Hilbertスキーム入門*

中村　郁

北海道大学理学部

記：　太田和俊 (京大基研)
横野貴史 (阪大理)
古内一之 (阪大理)
須山孝夫 (阪大理)

*この講義録は研究会「弦理論の数学的側面」(1998 年 12 月, 関西セミナーハウス) における中村郁氏の講演の記録である。

1　(n 点の)Hilbert スキーム

空間 X の n 点の Hilbert スキーム $\mathrm{Hilb}^n X$ について説明します．簡単のためにまず次のような空間 X を考えます．

$$X : \text{空間} = \mathbb{C}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\}$$

これから次のような直積空間が作れます．

$$X \times X = X^2 = \{(P, Q) \mid P, Q \in X\}$$

同様にして，X^n を考えることもできます．X^2 は，X 上の (順序も考慮した)2 点の集合です．2 点の順序を無視したものは次のようになります．

$$\begin{aligned} S^2X &= X \times X/S_2 \\ &= \{P + Q \mid P, Q \in X\} \end{aligned}$$

ただし，$P + Q$ というのはやや形式的な書き方で，順序を考えないという意味でこう書いています．S_2 は 2 次対称群で

$$S_2 = \{1, \sigma\}, \qquad \sigma : (P, Q) \to (Q, P)$$

というものです．

象徴的に書くと，

$$\begin{aligned} S^2X &= \text{2 点全体} \\ \mathrm{Hilb}^2 X &= \text{“ イデアル ” 2 点全体} \end{aligned}$$

となります．正確な定義は後で説明します．　X^n についても，n 次対称群 S_n で割ることにより，X 上の n 点全体を表す空間を考えることができます．

$$S^nX = X^n/S_n$$

S^nX は特異点を持っています．X が 2 次元の複素多様体，たとえば，$X = \mathbb{C}^2$ の場合には，$\mathrm{Hilb}^n X$　を考えることによってこの特異点を解消することができます．ですから，$\mathrm{Hilb}^2 X$ は S^2X の特異点解消になっています.

代数幾何では，X という空間は X 上の関数によって決められると考えます．つまり，$\Gamma(\mathcal{O}_X)$ を X 上の関数全体とすると，

$$X = \Gamma(\mathcal{O}_X) \text{ で区別できる点全体}$$

というように考えるのです．

簡単のため，$X = \mathbb{C}$ の場合から説明します．このとき，

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}[x]$$

です．X 上の点 $x = a$ に対して，$\Gamma(\mathcal{O}_X)$ の元として，そこでゼロになる関数を対応させることができます．

$$\begin{array}{ccc} x = a & & \in X \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ I_a = \{(x-a)g \mid g \in \mathbb{C}[x]\} & & \subset \Gamma(\mathcal{O}_X) \end{array}$$

すぐに分かるように，I_a は $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ のイデアルになっています (点 a の定める極大イデアル)．X のイデアル I とは，$I \subset X$ で

$$I + I \subset I, \quad \lambda I \subset I, \quad fI \subset I$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall f \in \mathcal{O}_X$$

を満たすものです．

X 上の 2 点も同様にしてイデアルで表すことができます．2 点 a, b $(a \neq b)$ について

$$\begin{aligned} I_{[a]+[b]} &= \{f \in \mathbb{C}[x] \mid f(a) = f(b) = 0\} \\ &= \{(x-a)(x-b)g \mid g \in \mathbb{C}[x]\} \end{aligned}$$

と定義します．$([a] + [b]$ は，X 上の 2 点の和集合を表しています．複素数の和と混同しないようにこう書いています．一般に，$S \subset X$ について I_S というイデアルを考えることができます)

ここで，b を a に近づけてみると，

$$I_{2[a]} = \{(x-a)^2 g \mid g \in \mathbb{C}[x]\}$$

となります．これは I_a とは異なるイデアルです．つまり，イデアルでみると “1 点” と “一致した 2 点” は違うということです．2 点を近づけた極限がやはり 2 点らしきものになっているためには，2 点が一致した場合には「$x = a$ でゼロ」という情報だけでは足りないということを意味しています．

“1 点”と “一致した 2 点”の違いをもう少し詳しく見てみましょう . これはイデアルの余次元を見ると明らかになります . まず , 異なる 2 点の場合は

$$\mathbb{C}[x]/I_{[a]+[b]} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

これは , 次の写像の核が $I_{[a]+[b]}$ であることからわかります .

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x] &\to \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ f(x) &\to f(a) \oplus f(b) \end{aligned}$$

一致した 2 点の場合は

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x]/I_{2[a]} &= \mathbb{C}[x]/(x-a)^2 \\ &= \{1, (x-a)\}_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

以上のように , 2 点の場合にはイデアルの余次元は 2 になります . これに対して 1 点の場合には

$$\mathbb{C}[x]/I_{[a]} = \mathbb{C}[x]/(x-a) = \mathbb{C}$$

となり , 余次元は 1 です .

これまで説明したことを考慮して , 2 点の Hilb を次のように定義します .

$$\mathrm{Hilb}^2 X := \{I \in \mathbb{C}[x] \mid \dim \mathbb{C}[x]/I = 2, I \text{ はイデアル } \}$$

これは $X = \mathbb{C}$ 上の 2 点全体と対応しています .

$X = \mathbb{C}^2$ の場合も同様に 2 点の Hilb が定義できます . この場合には , $\Gamma(\mathcal{O}_X)$ を X 上の 2 変数多項式の全体とします:

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}[x, y], \tag{1}$$

$$X^{[2]} = \mathrm{Hilb}^2 X := \{I \in \mathbb{C}[x, y] \mid \dim \mathbb{C}[x, y]/I = 2, I \text{ はイデアル } \} \tag{2}$$

S^2X は $X^{[2]}$ によく似ています . それで , これを $X^{(2)}$ と書くこともあります .

n 点の Hilb も同じように定義します .

$$X^{[n]} = \mathrm{Hilb}^n X := \{I \in \mathbb{C}[x, y] \mid \dim \mathbb{C}[x, y]/I = n, I \text{ はイデアル } \}$$

$X^{[2]}$ の元 I と X 上の点の関係は $X = \mathbb{C}$ のときとほぼ同じです . I に対して

$$Z = \{P \in X \mid f(P) = 0, \forall f \in I\}$$

で Z を定義すると，重複度を正しくかぞえれば Z は $P + Q$ または $2P$ になります．

$P \neq Q$ の場合には，これは正しい対応になっています．

$$I(P,Q) = \{f \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(P) = f(Q) = 0\}$$

