弦理論の数学的側面　レクチャーノート

平成１０年１２月

於：関西セミナーハウス

『楕円曲面とMordell・Weil格子』

斎藤 政彦 (神戸大学 理学部) 述

高柳 匡、吉田 雄太 (東大院 理学系研究科) 記

目 次

1 楕円曲線

Introduction

基本的な所からやるつもりなんですけど，もちろん sheaf の定義とか cohomology の定義とかやってると，それだけで半年分の講義になってしまうので，できるだけ直的な定義に訴えて，分かった気になってもらおうと思っています．「楕円曲面と Mordell・Weil 格子」という題名でお話しをさせていただきますけれども，初めはゆっくりやりたいと思います．最近聞いたんですけれども，どうも有理楕円曲面の場合に，以前 genus が 0 の counting をやったんですけれども，今では，genus が g の counting までやられているようです[1]．このお話しというのは，先程の向井先生のお話しと関係してまして，有理楕円曲面の上に rank n の vector bundle を考えて，楕円曲面ですから楕円曲線が並んでいるわけですが，その各ファイバーワイズにとりあえず一回 transform しますと，こんどは各 fiber 上で n 点の support を持つような sheaf になる．その support を楕円曲線に沿って動かしてみますと，今度は楕円曲面の中の，下の $\mathbf{P}^1$ への n 重 cover の曲線が得られまして，そういうものの moduli 空間と，rank n の vector bundle の moduli 空間が同型になっているというのが分かります．その rank n の vector bundle の moduli の Euler 数を使って母関数を作ったものとが，実は genus 0 の counting の prepotential が対応するという話がありまして，それは，Vafa 達の論文にあるのですが，ここでは，アイデアについてだいたいこんな感じというのをお話ししたいと思います．genus が一般でもいいということなんで，途中で細野さんに代わっていただければいいんじゃないでしょうか．(笑)

楕円曲線

みなさん楕円曲線というのは良く知っていると思うんですけど，一応 notation を準備したりするためにやりたいと思います．まず，$\mathcal{H}$ で上半平

[1] この講義の後に [HST] がでました

面を表すことにします.

$$\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbf{C} |\ \mathrm{Im}\,\tau > 0\} \tag{1}$$

E_τ というのを,

$$E_\tau = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau) \tag{2}$$

とします. もちろん E_τ は, トーラスになるわけです. ここで, $\wp$ 関数を導入します.

$$\begin{aligned} \wp(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{\omega \in \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau,\ \omega \neq 0} \left[\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \\ \wp'(u) &= -2 \sum_{\omega \in \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau} \frac{1}{(u-\omega)^3} \end{aligned} \tag{3}$$

これらは一般に,

$$\wp(u + m + n\tau) = \wp(u) \tag{4}$$

$$\wp'(u + m + n\tau) = \wp'(u) \tag{5}$$

という二重周期性を持っていますので, トーラス E_τ の上の有理形関数になっています. そうすると, この $\wp$ と $\wp'$ を使って, E_τ から $\mathbf{P}^2$ へ写像を作ることができます.

$$\begin{aligned} \varphi : E_\tau &\longrightarrow \mathbf{P}^2 = \{[x:y:z]\} \\ [u] &\longrightarrow [\wp(u) : \wp'(u) : 1] \end{aligned} \tag{6}$$

$\mathbf{P}^2$ というのは以後よく出て来ますが, $\{[x:y:z]\}$ という複素数の連比の空間です. そうすると, よく知られているように, $\wp'(u)^2$ が

$$\wp'^2 = 4\wp(u)^3 - g_2(\tau)\wp(u) - g_3(\tau) \tag{7}$$

と書けます. 但し, ここで $g_2(\tau)$,$g_3(\tau)$ はそれぞれ,

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{\omega \in \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau, \omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4} \tag{8}$$

$$g_3(\tau) = 140 \sum_{\omega \in \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau, \omega \neq 0} \frac{1}{\omega^6} \tag{9}$$

で定義されます．ここで, 6 の写像 φ は E_τ の原点 $[0]$ で定義されていませんが $\wp(u)$, $\wp'(u)$ が原点 $[0]$ でそれぞれ 2 位, 3 位の極を持つ事から $[0]$ の φ による像は $\infty = [0:1:0]$ になる事がわかります．上の $g_2 = g_2(\tau), g_3 = g_3(\tau)$ と homogeneous coordinate を使い,

$$C_{[g_2,g_3]} : y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3 \tag{10}$$

と定義します．これを, Weierstrass の標準形と言います．$C_{[g_2,g_3]}$ は $\mathbf{P}^2$ の中の 3 次曲線となります．

$$C_{[g_2,g_3]} \subset \mathbf{P}^2 \tag{11}$$

この curve は, E_τ と上の map φ で同型になる事が示せます．これらは, 19 世紀に調べられた事なんですけれども, こういう風に解析的な表示と, 代数的な表示があるというのが大事なんです．
一般に, $F(x,y,z)$ を x,y,z の同次 3 次式とします．C を,

$$C = \{F(x,y,z) = 0\} \subset \mathbf{P}^2 \tag{12}$$

で定義するとき, もし C が非特異とすると方程式を変形して Weierstrass の標準形に直すことができます．また, C が楕円曲線になることが知られていて, ある $\tau \in \mathcal{H}$ について E_τ に同型になっていることがわかります．

一方, C が特異点を持っている場合は, 以下のようになります．(図 1 参照)

$$a: \quad yz^2 = x^2(x - \alpha z) \quad \alpha \neq 0 \tag{13}$$

$$b: \quad yz^2 = x^3 \tag{14}$$

$$c: \quad z(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \tag{15}$$

$$d: \quad z(x^2 + z^2 - y) = 0 \tag{16}$$

$$e: \quad xyz = 0 \tag{17}$$

$$f: \quad xy(x + y) = 0 \tag{18}$$

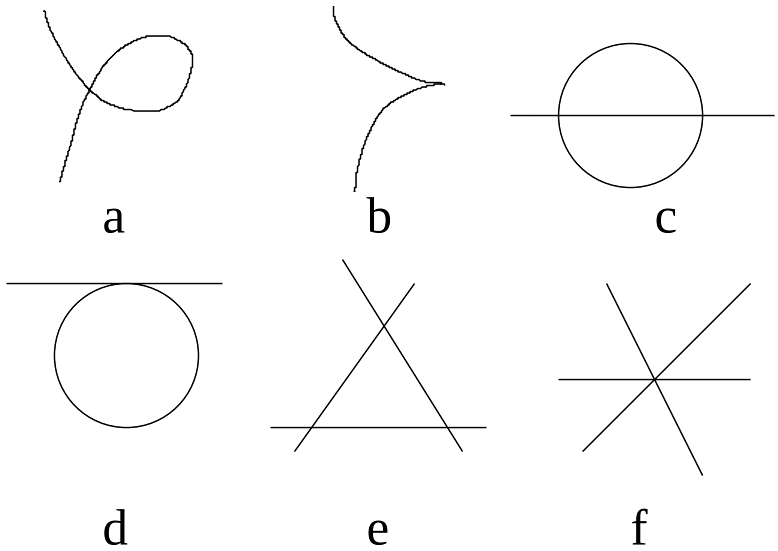

図 1: 特異楕円曲線

2　楕円曲面の例

例 1 **(Hesse pencil)**

$t \in \mathbf{C}$ として,

$$\mathbf{P}^2 \supset C_t : x^3 + y^3 + z^3 - 3txyz = 0 \tag{19}$$

を考えます. これは非常に有名な楕円曲線の族で, Hesse pencil と呼ばれています. $t \in \mathbf{C}$ を動かしてやると, それに応じて $\mathbf{P}^2$ の中の三次曲線を定めるわけです. その時, t を $\mathbf{P}^1$ の非斉次座標だと思って無限大を付け加えると

