Holographic Gauge Theories*

S. S. Gubser †

Lyman Laboratory of Physics

Harvard University

Cambridge, MA 02138, USA

講義録作成者：村上 豊 (京大理 D2) ‡

田中 宏和 (京大基研 D2) §

目 次

1 Background and generalities on AdS/CFT correspondence **1**

2 Green's functions from supergravity **4**

3 Freund-Rubin ansatz and D3-branes on sigularities **8**

4 Conifold Theory: anomalies, branes as baryons, domain wall **14**

5 Baryons and domain walls **22**

6 Finite temperature and non-extremal 3-branes **27**

*研究会 "ゲージ理論の力学と弦双対性" (1998 年 12 月 16 日–18 日、東京工業大学国際交流会館) における S. Gubser 氏の講演の講義録です。

†e-mail address : ssgubser@bohr.harvard.edu

‡e-mail address : murakami@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

§e-mail address : hirokazu@yukawa.kyoto-u.ac.jp

1 Background and generalities on AdS/CFT correspondence

AdS/CFT 対応は、D-brane のゲージ理論としての記述と超重力理論を使った記述を比較する事から生まれてきた。ゲージ理論として見ると、D-brane 上の open string の理論であり、超重力理論としては closed string の背景場として記述できる。

まず open string の理論としての D-brane の描像を見てみよう。open string は D-brane 上に端を持つことができ、D-brane は Dirichlet 境界条件を満たす open string の端点の全体で記述することができる [1]。また D-brane が多数存在するときは様々な brane の間をつなぐ open string が存在でき、特に D-brane が重なってしまえば string の長さは 0 になって massless のモードを産み出せる。

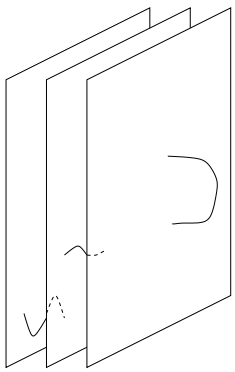


図 1: D-brane

open string の端に Chan-Paton factor を付加させることで、これらの massless のモードはゲージ相互作用をするので、D-brane の低エネルギー有効作用は world volume 上の $U(N)$ ゲージ理論になる [2] ことがわかる。ただし N は D-brane の枚数である。とくに D3-brane の場合には、このゲージ理論の結合定数 $g_{\rm YM}$ はストリング理論の結合定数 g_s の間には、

$$g_{\rm YM}^2 = 4\pi g_s, \tag{1.1}$$

という関係をもつことが知られている。

次に超重力理論としての記述をみよう。これはゲージ理論の記述よりも古く、typeII 超重力理論の p-brane 解を構成した論文 [3, 4] にまで遡れる。ここでは特に次の 3-brane 解を考えることにする。

$$ds^2 = (1+\frac{L^4}{r^4})^{-1/2}(-dt^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+(1+\frac{L^4}{r^4})^{1/2}(dr^2+r^2d\Omega_5^2), \tag{1.2}$$

$$F_5 = \frac{N\sqrt{\pi}}{2{\rm Vol}(S^5)}(vol_{S^5}+*vol_{S^5}). \tag{1.3}$$

この解は Ramond-Ramond 4-form に対して電気的磁気的に荷電していて、無限遠方で漸近的に平坦 (図 2) になっている。ただしここで vol_{S^5} は 5 次元の単位球に対する体積要素であり、$*$ は 10 次元の Hodge 作用素である。この解は現在では D3-brane をあらわすことがわかっている。重要な点は D3-brane は本質的にはブラックホールであるという点である。その horizon 近くの様子は、(1.2) 式で L^4/r^4 の項をとって 1 の項を無視することによって分かり、5 次元の anti-de Sitter 空間と 5 次元球の直積 ($AdS_5\times S^5$) になっている (図 3) ということである。

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+\frac{L^2}{r^2}dr^2+L^2d\Omega_5^2. \tag{1.4}$$

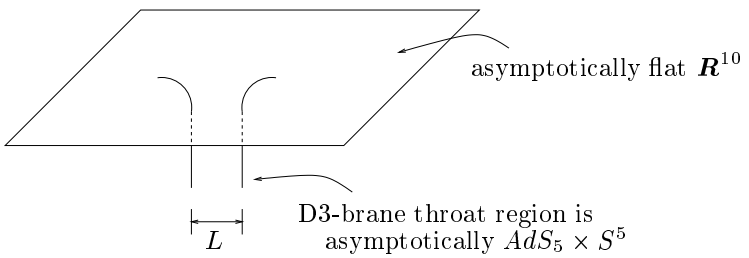


図 2: D3-brane background

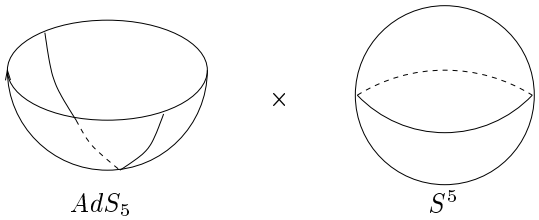


図 3: asymptotic geometry

またこの解の 5-form field strength の flux ((1.3) 式) を通して D3-brane の数 N がわかる。この N は先ほど述べたように $U(N)$ ゲージ理論のカラーの数 N に関係していた。N と anti-de Sitter 空間の半径 L の間の関係は、typeIIB 超重力理論の運動方程式を使えば[1] 、

$$\frac{L^4}{\alpha'^2} = \lambda, \tag{1.5}$$

と関係が付くことがわかる。ただしここで $\lambda = g_{\rm YM}^2 N$ はゲージ理論の 't Hooft 結合定数であり、α' は Regge slope と呼ばれていたもので、string の tension の逆数に比例する。

