作用する空間の要素は $m_{[a,b]}$ と書ける。これに対し (22) 式の行列は

$$\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ -m_{12} & 0 & m_{23} & m_{24} \\ -m_{13} & -m_{23} & 0 & m_{34} \\ -m_{14} & -m_{24} & -m_{34} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 m_{12} & \omega^2 m_{13} & \omega^3 m_{14} \\ -\omega^2 m_{12} & 0 & \omega^2 m_{23} & \omega^3 m_{24} \\ -\omega^2 m_{13} & -\omega^2 m_{23} & 0 & \omega^3 m_{34} \\ -\omega^3 m_{14} & -\omega^3 m_{24} & -\omega^3 m_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

のように作用することから、scalar に対する quiver 図はある頂点から二つ回した先へ 3 本、三つ回した先へ 3 本の矢が出ているものとなる (図 10 右)。

[9] hypermultiplet を組むには複素 scalar 場が二つ要る (つまり実 scalar 場が四つ要る) が、それは $2a_{ij}$ と $2a_{ji}$ の組合わせから来る。

摂動論

さて、元々の動機に戻ろう。我々は空間 $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ から始めて、$\mathrm{AdS}_5 \times S^5/\Gamma$ を考えた。AdS の部分は触っていないので理論は conformal であろう。自然と期待されるのは、この共形性が'tHooft coupling の強結合極限だけではなく有限の場合でも成立するだろうということである。この conjecture を確かめるために、摂動論の technique を使って gauge 理論を解析しよう[10]。

gauge 結合定数が 1-loop で走らないこと [6] を示そう。l 番目の gauge 因子 $U(Nn_l)$ を考え、それを $SU(Nn_l)$ と $U(1)$ に分割しよう。$U(1)$ のことは忘れる (それは IR では free である)。1-loop β 関数は、(gauge boson の数、matter の数が分かっているので、良く知られている公式に代入するだけで良い)

$$\begin{aligned}\frac{d}{d(\log\mu)}g_l^{-2} \qquad &\propto N\left[-11n_l+\sum_j(a^{\mathbf{4}}_{lj}+a^{\overline{\mathbf{4}}}_{lj})n_j+\frac{1}{2}\sum_j a^{\mathbf{6}}_{lj}n_j\right]\\ &=\left[-11+2\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 6\right]Nn_l=0.\end{aligned} \tag{24}$$

ここで、(19)(20) 式の両辺の次元を数えて得られる

$$6n_i=\sum_j a^{\mathbf{6}}_{ij}n_j, \qquad 4n_i=\sum_j a^{\mathbf{4}}_{ij}n_j \tag{25}$$

を用いた。$\mathcal{N}=2$ の場合には、この結果は実際非摂動的補正を含めて all order で有限であることを意味する。つまり、$\mathcal{N}=2$ ($\Gamma\subset SU(2)$) の時には、AdS/CFT 対応は全ての結合定数の値の領域で成立しているようである[11]。

また、$\mathcal{N}=1$ の場合は、超対称性は β 関数をきっちり決められるほど強くない。この場合は matter 場の anormalous 次元と *exact* な β 関数との関係を用いることによって、2-loop まで β 関数が消えることを示すことが出来る。以下、それを証明しよう。

chiral 場の anormalous scaling 次元の行列は、1-loop で (我々の notation では)

$$\gamma^{(1)}_{a\overline{d}}\propto\sum_{b,c}h_{abc}\overline{h}_{dbc}-2\delta_{a\overline{d}} \tag{26}$$

と与えられる。ここで添字 a,b,c は chiral multiplets を label する添字である。h_{abc} は湯川結合定数。この式は次の 11 図の様な 1-loop Feynman diagram から来ている。この γ が消えると 2-loop まで β 関数が消えることが分かる[12]。

$\mathcal{N}=4$ 理論では scalar 場が三つあり、それらの間の湯川結合定数は $h_{abc}=\epsilon_{abc}$ である。故に、$\epsilon_{abc}\epsilon_{dbc}=2\delta_{ad}$ により $\gamma^{(1)}_{a\overline{d}}=0$ である。発想は、$\mathcal{N}=1$ の場合にもうまくいくようにこの関係式を「射影」するということである。そして、それは次のようにうまく行く。(それは実は少し大変な計算である[13]。)

> (質問) David Gross の意見を引用すると、β 関数の 2-loop の係数は scheme に依存しているのではないかという懸念 [11] があると思います。もしある scheme で $\mathcal{N}=1$ 理論で 2-loop まで消えていたとすると、scheme に依らず all order で β 関数が消えることとの違いはどう議論するのですか？Shifman-Vainshtein の β 関数を議論するのに、scheme を選べると思うのですが？
>
> (回答) 第一に、それは可能性があります。第二に、多分、ある scheme で $\beta=0$ を言うことができそしてそれが scheme に依存しないことを言えるんだと思います。そのようにできると思いますが $\cdots$

[10] ここから先しばらくの議論は、超重力理論からのものではないことに注意しよう。単に gauge 理論の 1-loop か 2-loop の話である。gauge 結合定数が小さくそして N が大きくない場合を考えている。AdS/CFT 対応のある種の証明であるが、完全ではない。

[11] これは驚きである。というのは、$\mathcal{N}=2$ の場合、幾何が特異であることが後で分かるからだ。しかし、AdS/CFT 対応で重要なのは、本当はこの背景上の弦理論を考えなければいけないのであって、超重力理論では無い、ということだ。幾何が特異なら超重力理論は break down するが弦理論は特異ではない、というのは良く知られていることである。

[12] exact β 関数は

$$\beta(g)=-\frac{1}{16\pi^2}\frac{3T(A)-\sum_i T(R_i)(1-\gamma_i)}{1-T(A)g^2/8\pi^2} \tag{27}$$

で与えられる [10, 11]。ここで、$T(R_i)$ は表現 R_i における生成子の規格化因子である：$\mathrm{Tr}(T^aT^b)=T(R_i)\delta^{ab}$. A は随伴表現を示す。和 i は、全ての matter multiplets を走る。(27) 式の分母の $T(A)g^2/8\pi^2$ と分子の異常次元 γ_i を zero とおくと、β 関数は 1-loop のものとなる。異常次元に対する 1-loop の寄与 (26) が消えると、β 関数の 2-loop までが消えることが分かる。

[13] つまり diehard 向けですが $\cdots$ (笑)

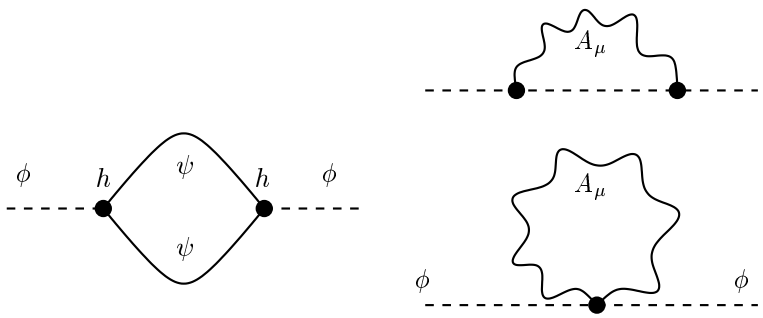


図 11: anormaous scaling 次元を与える Feynman graph。左: fermion の 1-loop。右: gauge boson が飛ぶ 1-loop。それぞれ (26) 式の右辺第一項、第二項を与える。

$\mathcal{N}=1$ の場合、Γ の既約表現によって与えられる頂点を考えよう。i 番目の頂点から j 番目の頂点へ向かう k 本の矢は、表現のテンソル積 $\mathbf{3}\otimes\mathbf{r}_i$ の中に k 回 $\mathbf{r}_j$ が出てくれば現れる。これらは $(\mathbf{N}_i,\overline{\mathbf{N}_j})$ 表現に属する k 個の chiral multiplet $\Phi^{ij}_{f_{ij}}$ に対応している。この場合 $\mathcal{N}=4$ 理論に起因する superpotential は

$$\mathcal{W}=\sum_{i,j,k}\sum_{f_{ij},f_{jk},f_{ki}} h^{i,j,k}_{f_{ij},f_{jk},f_{ki}}\Phi^{ij}_{f_{ij}}\Phi^{jk}_{f_{jk}}\Phi^{ki}_{f_{ki}} \tag{28}$$

で与えられる。ここで

$$h^{i,j,k}_{f_{ij},f_{jk},f_{ki}}=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(Y_{f_{ij}}\right)^{\alpha}_{v_i\bar{v}_j}\left(Y_{f_{jk}}\right)^{\beta}_{v_j\bar{v}_k}\left(Y_{f_{ki}}\right)^{\gamma}_{v_k\bar{v}_i} \tag{29}$$

であり、Y は $\mathbf{3}\otimes\mathbf{r}_i\to\mathbf{r}_j$ の分解における Clebsh-Gordan 係数である。

さて、W_{ij} を次の式で定義される multiplicity space としよう：

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{r}_i=\bigoplus_j W_{ij}\otimes\mathbf{r}_j.$$

ここで W の次元は前に言っていた a^3_{ij} である。複素共役表現に対しては $\overline{\mathbf{3}}\otimes\mathbf{r}_i=\bigoplus_j W^*_{ji}\otimes\mathbf{r}_j$ である。Yukawa 結合定数は次のようにも定義されるだろう：まず $\mathbf{3}^3$ の中の canonical element $\omega=\epsilon^{\alpha\beta\gamma}e_\alpha e_\beta e_\gamma$ を考える。写像

$$h:v\mapsto h(v)=\omega\otimes v\qquad(v\in\mathbf{r}_i,\ \ \omega\otimes v\in\mathbf{3}^3\otimes\mathbf{r}_i)$$

を空間 W の基底 Y で展開すると

$$h(v)=\sum_{j,k}\sum_{a,b,c}h^{ijk}_{abc}Y_a\otimes Y_b\otimes Y_c\otimes v \tag{30}$$

となる。ここで添字 a,b,c は以前に f_{ij},f_{jk},f_{ki} とよんでいたものであり、$Y_a\in W_{ij}$、$Y_b\in W_{jk}$、$Y_c\in W_{ki}$ である。次の diagram を考えよう：

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overset{\rho}{} & \\ & & \mathbf{r}_i & \longrightarrow & \mathbf{3}^3\otimes\bar{\mathbf{3}}^3\otimes\mathbf{r}_i \\ \xi & & \downarrow & \swarrow & \eta \\ & & \mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}\otimes\mathbf{r}_i & & \end{array}$$

ここで $v\in\mathbf{r}_i$ に対し $\rho(v)=\omega\otimes\bar{\omega}\otimes v$ であり、また $\xi(v)=e_\alpha\otimes\bar{e}_\alpha\otimes v$、$\eta(a\otimes b\otimes c\otimes\bar{d}\otimes\bar{e}\otimes\bar{f}\otimes v)=\langle\bar{d},c\rangle\langle\bar{e},b\rangle a\otimes\bar{f}\otimes v.$ これと恒等式 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\delta\beta\gamma}=2\delta^{\alpha\delta}$ の意味するところは

$$\eta\circ\rho=2\xi \tag{31}$$

となる。さて、(31) 式を基底 $Y_{f_{ij}}$ で展開しよう。まず、写像 ρ は簡単に次のように表現される：

$$\rho(v) = \sum_{j,k,m,n} \sum_{a,b,c,d,e,f} h_{abc}\bar{h}_{def} Y_a \otimes Y_b \otimes Y_c \otimes \bar{Y}_f \otimes \bar{Y}_e \otimes \bar{Y}_d \otimes v \tag{32}$$

ここで $Y_a \in W_{ij}$、$Y_b \in W_{jk}$、$Y_c \in W_{ki}$, $\bar{Y}_d \in W^*_{mi}$、$\bar{Y}_e \in W^*_{nm}$、$\bar{Y}_f \in W^*_{in}$ であり、添字 j,k,m,n について和をとった。写像 η のもとでゼロに写像されない vector は $b = e, c = f$ のものだけなので、これより $m = j, n = k$ であって

$$\eta \circ \rho(v) = \sum_{j,k} h^{ijk}_{abc}\bar{h}^{ijk}_{dbc} Y_a \otimes \bar{Y}_d \otimes v \tag{33}$$

となる。一方でこれは (31) により、$\xi(v) = 2Y_a \otimes \bar{Y}_a \otimes v$ に等しい。故に、$\sum_{j,k} h_{abc}\bar{h}_{dbc} = 2\delta_{ad}$ であり式 (26) の右辺は zero となることが示された。

これまでは、より高次の loop を考えることは困難に見える。しかし、[12] で示されたように、$\mathcal{N} = 4$ の理論の planar diagram を射影された理論の planar diagram に map することができる。すると、$\mathcal{N} = 4$ の理論では β 関数は all order で zero なので、射影された orbifold 理論でも β 関数への全ての planar diagram の寄与は消える、ということを示すことができる。この様に、'tHooft coupling の all order で conformality が示された。もしこの AdS/CFT 対応をを壊すようなものがあるとすれば、それは非摂動的効果である。

第 3 章　時空の状況

場の理論を使って解析できるような、次の問いは、共形場理論を変形するとどうなるか、である。もっとも簡単で面白い例である $\mathcal{N} = 2$ 理論を見てみよう。それらは A-D-E 型の拡大 Dynkin 図で分類される [13]。下に描いた図 12、13 は、quiver diagram である。$\mathcal{N} = 2$ の場合 fermion と boson は関係がついているので、必要な情報は vector multiplet と hyper multiplet のことだけである。

例えば、$\mathbb{Z}_{k+1}$ 群では A_k 型の多角形の quiver diagram になる (12 図参照)。 ここで、$\mathbb{Z}_{k+1}$ は次のように埋め込まれている：

$$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \in SU(2), \qquad \omega^{k+1} = 1. \tag{34}$$

頂点は、$\mathbb{Z}_{k+1}$ が可換群なので既約表現が全て一次元であり、故に得られる理論の場は、$k+1$ 個の $U(N)$ の vector multiplet と、辺に相当する bi-fundamental 表現の hyper multiplet である。

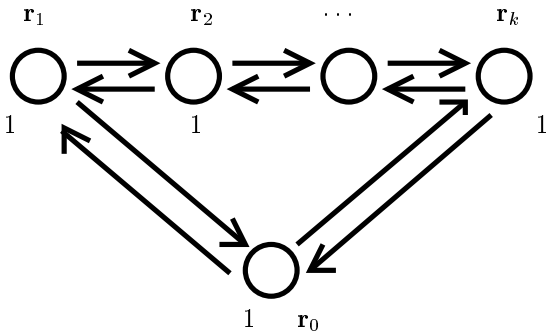
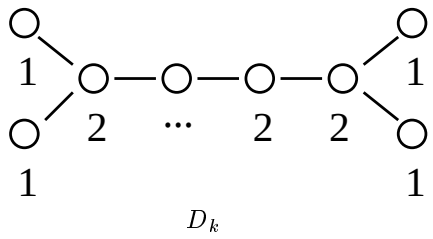