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1 = \quad & \mathbf{C} \quad \cup \quad \{\infty\} && (20) \\ & t \qquad t = \infty && (21) \end{aligned}$$

$\mathbf{P}^1$ ができますが, その上でパラメータ t の family を考えてやろうというわけです. $\mathbf{P}^1$ の斉次座標を $[s_0, s_1]$ として, $t = \frac{s_0}{s_1}$ とします.

$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ を考えて, $\mathbf{P}^1$ の座標を $[s_0, s_1]$ として, $\mathbf{P}^2$ の座標を $[x : y : z]$ とした時に, S を,

$$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2 \supset S = \{s_1(x^3 + y^3 + z^3) - 3s_0 xyz = 0\} \tag{22}$$

と置くと, これは s_0, s_1 に関しては 1 次の degree を持ち, x, y, z に関しては 3 次の degree を持ちますので, degree が (1,3) 型の超曲面になっています. $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ から $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$ へ自然に落とす射影 f, π があるんですが, それを S に制限してみます.

$$\pi : S \longrightarrow \mathbf{P}^2 \tag{23}$$

$$f : S \longrightarrow \mathbf{P}^1 \tag{24}$$

そうするとこれで楕円曲線ができているわけで, $t = s_0/s_1$ を固定すると, なにか C_τ という楕円曲線ができているわけです. ただし t は,

$$t \neq \{1, \omega, \omega^2, \infty\} \qquad \omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3) \tag{25}$$

の時に, C_t は非特異楕円曲線になる事がわかります.
例えば, $t = 1$ のとき何が起こっているかを見るために, C_1 はどういう式で定義されているかを見てみると,

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z) \\ &\quad \times(x+\omega^2 y+\omega z) \end{aligned} \tag{26}$$

こういう風に 1 次式に分解しますので, C_1 というのは, (17) 式の e タイプのようになります.
また, C_∞ に至っては, 非常に簡単で, t が ∞ ということは, s_1 が zero ですから, $xyz = 0$ となります. (これも (17) の e タイプに一致)
C_0 というのを考えますと, $t = 0$ ですから,

$$C_0 : x^3 + y^3 + z^3 = 0 \qquad \text{(フェルマー型)} \tag{27}$$

となり非特異楕円曲線になります.

C_∞ というのは,

$$C_\infty : xyz = 0 \tag{28}$$

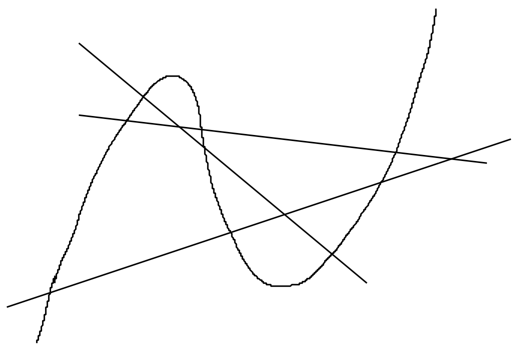

図 2: C_0 と C_∞ の 9 個の共通点

だったので, C_0 と C_∞ の共通点は 9 点あります. (図 2 参照) その 9 点を $p_1, \ldots, p_9$ とおきます.

$$\pi : S \longrightarrow \mathbf{P}^2 \tag{29}$$

ですが, π の逆像がどうなっているかを調べてみます. s_0 と s_1 の比を見てみると, これはまさに,

$$\frac{s_0}{s_1} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3xyz} \tag{30}$$

ですけれども, もしもこの 2 つのどちらかが zero でなければ, s_0,s_1 は決まりますので, p_i 以外の逆像は一点になります. ところが, 交点 p_i の座標において上の式の右辺を見ると不定になるので, s_0, s_1 はなんでも良くなるわけです. 実は, p_i の π の逆像を E_i とすると E_i は $\mathbf{P}^1$ に同型なっています.

$$\begin{aligned} \pi : S \quad &\longrightarrow \quad \mathbf{P}^2 \\ E_i \quad &\longrightarrow \quad p_i \end{aligned} \tag{31}$$

また上の考察から, S から 9 本の curve $\{E_i\}_{i=1}^{9}$ を除いたもの ($S_0 = S - \cup_{i=1}^{9} E_i$) と, $\mathbf{P}^2$ から 9 点 $\{p_i\}$ を除いたものとが, 1 対 1 に (同型) に対応しています.

$$\pi : S - \{E_i\}_{i=1,..,9} \simeq \mathbf{P}^2 - \{P_i\}_{i=1,..,9} \tag{32}$$

これらの事を, 数学用語で言いますと, $\mathbf{P}^2$ 上の 9 点 $\{p_i\}_{i=1}^{9}$ でブローアップして, S が得られた事になります.

正則写像 $\sigma : \mathbf{P}^1 \to S$ で f で S から $\mathbf{P}^1$ へ落とすと, identity になっているようなものを f のセクション (切断) と呼びます. 今, このブローアップされてできた E_i に対応してそれぞれ $\sigma_i : \mathbf{P}^1 \to S$ という切断が勿論 9 個あるわけですね.

$$f \cdot \sigma_i = id_{\mathbf{P}^1} \tag{33}$$

$$\sigma_i(\mathbf{P}^1) = E_i \tag{34}$$

$$1 \leq i \leq 9 \tag{35}$$

一般に, これ以外にも section があるかも知れないので, 全部集めて来て, section 全体の集合を

$$MW(S/\mathbf{P}^1) = \{\sigma : \mathbf{P}^1 \longrightarrow S; f \text{ の } section\} \tag{36}$$

と置きます.
今の場合は σ_1 を zero element と思うと, $MW(S/\mathbf{P}^1)$ という section の集合の中に, Abel 群の構造が入っています. 群の構造は,

$$MW(S/\mathbf{P}^1) \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \tag{37}$$

であり,

$$\{\sigma_1 = 0, \sigma_2, ..., \sigma_9\} \tag{38}$$

によって生成されます. elliptic curve の 3 等分点を p とすると,

$$E(3) = \{p \in E(\mathbf{C}) |\ 3p = 0\} \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \tag{39}$$

$$\begin{array}{ccccc} S & \hookleftarrow & S^0 & & \simeq \mathbf{C} \times \mathcal{H}/\Gamma(3) \bowtie \mathbf{Z}^2 \end{array} \tag{40}$$

$$\begin{array}{ccccc} f\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \tag{41}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^1 & \hookleftarrow \mathbf{P}^1 - \{1, \omega, \omega^2, \infty\} \simeq \mathcal{H}/\Gamma(3) \end{array} \tag{42}$$

になります. (半直積の記号を $\bowtie$ で代用しました.) $\mathbf{P}^1 - \{1, \omega, \omega^2, \infty\}$ に制限しますと, 上半平面を $\Gamma(3)$(level 3 の full modular) で割ったものと同型で, family 自体も, $\mathbf{C} \times \mathcal{H}/\Gamma(3) \bowtie \mathbf{Z}^2$ の様に $\mathbf{C} \times \mathcal{H}$ の離散群 $\Gamma(3) \times \mathbf{Z}^2$ による商空間になっています.