以上のことを元に AdS/CFT 対応が発見されるまで様々な計算がなされた。一つは散乱の計算 [5, 6, 7] であり、もう 1 つは D-brane を probe として用いる計算 [8] である。これらの仕事をうけて、 1997 年の暮れに Maldacena がはじめて、horizon 近くでの string 理論は、D3-brane の world volume の上にあるゲージ理論に等価であると言った[2] のである [9]。それ以来、この等価性を "AdS/CFT 対応" と呼ぶようになった。これは重力を含まない 4 次元のゲージ理論によって 10 次元にいる string 理論を記述できるといっているので、非常に驚くべきことである。そして、空間の次元の異なっているものが対応していると言っているので、この AdS/CFT 対応は、10 次元の重力を含む物理を記述する string 理論が、2 次元の world volume の共形場理論で記述できるということに似ている。

さてここでこの対応が提案された理由を 1 つ述べることにしよう。D3-brane の world volume でのゲージ理論は $\mathcal{N} = 4$ の超対称 Yang-Mills 理論であり、これは共形不変な理論と期待されているが、この理論の共形対称性が 5 次元 anti-de Sitte 空間のアイソメトリ (等長変換) の群に対応していることがわかる。実際、4 次元の共形対称性は、$3+1$ 次元の Poincarè 対称性と dilatation 対称性と special conformal 対称性からできていて、これらがまとまって $SO(4,2)$ の群をなすのであるが、これが丁度 AdS_5 のアイソメトリの群 $SO(4,2)$ と一致するのである。この両者の対称性の一致をみて AdS/CFT 対応が成り立つ 1 つの証拠とされた。

[1] この種の解の一般化や運動方程式については 3 章を見よ。
[2] Maldacena は論文 [9] で D1-brane と D5-brane の結合状態、M2-brane、M5-brane といった場合でも場の理論と string/M 理論との間に等価性が成り立つと言っている。

次に AdS/CFT 対応においてゲージ理論と string 理論の間の摂動展開のパラメタの間の関係がどのように付いているのかを見ててみよう (図 4 参照)。 string 理論には 2 つのパラメタがある。1 つは Regge slope α' で、もう 1 つは Planck 定数 $\hbar$ である。

α'、$\hbar$ はそれぞれ、超重力理論に対する string 効果の補正と string のループ補正の程度を示している。したがって古典超重力理論は、 string 理論の近似としては α' と $\hbar$ が無視できる時に妥当だといえる。一方、ゲージ理論にもパラメタが 2 つある。それはカラーの数 N と 't Hooft 結合定数 λ である[3] 。AdS/CFT 対応は、ゲージ理論と超重力理論の展開パラメタを対応づける。まずループ展開がどのように対応づくか見てみよう。超重力理論の枠組みで考えると[4] 、作用の前の係数が $L^4/g_s^2\alpha'^2 \sim N$ となることから $\hbar$ は $1/N$ と対応がつく。一方 (1.5) 式から α' は $1/\sqrt{g_{\rm YM}^2 N}$ と対応がつくことがわかる。したがってゲージ理論の planar limit でしかも強結合の領域は、string 理論の古典近似である超重力理論が妥当な領域に対応し、逆に string 理論の α' の高次の項が効く領域は、ゲージ理論の弱結合領域に移される。これは強結合領域と弱結合領域を対応づけているので非常に非自明な主張である。なお AdS/CFT 対応は上の極限の話だけでなく、次の order の補正についての議論もなされている。それは、T. Banks と M. Green の仕事 [12] である。その論文では彼らは 4 点関数への α' の次の order の補正を考察している[5] 。すなわちゲージ理論で、't Hooft 結合定数での展開の次の order の補正である。しかしループ展開、つまりゲージ理論での $1/N$ 展開に対する次の order への補正はまだ議論されていない。

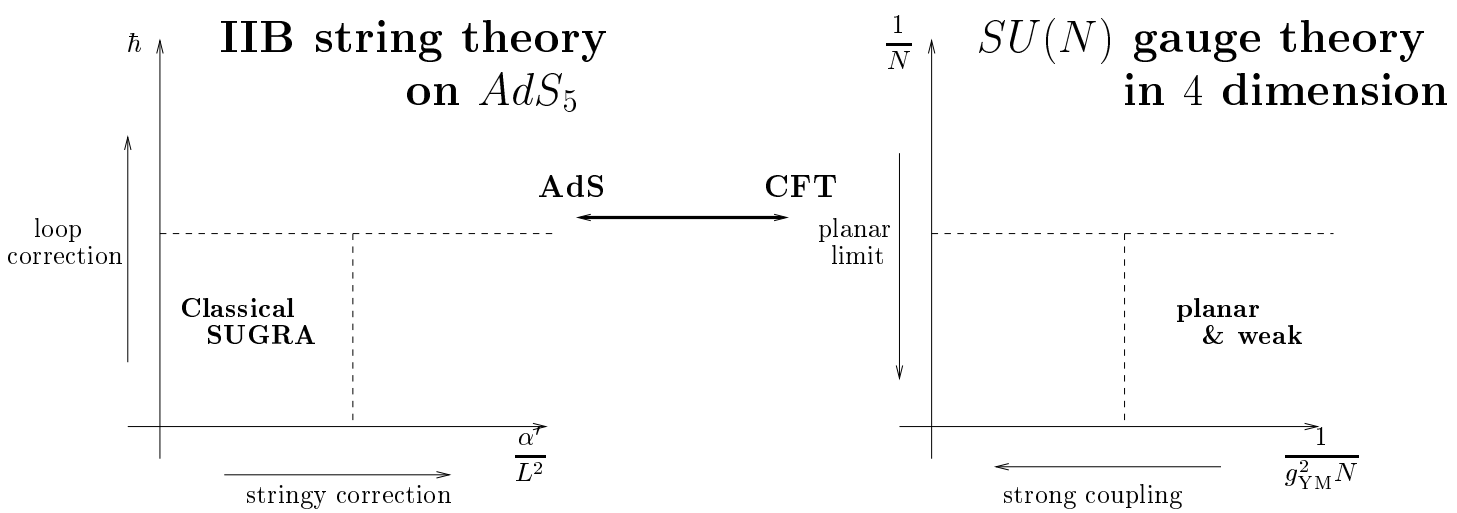


図 4: duality map

さてこの AdS/CFT 対応の 1 つの目的は string 理論、特にその古典的な近似としての超重力理論を使って強結合のゲージ理論についての情報を得るということであるが、一方ゲージ理論を使って string 理論について学ぶということも期待できる。しかし、string 理論よりゲージ理論の方が原理的な面でずっと単純なのだが、強結合領域ではゲージ理論の実際的な計算ができないので、string 理論を使って強結合のゲージ理論を調べる仕事が多くなされた。それでもこの対応の真の価値は、曲がった空間での string 理論をずっと簡単な概念であるゲージ理論で定義できると考えている人もいる。