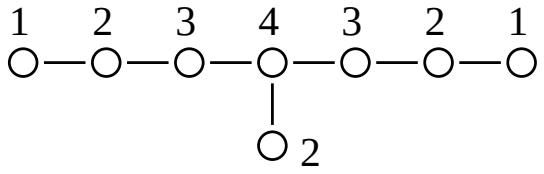
図 12: $\Gamma = \mathbb{Z}_k$ に対応する quiver diagram。頂点についている数字 1 は、一次元表現であるということを示す。

D_k の場合は、13 図に示されているように、群は $U(N)$ と $U(2N)$ になる。E_6 なら $U(3N)$ まで、E_7 なら $U(4N)$ まで、E_8 なら $U(6N)$ まで、となる。

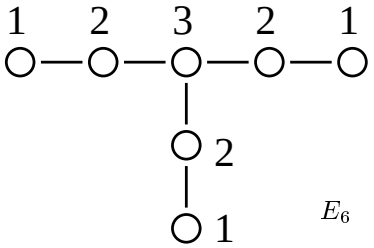
これらの理論が面白いのは、他に面白い realization の仕方を持つからである (少なくとも A-D-E 型については)。例えば、brane が orbifold に位置している状況、または 5-brane と F 理論の場合など。12,13 図で示されたこれらの理論は



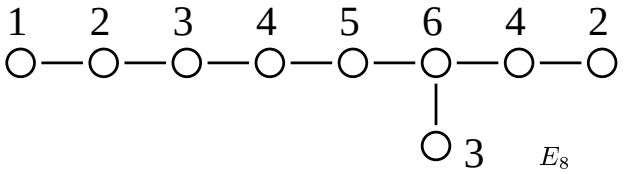
D_k



E_7



E_6



E_8

図 13: 他の A-D-E 分類に対応する quiver diagram。頂点を結ぶ直線は、先の A_k の場合と同じ $\rightleftharpoons$ が省略されていると理解されたい。

marginal な変形を許す、ということが知られている。それはそれぞれの gauge 因子の coupling が任意に取れるということである。実際の orbifold 点では、各 gauge 結合定数 τ_l が $\mathcal{N}=4$ の結合定数 τ を用いて次のように表される：

$$\tau_l = \tau \frac{n_l}{|\Gamma|} \tag{35}$$

ここで n_l は先に言ったように Γ の l 番目の既約表現の次元であり、$|\Gamma|$ は Γ の位数である[14]。

（質問）orbifold 点とはどういう意味ですか？

（回答）説明しましょう。まず、$\mathcal{N}=4$ の Lagrangian があります。そしてそれを、Γ で不変なものに制限します。それらを再び Lagrangian に代入すると、幾つかの gauge 群を持った理論になっています。それから結合定数を読み取ることができます。それが (35) 式です。

さて、自然な問いは次のようなものだろう: これらの coupling の超重力理論側での対応物は何であるか？ そして、更に、orbifold の解から変形すると超重力理論側では何が起こるだろうか？

---

[14] Γ が可換群 $\mathbb{Z}_k$ の場合、これは次のように簡単に分かる。数の factor を除くと、orbifold の操作をとる前ととったあとでは Lagrangian は

$$\mathrm{Im}\tau(F^a_{\mu\nu})^2|_{\text{projected}} = \sum_l \mathrm{Im}\tau_l (F^{(l)a_l}_{\mu\nu})^2$$

のように関係している。(それぞれの理論では generator は $\mathrm{Tr}T^aT^b = \delta^{ab}/2$, $\mathrm{Tr}T^a_{(l)}T^b_{(l)} = \delta^{ab}/2$ と規格化されている。)群 Γ の生成子の Chan-Paton 空間のなかでの表現は

$$\Gamma \ni g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \omega & \\ & & & \ddots \\ \omega^{k-1} & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & \omega^2 \\ & & & \ddots \\ \omega^{k-2} & & & \end{pmatrix}, \cdots$$

の $|\Gamma|$ 個となっており、この作用 $g^{-1}T^a g$ よって不変な generator に限ると、

$$(F^a_{\mu\nu})^2|_{\text{projected}} = 2(F^a_{\mu\nu}T^a|_{\text{projected}})^2 = \sum_l n_l \cdot 2(F^{(l)a}_{\mu\nu}T^{(l)a})^2 = \sum_l n_l (F^{(l)a}_{\mu\nu})^2. \tag{36}$$

ここで今の場合 $\mathbb{Z}_k$ の表現は全て一次元表現であり、全ての $l = 1, 2, \cdots, |\Gamma|$ に対し $n_l = 1$ となっていて、上の生成子のそれぞれが同じ寄与をする。上式 (36) と、作用にある射影された空間の積分が $1/|\Gamma|$ となっていることを用いると、$n_l = 1$ の場合の orbifold における結合定数の関係式 (35) が理解できる。

この問いに答えるため、$\Gamma \subset SU(2)$ の場合に S^5/Γ の幾何を調べてみよう。群 Γ は $\mathbb{R}^6$ の中の $\mathbb{C}^2$ にしか作用しないので、その $\mathbb{C}^2$ のなかの固定点は $\mathbb{R}^6$ の中の固定面になる。near-horizon 極限を取ると、この固定面は S^5 の中の固定円になる——固定円は A-D-E 型の特異点である (14 図参照)。

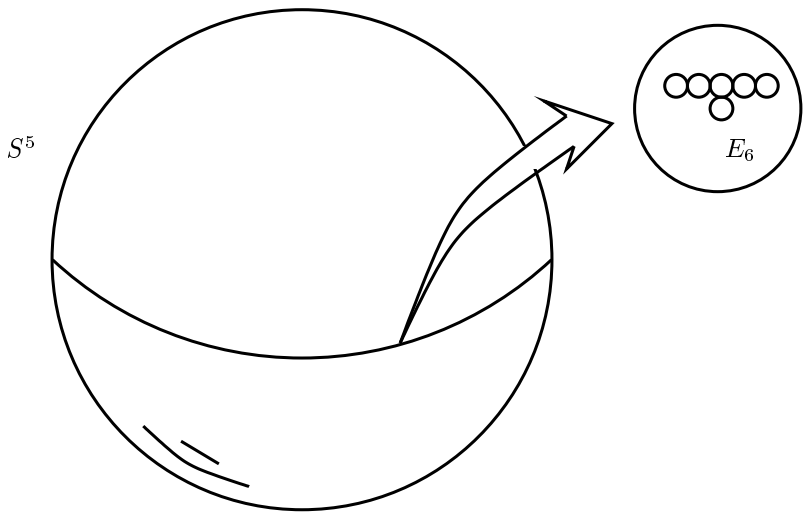


図 14: S^5 の中にある fixed circle。近づいて見るとこの S^1 はつぶれた 2-cycle となっていて、E_6 の場合この図のようにつぶれている。

共形場理論を得るための orbifold は、このように幾何が特異になっている (D3-brane は orbifold の固定点上にある)。つぶれている 2-cycle は対応する Dynkin 図になっていて、実際大きさは zero である。さて、これを blow-up して大きさを zero で無いようにすると、幾何は特異でなくなり、S^5/Γ の代わりに S^5 になる。しかしこれは marginal な変形ではない。

marginal な変形を得るためには、我々が超重力理論ではなく実際は弦理論を対象にしていることを思い起こさねばならない。すなわち、幾何は特異になっているが、よく知られているように、もし世界面の θ 角 [14] が zero でなければ弦理論自身は特異ではない [15]。そして、また知られているように、orbifold 点での θ 角は zero ではなく、次のようになっている：

$$\int_{\Sigma_l} B^{\mathrm{NS}} = 2\pi \frac{n_l}{|\Gamma|}. \tag{37}$$

ここで Σ_l は対応する 2-cycle である[15]。例えばこれは $\mathbb{Z}_2$ 特異点の場合

$$\theta_{\mathrm{ws}} = \pi \tag{38}$$

を導く[16]。

IIB 型超弦理論には NS-NS 2-form B^{NS} に加えて Ramond-Ramond 2-form B^{RR} がある。これは, 弦理論の対称性である $SL_2(\mathbb{Z})$ を用いると B^{NS} の双対である。S^5/Γ におけるつぶれた 2-cycle を通り抜ける B^{RR} の flux を turn on すると、$\mathrm{AdS}_5 \times S^5/\Gamma$ の形の特異な幾何を持つ一般的な IIB 型の背景を得る。次の notation を導入しよう:

$$2\pi\tau_l = \tau \int_{\Sigma_l} B^{\mathrm{NS}} + \int_{\Sigma_l} B^{\mathrm{RR}}. \tag{39}$$

我々の主張は、これが D-brane 上の l 番目の複素 gauge 結合定数と等しいということである。(例えば特に orbifold 点にいくと、(39) 式の第二項は消え、第一項は (37) 式を通じて gauge 結合定数の表式 (35) に一致することが分かる。) これ

[15] 右辺の factor $n_l/|\Gamma|$ は、分子は n_l 回 2-cycle が巻いていること、分母は orbifold 特異点を囲む solid angle が通常の $1/|\Gamma|$ 倍になっていること、からわかる。

[16] この $\mathbb{Z}_2$ 特異点は、$T^4/\mathbb{Z}_2$ ($\sim$ singular $K3$) の時に出会うものである。この時 16 個の特異点がある。特異点で $\theta_{\mathbf{ws}} = \pi$ となっており、それ故 worldsheet instanton[14] が -1 の weight を持っていることが知られている。

を見る一番簡単な方法は、D3-brane とそれを横切る方向につぶれた 2-cycle を、2-cycle に巻き付いた D5-brane であるとして実現することである。cycle は size が zero であって D3-brane に見えるが、B 場の flux があるのでそれが brane の有効結合定数をずらす。

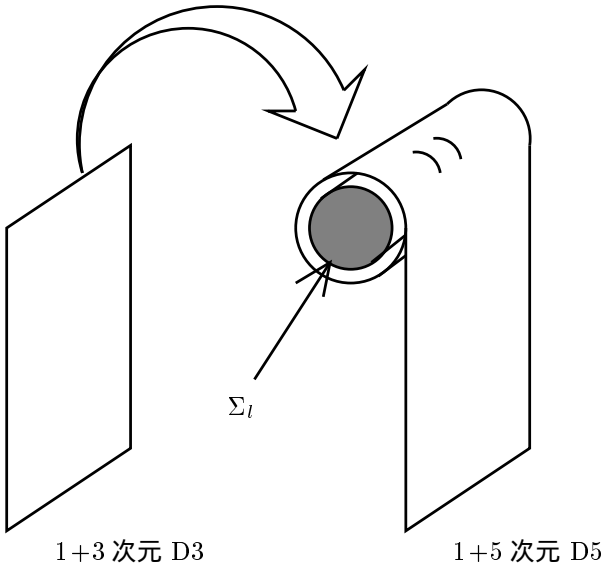


図 15: D5-brane が 2-cycle に巻き付いている。

話が少し脱線するが、ここに来て、どうしてつぶれた 2-cycle があるのかと聞く人がいるだろう[17]。特異性が A_k の場合を考えよう (16 図左)。これらの cycle は互いに独立ではない。小さい cycle 四つで大きい cycle になる。しかしそれにも関わらず、D5-brane をそれぞれの cycle に巻き付けることができる (16 図右)。どのようにかというと、D5-brane の電荷が全て足せば zero になるように、である。例えば、小さい cycle に D5-brane を巻き付けると、大きい cycle に anti-D5-brane を巻き付けていないといけない。しかし、B 場があることによって、D3-brane の電荷は消えない。故に、D3-brane を得る。しかしこれが BPS であるためにはこれらは全て互いに重なっていなければいけない。そうでなければ brane - anti-brane の配位となって、超対称性の幾つかを壊してしまう。これが、つぶれて size が zero になった 2-cycle がある理由である。

さて、話を戻して、結合定数が (39) 式で与えられることを具体的に見てみよう。D5-brane の worldvolume 理論には次の形の CS 結合があることを思い起こそう :

$$\int B^{\mathrm{RR}} \wedge \mathrm{Tr}(F - B^{\mathrm{NS}}) \wedge (F - B^{\mathrm{NS}}). \tag{40}$$

これが意味するのは、B^{RR} を turn on すると gauge θ 角が変化するということである。そして、$SL_2(\mathbb{Z})$ 不変性によって B^{NS} は gauge 結合定数を変化させると期待される。実際、それは Born-Infeld 作用から見ることが出来る : $1+5$ 次元の空間が

$$\mathbb{R}^{1,3} \times \Sigma \tag{41}$$

の形をしておりそこでは 2 次元空間 Σ が zero metric をもちしかも B^{NS} は non zero であるとする。すると BI 作用は次の項を含む :

$$\begin{aligned} \int d^6x \ \mathrm{Tr}\det{}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & B^{\mathrm{NS}} & 0\cdots 0 \\ -B^{\mathrm{NS}} & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & G+F \end{pmatrix} \\ \propto \left| \int_{\Sigma_l} B^{\mathrm{NS}} \right| \times \int d^4x \ \mathrm{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \cdots . \end{aligned} \tag{42}$$

[17] だれも聞かないので自分で聞きますが ··· (笑)

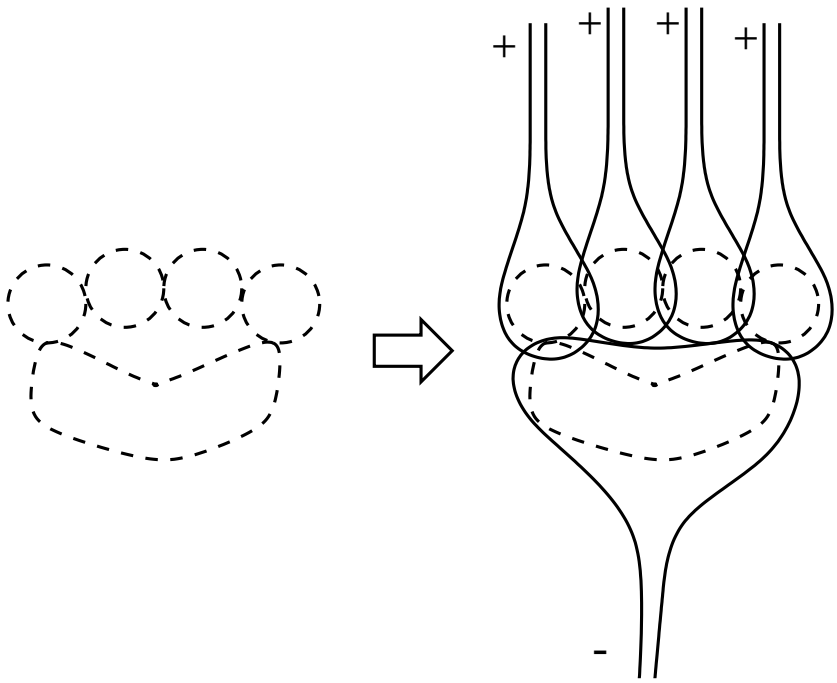


図 16: 左：A_k 型の特異性。右：一つの円にそれぞれ D5 が巻き付く。+ は通常の brane、− は anti-brane を表す。

ここで $G+F$ は $1+3$ の方向の成分である。すなわちこれで、$|\int B^{\rm NS}|$ が gauge 結合定数として振る舞い、(39) 式と一致した[18]。