一般にレベル n の合同部分群 $\Gamma(n)$ は次のように定義されます.

$$\Gamma(n) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) \,\middle|\, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; mod\; n \right\} \tag{43}$$

大事なのは $\Gamma(3)$ の中に,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{44}$$

が入っていないということです. このように得られる楕円曲面 $f : S \longrightarrow \overline{\mathcal{H}/\Gamma}$ は elliptic modular surface と言われています. (37) のような切断のなす群を Mordell-Weil 群というのですけれど Elliptic modular surface の Modell-Weil 群は <u>必ず有限群</u> になります. 最初にこういうことを示されたのは塩田徹治さんです ([Sh0], [MHSa1] 参照).

例 2

もう一つだけ例をやっておきます.

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = (t + 3)xyz \tag{45}$$

を考えます. 先程と同じで, $t = \frac{s_0}{s_1}$ とします. このとき, 特異ファイバーは, 図 3 のようになります.

ここで気がついてほしいのは, 3+2+1+6=12($\mathbf{P}^1$ の本数) であるということです. 例 1 の場合ですと, $3 \times 4 = 12$ なんですけれども, 実はこれら

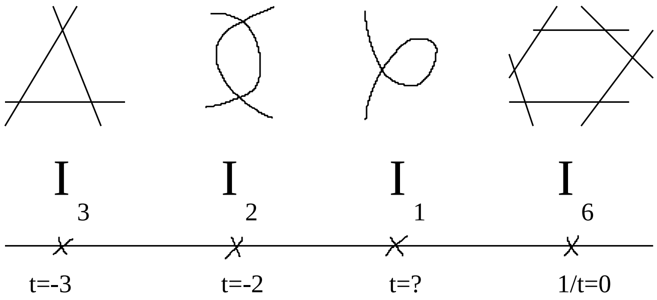

図 3: 特異ファイバー

は, オイラー数が 12 であることに依っているんですが, それについては後で話したいと思います.
この例では,

$$\mathbf{P}^1 - \{-3, -2, ?, \infty\} \cong \mathcal{H}/\Gamma(6) \tag{46}$$

となります.
こういう特異 fiber というのは, 各点でモノドロミーがユニポテントになっているんです (特異 fiber の各既約成分の重複度が 1 かつ正規交叉 (semistable) と同値) けれども, 特異 fiber が semistable に限って, しかも下の $\mathbf{P}^1$ 内の 4 点だけで特異 fiber をもっているものの分類というのも知られています ([Bea] 参照)[2] .

(質問)S 自身はどういう surface になっているんですか ?

(答)S 自身は, $\mathbf{P}^2$ からブローアップして S ができますので, 有理曲面になっています.

[2] 特異 fiber が一つ以上あり, 全て semistable となるような $\mathbf{P}^1$ 上の楕円曲面の特異 fiber の個数は 4 個以上である事が示される.

3 一般の楕円曲面

楕円曲面の定義

定義 1 Sと Cをそれぞれ,

$$S : \text{コンパクト (ケーラー) 複素多様体} \qquad \dim_C S = 2 \tag{47}$$
$$C : \text{コンパクトリーマン面} \qquad \dim_C C = 1 \tag{48}$$

とします.[3] このとき,

$$\text{全射正則写像} \qquad f : S \longrightarrow C \tag{49}$$

が存在して, $t \in C$ の有限個の点を除いたほとんどすべての点で,

$$f^{-1}(t) = S_t \tag{50}$$

が楕円曲線となっているとき, Sを, 楕円曲面 *(elliptic surface)* と言う.

第一種例外曲線

f というのは特に微分可能写像ですから, f のヤコビアンのランクが落ちている所というのは, C のなかで十分 measure が小さくそういうところは有限個で, それ以外はすべて楕円曲線になっているわけです. 何個かの f のヤコビアンの rank が落ちているところの像の点 (臨界値) で, 特異ファイバーが存在します.
E という S 上の curve で

$$E \cong \mathbf{P}^1, \quad E^2 \ = \ \deg N_{E/S} = -1 \tag{51}$$

なるものを第一種例外曲線といいます. 非特異曲面 S 上の第一種例外曲線 E は 1 点につぶして (blow-down して), 別の非特異曲面 S' をえる事ができます. 逆に言うと非特異曲面 S' から 1 点を blow-up すると, 1 点の逆像として第一種例外曲線 E を得る事ができます. 例えば $f : S \longrightarrow \mathbf{P}^1$

[3] S がケーラーではない場合もあるのですが, ここでは気にしない.

が後で述べる有理楕円曲面とするとその各切断の像 E は第一種例外曲線となりますが, この場合 E の f による像は底空間 $\mathbf{P}^1$ 全体になる. この場合切断 E は f の各ファイバーとちょうど一度づつ交わるので, E を 1 点に blow-down した S' は楕円曲面の構造を持たない事になります. しかしファイバー方向に入っている第一種例外曲線 E は, blow-down しても楕円曲面の射は保ちます. この意味で以下, 与えられた楕円曲面 $f : S \to C$ に対して

$$f(E)=\text{一点 となる第 1 種例外曲線 } E \text{ が存在しない} \tag{52}$$

事を仮定します. どういうことかというと, 第 1 種例外曲線 E が f で落ちて一点になるものについては、E を一点につぶして, つぶしたやつが特異点を持たずかつ楕円曲面の構造を保つという状況にできるわけですね. もしこういう第 1 種例外曲線があったら, どんどんつぶしていくことが出来るので, 最終的にファイバー方向に入っている第一種例外曲線を含まないという所からお話しをはじめていいわけです. こういう仮定をつけないと, 100 回ブローアップしてもいいわけで, あんまりいいモデルになりません.

特異ファイバーの小平分類

$$f^{-1}(t) = S_t \tag{53}$$

が非特異楕円曲線でないものを特異ファイバーと呼びます. ここで,

$$f : S \longrightarrow C \tag{54}$$

が, 楕円曲面で, 上の 仮定を満たしているとすると,

$$f^{-1}(t) = S_t : \text{特異ファイバー} \tag{55}$$

が, 小平分類として以下のように分類されています. (この分類については [Kod1], [Kod2] を参照の事.)