[3] ここで少しゲージ理論の $1/N$ 展開について言っておく。 $1/N$ 展開は 't Hooft によってゲージ理論を解析する 1 つの手法として導入された [10]。それによれば Feynman 図 G がオイラー数 $\chi(G)$ を持つとするとき、その Feynman 図の振幅は $N^{-\chi(G)}$ に比例する。N が非常に大きいときは genus を持たない diagram のみ考えればよい。この極限を planar limit という。

[4] string 理論の枠組みでは [11] 等が参考になる。

[5] この講義でも 6 章でこの補正について少し議論する。

2 Green's functions from supergravity

AdS/CFT 対応を使ってグリーン関数をどのように計算するかを述べることにしよう。上で述べたようにこれは N、$g^2_{\rm YM}N$ が大きい領域で信頼できる計算であることに注意しておこう。さてグリーン関数の計算は [13] とそれとは独立に [14] によって提唱された。基本的な考え方は、超重力理論のある場 ϕ がゲージ理論の operator $\mathcal{O}$ に結合するということである。式にすると下のようになる。

$$\begin{aligned} W[\phi_0] &= \log\langle e^{\int d^4x \phi_0 \mathcal{O}(x)}\rangle_{SYM} \\ &= \text{Extremum}_{\phi|_{\partial AdS}=\phi_0}(S_{SUGRA}[\phi]). \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで右辺は、場に対する境界条件のもとで超重力理論の作用を最小値にするような配位を取るという意味であり、そうすることで場の理論の連結グリーン関数を生成汎関数の形 $W[\phi_0]$ で与えるのである。

この考え方は非常に基本的なもので、共形な理論ではないときでも成り立つと期待されている。たとえば Witten は QCD_4 を調べるのに near-extremal な D4-brane を使うということを提案した [15]。この場合でもグリーン関数を計算する時の考え方 (2.1) は成り立つものと思われている。

さてここで一般に n 点関数を計算するということを考えてみよう。すると上の式は、経路積分で古典作用を取るという近似を考えるのと同じなので diagram でいえば n 本外線がある tree グラフだけの展開を考えることと同じになる。よって 4 点関数を計算してみようとすると、図 5 の 4 つのグラフが少なくとも必要となる。3 点関数については図 6 の 1 つだけである。

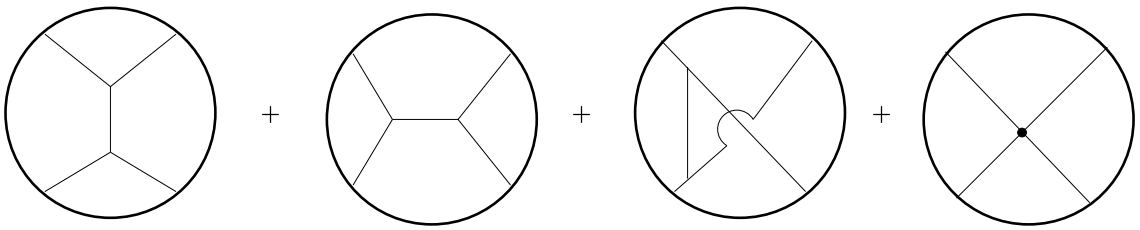


図 5: diagrams of 4-pt function

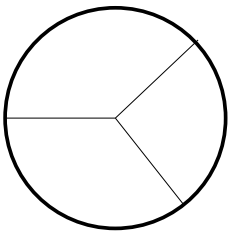


図 6: diagram of 3-pt function

この図の書き方は MIT の人たちがやりはじめた仕方で、anti-de Sitter 空間の境界を円であらわし、その内部を anti-de Sitter 空間としている。また Feynman dialgram で境界上の点と内部の点を結ぶ足のことを '外線' と呼ぶことにする。

さてここで実際にグリーン関数を計算してみることを考えよう。ただし bulk と bulk を結ぶ propagator の関数形は anti-de Sitter 空間がもつ曲率のために非常に複雑であるので、bulk と境界を結ぶ propagator の

みを使う 2 点関数や 3 点関数について考えよう。まず bulk と境界を結ぶ外線に付随した propagator(bulk-to-boundary propagator) は超重力理論の場 ϕ の運動方程式を線形近似で解くことで得られる。すなわちもし ϕ が超重力理論のスカラー場であれば、Klein-Gordon 方程式を解けば良い。

$$(\Box - m^2)\phi \quad = \quad 0. \tag{2.2}$$

ただし、$\Box$ は (1.4) 式の anti-de Sitter 空間の部分の計量

$$ds^2 \quad = \quad \frac{L^2}{z^2}(dz^2 + d\vec{x}^2), \tag{2.3}$$

を使って計算する。ただし変数変換

$$\frac{z^2}{L^2} \quad = \quad \frac{L^2}{r^2}, \tag{2.4}$$

を行った。そうすると anti-de Sitter 空間の内部で正則な Klein-Gordon 方程式の解は変形ベッセル関数を使って書ける。

$$\begin{aligned} \phi(z, \vec{x}; \vec{k}) \quad &= \quad \frac{(kz)^2 K_{\Delta-2}(kz)}{(kR)^2 K_{\Delta-2}(kR)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &\equiv \quad K^R(kz) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここでベクトルの記号は、境界の座標をあらわす 4-vector であり、また $z = R$ で $\phi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ となる様に規格化している。変形ベッセル関数の添字の $\Delta - 2$ は

$$\Delta = 2 + \sqrt{4 + m^2 L^2}, \tag{2.6}$$

で定義される。後でこの Δ は共形場理論のコンフォーマル次元と結び付けられることがわかる。R というのを導入したが、これは計算をするときにカットオフの役割をする[6] 。場の理論でカットオフ Λ をどのようにとってもいいように、R をどのようにとっても良く、最後の段階で $\Lambda \to \infty$ とするように $R \to 0$ を行う。計算をするときにカットオフが必要である理由は、変形ベッセル関数が $z = 0$ の近傍で発散しているからである。この状況を絵にすると図 7 のようになる。$z = 0$ が anti-de Sitter 空間の境界であり、それを $z = R$ で正則化することで anti-de Sitter 空間の体積が無限になる部分を抜き去っている[7] 。