さて、今までは conformal な理論、そして弱結合で conformal であろうと思われる理論、を考えてきた。それらは有用な道具であるが、本当に面白いというわけではない。また、超重力理論側では大したことをしたわけではない——離散部分群 Γ で割っただけで、局所的には同じ $\mathrm{AdS}_5\times S^5$ の幾何である。おそらく最も面白い問いは、もっと面白い理論に移れるか、そして古典的な弦の幾何の言葉で繰り込み群を理解することができるか、ということであろう。何故このような関係がありそうなのか、という理由は、次の通りである。

直観的な議論をしてみよう。二つの QFT を結ぶ flow があるとする。中間の scale μ では 場 $\Phi(\vec{x},\mu)$ と結合定数 $g(\mu)$ があるだろう。μ 依存性が extra な、すなわち 5 番目の、次元への場の依存性に関係している、と考えるのは面白い。もちろん、$(\vec{x},\mu)$ で張られる 5 次元時空 B^5 が AdS_5 に似ているとは期待しない。しかし、flow の終点では QFT が CFT になっている。つまり端では対称性により AdS_5 となっていることが期待される。

もっと特定の場合を考えてみよう。$\mathcal{N}=2$ の orbifold 理論から出発する (ここから出発する理由は、この理論の面白い重力での記述を我々が知っているからである。) これに relevant な演算子で摂動を掛ける。そして、$\mathrm{AdS}_5\times S^5/\Gamma$ 上の超重力理論の対応する場を見つける[19]。次に、超重力理論の運動方程式の対応する解を見つける。すると、局所的に積 $B^5\times M^5$ の形 (M^5 は compact 多様体) をした多様体 X^{10} (もともと 10 次元に住んでいたので) を得るだろう。$\mu\to\infty$ の極限で relevant な演算子の効果は消えるので $M^5\to S^5/\Gamma$ となる。最初の質問は——逆に $\mu\to 0$ の極限では M^5 は何であろうか[20]？

ここで言っておくべきことは、今までされた仕事 [16] は、ほとんどこの方法でなされたということである。彼らは単に gauge 化された超重力理論 [17] の運動方程式を解いた。彼らの得た解は、AdS の様な二つの漸近性を持つ。 つまり、IR でも AdS の対称性を持つ。私が言いたいのはこの種の全ての解 (二つの AdS の漸近性を持つ解) がこの問題を解くわけではないということである。何故なら、もしこの問題の解を本当に得れば非常に強い主張をすることができる。つま

[18] これにより、時空の理論の S-duality と gauge 理論の S-duality が consistent に現れていることが分かる。
[19] もっと正確には、$\mathrm{AdS}_5\times S^5/\Gamma$ 上の弦理論を考えないといけない。実際 relevant な演算子は $\mathrm{AdS}_5\times S^5/\Gamma$ 上の局所的な固定円上の場から来るので、超重力理論ではなく弦理論でないといけない。
[20] S^5/Γ は UV の理論で、$\mu\to 0$ で IR の理論になる、と言うことができる。

り任意の energy scale で任意の相関関数を計算できる。このことは、超重力理論の解を非常に特殊なものに強制することになる。つまり、energy scale μ の order の momentum を持つ場を turn on したとすると、それは例えば、解をだめにしてしまうような black hole のような特異点を生成してはいけない。また、解は常に内部空間 M^5 と高次元空間 B^5 の積の形であると期待されるが、一方 gauge 化された超重力理論の一般的な解を見ると、内部空間が何なのか全く分からない。

故に、問題全体がまだ現れていない。幾つかの仕事はあるが。

(質問) gauge 化された超重力理論なら、もう S^5 で reduce したものを仮定していると思いますが？

(回答) 仮定する必要はありません。通常の手続きは、最初に T^5 を reduce して そして無矛盾な理論を得るためにどんな gauge 場を付け加えられるかと問う、というものです。つまり、どんな内部空間であるかと問う必要はないのです。S^5 である必要もありません。E 型の対称性を持っていたり、$\cdots$ 勿論、AdS の解を持たない gauge 化された超重力理論もあります。

(質問) ということは、任意の 5 次元空間を持ってきて gauge 化された超重力理論をつくれるという事ですか？

(回答) そうです。群の性質を持ったものなら。

重要なことは、背景が弦理論の背景に格上げされていることである。もしそうしなければ超重力理論が無矛盾かつ意味があるものであるかどうかは分からない。[16] の良い洞察は、二つの AdS 漸近性を持つことである。しかし、それでは相関関数を計算するのに十分でない。何故なら、どのように境界条件を特徴づけるか、ということも知る必要があるからである。今、二つの AdS 空間があるので、その二つの極限における二つの境界条件を知る必要がある。しかし、AdS のように (つまり特異性がない内部空間のように) 振る舞う二つの境界条件を与えられたすると、それらは多分矛盾しているであろう。これは問題である。

第 4 章 Orbifold から conifold への変形

先に紹介したやり方は、二つの境界でのことを考えて、そしてもし運が良ければそれらをつなげることができる、というやり方である。他の (もっと一般的な) 可能性はないだろうか？

ここにもう一度先の手法をまとめる。興味ある horizon M^5 の探索を続けよう[21]。一つの可能性は、まず何らかの多様体 M_0^5 (これは今の場合 S^5/Γ である) に対応する gauge 理論を持ってきて、relevant な演算子でそれに摂動を掛け、繰り込み群 flow を走らせて、その結果もし運が良ければ繰り込み群の flow の終点はもう一つの $\mathcal{N}=2$ 理論に対応するだろう。例えば、orbifold $\mathcal{N}=2$ 理論を持ってきて、vector multiplet に入っている chiral multiplet の質量を turn on してみよう。言い換えれば、superpotential を次のように shift してみよう：

$$W \to W - \sum_l m_l \mathrm{Tr}\phi_l^2. \tag{43}$$

(この変形は $\mathcal{N}=1$ 超対称性しか保たない。) 結果として生じる理論の時空の対応物を得る機会はあるか？もし次の条件

$$\sum_l n_l m_l = 0 \tag{44}$$

が満足されるなら、超重力理論での記述の候補がある、ということが分かる: それは積 $\mathrm{AdS}_5 \times M^5$ でありここで M^5 は錘 Y^6 の base である。Y^6 は次の方程式で与えられるような、x, y, z, w で張られる $\mathbb{C}^4$ の中の超曲面として実現される：

$$A_k: \quad x^{k+1} + t_1 x^{k-1} w^2 + t_2 x^{k-2} w^3 + \cdots + t_k w^{k-1} + y^2 + z^2 = 0, \tag{45}$$

$$D_k: \quad x^{k-1} + xy^2 + z^2 + t_1 x^{k-2} w^2 + t_3 x^{k-3} w^4 + \cdots + t_{k-1} w^{2(k-1)} + t_k y w^k = 0, \tag{46}$$

$$E_6: \quad y^3 + t_1 x^2 w^2 y + t_2 x w^5 y + t_3 w^8 y + x^4 + t_4 x^2 w^6 + t_5 x w^9 + t_6 w^{12} + z^2 = 0, \tag{47}$$

$$E_7: \quad y^3 + x^3 y + t_1 x w^8 y + t_2 w^{12} y + t_3 x^4 w^2 + t_4 x^3 w^6 + \cdots + t_7 w^{18} + z^2 = 0, \tag{48}$$

$$E_8: \quad y^3 + t_1 x^3 w^2 y + \cdots + t_4 w^{20} y + x^5 + t_5 x^3 w^{12} + \cdots + t_8 w^{30} + z^2 = 0. \tag{49}$$

[21] この章では主に [2] の結果を述べる。

これらの式は少しやっかいに見えるが $\cdots$ 実は構成法は単純である。例として (45) 式の A_k を見てみよう。A_k 型の特異性は

$$x^{k+1} + y^2 + z^2 = 0 \tag{50}$$

で与えられる。そして、これを変形してみよう。単に低い degree の項を付け加えるだけである。$t_1 x^{k-1}$、$t_2 x^{k-2}$、$\cdots$。そして、次に全体の式を同次多項式にする。つまり、w の適当な巾を掛け合わせて、全体として同次多項式となるようにする。すると、最終的に (50) は四つの複素変数 x, y, z, w で書かれた一つの式 (45) になるので、それは $\mathbb{C}^3$ 超曲面となる。この構成から見て、それは (cone となるためには要請されるような) scaling 対称性を持っている。 (この scaling 対称性から、逆に空間が base M^5 を持った cone の形を表していることが分かる。) この conifold[18, 19] と呼ばれる場合には、scaling 変換が、異なる座標に対しては異なる早さのものになるということである。A_k の場合は

$$x \mapsto c^2 \cdot x, \qquad y \mapsto c^{k+1} \cdot y, \qquad z \mapsto c^{k+1} \cdot z, \qquad w \mapsto c^2 \cdot w \tag{51}$$

となっている。$k = 1$ の場合は conifold の有名な形

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0 \tag{52}$$

になっており [20]、今はそれの一般化をしたことになっている。Steven と Shatashveli と一緒に書いた論文 [2] では、これを generalized conifold singularity と呼んでいる。変形を label する parameter は t_i であり、それと先ほどの mass とは簡単な多項式の関係式で結ばれている。

さて、これが複雑な超重力理論側での記述である。一方、場の理論ではどのように記述されているだろうか？場の理論は、この型の特異点上にいくつかの D3-brane があるときに現れる。その D3-brane 上の理論には Higgs branch があり、scaling 対称性を持っている。Higgs 機構を起こす scalar 場は conical singularity の情報 (つまり対称性) を反映しなくてはならない。場の理論での記述は、superpotential を含んでいるが、その対称性が Moduli 空間すなわち superpotential に現れる。

もう少し時間があるので、この superpotential の話をしよう。我々は $\mathcal{N} = 2$ の理論から出発しそれを変形した。そこでの superpotential は

$$W = \sum_l \left(\mathrm{Tr}\phi_l \mu_l - m_l \mathrm{Tr}\phi_l^2 \right). \tag{53}$$

ここで ϕ_l は $\mathcal{N} = 1$ の言葉での (l 番目の gauge 群の) adjoint chiral multiplet であり、μ_l は何らかの場の composite である。この μ_l を、特異点が A_k 型の場合で特に考えてみよう。その quiver diagram (17 図左) によると、頂点 l に関連して四つの scalar 場がある：$B_{l,l+1}$, $B_{l+1,l}$, $B_{l,l-1}$, $B_{l-1,l}$。これらは bi-fundamental 表現である。前の二つ、後ろの二つ、で hyper multiplet を組む。この時、superpotential のなかの composite は $\mu_l = B_{l,l+1}B_{l+1,l} - B_{l,l-1}B_{l-1,l}$ となる。

次に ϕ_l を積分すると、m_l が zero でなければ

$$W = \sum_l \left(\frac{1}{4m_l} \mathrm{Tr}\mu_l^2 \right). \tag{54}$$

superpotential の起源は、2 次の項と 3 次の項 (53) からなっており、それらが組合わさって、4 次の superpotential(54) になる。この superpotential から F-term 条件を書くと、conical singularity と変数変換で同値となることが分かる。つまり Moduli 空間 (とその対称性) が conifold の幾何を反映したものとなっている[22]。

A_1 の場合 (52) の metric は陽に知られている [19]。もっと一般の場合には不運なことに fundamental string から見た horizon の幾何は知られていない。一つの D3-brane を probe して見た metric は分かるが、一般的にそれら二つは違うものである[23]。分からないこと (そして見つけ出すことが非常に面白いこと) は、弦理論の metric(それは採られた近似では Ricci 平坦である) を用いて gauge 理論の何を計算できるか、そして何を計算すべきか、ということであり、また、brane の metric を使って何を計算すべきか、ということである。

[22] A_1 の場合は [20] に詳しく述べられている。

[23] 実際、場の理論で得られた metric は Ricci 平坦ではない。このことは、$\mathcal{N} = 1$ の超対称性を持つ D-brane metric についての一般的な性質である。

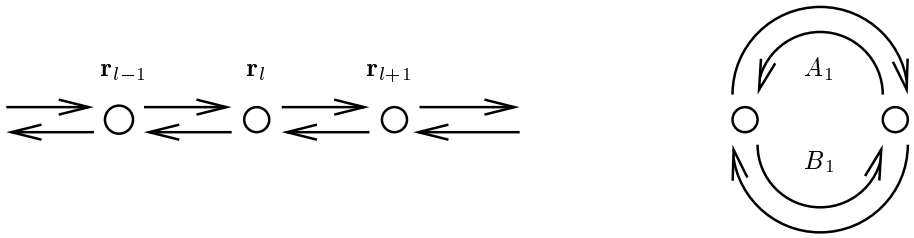


図 17: 左：A_k の quiver diagram。右：簡単な A_1 の場合 [20]。この時、場は A_1 と B_1 の二つしかない。

とにかくこれらの新しい理論は、non-trivial な infrared の固定点に flow してゆくと conjecture される。場の理論で chiral primary 演算子 を数えると、それは超重力理論で解を数える、即ち M^5 上での Laplace 方程式の解を数える、のと同じ結果を与える。すなわち conjecture を部分的に確認している。これは、問題が結局 holomorphic な問題に帰着されているからで、metric の陽な形を知らなくてすむからうまくいくのである。

また、conjecture が成立するためには matter 場と vector multiplet の中 scalar 場が anormalous 次元を獲得せねばならない[24]：

$$[Q] = -\frac{1}{4}, \qquad [\phi] = +\frac{1}{2}. \tag{55}$$

ここで Q は hyper multiplet、ϕ は vector multiplet である。これは gauge β 関数が消えるということを導くことになる。

第 5 章 まとめ

- 極大超対称 gauge 理論と弦理論のある背景との対応の一般化を記述した。$\mathcal{N} = 2, 1, 0$ 超対称性を持った (超) 共形場理論を含む場合を考えた。(もしこの conjecture が正しければ) これらは trivial でありまた non-trivial である Infrared 固定点上にある。
- 最も簡単な試験は：有効結合定数の走り方と次元の摂動計算；chiral primary 演算子の spectrum と超重力理論の spectrum の比較；超共形の変形の moduli と弦理論の compact 化の moduli との比較,$\cdots$
- 未だ解決されていない面白い可能性は：
  - boson と fermion が同じ数だけありそして恐らく non-trivial な有限性を持った非超対称な理論を更に研究すること (超対称性無しで $\Lambda = 0$ という問題さえを含む応用だが、$\cdots$)
  - 時空において $r \to 0$ と $r \to \infty$ を始点と終点に持つような超重力理論の運動方程式の解としての、繰り込み群 flow の幾何学的描像
  - などなど $\cdots$

(拍手)