型	S_t (図 7 参照)	$e(S_t)$=位相的オイラー標数
$I_n \quad \tilde{A}_{n-1}\ (n \geq 1)$	(1)	n
$I_n^* \quad \tilde{D}_{n+4}\ (n \geq 0)$	(2)	n+6
II	(3)	2
III	(4)	3
IV	(5)	4
$II^* \quad \tilde{E}_8$	(6)	10
$III^* \quad \tilde{E}_7$	(7)	9
$IV^* \quad \tilde{E}_6$	(8)	8

ただし, $I_n, I_n^*, II^*, III^*, IV^*$ は, curve には○を対応させ, curve 同士の交わりには○同士をつなぐことで, 拡大 Dynkin 図にを得られるので, それぞれ, $\tilde{A}_{n-1}, \tilde{D}_{n+4}, \tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6$ とも呼ばれています. (図 8 参照)

参考：小平分類の divisor の表式

楕円曲面 $f: S \to C$ の特異ファイバー S_t は, S 上の divisor((因子) S 上の curve の有限和) を E として, 次のいずれかと同型になる. また, 各 divisor の係数は重複度を表す.

1. mI_0 型

   $S_t = mE$

   ここで E は滑らかな楕円曲線

2. mI_1 型

   $S_t = mE$

   ここで E は結節点を持つ有理曲線

3. mI_b 型 $(b \geq 2)$

   $S_t = m(E_1 + \cdots E_b)$

   ここで, E_i は, 滑らかな有理曲線で, 交わり方は, $(E_i \cdot E_j) = 1$ $(i = 1, \cdots, b)$ で与えられ, 後は交わらない. ただし, $E_{b+1} = E_1$

4. II 型

   $S_t = E$

E は, 尖点を持つ有理曲線

以下, すべて E_i は滑らかな有理曲線で, $E_i^2 = -2$ とする.

5. III 型

   $S_t = E_1 + E_2$

   ここで, E_i は, 一点で接する

6. IV 型

   $S_t = E_1 + E_2 + E_3$

   ここで, E_i は, 一点で交わる.

7. I_0^* 型

   $S_t = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + 2E_5$

   $(E_i \cdot E_5) = 1 \quad (i = 1, \cdots, 4)$

8. I_b^* 型

   $S_t = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + 2(E_5 + \cdots + E_{b+5})$

   $(E_1 \cdot E_5 = E_2 \cdot E_5 = E_5 \cdot E_6 = \cdots = E_{b+4} \cdot E_{b+5} = E_{b+5} \cdot E_3 = E_{b+5} \cdot E_4 = 1)$

9. II^* 型

   $S_t = E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 4E_4 + 5E_5 + 6E_6 + 3E_7 + 4E_8 + 2E_9$

   $(E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_3 = E_3 \cdot E_4 = E_4 \cdot E_5 = E_5 \cdot E_6 = E_6 \cdot E_7 = E_6 \cdot E_8 = E_8 \cdot E_9 = 1)$

10. III^* 型

    $S_t = E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 4E_4 + 2E_5 + 3E_6 + 2E_7 + E_8$

    $(E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_3 = E_3 \cdot E_4 = E_4 \cdot E_5 = E_4 \cdot E_6 = E_6 \cdot E_7 = E_7 \cdot E_8 = 1)$

11. IV^* 型

    $S_t = E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 2E_4 + E_5 + 2E_6 + E_7$

$$(E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_3 = E_3 \cdot E_4 = E_4 \cdot E_5 = E_3 \cdot E_6 = E_6 \cdot E_7 = 1)$$

4 Mordell-Weil 群

Mordell-Weil 群の定義

定義 2 *C :Riemann surface* とし $f: S \to C$ を楕円曲面で仮定を満たすものとする．さらに，$^{\exists}\sigma_0 : C \to S$ という切断を少なくとも一つはとれるものとする．その時，$MW(S/C) = \{\sigma : C \to S\ ; \sigma$ は，f の切断 $\}$ と定義すると σ_0 を零元とする群構造が $MW(S/C)$ に定まる．これを $f: S \to C$ の *Mordell-Weil* 群という．

注意 1 σ_0 のとりかたによって抽象群としての構造は変わらない．群の演算は図 1 のようなイメージとなる．

注意 2 MW 群を非特異ファイバーに制限するとやはり楕円曲線の群の構造と両立しているが，特異ファイバーの所でも適当な群構造が入り MW 群の構造と *compatible* になっている．

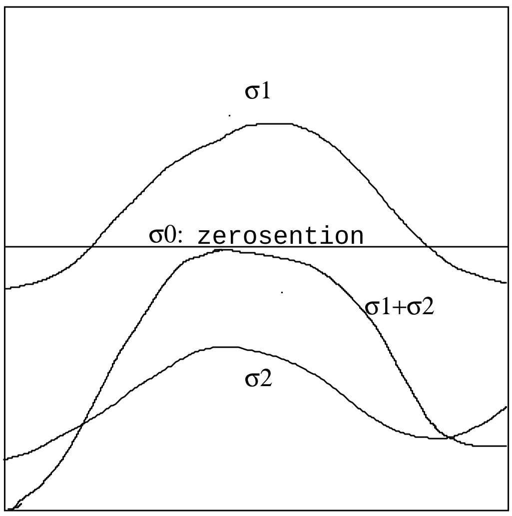

図 4: section の群演算

オイラー数

定義 3 以後便利に用いることのできる位相不変量であるオイラー数を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
&S: \textit{complex compact manifold},\ \dim_{\mathbf{C}} S = 2\\
&H^i_{DR}(S) = H^i_{DR}(S, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}\\
&e(S) = \textstyle\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \dim H^i_{DR}(S, \mathbf{C}) : \text{オイラー数}
\end{aligned}
$$

この時, 次のような定理が成り立つ.

命題 1 $f: S \to C$ を仮定を満たす楕円曲面とし S_t がそのファイバーとする時

$$
e(S) = \sum_{t \in C} e(S_t) = \sum_{S_t = \text{特異ファイバー}} e(S_t) \tag{56}
$$

が成り立つ.

注意 3 一見, 上の最初の定義では $t \in C$ の和は発散しそうだがファイバーは特異でないときトーラスなので $e(S_t) = 0$ となる．よって有限個の特異ファイバーの寄与のみとなり, この和は *well defined* である.

有理楕円曲面

定義 4 $f: S \to C$ が有理楕円曲面とは, S から $\mathbf{P}^2$ への双有理写像が存在することをいう．双有理写像が存在するとは,（難しい定理を用いて）S を何回か *blow up* してさらに何度か *blow down* すると $\mathbf{P}^2$ になるといってもいい．なお双有理のもともとの意味は, S 上の有理関数と $\mathbf{P}^2$ 上の有理関数が一対一に対応するということである.

この時, 次のような定理が成り立つ.

定理 1 $f: S \to C$ が仮定を満たす（以下これは略す）有理楕円曲面であるとすると, $C \cong \mathbf{P}^1, e(S) = 12$, $\pi_1(S) = e$ となる．つまり, $\mathbf{P}^1$ の *elliptic fibration* となっていて, 単連結でオイラー数が *12* である.