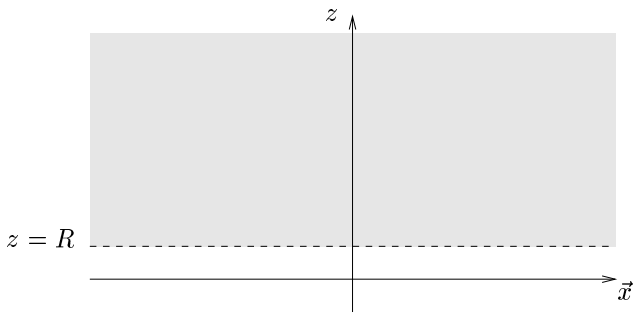


図 7: cutoff

さて propagator が求まったので、これを使って 2 点関数を計算してみよう。2 点関数の計算なので重力の相互作用はいらなくて、超重力理論の場の 2 次の部分、すなわちフリーの部分だけが必要となる。場 ϕ

[6] 私たちの最初の論文 [6] で誤って R を anti-de Sitter 空間の半径と同一視していたがそれとは関係ない。
[7] もちろんこのやり方が唯一のやり方ではなく、例えば場 ϕ の $z = 0$ の近傍での漸近的な振る舞いを抜き出して計算するといったやり方も存在する。このやり方に関しては、例えば [14, 16] 等を見よ。

に対しては、球面調和関数で展開した 10 次元の IIB 超重力理論における dilaton を念頭に置くが、その作用[8] は

$$S = \eta \int d^5x\sqrt{g}\left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \text{interactions}\right], \tag{2.7}$$

と書ける。以前与えた処方に従えば、2 点関数は境界条件付きの最小値問題の解の 2 階微分である。したがって 2 点関数は次のようにして計算できて

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{O}(\vec{p})\mathcal{O}(\vec{q})\rangle &= \left.\frac{\partial^2 W\left[\lambda_1 e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \lambda_2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\right]}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\right|_{\lambda_1=\lambda_2=0} \\
&= \eta\int dzd^4\vec{x}\frac{L^5}{z^5}\left[\frac{z^2}{L^2}\left\{\partial_z\phi(z,\vec{x};\vec{p})\partial_z\phi(z,\vec{x};\vec{q}) + \partial_\mu\phi(z,\vec{x};\vec{p})\partial_\mu\phi(z,\vec{x};\vec{q})\right\}\right. \\
&\qquad\left. + m^2\phi(z,\vec{x};\vec{p})\phi(z,\vec{x};\vec{q})\right] \\
&= \eta(2\pi)^4\delta^4(\vec{p}+\vec{q})\left[\frac{L^3}{z^3}\left\{K^R(pz)\partial_z K^R(qz)\right\}\right]_{z=R}^{z=\infty} \\
&\qquad -\eta\int dzd^4\vec{x}\sqrt{g}\phi(z,\vec{x};\vec{p})(\Box - m^2)\phi(z,\vec{x};\vec{q}) \\
&= -\eta L^3R^{2\Delta-8}(2\Delta-4)\frac{\Gamma(3-\Delta)}{\Gamma(\Delta-1)}(2\pi)^4\delta^4(\vec{p}+\vec{q})\left(\frac{p}{2}\right)^{2\Delta-4}[1 + (R\text{ の高次の巾})] \\
&\qquad + (p\text{ の正則関数}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

である[9] 。R の高次の項は $R\to 0$ とするときに無視して良い。また p の正則関数の項は位置空間では contact term となるなので落としても良い。(2.8) は運動量空間で求めた結果であるが、もちろん Fourier 変換することで位置空間へ持っていくことができる。

$$\langle\mathcal{O}(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{y})\rangle = \eta L^3R^{2\Delta-8}\frac{2\Delta-4}{\Delta}\frac{\Gamma(\Delta+1)}{\pi^2\Gamma(\Delta-2)}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|^{2\Delta}} + \cdots. \tag{2.9}$$

この結果は共形場の理論で期待される巾依存性であり、その巾依存性から、Δ が場 $\mathcal{O}$ のコンフォーマル次元であることがわかる。Δ は (2.6) で定義されていたので、スカラー ϕ の質量と関係をつけることができる。

少しコメントを与える。

1. η は 10 次元の作用から計算されるべき 5 次元作用の規格化の役割をしている。常にこの係数が作用の規格化としてあらわれる。
2. 実際のグリーン関数の計算はカットオフ R を operator $\mathcal{O}$ に吸収させてやる。今の場合 $R^{\Delta-4}$ を operator $\mathcal{O}$ に吸収させてやれば良い。どのように吸収させてやるかは、繰り込みの処方によって違う。もちろんそうすることですべての R 依存性がグリーン関数から取り除かれるかどうかは非自明な問題である。
3. operator $\mathcal{O}$ の規格化は原理的には超重力理論の場、すなわち closed string が、どのように D3-brane 上の場、すなわち open string に結合するかで決まるのだが、正確な作用は D3-brane が 1 枚の時しか知られていない。しかしどのように場が結合しているかがわかっているものもある。たとえば dilaton は $\mathrm{tr}\,F^2$ に結合するし、graviton はエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ に結合する。また超対称性を使えば、gravitino が supercurrent に結合することもわかる。

$$S_{\text{int}} = \int d^4x\left[e^{-\phi}\frac{1}{4}\mathrm{tr}\,F^2 + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + \cdots\right]. \tag{2.10}$$