と定義すると，これは $X^{[2]}$ の元になっています．もう少し具体的に書くと，$P = (a,b)$，$Q = (c,d)$ のとき

$$\begin{aligned} I(P,Q) &= (x-a, y-b) \cdot (x-c, y-d) \\ &:= \{(x-a)(x-c)f_1 + (x-a)(y-d)f_2 + (y-b)(x-c)f_3 \\ &\qquad +(y-b)(y-d)f_4 \mid f_i \in \mathbb{C}[x,y], i = 1,2,3,4\} \end{aligned}$$

となります．

$P = Q$ の場合は，単純に $a = c$，$b = d$ とするだけではうまくいきません．例えば $P = Q = \vec{0} = (0,0)$ の場合，

$$I(\vec{0},\vec{0}) = \mathfrak{m}^2 := \{x^2 f_1 + xy f_2 + y^2 f_3; f_i \in \mathbb{C}[x,y]\}$$

となりますが，これは $X^{[2]}$ の元ではありません．なぜなら，

$$\dim \mathbb{C}[x,y]/I(\vec{0},\vec{0}) = \dim\{1,x,y\}_{\mathbb{C}} = 3$$

となるからです．単純に $a = c$，$b = d$ とする代わりに，余次元を一定の 2 に保った極限をとります．そうすると，$\mathfrak{m}^2$ ではなくて次のようなイデアルが $P = Q = \vec{0}$ に対応することが分かります．しかし，もはや $P = Q = \vec{0}$ に対してただ一つのイデアルを対応させることはできません．以下見るように無限個のイデアルが対応します.

$$\begin{aligned} I_\beta &= (y - \beta x) + \mathfrak{m}^2 \\ &:= \{(y-\beta x)f_1 + x^2 f_2 + xy f_3 + y^2 f_4 \mid f_i \in \mathbb{C}[x,y]\} \end{aligned}$$

ここで，$\beta \in \mathbb{C}$．容易にわかるように，I_β の任意の元は $P = Q = \vec{0}$ でゼロになります．さらに I_β は $X^{[2]}$ の元になっています．

$$\mathbb{C}[x,y]/I_\beta = \{1,x,y\}/y - \beta x = \{1,x\}_{\mathbb{C}}$$

また，次のようなイデアルも考えられます．

$$I'_\gamma = (x - \gamma y) + \mathfrak{m}^2, \gamma \in \mathbb{C}$$

これも $X^{[2]}$ の元になっています．以上より，$P = Q = \vec{0}$ に対応するイデアルは

$$\{I_\beta \mid \beta \in \mathbb{C}\} \cup \{I'_\gamma \mid \gamma \in \mathbb{C}\}$$

であることがわかります．

$X^{[2]}$ の元が X 上の同じ 2 点を表すということを次のように定義します．

$$I, I' \in X^{[2]}\text{が同じ } 2 \text{ 点を表す} \Leftrightarrow I = I'$$

そうすると I_β と I'_γ は一致することがあります．これらが一致するのは

$$\begin{aligned} I_\beta = I'_\gamma &\Leftrightarrow (y - \beta x) + \mathfrak{m}^2 = (x - \gamma y) + \mathfrak{m}^2 \\ &\Leftrightarrow y - \beta x = \lambda(x - \gamma y), \lambda \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\beta, -\lambda\gamma = 1 \\ &\Leftrightarrow \beta\gamma = 1 \end{aligned}$$

の場合です．これより，先ほどのイデアルの集合は正しくは

$$\{I_\beta \mid \beta \in \mathbb{C}\} \cup \{I'_\gamma \mid \gamma \in \mathbb{C}\}/\sim \quad = \mathbb{P}^1$$

となります．ここで

$$I_\beta \sim I'_\gamma \Leftrightarrow \beta\gamma = 1$$

です．また，$\mathbb{P}^1$ は 1 次元射影空間です．この等式は

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &= \{z = (x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 \mid z \neq (0,0)\}/z \sim \lambda z, \lambda \in \mathbb{C} \\ &= \{(x_0, x_1) \mid x_0 \neq 0\} \cup \{x_0 = 0\} \\ &= \left\{\frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{C}, x_0 \neq 0\right\} \cup \left\{\frac{x_0}{x_1} \in \mathbb{C}, x_1 \neq 0\right\} \\ &= \{\beta \in \mathbb{C}\} \cup \{\gamma \in \mathbb{C}\}/\sim \\ &\quad (\beta \sim \gamma \Leftrightarrow \beta\gamma = 1) \end{aligned}$$

からわかります．また $\mathbb{P}^1$ は 2 次元球面 S^2 と同相です．

$P = Q = (a, b)$ の場合は，I_β と I'_γ を

$$I_\beta = ((y-b) - \beta(x-a), (x-a)^2, (x-a)(y-b), (y-b)^2)$$

$$I'_\gamma = ((x-a) - \gamma(y-b), (x-a)^2, (x-a)(y-b), (y-b)^2)$$

のように定義すればよく，やはり $\mathbb{P}^1$ が現われます．

念のため付け加えておくと，ふたつのイデアル I, I' がそれぞれ異なる 2 点 $P+Q$, $P'+Q'$ $(P \neq Q, P' \neq Q')$ を表わすときは，$I = I'$ となるのは，$P = P', Q = Q'$ または $P = Q', Q = P'$ の時に限ります.