質疑応答

(座長) 面白い talk を有難うございました。質問、comment はありますか？

(質問) あなたの conifold 理論は planar limit で superconformal なのですか、それとも all order でそうなのですか？

(回答) 少なくとも planar limit でそうだと思います。それが、そうだと信じられていることです。 僕は、理論が superconformal で有限である、と思っています。$\mathcal{N} = 2$ の場合はそうであることが分かっています。

[24] [20] を参照。

また、言っておくべきことは、我々の得た範囲では、$U(N)$ の $SU(N)$ 部分は superconformal であるという事です。

(質問) $\mathcal{N}=0$ の理論は非常に興味深いと思います。私が思っていたのは、様々な object の BPS の性質が弱結合から強結合に行く際に protect されているので強結合の様々なことを信用して調べられる、ということです。あなたの方法では、$\mathcal{N}=0$ 理論をもっと調べられる、ということですか？

(回答) それは確実だと思います。そういう理論が面白い、ということを結論でも申し上げたのですが $\cdots$ 今までの解析では、結果は $\mathcal{N}=4$ のものと同じように出てきました。何らかの planar limit でそれが復活する。問題は $1/N$ 補正ですね。これは超重力理論で解析することは難しい。ですから、現時点でのあなたへの答えは、no です。もっと $\mathrm{AdS}_5\times S^5$ や $\mathrm{AdS}_5\times S^5/\Gamma$ 上の弦理論のことを知らなくてはならない。

(座長) 他に質問はありませんか？若い人たちはどうですか？

(質問) naive には $\mathcal{N}=0$ の場合は簡単ではないですね。そういう場合でも、Large N 極限では exact な AdS/CFT 対応があるということですか？

(回答) いえ、そうではなくて、正しいと信じられていることは、$\mathcal{N}=0$ 理論でも Large N 極限をとれば $\mathrm{AdS}_5\times S^5/\Gamma$ に対応する、という事です。

(質問) わかりました、では finite N ではどうですか？

(回答) $\mathrm{AdS}_5\times S^5/\Gamma$ に関する限りでは、うまくいっています。有限であるように見える。しかしそれは調べるのは難しそうだ。古典的な解析法がない。

(座長) 他に質問 · comment はありませんか？それでは、speaker に再び感謝しましょう。

(一同拍手)

第 II 部

$\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論における状態のカウント

COUNTING STATES IN $\mathcal{N} = 2$ GAUGE THEORY[25]

Nikita Nekrasov

6. 導入
——$\mathcal{N} = 2$ 理論の実現, 状態の表現

7. D3-プローブ上の理論
——真空のモジュラス空間の簡単な復習, Sen の BPS 状態の描像, 一般化： 3 つ叉弦[26]

8. M 理論への持ち上げ /引き落とし
——BPS 状態の別の実現, $\mathcal{N} = 2$ SYM の選択則とスペクトル, 自己双対弦への遷移

9. 結論

[25] 文献 [21, 22, 23, 24] に基づく。
[26] string junction のこと。[25]

第 6 章 導入

★ $\mathcal{N}=2$ ゲージ理論は量子場の理論、弦理論、M 理論の一般的な性質を理解するのにとても面白い道具である。

★ それはまた、4 次元ゲージ理論、可積分系、4 次元多様体の不変量、2d RCFT [27]の高次元への一般化を統一する。

ここでは $\mathcal{N}=2$ 理論、例として純 $SU(2)$ 超対称 Yang-Mills(SYM) 理論の BPS 状態を調べる。

弦/M 理論および BPS 状態に対する表現を使ってゲージ理論の幾何学的実現を用いる。

$\mathcal{N}=2$ $SU(2)$ 理論の BPS スペクトルを決定する選択則を導き、N. Seiberg と E. Witten の解 [26] との一貫性を確める。

第 7 章 D3-プローブ上の理論

$\mathcal{N}=2$ $d=4$ ゲージ理論を弦理論あるいは M 理論で実現する方法はいくつかある。簡単のため、複素 1 次元クーロンブランチを考えよう。

1 つは曲線[28] Σ 上に IIA 型 5-brane [29]を巻きつけるものである。(図 18) [30]　この描像はモジュラス空間のゲージ対称性が enhance している点の近くで Calabi-Yau 3-fold 上の II 型超弦理論の双対を何回かとることで関係付けられる。

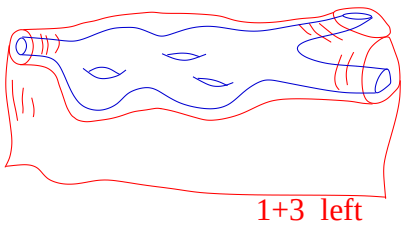


図 18: CY_3 上の IIA 型超弦理論で、CY_3 の中のリーマン面に 5-brane を巻きつける。

もう一つの方法は $\mathcal{N}=2$ $d=4$ 理論のプローブによる構成法である。[31]　このプローブは 4 次元理論のモジュラス空間のある 1 点に置いた D3-brane である。これは IIB 型超弦理論で、10 次元時空のうち 2 次元分が非自明な幾何になっている場合である。この実 2 次元空間部分のいくつかの点がモジュラス空間の特異点にあたり、そこにいくつかが互いに非局所的な 7-brane がある。この描像は $K3$ 上の F 理論から導かれる。(図 19)

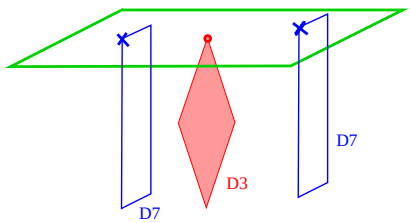


図 19: 7-brane がある IIB 型超弦理論で D3-brane プローブを置く。

A. Sen はプローブ上の理論のある BPS 状態は D3-brane プローブから 7-brane までモジュラス空間上の測地線に沿ってのびている開弦 (図 20) あるいは D3-brane から出て 7-brane のまわりをまわって D3-brane に戻ってくる開弦で実現

[27] 2 次元 Rational Conformal Field Theory の略。
[28] 複素 1 次元曲線。
[29] あるいはリーマン面上の M5-brane を考える。
[30] [27] とその references を参照。
[31] [28] など参照。

できるという議論をした。[29] [32]

この描像の謎：一つの開弦をからなる測地線ではプローブ上の理論の全ての BPS 状態を実現できない。

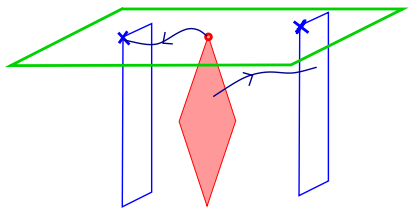


図 20: 3-brane プローブから 7-brane まで測地線に沿ってのびる弦は BPS 状態に対応する。

ここでは理論の状態の大部分を構成する方法を説明しよう。[33]
また、これらの BPS 状態のいろいろな幾何学的実現の間の関係を M 理論の膜 (M2-brane)、開弦、自己双対弦 (self-dual string) の言葉で調べよう。[34]

(質問) BPS 状態を見るときにプローブ上の低エネルギー有効理論を考えますが、実際は非 BPS のものの励起も重要になることはないのですか？

(回答) もちろんここでは低エネルギーの励起だけ、実際はほとんど BPS 励起だけを見ます。有効作用はあるエネルギーより下のもの全てを知っています。

(質問) D-brane 上の低エネルギー有効理論は高階の微分の項も含みますが、それは無視できるのですか？

(回答) プローブ上の場の理論として首尾一貫した極限をとることができるかということですか？

(質問) はい。リーマン面に巻きついた M5-brane の上に M2-brane が境界を持つというのは特異な答を与えるからです。

(回答) '正則' 状態と BPS 状態という異なる記述が同値であるかどうかはわかりません。AdS/CFT のように適当な領域で場の理論の自由度と対応していると思えるかもしれません。

BPS 状態の開弦による実現

いくつかが互いに非局所的な 24 枚の 7-brane のある IIB 型超弦理論と等価な $K3$ 上の F 理論を考えたい。[30] u でパラメーター化した (p,q) 7-brane の横断方向の 2 次元面の位置は elliptically-fibered $K3$ の選択を表わす。(図 21) この空間は曲線：

$$y^2 = x^3 + f(u)x + g(u) \tag{56}$$

を特定することによって記述できる。ここで f, g はそれぞれ u の 8 次,12 次多項式である。(図 22) [35]

この曲線の判別式 $\Delta = 4f^3 + 27g^2$ の零点[36]が 7-brane の位置を記述し、特定の零点のまわりの IIB 型超弦理論の複素結合定数のモノドロミーはその点にある 7-brane の (p,q) charge を表わす：図 23,24 。

一般にトーラスの (p,q)-cycle がつぶれる点では (Picard-Lefshetz の公式):

$$M_{p,q} = \begin{pmatrix} 1+pq & p^2 \\ -q^2 & 1-pq \end{pmatrix} \tag{57}$$

[32] この開弦のエネルギーを最小にするためにモジュラス空間の測地線に沿ってのびるものを考える。モジュラス空間には計量が与えられていて、F 理論の背景では弦の結合定数が変わり有効的な計量は弦の (p,q) charge で決まる。
[33] 後で示すように 3 つ叉弦を用いて構成する。
[34] 後で述べるように $\mathcal{N}=2$ 理論を構成するもう一つの方法は、リーマン面に巻きついた 5-brane 上の理論で、その BPS 状態はリーマン面の 1-cycle に巻きついた弦として実現される。
[35] もちろんこれは特殊な $K3$ である。全ての $K3$ が代数的ではないからである。
[36] 判別式は u の 24 次式なので零点は 24 個ありそこでこの曲線 (56) は特異になる。

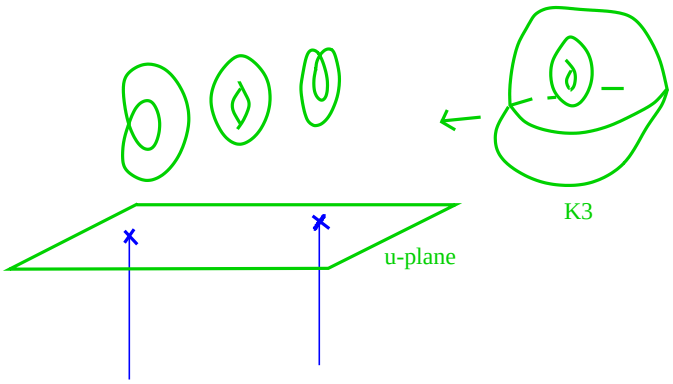


図 21: 底空間が u-plane である elliptically-fibered $K3$

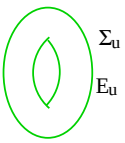


図 22: 底空間の点 u には一般にファイバーとしてトーラス E_u がある。これを以下では Σ_u と書くことにする。

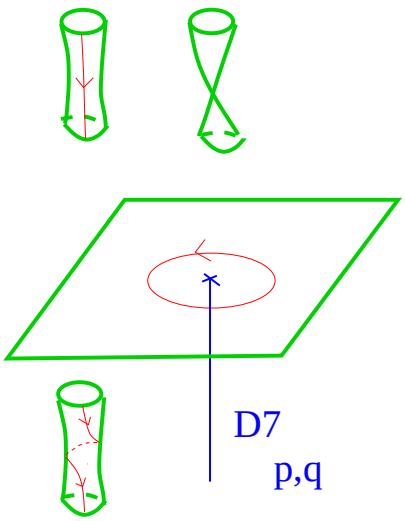


図 23: 判別式の零点つまり 7-brane の位置でトーラスはピンチされ、そのまわりでモノドロミーをもつ。

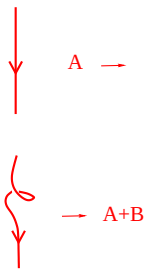


図 24: ファイバーが特異になる点 (トーラスの B-cycle がつぶれる点) のまわりを回るとトーラスの A-cycle が $(A+B)$-cycle に変わり、このときトーラスのモジュラスは変換を受ける。

というモノドロミー変換を受ける。[37]

$K3$ の底空間 (u-plane) の 1 点に D3-brane を置くことでプローブ上の非自明な 4 次元理論が誘導される：図 25 。この理論の零質量の場は D3-brane からのびる弦が長さ 0 に縮まった配位で実現される。D3-brane プローブが 7-brane に近づいたとき零質量の場が励起され非自明な大域的対称性を持つ matter が生じる。[38]

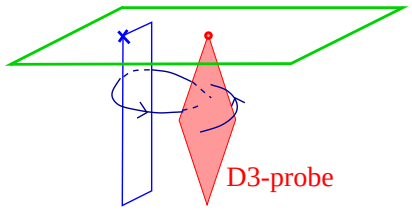


図 25: D3-brane プローブが 7-brane に近づくと非自明なプローブ上の 4 次元理論が誘導される。

4 次元理論の状態 $\leftrightarrow$ D3-brane プローブ上に端を持つ弦の配位：図 26 。
特に 4 次元理論の BPS 状態は与えられた電荷で質量を最小にする弦の配位に対応する。

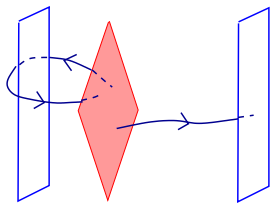


図 26: D3-brane プローブ上に端を持つ弦が 4 次元理論の状態に対応する。

(p,q) string だけが (p,q) 7-brane 上に端を持てるが、D3-brane 上には任意の弦が端を持てる。1 点 u_0 に一つの 7-brane がある状況を考えよう。7-brane のまわりでは弦の結合定数 $\tau \sim \frac{1}{2\pi i}\ln(u-u_0)$ はモノドロミーを持ち従って u-plane 上に branch cut を持つ：図 27 。

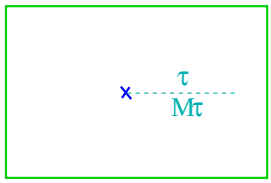


図 27: 7-brane から branch cut が生じる。

D3-brane から u-plane 上の曲線 C に沿ってのびる (p,q) string は全質量：

$$\int_C |dw_{p,q}| \tag{60}$$

[37] これにより (r,s)-cycle は

$$\begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix} \mapsto M_{p,q} \begin{pmatrix} r \\ -s \end{pmatrix} \tag{58}$$

と変換し、トーラスのモジュラス τ は

$$\tau \mapsto \frac{(1+pq)\tau + p^2}{-q^2\tau + 1 - pq} \tag{59}$$

と変換する。

[38] この大域的対称性は 7-brane 上からみたときの enhance されたゲージ対称性である。

を持つ。ここで $dw_{p,q}$ は F 理論背景の計量で決まる：[39]

$$|dw_{p,q}|^2 = |p+q\tau|^2 |dw_{1,0}|^2 \ . \tag{62}$$

$dw_{p,q}$ は正則 2-形式 $\frac{dxdu}{y}$ の elliptic fiber の (p,q) cycle(図 28) に沿った積分で与えられる：[40]

$$dw_{p,q} = \int_{C_{p,q}} \frac{dxdu}{y} \ . \tag{63}$$

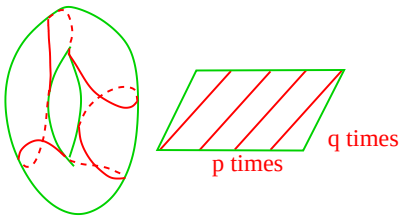


図 28: トーラスを $\mathbb{C}/(\omega_1, \omega_2)$ とするとき ω_1 方向に p 回、ω_2 方向に q 回巻きついた 1-cycle を (p,q) cycle とする。ただしトーラスのモジュラスは $\tau := \omega_2/\omega_1$ とする。