[8] ここで常に Wick 回転をした Euclidean の作用を使っていることに注意しよう。これは anti-de Sitter 空間の大域的な構造に関する多くの困難を避けるためである [17]。

[9] ここで $\Delta \notin \boldsymbol{Z}$ を仮定した。$\Delta \in \boldsymbol{Z}$ のときは後のコメント 4(7 ページ) を参照せよ。

4. 上の計算で見たように 2 点関数の計算では、pR の展開で正則な項も非正則な項も出てくる。答を得るには非正則で leading の項を取れば良い。また (2.8) 式の計算では Δ が非整数であることを仮定したが、もし整数であれば (2.8) 式ではなく

$$\langle \mathcal{O}(\vec{p})\mathcal{O}(\vec{q})\rangle \quad = \quad -(-1)^{\Delta}\eta L^3 R^{2\Delta-3}\frac{2\Delta-4}{\Gamma(\Delta-1)\Gamma(\Delta-3)}(2\pi)^4\delta^4(\vec{p}+\vec{q})\left(\frac{p}{2}\right)^{2\Delta-4}\log(qR)+\cdots, \tag{2.11}$$

というように log の項が出るのでこの log の項から位置空間での 2 点関数を計算できる。

5. 後で 3 点関数について少し見るが、そのときは位置空間で計算するのが便利である。また上の 2 点関数の計算を位置空間で行うこともできる。そこでカットオフを operator に吸収させた bulk-to-boundary propagator を求めておく。

$$\begin{aligned} K_\Delta(z,\vec{x};\vec{y}) &= \lim_{R\to 0}\frac{1}{R^{\Delta-4}}\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}}\frac{(kz)^2K_{\Delta-2}(kz)}{(kR)^2K_{\Delta-2}(kR)}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \\ &= \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^2\Gamma(\Delta-2)}\left(\frac{z}{z^2+(\vec{x}-\vec{y})^2}\right)^{\Delta}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

6. string の励起状態の質量は $m^2\sim\frac{1}{\alpha'}$ であるから、これに結合する operator のコンフォーマル次元は $\Delta\sim(g_{\rm YM}^2N)^{\frac{1}{4}}$ で、強結合では非常に大きな次元を持つ。
7. コメント 6 と対照的に string 理論の massless state を S^5 上に reduction することで得られる Kaluza-Klein state は質量が $m\sim 1/L$ ぐらいなので、その次元は強結合では、$\Delta\sim 1$ となる。こういった Kaluza-Klein state はずっと前に [18] によって導かれている。その結果は超重力理論の方の state は $\mathcal{N}=4$ 超共形場理論の short multiplet の "single-trace" operator と 1 対 1 に対応していることである[10] 。そして $\mathcal{N}=4$ super Yang-Mills 理論のスカラー場の添字の traceless の完全対称化したもの ($\mathrm{tr}\,X^{(i_1}\cdots X^{i_l)}$ で $(i_1\cdots i_l)$ は $SO(6)$ の $\underline{6}$ 表現の traceless な完全対称化。Young 図で書くと $SU(4)$ に対する になる。) とその superpartner (supercharge を作用させてやった spin の高い状態を持ったもの) で [18] にのっている Kaluza-Klein state はすべて尽くされる。上の operator とその積以外の operator は string 理論での対応物はコメント 6 で議論した massive な string state と考えられるので 、$g_{\rm YM}^2N\to\infty$ の極限で非常に大きな次元 $\Delta\sim(g_{\rm YM}^2N)^{\frac{1}{4}}$ を持つと期待され、OPE(演算子積展開) ではある意味落ちてしまう。この非常に大きな次元を持つということは、AdS/CFT 対応からの予想であるが、場の理論の範疇では証明されていない。場の理論でわかっていることは、 long multiplet に属する operator は量子効果を受けてしまうということだけである。このような long multiplet に入っている operator の例として、例えば $\mathrm{tr}\sum_i(X^i)^2$ がある。
8. Anti-de Sitter 空間のスカラーでない場に結合する operator に対しては質量と次元の関係 (2.6) は変更を受ける。たとえば anti-de Sitter 空間の p-form の場は、境界上の $(n-p)$-form の composite operator に結合するが、その質量と次元の関係は、

$$m^2L^2 \quad = \quad (\Delta-p)(\Delta+p-4), \tag{2.13}$$

となる。この関係の任意のスピンを持った場に対する一般化は知られていない。

次に 3 点関数について考えよう [19, 16]。特にこの short multiplet、

$$\mathcal{O}^I \quad = \quad C^I_{i_1\cdots i_l}\,\mathrm{tr}\,X^{i_1}\cdots X^{i_l} \qquad \text{in} \qquad \underbrace{\text{}}_{l}, \tag{2.14}$$

の 3 点関数を計算することを考えよう。ただし、$C^I_{i_1\cdots i_l}$ は Young 図に合うように i について完全対称で traceless になるようにとる。さて 3 点関数を計算するには図 6 の diagram を計算すれば良い。式で書け

[10] これについては 4 章で詳しく述べる。

ば、超重力理論の作用

$$S = \eta \int d^5x\sqrt{g}\left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \sum_{I_1I_2I_3}\frac{1}{3}\mathcal{S}_{I_1I_2I_3}\phi^{I_1}\phi^{I_2}\phi^{I_3}\right], \tag{2.15}$$

から (2.1) 式にしたがって計算するのだが、(2.12) の bulk-to-boundary propagator を利用すれば、

$$\langle\mathcal{O}(\vec{x_1})\mathcal{O}(\vec{x_2})\mathcal{O}(\vec{x_3})\rangle = 2\eta\mathcal{S}_{I_1I_2I_3}\int d^5x\sqrt{g}\prod_{i=1}^{3}K_{\Delta_i}(z,\vec{x};\vec{x_i}), \tag{2.16}$$

を得る。ここでコメント 1、2、3 で述べた規格化の問題は次のようにして避けられる。まず 2 点関数と 3 点関数は共形不変性から

$$\langle\mathcal{O}(\vec{x})\mathcal{O}(\vec{y})\rangle = \frac{A_I}{|\vec{x}-\vec{y}|^{2\Delta}}, \tag{2.17}$$

$$\langle\mathcal{O}(\vec{x_1})\mathcal{O}(\vec{x_2})\mathcal{O}(\vec{x_3})\rangle = \frac{B_{I_1I_2I_3}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}x_{13}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}}, \tag{2.18}$$