証明　単連結性や C が $\mathbf{P}^1$ は, S が有理曲面であることから容易にしたがう。また有理楕円曲面と言うことから $K_S = -F$, F はファイバーのクラスであるが特に自己交点数 $(K_S)^2 = (-F)^2 = 0$ となる．また S 有理曲面より $\chi(S, \mathcal{O}_S) = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S) - \dim H^1(S, \mathcal{O}_S) + \dim H^2(S, \mathcal{O}_S) = 1 - 0 + 0 = 1$．一方 Noether の公式から

$$\chi(S, \mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}((K_S)^2 + e(S)) \tag{57}$$

であるから結局

$$e(S) = 12\chi(S, \mathcal{O}_S) = 12 \times 1 = 12$$

となる．

Cup 積

定義 5 $H^2(S, \mathbf{Z}) \otimes H^2(S, \mathbf{Z}) \to H^4(S, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ を $(\eta_1, \eta_2) \to \int_S \eta_1 \wedge \eta_2$ で定義する．（これを *Cup* 積という．）

この時, 次のような有理楕円曲面の 2 次のコホモロジーに関する定理が成り立つ．

定理 2 $f : S \to \mathbf{P}^1$ を有理楕円曲面とすると,

$$(H^2(S, \mathbf{Z}), (\ ,\ )) \cong (\mathbf{Z}^{10}, (1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1))$$

つまり二次のコホモロジーは前のオイラー数の定理から分かるように１０次元で, それらのカップ積による内積を表す対称行列は整数上で対角化可能で対角線に 1 が 1 個と, -1 が 9 個並んだものとなる．

さてもう少し 2 次のコホモロジーを詳細に見て行く．コホモロジーとホモロジーの等価性（ポアンカレ双対性）は頻繁に使うので断らないことにする．

まず有理楕円曲面 $f : S \to \mathbf{P}^1$ を考え, section $\sigma_0 : \mathbf{P}^1 \to S$ をもつとする．これを zero section とみなす．それに対応する 2 次のコホモロジーの元を,

$O=\sigma_0(P^1)$ とする．またファイバーに対応するものを F とする．このとき，カップ積に関して，$O^2=(O,O)=-1, F^2=(F,F)=0, OF=(O,F)=1$ が成り立つ．このことなどを用いて次の定理が示される．

定理 3 $T_0=\mathbf{Z}\cdot O+\mathbf{Z}\cdot F$, $T_0^{\perp}=\{M\in H^2(S,\mathbf{Z})|(M,T_0)=0\}$ とおくと，

$$T_0^{\perp}\cong E_8(-1)\equiv(\ \mathbf{Z}^8, E_8\ \text{の}\ Cartan\ \text{行列の（－１）倍の計量）}$$

(この定理の証明の概略）T_0 を行列で書いて，

$$T_0=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\rightarrow det|_{T_0}=-1$$

T_0 の固有値が $(-1,1)$ なので，定理 2 より $T_0^{\perp}$ は negative definite かつ unimodular (self-dual とも言える) である．あとは even lattice（つまり内積がすべて偶数）であることをいえば E_8 lattice であることが知られている[4]． $K_S=-F$ と曲線に関する添加公式を用いて，$C^2-C\cdot F=2(g(C)-1)\in 2\mathbf{Z}$ であることがわかるので，今の場合は $C\in T_0^{\perp}$ より $C\cdot F=0$ であって $C^2\in 2\mathbf{Z}$ が示せる．$Q.E.D$

塩田の定理

ここでまた Mordell-Weil 群の話に戻る．有理楕円曲面の Mordell-Weil 群について次のような定理が知られている．（K3 曲面 S については $H^2(S,\mathbf{Z})$ を $NS(S)=H^2(S,\mathbf{Z})\cap H^{1,1}(S)$ に変えれば同様な結果が得られるがここでは簡単の為に有理楕円曲面に限定する．）

定理 4 (塩田の定理１) ([Sh1], [Sh2].) $f: S\rightarrow\mathbf{P}^1$ を有理楕円曲面 T :「O,F, 特異ファイバーの既約成分」で生成される $H^2(S,\mathbf{Z})$ の部分 $Abel$ 群とする時，

$$MW(S/\mathbf{P}^1)\cong H^2(S,\mathbf{Z})/T$$

が成り立つ．

[4] 例えば Serre [数論講義] をみよ

例 1 *generic* な有理楕円曲面を考える. (図 2 参照)

この場合は, $e(I_1)=1,\ e(S)=12$ より I_1 型特異ファイバーが 12 本ある.
(余談であるが, 有理楕円曲面のモジュライ数は 12 より小さいので, 特異ファイバーの位置は勝手にはとれない.)

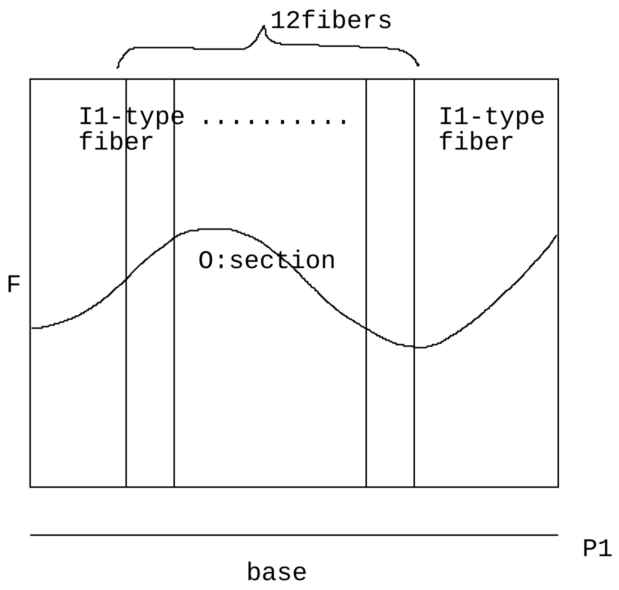

図 5: generic な有理楕円曲面

すべてのファイバーは F とホモロジー同値なので, $T=T_0=<O,F>$ であり, $MW(S/\mathbf{P}^1)\cong H^2(S,\mathbf{Z})/T_0\cong\mathbf{Z}^8$ となる. この時, 同型を具体的に書くと,

$$\sigma\leftrightarrow\sigma(\mathbf{P}^1)-\sigma_0(\mathbf{P}^1)\cdot F+b\cdot\sigma_0(\mathbf{P}^1)$$

となる. (a,b は任意)

さらに, 前に定義したカップ積も考慮したより詳細な次の定理が知られている.

定理 5 (塩田の定理 2) $f:S\to\mathbf{P}^1$ を有理楕円曲面とし $\phi:MW(S/\mathbf{P}^1)\to H^2(S,\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ $s.t$ $\phi(MW)\perp T$ という $homomorphism\phi$ をとる. その時, $<\sigma_1,\sigma_2>=$

$-(\phi(\sigma_1), \phi(\sigma_2))$ とカップ積を用いて MW 群の二次形式 (*Néron-Tate* ハイト) を定義すると

$$(MW(S/\mathbf{P}^1)/torsion, < \ , \ >)$$

は, $\mathbf{Z}$ 係数の正定値の二次形式をもった自由アーベル群となる. これを **Mordell・Weil** 格子とよぶ.