BPS 配位は計量 $|dw_{p,q}|^2$ の測地線に対応し、この弦に対し質量は

$$M_{p,q} = \int_C |dw_{p,q}| = \left| \int_C dw_{p,q} \right| \tag{64}$$

となる。[41]

単一弦状態から始めよう：図 29 。

図 29: プローブと 7-brane を結ぶ単一弦状態

これはどのくらい存在するのだろうか？

与えられた測地線 γ に対し、その測地線に沿って定数となる位相：

$$\phi = \mathrm{Arg}[w_{p,q}(t)] \tag{66}$$

を定義する。[42]

---

[39] (p,q) string の張力 $T_{p,q}$ は (Einstein 計量で) $(\sqrt{\mathrm{Im}\tau})^{-1}|p+q\tau|$ に比例する。一方、F 理論背景あるいは IIB 型超弦理論の 7-brane のある背景 (56) における 7-brane の横断方向 (u-plane) の (Einstein) 計量は

$$ds^2 = \mathrm{Im}\tau \left| \eta(\tau(u))^2 \prod (u-u_i)^{-\frac{1}{12}} du \right|^2 \propto \mathrm{Im}\tau \left| \eta(\tau(u))^2 \Delta^{-\frac{1}{12}} du \right|^2 \tag{61}$$

で与えられる。[31]　ここで $\eta(\tau)$ は Dedekind のエータ函数。これより $|dw_{p,q}|^2 \propto (T_{p,q} ds)^2$ 。

[40] $\oint_{C_{1,0}} \frac{dx}{y} \propto \eta(\tau(u))^2 \Delta^{-\frac{1}{12}}$ に注意する。ここで F 理論を考えているので IIB 型超弦理論の複素結合定数 τ をファイバーのトーラスのモジュラスの $\tau = \oint_{C_{0,1}} \frac{dx}{y} / \oint_{C_{1,0}} \frac{dx}{y}$ と同一視している。よって $dw_{p,q} \propto (p+q\tau)\eta(\tau(u))^2 \Delta^{-\frac{1}{12}} du$ となる。

[41] 一般には

$$\int_C |dw_{p,q}| \geq \left| \int_C dw_{p,q} \right| \tag{65}$$

であるが、計量 $|dw_{p,q}|^2$ の測地線に沿って $dw_{p,q}$ の位相は一定になるので C をこの測地線にとると等号が成り立つ。

[42] 一般に測地線は

$$w_{p,q}(t) = w_{p,q}^{(0)} + \alpha_{p,q} t, \quad t \in \mathbb{R} \tag{67}$$

の形になるが、ここでは $w_{p,q}^{(0)} = 0$ にとっている。

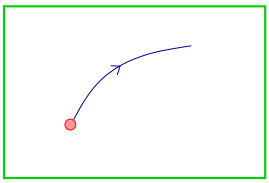


図 30: u-plane 上の計量 $|dw_{p,q}|^2$ の測地線は一般に曲がっている。

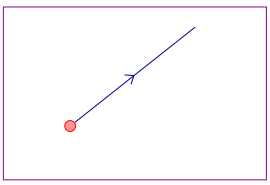


図 31: $w_{p,q}$-plane 上の計量 $|dw_{p,q}|^2$ の測地線は直線になる。

ϕ は 3-brane の位置で曲線 γ に対する接ベクトルを定める。これは有限の長さで (p,q) 7-brane の位置に到達する測地線を一意的に定める。従って全ての単一弦の測地線はその中心電荷によって固定される。
$\Rightarrow$ これらの状態だけでは問題が生じることをあとで示す。
実際、このような状態は有限個しか存在しないが、$\mathcal{N}=2$ 純 Yang-Mills 理論の半古典的な範囲では BPS 状態が無限個あることを示すことができる：charge $(\pm 2, 0)$ を持つ W-boson と charge $(2n, \pm 1)$ $n \in \mathbb{Z}$ を持つダイオンがある。($\mathcal{N}=2$ では 2 以上の磁荷をもつダイオンはモノポールモジュラス空間上の正則 L^2 形式に対応するが、2 以上の磁荷を持つ状態は存在しないと期待されている。)
よって、単一弦の配位だけでは不十分であるので複数の弦の配位を用いて実際に BPS 状態を作りうるかどうか理解する必要がある。

第 8 章 M 理論への持ち上げ/引き落とし

T^2 上の M 理論は S^1 上の IIB 型超弦理論と双対であることを思い出そう。トーラスの Kähler class を A とするとその円の半径は

$$R = \frac{1}{M_{\rm pl}^3 A} \tag{68}$$

で与えられる。ここで $M_{\rm pl}$ は 11 次元のプランクスケール。

今、1 次元分引き落として $K3 \times S^1$ 上の F 理論で D3-brane の横断方向にその S^1 があるような状況を考える。これは $K3$ 上の M 理論に対応する。[43] D3-brane は M 理論ではファイバーのトーラス T^2 に巻きついた M5-brane として実現される (図 32)。我々は R (68) が非常に大きい、従ってトーラスの Kähler class がとても小さい極限に興味がある。[44]

u-plane 上にのびて D3-brane 上に端を持つ (p,q) string はトーラスの (p,q)-cycle に巻きつき、u-plane 上 1-cycle に沿ってのびた膜に持ち上げられる：図 33 。

$[p,q]$ 7-brane はファイバーのトーラスの (p,q)-cycle がつぶれたところに対応するので、$[p,q]$ 7-brane に端を持つ (p,q) string を表わす膜は $[p,q]$ 7-brane の位置に対応する u-plane 上の点で閉じている。

膜の境界は
曲線 $\Sigma_u =$ (D3-brane の位置を表わす u-plane 上の点 u の上の elliptic fiber) [45]
の上になければならない (図 34)。その配位が BPS なら膜の世界体積 (の空間部分) は Σ_u 上に境界を持つ正則曲線で

[43] M 理論ではこの $K3$ は “物理的” になる。
[44] これは IIB 型超弦理論極限に相当する。
[45] M5-brane が巻き付いているトーラス。

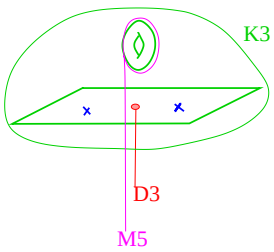


図 32: D3-brane は背景の $K3$ のファイバーのトーラスに巻きついた M5-brane に持ちあがる。

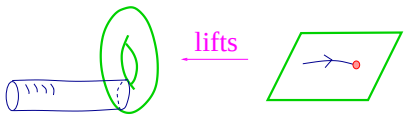


図 33: (p,q) string はトーラスの (p,q)-cycle に巻きつく筒型の膜に持ち上がる。

なければならない。膜を表わす正則曲線とファイバー Σ_u は異なる複素構造で正則である。[46] 世界体積が最小曲面になるためにはその境界を世界体積が Σ_u と直角に交わるように調整しなければならない。直角に交わらないとすると膜自身は BPS 配位であるが M5-M2 の系は BPS ではない。全空間で全ての 3 つ叉弦が必ずしも BPS 配位であるとは限らないことがわかる。

自己双対弦との関係

$\mathcal{N}=2$ 理論の BPS 状態のもう一つの描像は $SU(2)$ ホロノミーを持つ実 4 次元空間 $\mathcal{C}$ にあるリーマン面 Σ に巻きついた M 理論あるいは IIA 型超弦理論の 5-brane の上の理論を実現することによって得られる。

5-brane の世界体積は平坦な空間で $(0,2)$ 超共形不変性を持つ。この理論の物質場は 11 次元での 5-brane の横断方向の座標を記述する 5 個のスカラーを含むテンソル多重項からなる。

5-brane の世界体積の上の理論は twist されている：スカラー $\in \Gamma((N_{\mathcal{C}|\Sigma} \approx T^*\Sigma) \oplus \mathbb{R}^3)$ 。[47]
4 次元へ落とすときその twist されたスカラーは $2g$ 個のスカラーを生じる。[48] ここで g はリーマン面 Σ の種数。Σ の reduction の後、テンソル場 B^+ は電磁双対の組を含む $2g$ 個のゲージ場を与える。より正確には A^i, B_i $(i=1,\cdots,g)$ を $H_1(\Sigma)$ の基底とすると二つのゲージ場：

$$A_i = \int_{A^i} B^+ \ , \quad \tilde{A}^i = \int_{B_i} B^+ \tag{69}$$

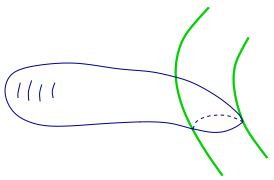


図 34: M 理論では膜は M5-brane の巻き付いている Σ_u 上に境界を持つ。

[46] 複素 2 次元空間のなかで実 1 次元で交わっているので。
[47] ここで $N_{\mathcal{C}|\Sigma}$ は $\mathcal{C}$ の中の Σ の法束、Γ は切断を表わす。また今考えている $\mathcal{C}$ は $SU(2)$ ホロノミーを持つ実 4 次元空間なので canonical bundle が自明であることから $N_{\mathcal{C}|\Sigma} \approx T^*\Sigma$ となる。[32]
[48] $\dim H^1(\Sigma,\mathbb{R}) = 2g$ なので Σ 上の独立な harmonic 1-form を ω_i $(i=1,\cdots,2g)$ ととると今考えている Σ 上の弦が巻き付いている 1-cycle を σ として 5-brane の世界体積の上の理論から 4 次元に落としたとき $\phi_i = \oint_\sigma \omega_i$ $(i=1,\cdots,2g)$ が $2g$ 個のスカラーになる。

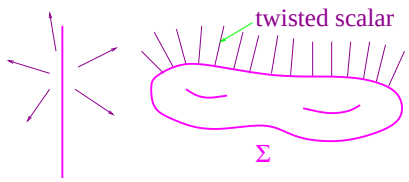


図 35: 5-brane の横断方向の座標を表わすスカラーは twist され法束のベクトル場になる。そのうち実 4 次元空間 $\mathcal{C}$ に入っている Σ 上の法束が非自明になり、その元を表わす twist されたスカラーは Σ 上の 1-form とみなせる。

は電磁双対である。[49]　従ってこれらは g 個の 4 次元 $\mathcal{N}=2$ のベクトル多重項をなす。

法束の自明な部分の切断である三つの余分なスカラーは B^+ の Σ 上の積分とともに他の場と結合していない自然なハイパー多重項をなす。

D3-D7 の描像ではそれは D7-brane の世界体積の内部の方向に D3-brane の相対運動を記述する。さらに B^+ 場からくるスカラーの周期性は、D3-D7 の描像を M 理論に写像するために D7-brane に沿った方向の一つを S^1 にコンパクト化しなければならないという事実と関連している：図 36 。

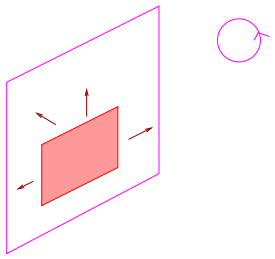


図 36: ハイパー多重項のスカラーは D7-brane の世界体積内の D3-brane の相対運動を記述する。 そのうち一つの方向はコンパクト化されている。

リーマン面 Σ は有理型 1-微分 λ を持ち、それは周囲の空間のハイパーケーラー構造[50] から誘導される：

$$\lambda = d^{-1}\omega_c|_\Sigma \ . \tag{72}$$

ω_c は $\mathcal{C}$ 上の正則シンプレクティック形式である。

5-brane 理論は M 理論の膜の境界である自己双対弦を含む：図 37 。このような弦を $\sigma \in H_1(\Sigma)$ に巻きつけることによって 4 次元の有効理論における粒子 P_σ を得る。粒子 P_σ の質量は境界が Σ のホモロジー類の曲線であるような膜の面積によって与えられる。面積が最小の膜 Σ_σ は $\mathcal{C}$ の複素構造の一つで正則になっているはずである。 従ってその面積はケーラー形式の積分で与えられる：

$$\text{Area} = \int_{\Sigma_\sigma} \omega_r \ . \tag{73}$$

---

[49] 基底を適当に取り直して $\omega_i,\ \tilde{\omega}_i(:=*\omega_i)\ (i=1,\cdots,g)$ が $H^1(\Sigma,\mathbb{R})$ を張るようにする。ここで 5-brane 上の harmonic 2-form B^+ を

$$B^+ = \sum_i A_i \wedge \omega_i + \sum_i \tilde{A}^i \wedge \tilde{\omega}_i \tag{70}$$

と展開するとこれが self-dual であるという条件 $dB^+ = *dB^+$ から $dA_i = -*\,d\tilde{A}^i$ となり A_i と $\tilde{A}^i$ は互いに電磁双対である。またこのとき交叉数が $\alpha_i\cdot\beta_j = -\beta_j\cdot\alpha_i = \delta_{ij}$ をみたす $H_1(\Sigma,\mathbb{Z})$ の基底 $\alpha_i,\beta_i\ (i=1,\cdots,g)$ を適当にとれば

$$A_i = \oint_{\alpha_i} B^+, \quad \sum_j \mathrm{Re}(\tau_{ij})A_j + \sum_j \mathrm{Im}(\tau_{ij})\tilde{A}_j = \oint_{\beta_i} B^+ \tag{71}$$

となる。ここで τ_{ij} はリーマン面 Σ の正規化された周期行列。[33]

[50] 今、実 4 次元空間 $\mathcal{C}$ は $SU(2)$ ホロノミーを持つとしているので (コンパクトなら $K3$ 、ノンコンパクトなら ALE など) ハイパーケーラー構造を持つ。[32]

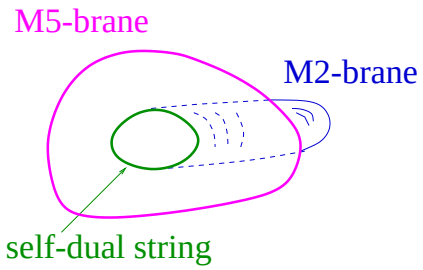


図 37: M 理論の描像で M2-brane は M5-brane の上に境界を持つことができるが、それは 5-brane 上からみれば B^+ に結合する自己双対弦に見える。

またハイパーケーラー多様体 $\mathcal{C}$ は S^2 の分だけ複素構造を持つ：図 38 。[51]　図 39 のような同一視のもとで ($u \to -2iu$