と決まる。するとこれらから作られる規格化によらない量があって、それは下の (2.19) 式の左辺である。

$$\frac{B^2_{I_1I_2I_3}}{A_{I_1}A_{I_2}A_{I_3}} = \frac{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{N^2}\langle C^{I_1}C^{I_2}C^{I_3}\rangle^2. \tag{2.19}$$

よって左辺を計算すれば規格化の問題を避けた解が得られるが、その計算結果が長い計算の後、右辺になることが示された [19]。ただし $\langle C^{I_1}C^{I_2}C^{I_3}\rangle$ は $C^{I_1}_{i_1\cdots i_l}, C^{I_2}_{j_1\cdots j_m}, C^{I_3}_{k_1\cdots k_n}$ から作られる $SU(4)$ 不変な量である。さらに [19] が見つけたことは、上の超重力理論の計算と場の理論の弱結合での計算が一致するということである。図 4 を思い起こすと両者が信頼できる領域は異なっているのでこれは驚くべきことである。

3 Freund-Rubin ansatz and D3-branes on sigularities

次に AdS/CFT 対応で得られる様々な CFT の具体的な例を見てみよう。typeIIB 超重力理論の観点からは無限種類の $AdS_5\times\mathcal{M}_5$ ($\mathcal{M}_5$ は Einstein 多様体) 型のコンパクト化がある。こういったコンパクト化は Freund-Rubin 解 [20] といわれている。この解は以下のようにあらわされる。

$$ds^2 = L^2\frac{d\vec{x}^2+dz^2}{z^2} + L^2ds^2_{\mathcal{M}_5}, \tag{3.1}$$

$$F_5 = \frac{N\sqrt{\pi}}{2\mathrm{Vol}\mathcal{M}_5}(vol_{\mathcal{M}_5} + vol_{AdS_5}), \tag{3.2}$$

$$R^N_M = \frac{\kappa^2}{6}F_{MP_1\cdots P_4}F^{NP_1\cdots P_4}, \tag{3.3}$$

$$L^4 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\kappa N}{\mathrm{Vol}\mathcal{M}_5}, \tag{3.4}$$

$$2\kappa^2 = 16\pi G_{10} = (2\pi)^7 g_s^2\alpha'^4. \tag{3.5}$$

ただしここで $\mathcal{M}_5, AdS_5$ の計量は

$$R^{(\mathcal{M}_5)}_{\alpha\beta} = 4g_{\alpha\beta}, \qquad R^{(AdS_5)}_{\mu\nu} = -4g_{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

を満たす[11] ように (3.1) 式で L の factor をくくり出した。1 つめの式 (3.1) は anti-de Sitter 空間も $\mathcal{M}_5$ も '半径' L を持っていることを示している。また (3.2) の 5-form field strength は、self-dual で closed であ

[11] このような多様体 $\mathcal{M}_5$ のもっとも簡単な例は S^5 である。

るという超重力理論の運動方程式を満たし、(3.3) は Einstein 方程式である。これらの方程式から anti-de Sitter 空間や $\mathcal{M}_5$ の半径 L が 5-form の flux N と (3.4) 式で関係づいていることが分かる。また κ^2 はニュートン重力定数であり (3.5) の convention を使っている。ここで $\mathcal{M}_5$ の宇宙定数を 4 に取ったことに注意しておこう。

さて実は、Freund-Rubin 解は string 理論で Ricci flat な空間のある点に D3-brane を置いたときの horizon 近傍の幾何をあらわしていることが以下のようにして分かる [21]。まず Ricci flat な空間

$$ds^2 = (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + (dr^2 + r^2 ds^2_{\mathcal{M}_5}), \tag{3.7}$$

を考える。すると 6 次元部分が Ricci flat であるということと、$ds^2_{\mathcal{M}_5}$ が 宇宙定数が 4 の Einstein 多様体であることが等価であることが分かる。この空間の原点に D3-brane を導入してみると、計量が因子の分だけ変更されて

$$ds^2 = f(r)^{-1/2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + f(r)^{1/2}(dr^2 + r^2 ds^2_{\mathcal{M}_5}), \tag{3.8}$$

$$f(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4}, \tag{3.9}$$

となる。ここで factor の部分 $f(r)$ は内部空間の 6 次元多様体上の調和関数である。するとこの解 (3.8) の horizon 近傍の幾何は丁度 (3.1) になっていることが分かる。さらにこの空間に残っている超対称性の数を求めることができる。これは通常どおり $\mathcal{M}_5$ 上の background に残る Killing spinor の個数を数えれば良い。結果は D3-brane を導入する前と同じ数の超対称性が残ることがわかる [21]。ここで holonomy の議論が使えて、もし 6 次元多様体の部分の holonomy が $SU(2)$ なら超対称性は半分になり、$SU(3)$ なら超対称性は 1/4 残る。

以上で一般的なことを述べたので、D3-brane が特異点上にある理論の具体的な例をあげることにする。

- Orbifold [22]
- Orientifold [23]
- Conifold [24]
- Gorenstein 特異点 [25]
- generalized conifold [26, 27]

この講義では、conifold の特異点上に置かれた N 枚の重なった D3-brane の world volume theory がどのような場の理論を与えるかということについて詳しく議論しよう[12] 。Conifold の例は上の超対称性についての議論から 4 次元の $\mathcal{N} = 1$ の超共形対称性を持っていることが示唆される。実際それは繰り込み群の自明でない IR(赤外) の固定点上の場の理論に関係していると考えられている。

Conifold

ここで考える conifold は以下の noncompact な 6 次元 Calabi-Yau 多様体のひとつである (A_1 型の)conifold [28] である。