以上で $X^{[2]}$ の元についてはわかりましたが，$X^{[2]}$ 全体はどのような集合なのでしょうか．次の $X^{[2]}$ から $X^{(2)}$ への写像を考えます．

$$I_{P+Q} \to P + Q$$

$$I_\beta, I_\gamma \to 2P$$

この写像は正則です．この写像を Hilbert-Chow 写像と言います． X 上の一致した 2 点の集合を

$$\Delta = \{(P, P) \in X \times X \mid P \in X\} \cong X$$

として，

$$\{X \times X \backslash \Delta\}/S_2$$

という集合を考えると，これは明らかに $X^{(2)}$ の部分集合です．さらに，2 点とイデアルの対応から $X^{[2]}$ の部分集合とみなすこともできます．一致した 2 点に対応するイデアル全体が $\mathbb{P}^1$ だったことから，次の定理が成り立つことが分かります．

定理 **1.** *Hilbert* スキーム $X^{[2]}$ から対称積 $X^{(2)}$ へ *Hilbert-Chow* 写像と呼ばれる正則写像 $\pi : X^{[2]} \to X^{(2)}$ が存在する．この写像は $X^{(2)}$ の特異点 $\triangle(\cong X)$ の特異点解消を与え，その例外集合は $X \times \mathbb{P}^1$ である．

X の次元が 2 であれば，この定理は一般の $n \geq 2$ の場合でもなりたちます．

定理 **2.** X が準射影的な 2 次元非特異代数曲面のとき，*Hilbert-Chow* 写像 $\pi : X^{[n]} \to S^n X$ は対称積 $S^n X$ の最小特異点解消となる．

$X^{[n]}$ はシンプレクティック構造と hyper Kähler 構造を持つことが知られています．それ以外に Cell 分割が知られていて，これは Young 図形を使って表されます．従って，Betti 数が知られています．

さらに，X がコンパクトであるかどうかに関わらず X がシンプレクティック構造を持てば，$X^{[n]}$ はシンプレクティック構造を持ちます．

Betti 数について，一番簡単な場合，$X = \mathbb{C}^2$ のときの結果を書いておきます．$X^{[n]}$ の Poincaré 多項式を

$$P_t(X^{[n]}, \mathbb{Q}) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(X^{[n]}) t^i \tag{3}$$

と定義します．ここで，$b_i(X^{[n]})$ は $X^{[n]}$ の第 i 次 Betti 数です．このとき，この Poincaré 多項式の母関数は次の式で与えられます．

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n P_t(X^{[n]}) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - t^{2m-2} q^m} \tag{4}$$

特に $t = 1$ のときを考えてみると，

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n P_1(X^{[n]}) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^m} \tag{5}$$

となり

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^*(X^{[n]}, \mathbb{Q}) \tag{6}$$

はボゾンの Fock 空間であるということを予想させますが，実際そうであるということが知られています．

$\mathbb{P}^2$ との関係で言えば，$X = \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$ に対して，

$$X^{[n]} = \{ I \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \,|\, \dim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/I = n, \quad I \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}{\otimes} \mathcal{O}_{l_\infty} = \mathcal{O}_{l_\infty} \} \tag{7}$$

となります．ここで，

$$l_\infty = \{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2 | x_0 = 0 \} \tag{8}$$

$$\mathbb{C}^2 = \{ (1, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2 \} \tag{9}$$

とします．すこし複雑になるので，$\mathbb{P}^2$ の場合はこれ以上述べないことにします．

ここですこし特異点の話をします．例として次のような集合を考えます．

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^2 - 0/\mathbb{C}^*, \quad \mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^3 - 0/\mathbb{C}^* \tag{10}$$

$$\mathcal{C} = \{(z_0, z_1, z_2) \subset \mathbb{P}^2 | z_1^3 = z_0 z_2^2\} \tag{11}$$

ここで，$\mathbb{P}^1$ と $\mathcal{C}$ は位相同型です．だから，集合としては同一視が可能です．どうすれば位相同型がわかるかというと，

$$\begin{array}{cc} (1,t) \in \mathbb{P}^1 & (x_0, x_1) \in \mathbb{P}^2 \\ \downarrow & \downarrow \\ (1; t^2; t^3) & (x_0^3; x_1^2 x_0; x_1^3) \end{array}$$

という写像を考えてやればよいわけです．しかし，$\mathbb{P}^1$ は smooth ですが，$\mathcal{C}$ は特異点があるので本当の構造，つまり，代数多様体としての構造は違います．だから，集合が分かっただけでは $X^{[2]}$ というのが本当はわかったことにはならないのです．しかし，次のようにわかれば十分です．S^2X は何だったかというと，

$$S^2X = \{P + Q; P, Q \in X\} \quad X \in \mathbb{C}^2 \tag{12}$$

でした．これは座標で書くと次の様になっています．

$$\begin{aligned} S^2X &= \{(x, y, z, w)\}/(x, y) \leftrightarrow (z, w) \\ &= \{(u, v, \zeta, \xi)\}/(\zeta, \xi) \leftrightarrow (-\zeta, -\xi) \end{aligned} \tag{13}$$

ここで，

$$u = x + z \leftrightarrow u \tag{14}$$

$$v = y + w \leftrightarrow v \tag{15}$$

$$\zeta = x - z \leftrightarrow -\zeta \tag{16}$$

$$\xi = y - w \leftrightarrow -\xi \tag{17}$$

です．

この入れ替えで割ってるわけですから，この変換で不変な関数が S^2X を決めているわけです．この入れ替えに対して不変なものは，

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{O}_{S^2X}) &= \mathbb{C}[u, v, \zeta^2, \zeta\xi, \xi^2] \\ &\equiv \ (u, v, \zeta^2, \zeta\xi, \xi^2 \text{ の多項式の全体}) \\ &\cong \mathbb{C}[u, v, p, q, r]/(q^2 - pr) \end{aligned} \tag{18}$$

ただし，ここで，$q^2 - pr$ は変数に対する constraint で，多変数の空間に $q^2 - pr = 0$ という関係を課しているということです．最後の同型構造は、次の写像の核で割って得られます．

$$\varphi^* : \mathbb{C}[u, v, p, q, r] \to \Gamma(\mathcal{O}_{S^2X}) \tag{19}$$

ここで、φ^* は以下のように与えられます．

$$\begin{aligned} \varphi^*(p) &= \zeta^2 \\ \varphi^*(q) &= \zeta\xi \\ \varphi^*(r) &= \xi^2 \end{aligned} \tag{20}$$

S^2X の方で書くと

$$S^2X = \{(u, v, p, q, r) \in \mathbb{C}^5, q^2 = pr\} \tag{21}$$

言うことになります．特異点の集合は

$$\mathrm{Sing}(S^2X) = \{p = q = r = 0\} = \{(u, v)\} \cong \triangle \cong X$$

で与えられます．

$\dim_{\mathbb{C}}[X] = 3$ の場合について少し話しておきましょう. $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$ は $n \geq 3$ のときは特異点を持ち，n が大きいと可約になることが知られています．しかし以下に述べるように、有限群 G に関して不変な部分を考えると，それは smooth になることがあります．$\mathbb{C}^3$ に作用する 位数 (order) N の有限群 G を考えます.