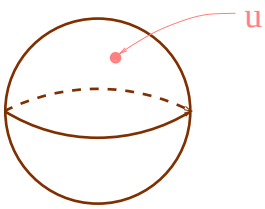


図 38: 複素構造は S^2 上の 1 点 u で指定される。

と置き換えて)[52] 複素構造 u $(\in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ で正則な 2 次元曲面 Σ_σ が与えられたとき (79) より次のように書ける：

$$\mathrm{Area}\Sigma_\sigma \quad = \quad \int_{\Sigma_\sigma} \omega_r(u)$$

[51] ハイパーケーラー多様体は

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = -JI = K \tag{74}$$

を満たす三つの複素構造 I, J, K を持つ。[32]　とくに I を複素構造にとると計量 $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, \cdots, 4)$ を用いて

$$\begin{aligned} \omega_r &= \frac{1}{2} g_{\rho\nu} I^\rho{}_\mu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ \omega_c &= \frac{1}{2} g_{\rho\nu} \left(J^\rho{}_\mu + iK^\rho{}_\mu \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \tag{75}$$

と書ける。ただしここで

$$\frac{1}{2}\omega_r \wedge \omega_r = \frac{1}{4}\omega_c \wedge \omega_{\bar{c}} = \text{volume form} \tag{76}$$

となるように正規化している。$(\omega_{\bar{c}} := \overline{\omega_c})$ また、一般の複素構造 I_u は

$$I_u = a_u I + b_u J + c_u K, \quad a_u^2 + b_u^2 + c_u^2 = 1 \quad (a_u, b_u, c_u \in \mathbb{R}) \tag{77}$$

と書ける。(実際このとき $I_u^2 = -1$ となる。) この I_u に対して直交する複素構造 J_u, K_u は

$$\begin{aligned} J_u &= a'_u I + b'_u J + c'_u K, \quad {a'_u}^2 + {b'_u}^2 + {c'_u}^2 = 1, \ a_u a'_u + b_u b'_u + c_u c'_u = 0 \quad (a_u, b_u, c_u \in \mathbb{R}) \\ K_u &= I_u J_u = a''_u I + b''_u J + c''_u K \quad (a''_u = b_u c'_u - c_u b'_u \text{ 等}) \end{aligned} \tag{78}$$

となる。よって複素構造 I_u に対しケーラー形式 $\omega_r(u)$ 、正則シンプレクティク形式 $\omega_c(u)$ は

$$\begin{aligned} \omega_r(u) &= a_u \omega_r + \frac{b_u - ic_u}{2}\omega_c + \frac{b_u + ic_u}{2}\omega_{\bar{c}} \\ \omega_c(u) &= (a'_u + ia''_u)\omega_r + \frac{b'_u + ib''_u - i(c'_u + c''_u)}{2}\omega_c + \frac{b'_u + ib''_u + i(c'_u + c''_u)}{2}\omega_{\bar{c}} \end{aligned} \tag{79}$$

となる。

[52] このとき

$$a_u = \frac{1 - |u|^2}{1 + |u|^2}, \quad b_u + ic_u = \frac{-2iu}{1 + |u|^2} \tag{80}$$

となる。

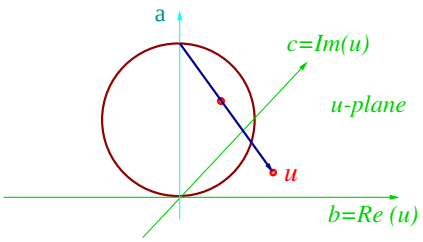


図 39: 図 38 の半径 1 の $S^2(\simeq \mathbb{C}\cup\{\infty\})$ 上の複素構造 u を u-plane 上の u (または ∞) と同一視する。(ここでいう u-plane は 7-brane の横断方向の 2 次元分 (あるいは対応する 4 次元理論での真空) を表わす u-plane とは別のものである。)

$$= \frac{1-|u|^2}{1+|u|^2}A_r + \frac{i\bar{u}}{1+|u|^2}A_c + \frac{-iu}{1+|u|^2}A_{\bar{c}} \ . \tag{81}$$

ここで $A_{r,c,\bar{c}} = \int_{\Sigma_\sigma}\omega_{r,c,\bar{c}}$ とした。Σ_σ の複素構造 u における正則性から :

$$\omega_c(u)|_{\Sigma_\sigma} = 0 \tag{82}$$

となるがこれは (79) より

$$\frac{1}{1+|u|^2}A_c + \frac{2iu}{1+|u|^2}A_r + \frac{u^2}{1+|u|^2}A_{\bar{c}} = 0 \tag{83}$$

を意味する。従って (81) は

$$\mathrm{Area}\Sigma_\sigma = \sqrt{A_r^2+|A_c|^2} \tag{84}$$

となる。

今、境界のホモロジー類を固定したまま曲面 Σ_σ を変形することを考える。このとき

$$\delta A_c = \int_{\delta\partial\Sigma_\sigma}\omega_c = 0 \tag{85}$$

となる。境界を $u=0$ に対応するもとの複素構造で正則なファイバーに拘束したまま変形するからである。[53] 従って A_c を変えることができないので面積を最小にするためには A_r をできるだけ小さくしなければならない。本当に最小になるのは $A_r=0$ に対応し、それは Σ_σ が複素構造 u ($|u|=1$) :

$$u = i\frac{A_c}{|A_c|} \tag{87}$$

で正則であることを意味する。ここで (72) より

$$A_c = \int_{\Sigma_\sigma}\omega_c = \int_{\partial\Sigma_\sigma}\lambda = \oint_\sigma \lambda \ . \tag{88}$$

この記述を自己双対弦の理論 [27] と比べることができる。Σ 上の 1-cycle のホモロジー類 $[\sigma]$ を与えたとき、それに対応する 4 次元ゲージ理論の粒子 P_σ [54]の質量 M_{P_σ} は

$$M_{P_\sigma} \geq \left|\oint_\sigma \lambda\right| \tag{89}$$

[53] 変形前の曲面を Σ_σ 、変形後の曲面を Σ'_σ とし、 Σ_σ と Σ'_σ と $\delta\partial\Sigma_\sigma$ を境界に持つ実 3 次元体を V とすると

$$\delta A_c = \int_{\Sigma'_\sigma}\omega_c - \int_{\Sigma_\sigma}\omega_c = \int_{\partial V}\omega_c + \int_{\delta\partial\Sigma_\sigma}\omega_c = \int_V d\omega_c + \int_{\delta\partial\Sigma_\sigma}\omega_c = \int_{\delta\partial\Sigma_\sigma}\omega_c \ . \tag{86}$$

ここで $d\omega_c=0$ を使った。 $\delta\partial\Sigma_\sigma$ は M5-brane のファイバーに巻き付いている部分の一部であり $u=0$ で正則な面なので $\omega_c|_{\delta\partial\Sigma_\sigma}=0$ である。

[54] 5-brane 上では σ に巻きつく自己双対弦である。

となり、この BPS 状態 ((89) の等号) は計量：

$$ds^2 = |\lambda|^2 \tag{90}$$

の測地線によって表現される。粒子 P_σ は σ に対応する $U(1)$ ゲージ対称性のもとで電荷を持っている。これは (69) より自己双対弦が B^+ の電荷を持っていることから従う。与えられた電荷に対する限界 ((89) の等号) を満たす粒子は BPS 状態に対応する。従って BPS 状態のカウントの問題は、少なくとも最小曲面が $A_r = 0$ となる場合は自己双対弦の理論のものと同等になる。BPS 状態は M 理論の描像では M2-brane の面積を最小にすることによって得られ、自己双対弦の理論の描像では (90) の測地線によって得られる。

(質問) 3 つ叉弦格子[55]に対応するものが BPS であるかどうか自己双対弦の理論でわかるのですか？

(回答) 自己双対弦はどのような膜が射影されているのかは知りません。その関係のことは私はまだ調べてません。

BPS 条件の解はモジュライを持てることに注意する。この場合モジュラス空間を記述する必要があり、この空間の量子力学は BPS 状態の縮退を決定する。

u-plane 上の測地線としての BPS 状態 (Sen の描像) とリーマン面 Σ_u 上の測地線としての BPS 状態 (自己双対弦の描像) との関係は二つの描像を M 理論に持ち上げると明らかになる。そして膜の配位を表現する最小の正則曲面を実際に調べる。ファイバーの Kähler class が小さい極限で膜を底空間の u-plane 上にうまく射影できて、開弦の測地線を与える。 一方 M5-brane のある u におけるファイバー Σ_u 上に膜の境界をとることで自己双対弦を得る：図 40 。これは二つの描像の間の一種の変換である。

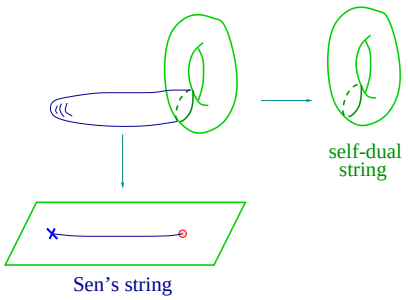


図 40: Sen の描像と自己双対弦の描像の関係は M 理論に持ち上げることでわかる。

(質問) なぜ変換するのですか？

(回答) $f(x)$ という関数が与えられたとき e^{ipx} をかけて持ち上げてこれを x に沿って積分して p の方向に射影します：

$$\int e^{ipx} f(x) dx \ . \tag{91}$$

今の場合、底空間上のものを全空間に持ち上げてその境界に射影します。

(質問) twistor 理論の記述と関係ありますか？ 普通の u-plane ではなく twistor 空間の...。

(回答) いいえ。冗談をいいますと (一同笑) 、4 次の多項式を

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \tag{92}$$

と書いたとき、この e は $2.7182\cdots$ ではありません。u-sphere は必ずしも u-plane ではないということです。

[55] [34] で導入された。

$SU(2)$ SYM の BPS スペクトル

これまでの議論を物質場のない $SU(2)$ Yang-Mills の場合にあてはめよう。これは非自明な強結合ダイナミクスが BPS スペクトルを変える最も簡単な状況である。その真空のモジュラス空間には準安定曲線 (CMS) があり、外側と内側で BPS スペクトルが違う。この場合は D_4 特異点を変形したもの[56]の近くにプローブを置き、4 枚の互いに局所的な D7-brane を無限遠にとばすことで得られるプローブ理論に対応している。これは 2 枚の (p,q) 7-brane を残す。この (p,q) charge は Seiberg-Witten のモジュラス空間における二つの強結合特異点に対応する。ここでは W-boson が電荷 ± 2 を持つように規格化する。すると二つの特異点は特異点への近づき方に依存して $(\pm 2, 1)$ と $(0,1)$ に対応する。[57]

モジュラス空間には両方の特異点を通る準安定曲線 (CMS) がある : 図 41。[58]　$u = -1, 1, \infty$ の周りのモノドロミーは

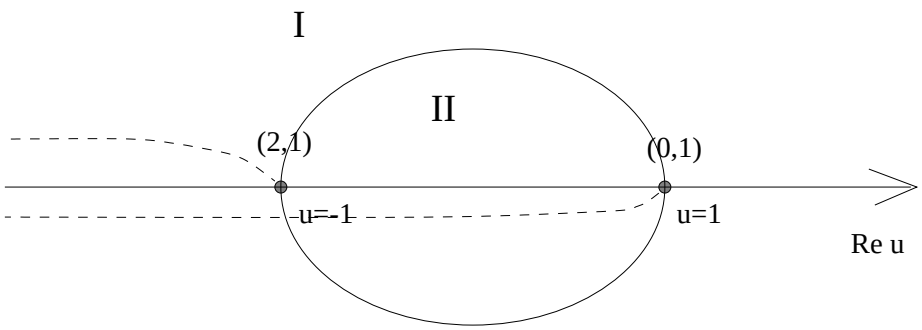


図 41: $(\pm 2, 1)$ と $(0,1)$ に対応する特異点を通る CMS がある。この CMS を横切るときにいくつかの状態は崩壊することができる。[26]　CMS の外部を領域 I、内部を領域 II とする。点線は特異点から生じる branch cut を表わす。

$$M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; M'_{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{95}$$

で与えられる。一般に (p,q) 7-brane の周りのモノドロミーは

$$M_{p,q} = \begin{pmatrix} 1+pq & p^2 \\ -q^2 & 1-pq \end{pmatrix} \tag{96}$$

で与えられる。強結合領域 (領域 II) に存在すべき粒子は二つの特異点で軽くなる粒子だけである。提案された真空の構造の一貫性から他の全ての状態は CMS を横切るとき崩壊することが要求されることはモノドロミーから簡単にわかる。もしそうでなければ、半古典的ダイオンを二つの特異点のうち一方のまわりでまわすことによって半古典的領域には存在しない BPS 状態を生成することができる。

u-plane 上の任意の点 u_0 に D3-brane プローブを置くとそのプローブからモノポールあるいはダイオンのいずれかに至る二つの標準的な測地線を構成できる。これらは $w_{p,q}$-plane では単なる直線である。さらにダイオンの点から無限遠にのびる branch cut を横切るもう一つの単一弦の測地線がありうる。横切るとき弦の電荷には適当なモノドロミー行列が作用する。モノドロミー行列が作用した後の弦がいずれかの特異点と同じ電荷を持っているならその特異点までのびてそこに端を持つことができる。(p,q) string の点 u_0 からの最初の軌跡は弦の電荷で固定されることを思い出そう。二つの単一弦の測地線がある場合は図 42 のようになっている ; この 2 番目の測地線は数値積分あるいは解析的に確めることができる。

---

[56] 6 枚の 7-brane からなる。

[57] $(\pm 2, 1), \; (0,1)$ に対応する特異点でダイオン、モノポールが零質量になる。

[58] u-plane 上

$$\mathrm{Im} \frac{a_D(u)}{a(u)} = 0 \tag{93}$$

となる曲線が CMS。[26]　今の状況では

$$dw_{p,q} = pda + qda_D \tag{94}$$

という対応をしている。[29]

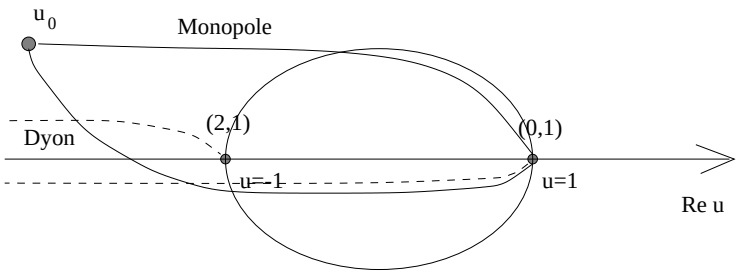


図 42: u_0 から $u=1$ の特異点にいたる測地線で branch cut を横切るものもありうる。

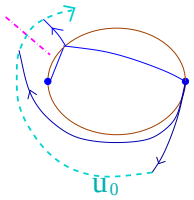


図 43: u_0 を動かすとあるところから弦が他方の 7-brane に引っ掛かる。

図 42 で u_0 を右に動かすと $(0,1)$ 7-brane に端を持つ弦をもう一方の 7-brane に引っ掛けて引っ張っる必要がある (図 43)。D3-brane は CMS から遠く離れているので BPS 状態は崩壊できない。むしろ 3 つ叉弦にわかれる：図 44。