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0. \tag{3.10}$$

この conifold の特異点上に D3-brane をおいたときに得られる場の理論を知りたいのだが、しばらくこの conifold について説明をしよう。まず上の conifold 上の計量を、

$$ds^2 = dr^2 + r^2 ds_{\mathcal{M}_5}, \tag{3.11}$$

[12] orbifold や generalized conifold の例については Nekrasov 氏の講義録 [27] を参照

と書いて、動径方向 r とそれに直交するベース多様体 $\mathcal{M}_5$ に分解する。このように書くとベース多様体 $\mathcal{M}_5$ は Einstein 多様体[13] になるということは先ほど述べた。すると $\mathcal{M}_5$ は

$$z_i \sim s z_i \qquad s \in \boldsymbol{R}_+, \tag{3.12}$$

の同値関係を考慮した conical singularity($z_i = 0$) の回りの点であるから、(3.10) 式と

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = r^2, \tag{3.13}$$

の共通部分と考えて良い。ただし r は何でも良いが 1 つに固定する。

さてこの $\mathcal{M}_5$ は位相空間として $S^2 \times S^3$ に同相であることが次のようにしてわかる。複素座標 z_i を実座標 x_i, y_i を用いて $z_i = x_i + iy_i$ と書くと、(3.10) 式と (3.13) 式は

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2}r^2, \tag{3.14}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \frac{1}{2}r^2, \tag{3.15}$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0, \tag{3.16}$$

であり、したがって (3.14) 式から S^3 がでて、(3.15) 式、(3.16) 式から S^2 が bundle として出る。ところが S^3 上の S^2-bundle は trivial であることが知られているので $S^2 \times S^3$ を得る。

またこの $\mathcal{M}_5$ は coset 空間としての表現を持つことが次のようにしてわかる。まず (3.10) 式、(3.13) 式から $\mathcal{M}_5$ には z_i を vector とする $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ 変換が推移的に働いている、すなわちどんな 2 点も $SO(4)$ 変換で結ぶことができることがわかる。したがって $\mathcal{M}_5$ 上の点 Q として $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}, 0, 0)$ を取っても一般性を失わない。すると上の $SO(4)$ 変換の内, 点 Q を動かさない変換は z_3, z_4 を回転させる $SO(2) = U(1)$ なので $\mathcal{M}_5$ を coset 空間としてあらわすことができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_5 &= \frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1)_{\text{diag.}}} \\ &\approx S^2 \times S^3 \qquad \text{(topologically)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

ここで $\mathcal{M}_5$ が、coset manifold $SU(2) \times SU(2)/U(1)_{\text{diag.}}$ となることをもう少し具体的に見てみよう。行列 W を、

$$W \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} w^A \sigma_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z^3 + iz^4 & z^1 - iz^2 \\ z^1 + iz^2 & -z^3 + iz^4 \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

で定義すると conifold の方程式 (3.10) は、$\det W = 0$ と書き直すことができる。さらに (3.13) 式の動径方向の座標 r は、

$$r^2 = \mathrm{tr} W W^\dagger, \tag{3.19}$$

と書きかえることができる。新しい行列 $Z \equiv W/r$ と定義すると $T^{1,1}$ はこの Z を用いて、

$$\det Z = 0, \qquad \mathrm{tr} Z Z^\dagger = 1, \tag{3.20}$$

と書くことができる。いま、Z_0 なる特解で、

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \tag{3.21}$$

[13] $R_{\alpha\beta} = 4 g_{\alpha\beta}$ を満たすような多様体のこと。

なるものを考えると、一般の解はこの Z_0 をもちいて、

$$Z_0 = LZ_0R^\dagger, \quad L \in SU(2)_L, \ \ R \in SU(2)_R, \tag{3.22}$$

で与えられる。しかし、Z_0 を動かさない $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の元 (L_0, R_0) が存在する。

$$\Theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

として、$(L_0, R_0) = (\Theta, \Theta^\dagger)$ とすれば、$L_0 Z_0 R_0 = Z_0$ となることはすぐにわかる。これより $(L, R) \simeq (L\Theta, R\Theta^\dagger)$ の同一視があるので、この同一視により得られる多様体を $T^{1,1}$ と書くことにすれば、

$$T^{1,1} = \frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1)_{\rm diag}} = \frac{S^3 \times S^3}{U(1)}, \tag{3.24}$$

となる。

一般には $(L, R) \simeq (L\Theta^q, R\Theta^{p\dagger})$ の同一視があるとしてもよい。 ここで p, q は互いに素な自然数である。このとき得られる多様体 (Romans 多様体)$T^{p,q}$ は、Einstein 多様体になる。実際 $SU(2) \simeq S^3$ が S^2 上の S^1-bundle であること、および同値関係 $(L, R) \simeq (L\Theta^q, R\Theta^{p\dagger})$ より、$T^{p,q}$ は $S^2 \times S^2$ 上の fibre が $U(1)$ であるような fibre bundle となる。このような多様体の計量の一般的な形は、 座標 $(\psi, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$ を用いて、

$$ds^2_{T^{p,q}} = \lambda^2 \left(d\psi + p\cos\theta_1 d\phi_1 + q\cos\theta_2 d\phi_2\right)^2 + \Lambda_1^{-1}\left(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2\right) + \Lambda_2^{-1}\left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2\right), \tag{3.25}$$

と書ける[14] が、これが Einstein 多様体であること、つまり $R_{\alpha\beta} = 4g_{\alpha\beta}$ であるという条件は

$$\lambda^2 = (p^2\Lambda_1^2 + q^2\Lambda_2^2) = 2, \quad \Lambda_1(1 - p^2\lambda^2\Lambda_1/2) = 4, \quad \Lambda_2(1 - q^2\lambda^2\Lambda_2/2) = 4, \tag{3.26}$$

となるので、これからパラメタ $\lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$ が求まって Einstein 多様体 $T^{p,q}$ の計量の形が決まる。ここでパラメタは、$0 \le \psi < 4\pi$, $0 \le \theta_i < \pi$, $0 \le \phi_i < 2\pi$ をとりうる。