$$\begin{aligned} &G \circlearrowright \mathbb{C}^3 \\ &\text{位数} \quad |G| = N. \end{aligned} \tag{22}$$

この G で商をとります. すこし乱暴ですが，次のような同一視ができます.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^3/G &= \{P \in \mathbb{C}^3\} / (P \sim gP) \qquad (g \in G) \\ &= \{GP; P \in C^3\} \\ &= \{P_1 + P_2 + \cdots + P_N \,;\, \text{全体が } G \text{ で不変}\} \end{aligned} \tag{23}$$

この $\mathbb{C}^3/G$ の 代用物の Hilbert スキーム版とは何であるべきか？と考えて見ます. イデアルの見方では，

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}^3/G \text{ の Hilb 版の代用物？} \\ :=&\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3) \\ =&\{ \text{ イデアルの } N \text{ 点 ; } G \text{ で不変 } \} \\ =&\{I \subset \mathbb{C}[x,y,z] \,;\, \forall f \in I,\ \forall g \in G,\ g^*(f) \in I\} \\ &\qquad \dim\left[\,\mathbb{C}[x,y,z]/I\,\right] = |G| = N. \end{aligned} \tag{24}$$

となります. $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3)$ というのは、気持ちの上では $\mathbb{C}^3$ を G で割っているようなものなのだけれども、少しだけ変えたものだというふうに考えることができます.

この $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3)$ に対して、次のような予想があります.

予想

$$\begin{aligned} &G \text{ が } \mathrm{SL}(3,\mathbb{C}) \text{ の有限部分群} \\ \Rightarrow\ &\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3) \text{ は } \mathbb{C}^3/G \text{ の最小特異点解消} \end{aligned} \tag{25}$$

例えば、G が 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X に作用しているとします. このとき、

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathrm{Fix}(X) := \{x \in X; \exists g \neq \mathrm{id}, gx = x\} \\ &x \text{ で local に } G_x = \{g \in G \,;\, gx = x\} \subset G \\ &G_x \text{は } \mathrm{SL}(3,\mathbb{C}) \text{ の有限部分群} \end{aligned} \tag{26}$$

ならばこの予想は適用できて、$\mathrm{Hilb}^G(X)$ は X/G のもっとも自然な最小特異点解消であろう、というわけです. 予想が正しければ，X 上の正則 3 型式が G で不変のときには，$\mathrm{Hilb}^G(X)$ もまた Calabi-Yau 多様体になることになります.

現在次のようなことがわかっています.

- G の分類は知られている.
- $G \not\subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C}), G \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ のとき、$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3)$ は特異点を持ち得る.

G の分類は次のようになっています.

G の分類

(1) Abelian.

(2) 次に簡単な、$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群.

(3) その他

(1) の場合には、$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3)$ は滑らかです. (2) の場合には、$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3)$ が滑らかになる例があります.

また、$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3)$ が滑らか，つまり $\mathbb{C}^3/G$ の特異点解消になるときには，標準束はそれぞれ

i. $K_{\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3)} =$ 自明.

ii. $K(\mathbb{C}^3/G) =$ 自明.

したがって差がありません. 差がなければ最小特異点解消です . 最小特異点解消でも差のある場合はありますが，

$$\text{i. と ii. に差がない.} \implies \text{最小特異点解消.} \tag{27}$$

さて話を元に戻して，ここで Hilb^n の数学的な定義をもう少しはっきりさせておきましょう. そもそも、定義するのに集合だけ決めても駄目で、もっと代数的な構造、すなわちスキームとして、あるいは代数多様体としての構造をはっきり決めなければいけないわけです. それは、始めのほうで Hilb^n を，ある性質を持つイデアルの集合として書いたけれども、ああいうやり方では絶対できないわけです. 代数的な構造を定義するために大事な性質が、Hilb^n の universality です. すなわち、こういう性質を持つものはこれしかない、という universality です. これを説明します. スキーム S 上の勝手な “ n 点”の族 (family) Z が与えられたとします.

$$\begin{array}{ll} Z & \\ \downarrow \pi & \pi : \text{proper flat morphism} \\ S & \end{array} \tag{28}$$

ここで “ n 点”の族とは何なのかを説明します. まず $Z(p)$ を $p \in S$ 上のファイバー，つまり，p の π による逆像とします. つぎの同値な条件が成立しているとき， $\pi : Z \to S$ は n 点”の族と言います.

$$\begin{aligned} &\forall p \in S, \quad Z(p) : \text{ファイバーが “ } n \text{ 点”} \\ &\Longleftrightarrow Z(p) \subset X \quad h^0(\mathcal{O}_{Z(p)}) = n \\ &\Longleftrightarrow \dim \mathcal{O}_X / I_{Z(p)} = n \end{aligned} \tag{29}$$

これに対し、$\mathrm{Hilb}^n(X)$ 上に次のような “ n 点” の族 Z_{univ} が存在します.

$$\begin{aligned} &Z_{univ} = \bigcup (\ \text{“}n \text{ 点 ”} \in \mathrm{Hilb}^n(X)\ ) \\ &\downarrow \pi_{univ} \\ &\mathrm{Hilb}^n(X) \end{aligned} \tag{30}$$

そして、$(Z, \pi) \simeq \phi^* (Z_{univ}, \pi_{univ})$ となる射 $\phi : S \to \mathrm{Hilb}^n(X)$ が一意的に存在します. まとめると、次のようになります.

定理 3. $\mathrm{Hilb}^n(X)$ の存在と universality. $(\dim[X]$ は任意$)$
X をスキームとし、n を正の整数とする. このとき、$\mathrm{Hilb}^n(X)$ 及び次のような性質を満たす *proper flat family* $\pi_{univ} : Z_{univ} \to \mathrm{Hilb}^n(X)$ が存在する.

(1) Z_{univ} のファイバー $Z_{univ}(p)$ はすべて $\mathrm{Hilb}^n(X)$ に属する.

(2) 任意の *“n* 点*”*の *flat family* $\pi : Z \to S$ に対して、$(Z, \pi) \simeq \phi^* (Z_{univ}, \pi_{univ})$ となる写像 $\phi : S \to \mathrm{Hilb}^n(X)$ が一意的に存在する.

(3) $p = q$ のとき、かつそのときのみ $Z_{univ}(p) = Z_{univ}(q)$ となる.