例 **2** 前と同様に有理楕円曲面 $f : S \to \mathbf{P}^1$ が *generic* な場合を考える. すると直ちにこの定理から E_8 格子の構造がＭＷ群に入ることが分かる.

$$(MW(S/\mathbf{P}^1), < \ , \ >) \simeq E_8 \tag{58}$$

5　カウンティング

カウンティングの知られている結果

ここでは, 有理楕円曲面のなかに有理曲線がどれだけ入っているのか数勘定することを考え, それについての結果を紹介する. そのために, 「その１」で出てきた, $\pi : S \to \mathbf{P}^2$ を思い出し, $\mathbf{P}^2$ 上の, hyper plane bundle H_1 を用いて $\pi^*(H_1) = H$ とする. そして次のように, 有理楕円曲面 S のなかに含まれる有理曲線の数を定義する.

定義 **6**

$$M_{d,k} = \{C \subset S | C \cdot F = k, \ C \cdot H = d \text{となる } C \text{ で非特異化は有理曲線 }\}$$

$$N_k(d) = \sharp M_{d,k} = M_{d,k}\text{の個数}$$
$$Z_k(q) = \sum_{d=0}^{\infty} N_k(d) q^d$$

この時次のように $Z_1(q)$ が知られている ([HSS], [Z] を参照の事).

定理 **6 (細野, 斎藤,Stienstra,Zagier)**

$$Z_1(q) = 9 \frac{q^{1/6}}{\eta(q)^4} \tag{59}$$

最近ではもっと一般の k についても予想があって，Vafa たちの結果 [MNVW] によると

$$Z_k = P_{2k+2}(E_2, E_4, E_6)Z_1^k \tag{60}$$

の形で表され，（但し E_2, E_4, E_6 は Eisenstein 級数である）．正則アノーマリ方程式

$$\frac{\partial Z_k}{\partial E_2} = \frac{1}{72}\sum_{s=1}^{k-1}(k-s)sZ_{k-s}Z_s \tag{61}$$

とある Gap 条件 (ある低い次数の有理曲線が存在しない事からくる条件) により Z_k が決まると予想されている．以上は genus が 0 つまり $\mathbf{P}^1$ についてのカウンティングであったが，正則アノーマリ方程式を一般化した予想を定式化しいくつかのもっと高い genus についてのカウンティングついての結果も知られている (詳しくは [HST] を参照).

注意 **4**　rank 2 の vector bundle の数え上げ (vector bundle のモジュライ空間のオイラー標数の計算) は神戸大の吉岡さん ([Yos]) によって解かれていて Vafa たちの物理からの結果 ([MNVW]) と合致しているが，rank 3 以上の計算は数学的に求めるのが難しいことが知られている．

フーリエ向井変換との関係

以上述べてきた有理曲面のカウンティングは $SU(k)$ bundle (or $SU(k)$-instanton) のモジュライとフーリエ向井変換で関係づけることができる．その関係を示す概略を説明すると次のようになる．(図 6 参照)

有理楕円曲面 $f : S \to \mathbf{P}^1$ を考え，そのファイバーを F とする．S 上の $SU(k)$-bundle $\mathcal{E}$ を考える．そして（底空間の点は固定して）各ファイバー上でその bundle を層とみなして，フーリエ向井変換する．そうすると各ファイバー上で bundle は k 個の点を表すデルタ関数（ skyscraper sheaf) のようなものに変換される．いままで固定していた底空間 = $\mathbf{P}^1$ 上の点を変換後に動かすと S 内の曲線 C (一般には既約とは限らない) が得られる．この曲線は各ファイバーと k 回交わる．この曲線をベクトル束のスペクト

ル曲線と呼ぶ. このスペクトル曲線 C の上に rank 1 の層 $\mathcal{F}$ が乗っているがこれがフーリエ・向井変換である. このフーリエ・向井変換により

$$\mathcal{E}:\ S\ \text{上の rank } k\ \text{の層} \Longleftrightarrow (C, \mathcal{F})$$

なる対応を得る. この対応よりベクトル空間のモジュライ空間 $\widehat{\mathcal{M}}$ から曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ への

$$\pi: \quad \widehat{\mathcal{M}} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M} \tag{62}$$

$$\mathcal{E} = (C, \mathcal{F}) \quad \mapsto \quad C \tag{63}$$

写像が得られる. $C \in \mathcal{M}$ 上のファイバー $\pi^{-1}(C)$ は C が非特異既約曲線の時には C のヤコビ多様体 $J(C)$ であることがわかる. C の種数が g の時には $J(C)$ は複素 g 次元, 実 $2g$ 次元のトーラス T^{2g} である. ここで, C の正規化(非特異化) $\tilde{C}$ が種数ゼロ(すなわち $\tilde{C}$ が有理曲線)でなければ $\pi^{-1}(C)$ の位相的オイラー数は 0 である事が示される. また C の非特異化が有理曲線の時には, $\pi^{-1}(C)$ の位相的オイラー数は適当なウェイトをつけて計算する事により

$$e(\widehat{\mathcal{M}}) = \sum_{C \in \mathcal{M},\ \text{有理曲線}} e(\pi^{-1}(C)) = \mathcal{M}\ \text{に属する有理曲線}\ C\ \text{の数}$$

このようにして $SU(k)$-bundle のモジュライ空間の位相的オイラー数と有理曲線のカウンティングが関係付くことが分かる. さらに (62) の写像を用いまた相対レフシェッツ分解の理論を用いると $\widehat{\mathcal{M}}$ のコホモロジー環 $H^*(\widehat{\mathcal{M}}, \mathbf{Q})$ の $SL_2 \times SL_2$ の表現への分解が得られる. これを用いて, 高い種数の Gromov-Witten 不変量の計算の可能性も示唆されている. ([GV1], [GV2], [HST] を参照してください.)

6 参考文献について

1. Gromov-Witten 不変量の数学的な定義は, [B], [B–F], [B–M], [F–O] 等にあるが, 物理の人にはあまり関心がないかもしれない.

2. 楕円曲面の理論については, 小平邦彦氏の全集の第3巻の中の [Kod1], [Kod2] が基本文献中の基本文献である.

3. Mordell・Weil 格子の理論は創始者である塩田氏の論文 [Sh1] や東大数理科学セミナリーノート [Sh2] を参照して欲しい.

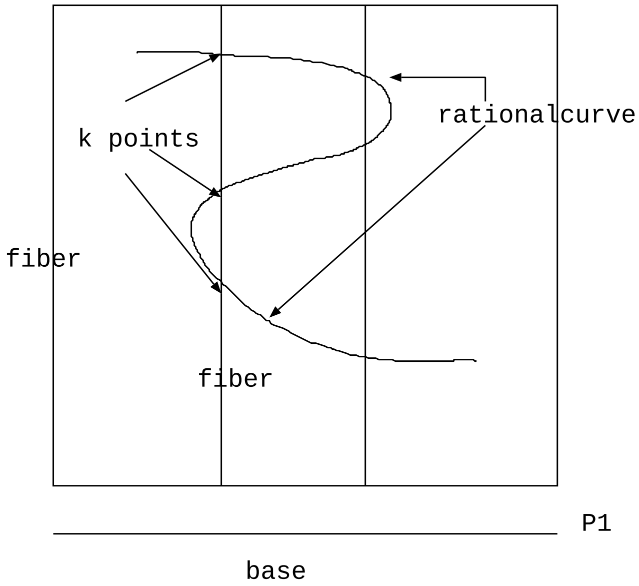

図 6: フーリエ向井変換を行って得られる有理曲線

参考文献

[B] K. Behrend, *Gromov–Witten invariants in algebraic geometry*, Invent. Math. **127**, (1997), 601–617.