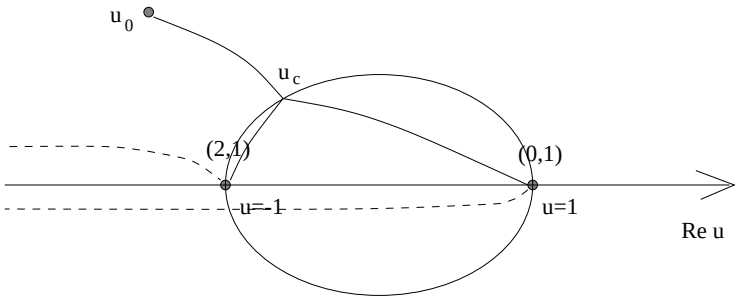


図 44: 3 つ叉弦が生じることもある。

図 44 の u_c の上でどういう条件で 3 つ叉弦は BPS になるのだろうか？片方の足に電荷 $\vec{p}_1$ を持ち、もう片方の足に電荷 $\vec{p}_2$ を持つ、従って残りの足は電荷 $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$ を持つ 3 つ叉弦を考えよう。この状態の質量は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} m(u_0) &= |w_{\vec{p}}(u_0)| \\ &= |w_{\vec{p}}(u_0) - w_{\vec{p}}(u_c) + w_{\vec{p}_1}(u_c) + w_{\vec{p}_2}(u_c)| \\ &\leq |w_{\vec{p}}(u_0) - w_{\vec{p}}(u_c)| + |w_{\vec{p}_1}(u_c)| + |w_{\vec{p}_2}(u_c)| \ . \end{aligned} \tag{97}$$

等号が成立するためには

$$\mathrm{Arg}[w_{\vec{p}}(u_0) - w_{\vec{p}}(u_c)] = -\mathrm{Arg}[w_{\vec{p}_1}(u_c)] = -\mathrm{Arg}[w_{\vec{p}_2}(u_c)] \tag{98}$$

が要求される。[59]　これによって点 u_c は CMS の上になければならないことがわかる。[60]

[59] (97) だけを見ていると $\mathrm{mod}\ \pi$ で等しければ良いと思えるが 7-brane 背景のもとで超対称性を保つためには実は (98) が $\mathrm{mod}\ 2\pi$ で成り立たねばならないことがわかる。[35]

[60] $\vec{p_1}=(0,l_1), \vec{p_2}=(2l_2,l_2)$ $l_1,l_2\in\mathbb{R}$ とすると (98) の 2 番目の等式から

$$\frac{2l_2 a(u_c)}{l_1 a_D(u_c)} + \frac{l_2}{l_1} = \left|\frac{w_{\vec{p_2}}(u_c)}{w_{\vec{p_1}}(u_c)}\right| \tag{99}$$

CMS の内側にプローブを置くと単一弦の配位を除いて BPS 弦の配位はないことがわかる (図 45)。測地線は二つの標準的なものだけに対応し、期待通り BPS スペクトルの非解析的振る舞いを再現する。[61]

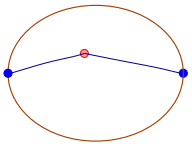


図 45: プローブを CMS の内側に置いたとき 3 つ叉弦は BPS ではなくなり、単一弦の配位だけが BPS になる。

これまで単一弦の配位を無限遠の周りに何回かまわすことによって生じる 3 つ叉弦を議論してきた。これにより弦の配位の言葉で電荷 $(2n, \pm 1)$ $n \in \mathbb{Z}$ を持つ全てのダイオンが実現される。一見するとこれらの 3 つ叉弦はモジュライを持つようにも思える。[62] しかし、今の場合モジュライが存在しない。例えば単一弦の配位に連続的につながる 3 つ叉弦にはモジュライは存在しない。結合定数が '定数' ではないことを考慮しなければならない。

(質問) 位相的には？

(回答) 3 つ叉弦の頂点のところを局所的にみて u-plane の曲率が重要ではないとすると、これは高い種数を持つ曲線がつぶれていると思えるかもしれません。このハンドルが開く自由度があるのでモジュライが生じます。しかし今の場合は違います。モジュライは生じません。これは場の理論からも期待されることです。

しかし BPS 状態に対応しないが質量の条件 (98) は満たしている 3 つ叉弦をもっと構成できる。[63] これらの余分な状態が実際は BPS でないことを示すための選択則を導こう。

選択則

今度は複数の弦の配位を調べよう。

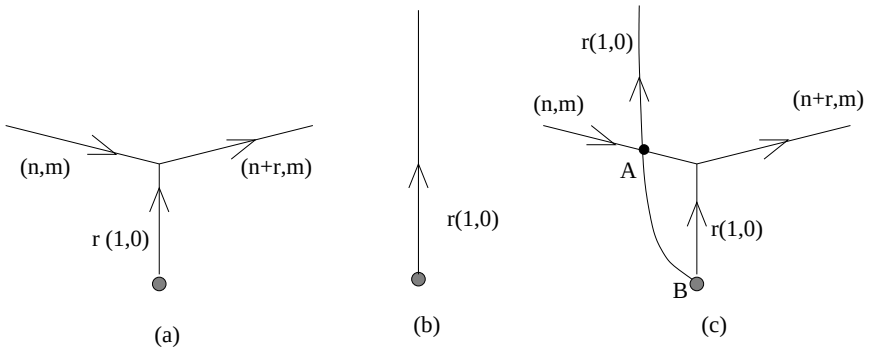


図 46: D7-brane に端を持つ複数の弦の配位。

D7-brane の近くに 3 つ叉弦があるとしよう：図 46(a) 。r と (n, m) をどう選んだら BPS 弦の配位になるかを知る必要がある。ここで n と m は互いに素。選択則を決めるために以前やったように (今度は D3-brane なしで) M 理論に持ち上げる。 R を大きくしたままにするので M 理論のトーラスのサイズは小さく、 u-plane にうまく射影できる。[64]

となり $\mathrm{Im}\frac{a_D(u_c)}{a(u_c)} = 0$ となる。

[61] (98) と $a(u), a_D(u)$ の具体的な形を使うことにより示せる。[35]

[62] これは 4 次元理論で高いスピンを持つ状態が生じることを意味する。結合定数が '定数' である $\mathcal{N} = 4$ で考えると、3 つ叉弦の頂点のところで弦がたくさん生じ得るのでモジュライが生じる。

[63] 高い磁荷を持つものなど。これは場の理論の半古典的な解析からは BPS 状態ではないことが期待される。

[64] トーラスのサイズが小さくないとすると膜の射影があいまいになり u-plane 上で 1 次元的に見えなくなる。

もし図 46(b) のように (n,m) string がなければ fundamental string は
D7-brane の上に端を持てる $\leftrightarrow$ 正則曲線 $\mathcal{C}$ に持ちあがる
のでこの状態は確かに存在する。

(n,m) string を持つ配位が正則曲線に持ちあがるかどうかをチェックするために fundamental string を持ち上げた曲線と 3 つ叉弦を持ち上げた曲線の交叉数を計算する。[65] 交叉数が負なら 3 つ叉弦を持ち上げた曲線は正則になりえない。二つの正則曲線[66]の交叉数は非負であるからである。

交叉数を計算するために fundamental string に対応する cycle を次のように変形する：図 46(c) 。点 A [67]と点 B [68]から交叉数への二つの寄与 i_A と i_B がある。一般に (n,m) string と (q,p) string を M 理論に持ち上げたものの交叉数 i は弦の交叉数とトーラスでの対応する cycle の交叉数との積で与えられる。図 47 の場合は

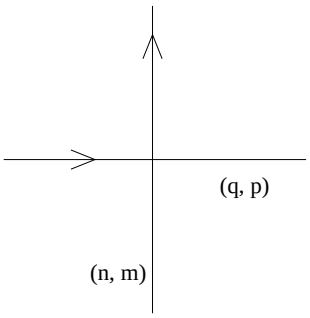


図 47: (n,m) string と (q,p) string の交叉。

$$i = pn - qm \tag{100}$$

となる。 従って点 A から $i_A = rm$ の寄与がある。[69] また点 B から fundamental string に対応する cycle の自己交叉

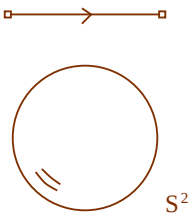


図 48: 二つの互いに局所的な 7-brane をつなぐ 1 本の弦は S^2 の膜に持ちあがり、その自己交叉数は -2 である。

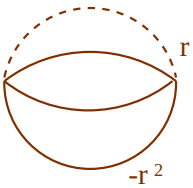


図 49: r 本の弦が 7-brane から出ているときの自己交叉数は図 48 から $-r^2$ となる。

[65]交叉数については例えば [36] の chapter 0, section 4 を参照すること。
[66]同じ複素構造で正則であるとする。
[67]ここでは二つの弦が横断的に交わる。
[68]ここでは二つの弦が同じ 7-brane から出ている。

数の半分 $i_B = -r^2$ の寄与 (図 49) があり、全体の交叉数は

$$i_A + i_B = -r^2 + mr \tag{101}$$

となる。従って二つの正則曲線に持ち上がっている、つまり BPS 配位なら

$$-r^2 + mr \geq 0 \tag{102}$$

である。

以上より一つの足が 7-brane にある 3 つ叉弦に対する選択則が得られた。

また、これは図 46(a) の 3 つ叉弦そのものの自己交叉数の求め方と思っても良い。図 46(a) の 3 つ叉弦を少しずらすと図 46(c) のようになるからである。一般に種数 g 、境界の数 b の正則曲線の自己交叉数は

$$2g - 2 + b \geq -2 + b \tag{103}$$

であり、これは Zwiebach 氏たちによって採用された選択則である。[37]　実際、図 46(a) の配位が種数 $g \geq 0$ 境界の数 $b = 2$ の正則曲線に持ち上がるとすると

$$-r^2 + mr = 2g - 2 + b \geq b - 2 = 0 \tag{104}$$

となり (102) と一致する。

この選択則をみるもう一つの方法がある。

3 つ叉弦を D7-brane のまわりのモノドロミー $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて図 50 のように変形すると不等式 $-r^2 + mr \geq 0$ が

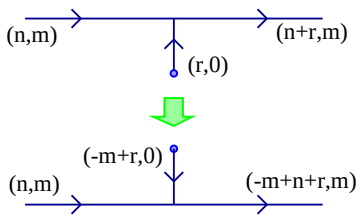


図 50: 配位の変形の議論からも選択則が得られる。

満たされなければその配位はもう BPS ではない。変形した配位で fundamental string の向きはもとの配位と同じであるべきことに注意すると $-m + r$ の符号と r の符号が逆でなければならないからである。これにより再び選択則 (102) が得られる。

選択則の一般化

選択則を二つの特異点、つまり二つの 7-brane がある場合に一般化する必要がある。± 1 の磁荷を持つダイオンは全て存在するという事実を使う。

もっと大きな磁荷を持つダイオンがあるとするしよう。このダイオンの中心電荷を

$$x(2, 1) + y(0, -1) \tag{105}$$

と表わす。ここで x と y は状態が BPS であるためには同符号でなければならない。一般性を失わずに x と y をともに正で互いに素としてよい。この仮定したダイオンに対する曲線と中心電荷

$$s(2, 1) + t(0, -1) \quad (t = s \pm 1) \tag{106}$$

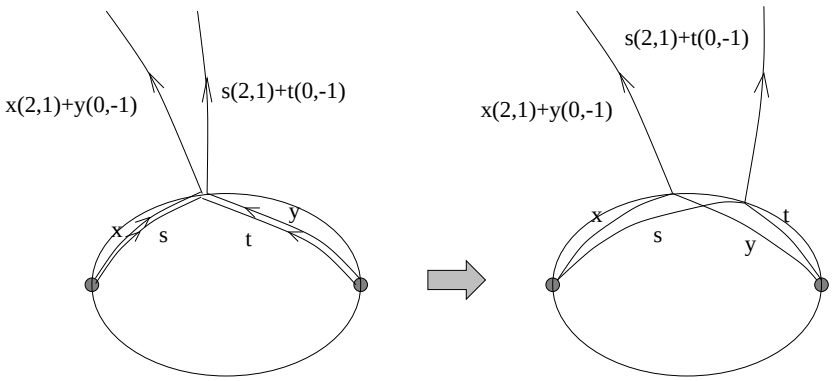


図 51: 3 つ又弦配位の変形

を持つ知られているダイオンに対する曲線の交叉数を計算できる。

図 51 のような配位の変形後[70]　交叉数を計算すると：

$$i = -(s-t)(x-y) + |sy - tx| \ (= 2sy - sx - ty). \tag{107}$$

となる。

それぞれの中心電荷に対し同じ位相を持つ二つの配位の交叉数を計算する形式的な規則は次のものである：同じ 7-brane 上に端を持つとすると（図 51 の x と s ）$-xs$ の寄与がある。（これはいつも負である。）
二つの足が交叉するのなら寄与は以前と同様に計算され、いつも正である。（図 52 ）

図 52: 符号を決める規則

たとえ 7-brane の位置を横切り、いくつかの足の向きが変わったとしても、この交叉数は変化しない。これは期待したことである。M 理論の言葉ではこれは膜の滑らかな変形に対応すべきものだからである。例えば図 51 で 3 つ又弦をモノポール特異点を横切るまで右に動かしたとしよう。状態のラベルはモノドロミーに従って変換する。露わにかくと

$$\begin{aligned} x(2,1) + y(0,-1) \quad &\to \quad x(2,1) + (y-2x)(0,-1) \\ s(2,1) + t(0,-1) \quad &\to \quad s(2,1) + (t-2s)(0,-1) \end{aligned} \tag{108}$$

となる。また $u = 1$ を横切った後交叉している足は以前のように (s, y) ではなく $(\tilde{x}, \tilde{t}) = (x, t-2s)$ である（図 53 ）。交叉数に対する規則から：

$$-|sx| - |(t-2s)(y-2x)| + |2x(t-2s)| = -sx - ty + 2sy \tag{109}$$

となる。これは変形前に得たものと一致する。このように交叉数は形式的にモノドロミー変換での不変量とみてもよい。

今度はこの規則を大きい磁荷を持つ状態を除外する問題に当てはめよう。$x = y + b \ (b > 1)$,[71]　$s = t + 1$ とする。(107) から交叉数を計算し：

$$i = -b + |y - tb| \tag{110}$$

[69] 二つの正則曲線に持ち上がっているならこれは正である。
[70] この図の場合は $\frac{x}{y} < \frac{s}{t}$ の場合に対応する。逆の場合は s, t cycle を逆方向に変形すべきである。
[71] $b < -1$ の場合も同様。

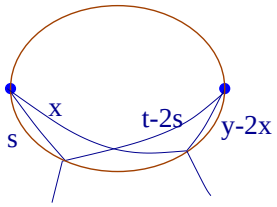


図 53: 図 51 を変形したもの。

$t=\left[\frac{y}{b}\right]$ ととることで $i<0$ となる。両方の足の方向が同じなので曲線は同じ複素構造で正則でなければならない。 $\Rightarrow$ (x,y) 曲線[72]は存在しない。QED.