要するに、$\mathrm{Hilb}^n(X)$ というのは X の n 点をすべて集めたものです. だから、 勝手な n 点は $\mathrm{Hilb}^n(X)$ の中の 1 点とみなすことができます. $\mathrm{Hilb}^n(X)$ の 1 点の上にもともとの n 点を乗せて $\mathrm{Hilb}^n(X)$ 全体の上を動かすと、自動的にいい family になっている、というわけです. $\mathrm{Hilb}^n(X)$ の上にはそういういい family Z_{univ} がいつもただ 1 つあります. ほかに勝手な n 点の family があったとします. すると、それは今述べた標準的なものから (2) の写像 ϕ から induce されます. 本質的に新しいものは出てきません.

この universality により、$\mathrm{Hilb}^n(X)$ の代数的な構造まで含めて定義することができます.

次に、群 G を作用させることを考えます.

$$\begin{aligned} & G \circlearrowright X \qquad |G| = N \\ & X/G \subseteq P_1 + P_2 + ... + P_N : G\text{-不変} \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hilb}^N(X) \xrightarrow{\pi_N} S^N(X) &= \overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{N} / S^N \\ Z \quad &\longmapsto \quad \sum_{x \in X} \dim(\mathcal{O}_{Z,x}) x \end{aligned} \tag{32}$$

G は $X \times X \times \cdots \times X$ に対して一斉に作用します.

$$\begin{aligned} & G \circlearrowright X \times X \times \cdots \times X \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_N) \mapsto (gx_1, gx_2, \cdots, gx_N) \end{aligned} \tag{33}$$

ポイントは、写像 π_N は G-不変なので、$\mathrm{Hilb}^N(X)$ と $S^N(X)$ の両方の G 固定点集合の間の写像，というのを考えることができるということです.

$$(\mathrm{Hilb}^N(X))^{G\text{-inv}} \longrightarrow (S^N(X))^{G\text{-inv}} \tag{34}$$

まず $(S^N(X))^{G\text{-inv}}$ の方で

$$\begin{aligned} & (S^N(X))^{G\text{-inv}} \\ & \quad \supset \ X/G \\ & \quad \supset \{P_1 + \cdots + P_N \,|\, \text{全体で } G\text{-不変.} \ \ \text{各 } P_i \text{は } G\text{-固定点でない.}\} \end{aligned} \tag{35}$$

という集合を考えます. いま N を G の位数にとったために、この集合を

$$\{GP \,|\, P \text{ は } G\text{-固定点でない.}\} \tag{36}$$

とみなすことができます. この集合は X/G の中の開集合ですが，これは G-固定点がない部分だから性質の良いところに入っていて、イデアルを対応させることもできます. したがって，これは $(\mathrm{Hilb}^N(X))^{G\text{-inv}}$ の方にも含まれているので、$\mathrm{Hilb}^N(X)$ の中で閉包をとります. これが $\mathrm{Hilb}^G(X)$ の定義です.

$$\mathrm{Hilb}^G(X) := \overline{\{GP \,;\, P \text{ は } G\text{-固定点でない. }\}} \tag{37}$$

ただし構造は reduced structure を入れます. これは入り得る一番小さい構造です. こうすると、Hilb^N というのは universality を持っているので，reduced structure をとったおかげで Hilb^G も同様な universality を持つわけです. これで初めて代数構造を決めることのできる対象になります.

2　単純特異点と McKay 対応

単純特異点とは、$\mathbb{C}^2$ を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群で割って得られる商特異点です. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群は完全に分類されています.

$$A_n \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{n+1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{n+1}^{-1} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_n : 1 \text{ の } n \text{ 乗根} \tag{38}$$

$$D_n \quad \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon_{2n-4} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2n-4}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{39}$$

$$E_6 \qquad \cdots \tag{40}$$

$$E_7 \qquad \cdots \tag{41}$$

$$E_8 \qquad \cdots \tag{42}$$

まず A_1 の場合を見てみましょう.

$$A_n \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{n+1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{n+1}^{-1} \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$n=1: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \tag{44}$$

この作用のもとで x^2, xy, y^2 という関数は不変です. G-不変な多項式のなす環 $\mathbb{C}[x,y]^{G\text{-inv}}$ は

$$\mathbb{C}[x,y]^{G\text{-inv}} = \mathbb{C}[x^2, xy, y^2] = \mathbb{C}[p,q,r]/(q^2-pr) \tag{45}$$

となります. さて、$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^2)$ は $\mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消を与えます.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^2) &\longrightarrow \mathbb{C}^2/G \quad : \text{最小特異点解消} \\ P^1 &\longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{46}$$

これを図に描くと単純ですけど、

$$A_1 \quad \circ \tag{47}$$

となります. ここで $\circ$ は特異点を解消するとき出てきた $\mathbb{P}^1$ を表します.

単純特異点の geometry は不変式論によってよく理解されています. その方法は、まず不変式論によって $\mathbb{C}^2/G$ を具体的に書き下しその特異点を見て、その特異点解消を構成します. その geometry の情報から、Dynkin

図形を構成します. だから、この方法は群 G から出た情報で Dynkin 図形をつくるんだけれども、G だけを見ているわけではありません. その結果は A_n, D_n, E_n Lie 環の Dynkin 図形と同じになります.

一方、McKay は、 Dynkin 図形は群 G の表現論だけから構成できるということを見つけました. 特異点もなんにもいらないわけです.

McKay

Dynkin 図形は群 G の表現論から回復できる.

これを D_5 を例にとって説明しましょう.

$$\begin{aligned} G &= D_5 \\ |D_5| &= 12 \end{aligned} \tag{48}$$

群 G は次の 2 つの元 σ, τ で生成されています.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix},$$

ただし, ε は 1 の原始 6 乗根を表します. D_5 の既約表現は $\mathrm{Irr}_*(D_5) = \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ です. それぞれの次数は、順に $1, 1, 2, 2, 1, 1$ となっています. $1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 12$ だから、既約表現はこれで尽きています. ここで、ρ_1 は自明な表現で, $\rho_2 := \rho_{nat}$ は上に書いた 2×2 の行列表現です. これを自然 (natural) な表現と呼んでおきます.