[B–F] K. Behrend, & B. Fantechi, *The intrinsic normal cone*, Invent. Math. **128**, (1997), 45–88.

[B–M] K. Behrend, Yu. Manin, *Stacks of stable maps and Gromov–Witten invariants*, Duke Math. J., **85**, (1996), 1–60.

[Bea] A. Beauville, *Les familles stables de courbes elliptiques sur* $\mathbf{P}_1$ *admettant quatre fibres singulieres.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 294 (1982), no. 19, 657–660.

[Br-Le] J. Bryan, & N. C. Leung, *The enumerative geometry of* $K3$ *surfaces and modular forms*, `alg-geom 9711031`

[C-S] J.H. Conway & N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer, Second Edition (1992).

[D-G-W] R. Donagi, A. Grassi, &, E. Witten, *A nonperturbative superpotential with* E_8*-symmetry.* Modern Phys. Lett. A 11 (1996), no. 27, 2199–2211, `hep-th/9607091`.

[F–O] K. Fukaya & K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov–Witten invariants for General Symplectic Manifolds*, preprint Kyoto-Math. 96-04.

[G-P] L. Göttsche & R. Pandharipande, *The quantum cohomology of blowing-ups of* $\mathbf{P}^2$ *and enumerative geometry*, J. Differential Geom. 48 (1998), no. 1, 61–90. `alg-geom/9611012`.

[GV1] R. Gopakummar and C. Vafa, *M-Theory and Topological Strings-I*, `hep-th/9809187`.

[GV2] R. Gopakummar and C. Vafa, *M-Theory and Topological Strings-II*, `hep-th/9812127`.

[HKTY] S. Hosono, A. Klemm, S.Theisen and S. T. Yau, *Mirror Symmetry, Mirror Map and Application to Complete Intersection Calabi-Yau Spaces*, Mirror symmetry, II, 545–606, AMS/IP Stud. Adv. Math., 1, A.M.S., Providence, RI, 1997.//Nuclear Phys. B 433 (1995), no. 3, 501–552.

[HSS] S. Hosono, M.-H. Saito, & J. Stienstra *On Mirror Symmetry Conjecture for Schoen's Calabi–Yau 3-folds*, Proceedings of Taniguchi Symposium 1997, *"Integrable Systems and Algebraic Geometry"*, Kobe/Kyoto, (ed. M.-H. Saito, Y. Shimizu & K. Ueno), World Scientific, 1998, 194–235.

[HST] S. Hosono, M.-H. Saito, A. Takahashi, *Holomorphic Anomaly Equation and BPS state counting of Rational Elliptic Surface*, Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999). 177–208. `hep-th/9901162`

[Kod1] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces, II*, Annals of Math., **77**, (1963), 563-625. (Collected Works, Vol. III).

[Kod2] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces, III*, Annals of Math., **78**, (1963), 1–40. (Collected Works, Vol. III).

[Kon] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via toric actions. The moduli space of curves,* ed. by R. Dijkgraaf, C. Faber, van der Geer. Progr. in Math. **129**, Birkhäuser, Boston, 1995, 335–368.

[KM] M. Kontsevich and Yu. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry*, Commun. Math. Phys. **164**, (1994), pp. 525–562.

[Man1] Yu. I. Manin, *The Tate height of Points on an abelian variety, Its variants and applications.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28** (1964), AMS Transl. (2) **59** (1966) pp. 82–110.

[MNVW] J. A. Minahan , D. Nemeschansky , C. Vafa , N. P. Warner *E-Strings and N=4 Topological Yang-Mills Theories*, Nucl.Phys. B527 (1998) 581-623. `hep-th/9802168`.

[Mo-1] D. R. Morrison, *Mathematical Aspects of Mirror Symmetry*, Complex Algebraic Geometry (J. Kollár ed.), IAS/Park City Mathematical Series, vol. 3, 1997, pp. 265–340, `alg-geom/ 9609021`.

[Mo-2] D. R. Morrison, *Making enumerative predictions by means of mirror symmetry*, Mirror symmetry, II, 457–482, AMS/IP Stud. Adv. Math., 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Sa-Sak] M.-H. Saito and K.-I. Sakakibara, *On Mordell-Weil lattices of higher genus fibrations on rational surfaces*, Jour. of Math., Kyoto University, **34**, No. 4, (1994), 859–871,

[MHSa1] M. -H. Saito, *Finiteness of Mordell-Weil groups of Kuga fiber spaces of abelian varieties,* Publ. RIMS. **29**, No. 1 (1993), 29–62.

[MHSa2] M. -H. Saito, *Prepotentials of Yukawa couplings of certain Calabi-Yau 3-folds and Mirror Symmetry,* to appear in the Proceedings of Nato Advanced Study Institute, CRM Summer School, Banff, June 7-19, 1998

[Sch] C. Schoen, *On fiber products of rational elliptic surfaces with section*, Math. Z. **197**, (1988), 177–199.

[Sh0] T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, Jour. Math. Soc. Japan 24, no. 1 , 20-59 (1972).

[Sh1] T. Shioda, *On the Mordell-Weil lattices,* Comment. Math. Univ. St. Pauli **39**, 211–240, 1990.

[Sh2] 塩田 徹治, Mordell-Weil Lattice の理論とその応用, 東京大学数理科学セミナリーノート 1 , 1993 .

[Y-Z] S.-T. Yau & E. Zaslow, *BPS states, String Duality, and Nodal Curves on* $K3$, Nuclear Phys. B **471**, (1996), 503 – 512.

[Yos] K. Yoshioka, Euler characteristics of SU(2) instanton moduli spaces on rational elliptic surfaces, to appear in CMP. `math/9805003`

[Z] D. Zagier, *A Modular Identity Arising From Mirror Symmetry*, Proceedings of Taniguchi Symposium 1997, *"Integrable Systems and Algebraic Geometry"*, Kobe/Kyoto, (ed. M.-H. Saito, Y. Shimizu & K. Ueno), World Scientific, 1998, 477–480.