$x=y$ のとき (107) より i はいつも非負なので上の議論は $b=0$ の場合を除外してはいない。モジュライの数を解析して示されるようにこの場合はベクトルボゾンを表わす 3 つ叉弦に対応する。[21] [73]

第 9 章 結論

- D7-brane が存在するとき BPS 状態を実現する 3 つ叉弦に対する選択則を導き、それを $\mathcal{N}=2$ 純 $SU(2)$ SYM のスペクトルを決定するのに応用した。
- IIA/B, M 理論の extended object を用いて BPS 状態の異なる描像の間の翻訳をした。
- BPS 状態のカウントは 5 次元 $\mathcal{N}=1$ 理論を含む他の状況に一般化/簡単化できる。(そのいくつかは Barton Zwiebach の講義で述べられた。) 面白いことにそこでは 5 次元のいろいろなスピンを持つ BPS 粒子を表現するいろいろな位相の 1 次元グラフのカウントに遭遇する。
- 主な結論：幾何は超対称性理論では強力な道具であり、異なる物理的観点を結びつけるとより強力になる。

Thank you.

(一同拍手)

質疑応答

(座長) 質問はありませんか？

(質問) 安定な非 BPS 状態の存在は言えますか？

(回答) いいえ、非 BPS 状態は存在しません。何か特別な理由で安定な配位なれば別ですが。安定な非 BPS 状態はまだ研究が始まったばかりです。私個人の感じでは、超対称性と矛盾するかもしれない位相的な条件により与えられた位相不変量に対して最小のエネルギーの配位が許されればそれは非 BPS 状態であっても安定になりうると思います。

(質問) IIB 型超弦理論の描像で BPS 条件の理由がわかりますか？

(回答) M 理論に持ち上げずにということですか？

(質問) ええ、素朴に考えて。

(回答) わかりません。おそらく弦の上の 2 次元ゲージ理論を解析することでわかるのではないでしょうか。複数の弦の世界面上のゲージ理論を考えます。この際、領域によってゲージ群が異なることになります。例えば、n 本の弦が $n-1$ 本と 1 本の弦に分かれる状況を考えると ある領域ではゲージ群が $U(n)$ であり、別

[72] 仮定したダイオン (105) に対応するもの。

[73] 実際 $x=y$ のとき自己交叉数は ((107) で $x=y=s=t$ として) 0 になり、これが M5-brane 上に境界を持つ正則曲線を表わしているなら (104) より $b=2,\ g=0$ つまり cylinder になる。

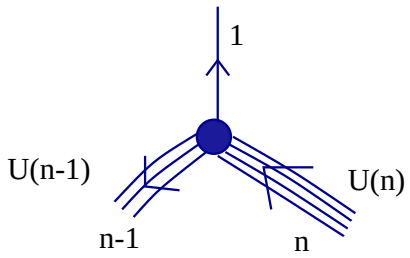


図 54: IIB 型超弦理論の描像

の領域ではゲージ群が $U(n-1)$ になります。(図 54) これをゲージ理論でどう扱うかということなんですが...、2 次元ゲージ理論の安定性を考えて...、わかりません。

(質問) 全ての BPS 状態が 3 つ叉弦で実現できるのですか？

(回答) はい。

(質問) 別の状況で別の群のゲージ理論に応用できるのですか？

(回答) $SU(2)$ より大きい群でクーロンブランチの次元が大きいものは F 理論の記述が存在しません。計量の積を考えたり、$SU(2)$ 理論の積を考えたり、変な matter content を考えたりしてもできないでしょう。

(質問) プローブをもっと複雑な背景におくのは？

(回答) もし 1 次元のクーロンブランチだけを考えるのでしたら、いろいろな matter content を考えることができます。

(質問) あなたはこの拘束条件を提唱しました。我々[74]は別の拘束条件を提唱しました。

(回答) 自己交叉数のことですか？

(質問) 自己交叉数のことです。そして我々は例外群の理論において更なる拘束条件を導きました。あなたは拘束条件はどれだけ出て終わると思いますか？del Pezzo の描像では曲線の正則性を満たすために数学者が保証する拘束条件がつきます。しかしこの描像ではそのようなことは言えないように見えるのですが。わかりますか？

(回答) 私は del Pezzo の極小曲面に関する数学者の仕事を知りません。そしてその計量を書き下すことはできません。拘束条件の cutoff がどこであるのかわかりません。

(質問) 誰も知らないようですね。

(回答) はい。とても込み入った問題だと思います。3 つ叉弦の描像が役に立つと思います。別の方向で。2 次元ゲージ理論によるアプローチも BPS 条件を求めるのに役に立つかもしれません。極小曲面での条件を解析するのに...。

(質問) $K3$ の場合 BPS 状態は境界を持たないので証明は普遍的で問題は単に自己交叉数の拘束条件になります。D3-brane が入った場合は境界を持つので普遍的な証明はありません。

(回答) 存在定理を知っていれば...、数学的でなくても、物理的に $K3$ に境界を与えて...、うまくできるかもしれません。

(座長) 他に質問はありませんか？無いようでしたら講師に今一度拍手を。

(一同拍手)

[74] B. Zwiebach らのグループ。[37, 38] 参照。

参考文献

[1] A. Lawrence, N. Nekrasov and C. Vafa, *"On Conformal Field Theories in Four Dimensions"*, *Nucl. Phys.* **B533** (1998) 199, `hep-th/9803015`.

[2] S. S. Gubser, N. Nekrasov and S. Shatashvili, *"Generalized Conifolds and Four Dimensional $\mathcal{N} = 1$ Superconformal Theories"*, `hep-th/9811230`.

[3] J. Maldacena, *"The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity"*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231, `hep-th/9711200`.

[4] S. Gubser, I. Klebanov and A. Polyakov, *"Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory"*, *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105, `hep-th/9802109`.

[5] E. Witten, *"Anti De Sitter Space And Holography"*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253, `hep-th/9802183`.

[6] S. Kachru and E. Silverstein, *"4d Conformal Field Theories and Strings on Orbifolds"*, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4855, `hep-th/9802183`.

[7] M. Bershadesky and A. Johansen, *"Large N limit of orbifold field theories"*, *Nucl. Phys.* **B536** (1998) 141, `hep-th/9803249`.

[8] Y. Oz and J. Terning, *"Orbifolds of $AdS_5 \times S^5$ and 4d Conformal Field Theories"*, *Nucl. Phys.* **B532** (1998) 163, `hep-th/9803167`.

[9] M. R. Douglas and G. Moore, *"D-branes, Quivers, and ALE Instantons"*, `hep-th/9603167`.

[10] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakahrov, *"EXACT GELL-MANN-LOW FUNCTION OF SUPERSYMMETRIC YANG-MILLS THEORIES FROM INSTANTON CALCULUS"*, *Nucl. Phys.* **B229** (1983) 381, *"SUPERSYMMETRIC INSTANTON CALCULUS (GAUGE THEORIES WITH MATTER)"*, *Nucl. Phys.* **B260** (1985) 157;
M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakahrov, *"EXACT GELL-MANN-LOW FUNCTION IN SUPERSYMMETRIC ELECTRODYNAMICS"*, *Phys. Lett.* **B166** (1986) 334;
M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, *"SOLUTION OF THE ANOMALY PUZZLE IN SUSY GAUGE THEORIES AND THE WILSON OPERATOR EXPANSION"*, *Nucl. Phys.* **B277** (1986) 456.

[11] N. Arkani-Hamed and H. Murayama, *"Holomorphy, Rescaling Anomalies and Exact β Functions in Supersymmetric Gauge Theories"*, `hep-th/9707133`.

[12] M. Bershadsky, Z. Kakushadze and C. Vafa, *"String Expansion as Large N Expansion of Gauge Theories"*, *Nucl. Phys.* **B523** (1998) 59, `hep-th/9803076`;
M. Bershadsky and A. Johansen, *"Large N limit of orbifold field theories"*, *Nucl. Phys.* **B536** (1998) 141, `hep-th/9803249`.

[13] $K3$ 曲面と singularity に関する包括的な review の一つは、P. S. Aspinwall, *"K3 Surfaces and String Duality"*, `hep-th/9611137` (In *"Fields, Strings, and Duality"*, TASI 1996, eds. C. Efthimmmiou and B. Greene, pp. 421, Singapole: World Scientific).
A-D-E 分類に関しては、この文献の section 2.6 を参照。

[14] M. Dine, N. Seiberg, X. -G. Wen and E. Witten, *"NONPERTURBATIVE EFFECTS ON THE STRING WORLD SHEET"*, *Nucl. Phys.* **B278** (1986) 769; *"NONPERTURBATIVE EFFECTS ON THE STRING WORLD SHEET (II)"*,*Nucl. Phys.* **B289** (1987) 319.

[15] A. Strominger, *"Massless Black Holes and Conifolds in String Theory"*,
Nucl. Phys. **B451** (1995) 96, hep-th/9504090.

[16] L. Girardello, M. Petrini, M. Porrati, and A. Zaffaroni, *"Novel Local CFT and Exact Results on Perturbations of $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills from AdS Dynamics"*, hep-th/9810126;
J. Distler and F. Zamora, *"Non-Supersymmetric Conformal Field Theories from Stable Anti-de Sitter Spaces"*, hep-th/9810206.

[17] gauge化された超重力理論についての基本的文献は、M. Gunaydin, L. J. Romans and N. P. Warner, *"COMPACT AND NONCOMPACT GAUGED SUPERGRAVITY THEORIES IN FIVE-DIMENSIONS"*,*Nucl. Phys.* **B272** (1986) 598.

[18] P. Candelas, P. Green and T. Hubsch, *"ROLLING AMONG CALABI-YAU VACUA"*, *Nucl. Phys.* **B330** (1990) 49;
P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green and L. Parkes, *"A Pair of Calabi-Yau Manifolds as an Exactly Soluble Superconformal Field Theory"*, *Nucl. Phys.* **B359** (1991) 21.

[19] P. Candelas and X. de la Ossa, *"COMMENTS ON CONIFOLDS"*, *Nucl. Phys.* **B342** (1990) 246.

[20] I. R. Klebanov and E. Witten, *"Superconformal Field Theory on Threebranes at a Calabi-Yau Singularity"*, *Nucl. Phys.* **B536** (1998) 199, hep-th/9807080.

[21] A. Mikhailov, N. Nekrasov and S. Sethi, *"Geometric Realizations of BPS States in N=2 Theories"*,
Nucl. Phys. **B531** (1998) 345-362, hep-th/9803142.

[22] N. Nekrasov, *"In the Woods of M-Theory"*, hep-th/9810168.

[23] A. Lawrence and N. Nekrasov, *"Instanton sums and five-dimensional gauge theories"*,
Nucl. Phys. **B513** (1998) 239-265, hep-th/9706025.

[24] N. Nekrasov, *"Five Dimensional Gauge Theories and Relativistic Integrable Systems"*,
Nucl. Phys. **B531** (1998) 323-344, hep-th/9609219.

[25] ３つ叉弦に関する初期の文献は、
O. Aharony, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, *"Interactions of strings and D-branes from M theory"*, *Nucl. Phys.* **B474** (1996) 309-322, hep-th/9603009;
J. H. Schwarz, *"Lectures on Superstring and M Theory Dualities"*, hep-th/9607201, section 3.6;
M. R. Gaberdiel and B. Zwiebach, *"Exceptional groups from open strings"*, *Nucl. Phys.***B518** (1998) 151-172, hep-th/9709013.
K. Dasgupta and S. Mukhi, *"BPS Nature of 3-String Junctions"*, *Phys. Lett.* **B423** (1998) 261-26, hep-th/9711094;
A. Sen, *"String Network"*, *JHEP* **9803** (1998) 005, hep-th/9711130;
S.-J. Rey and J.-T. Yee, *"BPS Dynamics of Triple (p,q) String Junction"*, *Nucl. Phys.* **B526** (1998) 229-240, hep-th/9711202;
M. Krogh and S. Lee, *"String Network from M-theory"*, *Nucl. Phys.* **B516** (1998) 241-254, hep-th/9712070;
Y. Matsuo and K. Okuyama, *"BPS Condition of String Junction from M theory"*, *Phys. Lett.* **B426** (1998) 294-296, hep-th/9712070.

[26] N. Seiberg and E. Witten,
"Monopole Condensation, And Confinement In $N = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory", *Nucl. Phys.* **B426** (1994) 19-52; Erratum-ibid. **B430** (1994) 485-486, hep-th/9407087;

"Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in N=2 Supersymmetric QCD",
Nucl. Phys. **B431** (1994) 484-550, hep-th/9408099.

[27] A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr, C. Vafa and N. Warner, *"Self-Dual Strings and N=2 Supersymmetric Field Theory"*, *Nucl. Phys.* **B477** (1996) 746-766, hep-th/9604034.

[28] A. Sen, *"F-theory and Orientifolds"*, *Nucl. Phys.* **B475** (1996) 562-578, hep-th/9605150.

[29] A. Sen, *"BPS States on a Three Brane Probe"*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 2501-2503, hep-th/9608005.

[30] C. Vafa, *"Evidence for F-Theory"*, *Nucl. Phys.* **B469** (1996) 403-418, hep-th/9602022.

[31] B. R. Greene, A. Shapere, C. Vafa and S.-T. Yau, *"STRINGY COSMIC STRINGS AND NONCOMPACT CALABI-YAU MANIFOLDS"*, *Nucl. Phys.* **B337** (1990) 1-36.

[32] 例えば　文献 [13] の section 2 およびこの文献の references を参照。

[33] 例えば　上野 健爾, "代数幾何入門", 岩波書店 (1995). の第４章を参照。

[34] O. DeWolfe and B. Zwiebach, *"String Junctions for Arbitrary Lie Algebra Representations"*, hep-th/9804210.

[35] O. Bergman and A. Fayyazuddin, *"String Junctions and BPS States in Seiberg-Witten Theory"*, *Nucl. Phys.* **B531** (1998) 108-124, hep-th/9802033.

[36] P. Griffiths and J. Harris, *"Principles of Algebraic Geometry"*, *John Wiley & Sons* (1994).

[37] O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, *"Constraints on the BPS Spectrum of N = 2, D = 4 Theories with A-D-E Flavor Symmetry"*, *Nucl. Phys.* **B534** (1998) 261-274, hep-th/9805220.

[38] O. DeWolfe, *"Affine Lie Algebras, String Junctions and 7-Branes"*, hep-th/9809026;
O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, *"Uncovering the Symmetries on [p,q] 7-branes: Beyond the Kodaira Classification"*, hep-th/9812028;
O. DeWolfe, T. Hauer, A. Iqbal and B. Zwiebach, *"Uncovering Infinite Symmetries on [p,q] 7-branes: Kac-Moody Algebras and Beyond"*, hep-th/9812209.
なお、同 Workshop における B. Zwiebach 氏の講義録も参照のこと。