ここで、テンソル積

$$\rho_i \otimes \rho_{nat} = \sum_{j=0}^{5} a_{ij} \rho_j \tag{49}$$

を調べてみると、次のようになります.

$$\rho_0 \otimes \rho_{nat} = \rho_{nat} = \rho_2 \tag{50}$$

$$\rho_1 \otimes \rho_{nat} = \rho_{nat} = \rho_2 \tag{51}$$

$$\rho_2 \otimes \rho_{nat} = \rho_0 + \rho_1 + \rho_3 \tag{52}$$

$$\rho_3 \otimes \rho_{nat} = \rho_2 + \rho_4 + \rho_5 \tag{53}$$

$$\rho_4 \otimes \rho_{nat} = \rho_3 + \rho_4 \tag{54}$$

$$\rho_5 \otimes \rho_{nat} = \rho_3 + \rho_5 \tag{55}$$

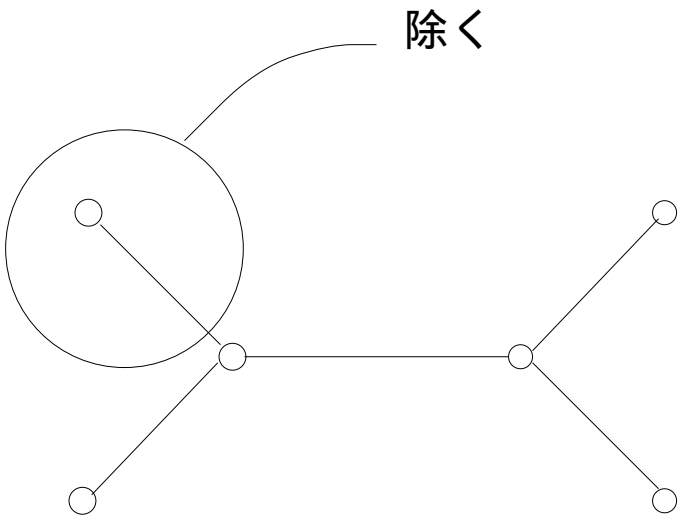

図 1: McKay の構成法による Dynkin 図形

Dynkin 図形は次のようにして描きます. まず、各 ρ_i を点 $\circ\, i$ で表します. そして、a_{ij} が 1 のとき、点 $\circ\, i$ と点 $\circ\, j$ を線で結びます:

$$i \quad \circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ \quad j \quad \cdots \quad a_{ij} = 1 \text{ のとき.} \tag{56}$$

$$i \quad \circ \qquad\qquad \circ \quad j \quad \cdots \quad a_{ij} = 0 \text{ のとき.} \tag{57}$$

そうすると、特異点をまったく見ていないにもかかわらず、不変式論とまったく同じ図形が出てきます (図 1).

不変式論の方では、Dynkin 図形は次のようにして得られます.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2/G = 4I^2 + H^2 - IF^2 = 0 \\ I = x^2y^2 \\ F = x^6 + y^6 \\ H = xy(x^6 - y^6) \end{aligned} \tag{58}$$

こういう式で定義された複素曲面の特異点は D_5 の特異点として知られています. 特異点解消すると、$\mathbb{P}^1$ がこう交わっています (図 2).

わかりにくかったら、こういうふうに交わっていると考えてもいいです (図 3).

そうすると、問題は

なぜ 2 つの違った方法は同じ結果を与えるのか？

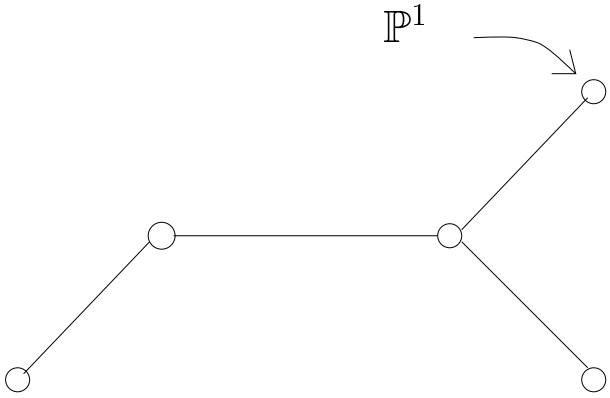

図 2: 不変式論による Dynkin 図形 (1)

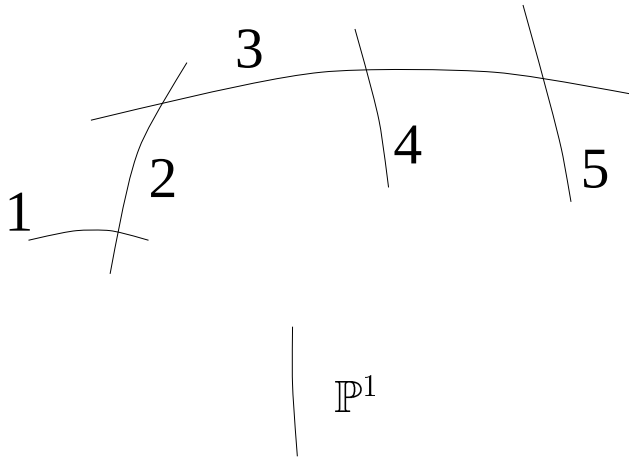

図 3: 不変式論による Dynkin 図形 (2)

ということです. これに対し、G. Gonzalez-Sprinberg/J. Verdier (1983) が精神としてはこの証明を「与え」ました. 精神としては、というのは、Mckay の言ったことの全部がわかったわけではなくて、少し残されたところがあるからです.

彼らは、次のようにして McKay 対応を説明しました.

$$\begin{aligned} &\rho_i \to \exists F_i : \mathbb{C}^2/G \text{ 上のバンドルを構成} \\ &\quad \to \ \mathrm{Chern}_1(F_i)|_{C_j} = \delta_{ij} \\ &\rho_i \to C_i \end{aligned} \tag{59}$$

つまり、表現 (ρ_i) から出発して、$\mathbb{C}^2/G$ 上のバンドルを構成して、その first Chern-Class を調べてみると、一つの既約成分だけで 1 になって、ほかでは全部ゼロになっています. その既約成分の名前を C_i と呼ぶことにします. こうして、1 回 dual の操作をとおして、既約表現 ρ_i と C_i を対応させることができます.