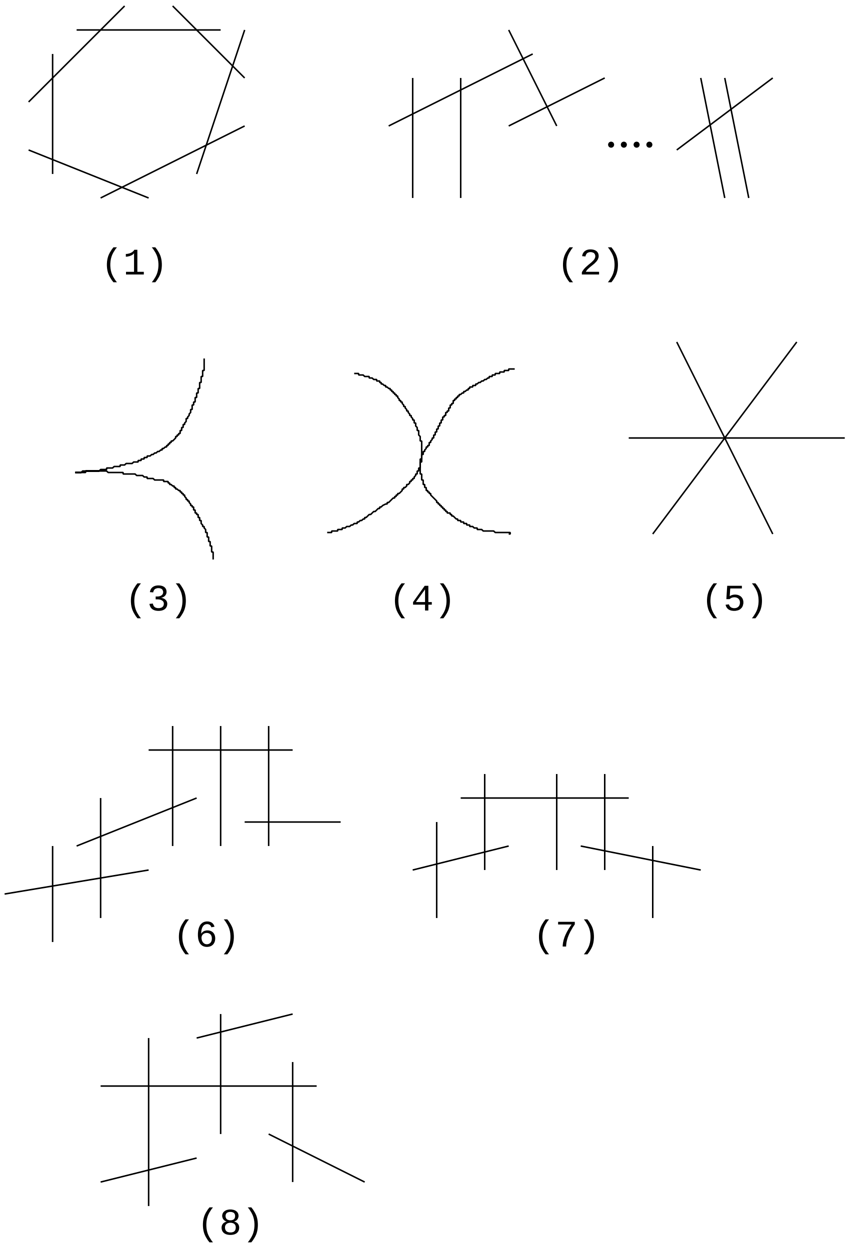

図 7: 小平分類のファイバータイプ

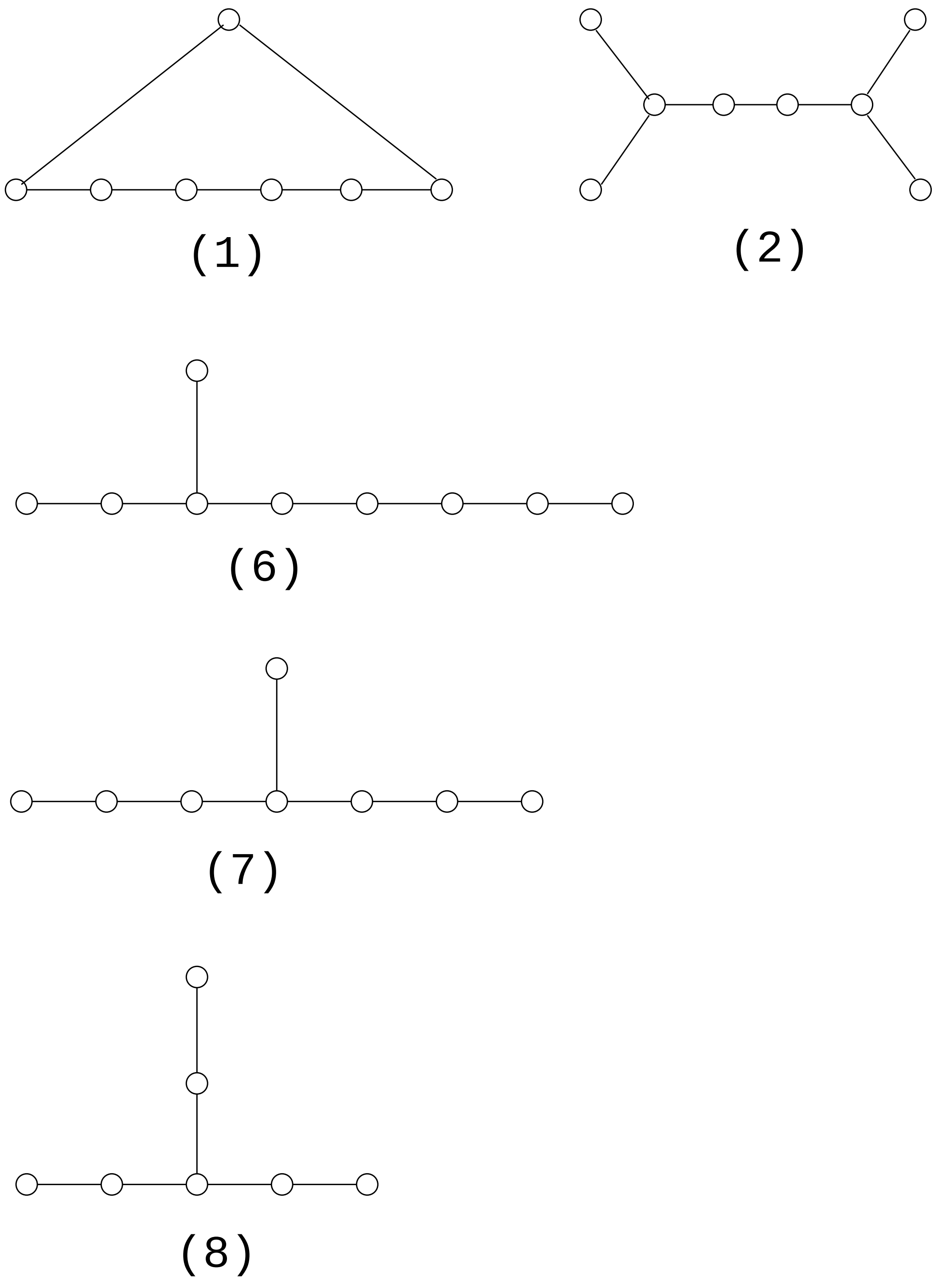

図 8: 拡大 Dynkin 図