こういうものの説明でなにがいい説明か、というのはなかなか微妙で、なにが大事か、というのはやる人の考え方がズバリでるわけです. どういうことが言えてないとわかったことにならないか. あるいは言えたとしても、計算で答えが出たとしても、それでは説明になってなくて、それはたまたまそうなっただけだと思う立場もあるわけで、微妙なわけです. それで、以下が我々の新しい説明です.

まず、次の定理があります.

定理 4. (Ito-Nakamura)
G を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群とする. このとき、

$$\begin{aligned} X = &\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^2) \to \mathbb{C}^2/G : \text{最小特異点解消} \\ = &\underbrace{\left(\mathrm{Hilb}^{|G|}(\mathbb{C}^2)\right)}_{smooth}{}^{G\text{-}inv} \text{ の 1 つの連結成分} \quad \therefore\ smooth \end{aligned} \tag{60}$$

特異点解消なのは明らかですが、同時に最小でもあります. だから余分なものは一切入っていないわけです. この定理により Hilbert スキーム $X = \mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^2)$ が $S = \mathbb{C}^2/G$ の最小特異点解消を与えることがわかります. すなわち、$\pi : X \to S$ は自然な射となり, π の例外集合である $E = \pi^{-1}(0)$ が存在します. この例外集合は、G だけから構成されています. 少なくとも、$\mathbb{C}^2/G$ の geometry は見ないでわかるものです. だから、X というのは、少なくともこうなっています.

$$X \subset \{I \subset \mathbb{C}[x,y]\,; \dim\left(\mathbb{C}[x,y]/I\right) = |G|\} \tag{61}$$

だけど、実際はこういうふうになっているんですね.

$$X \subseteq \{I \subset \mathbb{C}[x,y]\,;\, \mathbb{C}[x,y]/I \simeq \mathbb{C}[G]\} \tag{62}$$

I も G-不変 なんですけれども、I による商が G 加群の構造を持って、それが G の regular 表現と一致します.

それで、McKay の観察したことの核心は何だったか？というと、

McKay

全然違うものの間に対応がある.

ここが核心です. 群の表現と特異点解消に現われる有理曲線の既約成分とは、全然関係のないものですから. その意外さに答えなければ答えにならない. それは、今の我々の説明ではぜんぜん意外ではありません. それを説明しましょう.

そのために少し準備をします . まず定理 4 によって $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^2)$ は $\mathbb{C}^2/G$ の特異点解消です.$\mathbb{C}^2/G$ はただひとつの特異点を持っていますが , その逆像を E とします.E は $\mathbb{C}^2/G$ に写像されると特異点につぶされてしまう , そのような点全体の集まりです. 次に , $\mathfrak{m}$ を $\mathbb{C}^2$ の原点 0 での極大イデアルとします . すなわち ,

$$\mathfrak{m} = (x,y) = x\mathbb{C}[x,y] + y\mathbb{C}[x,y] \tag{63}$$

と定義します .また ,$\mathbb{C}[x,y]^{G-inv}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_S$ に対し ,$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_S\mathbb{C}[x,y]$ と定義しておきます . E に属する任意の I は $\mathfrak{n}$ を含む $\mathbb{C}[x,y]$ の G 不変なイデアルだということが分かります . そこで ,

$$V(I) := I/(\mathfrak{m}I + \mathfrak{n}) \tag{64}$$

と定義すると , $V(I)$ は有限次元の G 加群となります . $V(I)$ は商加群をして定義されていますが , 実際には $\mathfrak{m}$ の部分加群 , すなはち , 原点 $(0,0)$ で 0 になるような有限個の多項式で生成される加群になります. この $V(I)$ から既約な G 加群の同値類全体 $\mathrm{Irr}\,G$ の任意の元 ρ, ρ', ρ'' に対し, いくつか E の部分集合を次のように定義します .

$$E(\rho) := \{I \in E; V(I) \supset \rho\} \tag{65}$$

$$P(\rho,\rho') := \{I \in E; V(I) \supset \rho \oplus \rho'\} \tag{66}$$

$$Q(\rho,\rho',\rho'') := \{I \in E; V(I) \supset \rho \oplus \rho' \oplus \rho''\}. \tag{67}$$

この $E(\rho), P(\rho,\rho'), Q(\rho,\rho',\rho'')$ に対し , 次の定理が成り立ちます .

定理 5. (Ito-Nakamura)
G を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の有限部分群とする．

1. $\rho \in \mathrm{Irr}\, G$，$E(\rho) \in \mathrm{Irr}\, E$ に対し，写像 $\rho \mapsto E(\rho)$ は全単射となる．
2. 任意の $\rho \in \mathrm{Irr}\, G$ に対し，$E(\rho) \simeq \mathbb{P}^1$ であり，$E(\rho)^2 = -2$ を満たす．
3. ρ と ρ' が隣接している，すなわち $\rho \otimes \rho_{nat} \supset \rho'$ かつ $\rho' \otimes \rho_{nat} \supset \rho$ のときのみ $P(\rho, \rho') \neq \emptyset$．
4. 任意の ρ, ρ', ρ'' に対し，$P(\rho,\rho) = Q(\rho,\rho',\rho'') = \emptyset$．

各イデアルにとって最も大切な部分はもちろん生成元で，それは数学的には $V(I)$ を見ればわかります. その $V(I)$ は群 G の有限次表現ともみなせるわけですが，調べてみるとなぜかほとんどすべての場合 (つまり、E の特異点を除けばいつも) 既約になっているのです. そして $V(I)$ の表現としての同値類で E を分けてやると，既約表現の各同値類につきひとつの既約成分 $E(\rho)$ が得られるということを，定理は主張しています. $V(I)$ の表現の形は変化するけれど，その同値類は E の既約成分 $E(\rho)$ に沿うて一定です.

では既約成分の交わり方はどうなるのかというと，定理は次のように主張しています.

上のように既約成分に表現の同値類で名前をつけると、既約成分の交わり方、つまり例外集合の Dynkin 図形は、ちょうど McKay の表現論による Dynkin 図形に (各頂点の名前の付け方までこめて) 一致する.

つまり McKay 対応の説明ができるということを主張しています. これ以上わかりやすく述べるのは少し面倒ですが，大切なところだけを，再び D_5 の例を用いて説明しましょう．

まず，任意の正の整数 m に対して $S_m := S_m(\rho_{\mathrm{nat}})$ を ρ_{nat} の対称 m-テンソル, つまり, 次数 m の斉次多項式の空間とします．もし $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$ の G-部分加群 W が斉次 G-加群の直和となるなら，W の m 次の斉次部分を $S_m(W)$ と書くことにします．また，$S_j(\mathfrak{m}/\mathfrak{n})$ と W の積によって $\mathbb{C}$ 上に生成される $S_{m+j}(\mathfrak{m}/\mathfrak{n})$ の G- 部分可群を $S_j \cdot W$ と書くことにします．

D_5 に対しては，$V_m(\rho) := S_m(\mathfrak{m}/\mathfrak{n})[\rho]$ と定義すると，

$$V_2(\rho_1) = \{xy\}, \quad V_6(\rho_1) = \{x^6 - y^6\} \tag{68}$$

$$V_3(\rho_2) = \{x^2y, xy^2\}, \quad V_5(\rho_2) = \{x^5, y^5\} \tag{69}$$

となることを思い出します．任意のゼロでない G 加群 $W \in \mathbb{P}(V_2(\rho_1) + V_6(\rho_1)) = \mathbb{P}(\{xy\} \oplus \{x^6 - y^6\})$ に対し，$\mathcal{I}(W) := W\mathbb{C}[x,y] + \mathfrak{n}$ と定義し

ます．ただし，$W \neq V_6(\rho_1)$，すなわち，$W \neq \{x^6 - y^6\}$ です．もっと具体的に言うと，W はただ一つの多項式 $xy - \lambda(x^6 - y^6)$ から生成されています. ここで，λ は勝手な複素数をとることができます. すると，

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(W)/\mathfrak{n} &= W + \sum_{k=1}^{\infty} S_k W + \mathfrak{n}/\mathfrak{n} \\ &= W + \sum_{k=1}^{5} S_k V_2(\rho_1) + \mathfrak{n}/\mathfrak{n} \end{aligned} \tag{70}$$

となり，$\mathcal{I}(W) \in \mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^2)$ ということがわかります．λ が勝手な複素数を動くということ，これが Hilb^G の例外集合の既約成分は有理曲線であるという事実を示しています．　$\mathcal{I}(W)$ を生成元を使って具体的に書くと

$$\mathcal{I}(W) = (xy - \lambda(x^6 - y^6), x^2y^2, x^6 + y^6, xy(x^6 - y^6))$$

となります. $V_2(\rho_1) = \{xy\}$ なので $S_1V_2(\rho_1) = \{x^2y, xy^2\} \simeq \rho_2 = V_3(\rho_2)$ となることを用いると，

$$\begin{aligned} \lim_{W \to V_6(\rho_1)} \mathcal{I}(W) &= V_6(\rho_1) + \sum_{k=1}^{5} S_k V_2(\rho_1) + \mathfrak{n}/\mathfrak{n} \\ &= \mathcal{I}(V_6(\rho_1) \oplus S_1V_2(\rho_1)) \\ &= \mathcal{I}(V_6(\rho_1) \oplus V_3(\rho_2)) = P(\rho_1, \rho_2) \end{aligned} \tag{71}$$

となります．$W \to V_6(\rho_1)$ というのは $\lambda \to \infty$ ということに他なりません. このことは $S_1 \otimes V_2(\rho_1)$ が $\rho_2 = \rho_{\mathrm{nat}}$ によるテンソル積 $\rho_{\mathrm{nat}} \otimes \rho_1$ を表していて，テンソル積 $\rho_{\mathrm{nat}} \otimes \rho_1$ が ρ_2 を含んでいる（この場合 $V_3(\rho_2)$ を含んでいる）ために極限の $P(\rho_1, \rho_2)$ が生じていることを示しています. McKay 対応で言うところの $E(\rho_1)$ と $E(\rho_2)$ の交叉とテンソルとの関係を意味しています．

次に，$W' \in \mathbb{P}(V_3(\rho_2) \oplus V_5(\rho_2))$ で $W' \neq V_3(\rho_2), V_5(\rho_2)$ である場合を考えてみましょう．$\mathcal{I}(W')$ も前と同様に定義します. 生成元を使って具体的に書くと，

$$\mathcal{I}(W') = (x^2y - \mu y^5, xy^2 + \mu x^5, x^2y^2, x^6 + y^6, xy(x^6 - y^6))$$

となります. ただし μ は 0 でない複素数を表わします. そうすると，前

と同様の計算によって，

$$\begin{aligned}\lim_{W'\to V_3(\rho_2)} \mathcal{I}(W) &= \mathcal{I}(V_3(\rho_2)\oplus S_1V_3(\rho_3)) \\ &= \mathcal{I}(V_3(\rho_2)\oplus \{S_1V_5(\rho_2)\}[\rho_1]) \\ &= \mathcal{I}(V_3(\rho_2)\oplus V_6(\rho_1)) = P(\rho_1,\rho_2)\end{aligned} \tag{72}$$

となります．$W'\to V_3(\rho_2)$ というのは μ が 0 に近づくことと同じです．今度はテンソル積 $\rho_{\rm nat}\otimes\rho_2$ が $V_6(\rho_1)$ を含んでいるために極限は $P(\rho_1,\rho_2)$ になることを示しています．上のふたつの計算結果は同じなので，この点は 2 つの有理曲線 $E(\rho_1)$ と $E(\rho_2)$ の交叉を表わすことになります．

以上の議論によって $\rho_2=\rho_{\rm nat}$ によるテンソル積と 2 つの有理曲線の交叉との関係をほぼ説明することができました．“ほぼ”と言ったのは，$\rho_2=\rho_{\rm nat}$ によるテンソル積と，上の計算のなかで実際に必要であった S_1 を多項式環のなかでかけて、更に $\mathfrak{n}$ で商をとるという操作は，同じではないからです．この差は大変微妙です．しかしこの差をもっとよく理解しないと，本当に McKay 対応を説明できたことにはならないのではないか，という気がします．

参考文献

[Nakajima96] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, 1996.

[Göttsche91] L. Göttsche, *Hilbert schemes of zero-dimensional subschemes of smooth varieities*, Lecture Notes in Math., **1572**, Springer-Verlag, 1991.

[IN99] Y.Ito and I.Nakamura, *Hilbert schemes and simple singularities*, New trends in algebraic goemetry, London Mathemat-cal Society Lecture Note Series 264, Cambridge university press (1999) 151–233, (The ps file of it can be downloaded from http://www.math.warwick.ac.uk/˜ miles/weo.html)