$T^{p,q}$ のなかでもっとも興味深いのは、$T^{1,1}$ である。というのも $T^{1,1}$ のみが Killing スピノル方程式の解を持ち 8 個の supercharge を持つことが知られているからである [29]。一方、一般の $T^{p,q}$ は SUSY を保たない。$T^{1,1}$ の計量は、

$$ds^2_{T^{1,1}} = \frac{1}{9}\left(d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2\right) + \frac{1}{6}\left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2\right), \tag{3.27}$$

となる。この計量を用いて $T^{1,1}$ の体積を計算することができる[15] 。

$$\mathrm{Vol}(T^{1,1}) = \int_0^{4\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\phi_1 d\phi_2 \int_0^{\pi} d\theta_1 d\theta_2 \sqrt{g} = \frac{16\pi^3}{27}, \tag{3.28}$$

World volume gauge theory

次に conifold 上におかれた N 枚の D3-brane の world volume theory がどのようなものであるを議論しよう [24]。

その前に平らな Minkowski 空間におかれた D3-brane について思い起こすと、それらの near horizon geometry は $AdS_5 \times S^5$ であり、S^5 のアイソメトリ $SO(6) \approx SU(4)$ は、対応する場の理論において SUSY

[14] このことについては [28] の Appendix A を参照のこと。
[15] この結果はあとでアノマリーの評価を超重力理論の立場から行なうときに用いる。

をまわす R-対称性として現れていた。したがって、今の場合、conifold 特異点上の D3-brane に対応する理論では、conifold のアイソメトリ $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ が大域的な対称性としてあわられるはずである。この $T^{1,1}$ のアイソメトリ $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ は、変換

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z_1 + iz_4 & iz_2 + z_3 \\ iz_2 - z_3 & z_1 - iz_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

をすると明白に見て取れる。上式において、A_i, B_i がそれぞれ $SU(2)$ の基本表現になる。また $U(1)$ のアイソメトリは (3.12) 式の複素化したものに対応した

$$z_i \to e^{i\theta} z_i, \qquad \text{or} \qquad (A_i, B_i) \to e^{i\theta/2} (A_i, B_i) \tag{3.30}$$

である。さらに変換 (3.29) によって conifold の定義式 (3.10) は自明に満たされている。しかし (3.29) 式は座標変換ではなく、同じ z_i の点を得るのに次の自由度がある。

$$A_i \sim \lambda A_i, \qquad B_j \sim \lambda^{-1} B_j, \qquad i, j = 1, 2, \qquad \lambda \in \boldsymbol{C} \tag{3.31}$$

したがって A_i, B_i で conifold を記述しようとするなら, (3.31) を考慮にいれた次の条件を使えば良い[16] 。

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 - |B_1|^2 - |B_2|^2 = 0 \qquad \text{modulo} \qquad A_i \sim e^{i\alpha} A_i, \ B_i \sim e^{-i\alpha} B_i. \tag{3.32}$$

この条件 (3.32) は、ちょうど charge が $1, -1$ をもった chiral multiplet A_i, B_j が、$U(1)$ ゲージ場と相互作用している理論の moduli (D-flatness 条件) をあらわしていることがわかる。したがって D3-brane を conifold 上においた理論を作りたければ、(3.32) 式を真空に持つような理論を持ってくれば良い。しかしそのような理論なら何でも良いわけではない。実際 conifold に D3-brane を 2 枚いれた状況を考えてみる。すると互いに離れていて、それらが一般の点にいる時は、D3-brane を結ぶ open string がいて、それらがゲージ群 $U(1) \times U(1)$ の charge $(1, -1), (-1, 1)$ を持った massive な物質場になっている。したがって求めるべき理論は moduli の一般の点で上で述べたような massive な chiral multiplet がでて、しかも $T^{1,1}$ のアイソメトリを大域的な対称性として持つゲージ理論である。この条件から導き出されたのが、表 1 の物質場と superpotential として、

$$W \quad = \quad \lambda \, \mathrm{tr}(A_1 B_1 A_2 B_2 - B_1 A_1 B_2 A_2), \tag{3.33}$$

を持つ理論である[17] 。

すなわちゲージ群が $SU(N) \times SU(N)$ で表 1 の表現を持った chiral な bifundamental の物質場のある $\mathcal{N} = 1$ の超共形 Yang-Mills 理論である。

表 1: matter content of D3-brane in conifold

	$SU(N)$	$SU(N)$	$SU(2)$	$SU(2)$	$U(1)_R$
$A_1,\ A_2$	$\boldsymbol{N}$	$\overline{\boldsymbol{N}}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$	$1/2$
$B_1,\ B_2$	$\overline{\boldsymbol{N}}$	$\boldsymbol{N}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$1/2$

$SU(2) \times SU(2) \times U(1)_R$ は先ほど述べたように $T^{1,1}$ のアイソメトリーからきていて、ゲージ理論の大域的対称性としてあらわれている。

[16] (3.31) 式のうち $\lambda \in \boldsymbol{R}$ の自由度を使って等号を成り立たせている。残った $U(1)$ が $T^{1,1} = SU(2) \times SU(2)/U(1)_{\text{diag.}}$ と書いたときの $U(1)_{\text{diag.}}$ である。

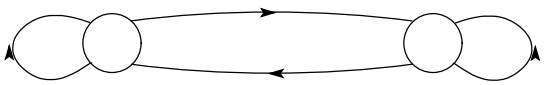
[17] superpotential は nonrenormalizable であるが、この項がないと massive な chiral multiplet がでないことに気をつけよう。この項についてより詳しくは原論文 [24] を参照のこと。

こうして $\mathcal{N}=1$ の超共形 Yang-Mills 理論が得られたわけであるが、それをおさらいしておくと、$T^{1,1}$ 上で存在する 8 つの supercharges は、場の理論では AdS_5 のアイソメトリ $SO(2,4)$ と組んで、$\mathcal{N}=1$ superconfomal algebra をなす。ゲージ群は $SU(N)\times SU(N)$ で、それぞれのゲージ群に対応してゲージボソン $A_\mu, \bar{A_\mu}$ とその superpartner $\chi, \bar{\chi}$ があり、それらがベクトル多重項 $(A_\mu,\chi)\,,\left(\bar{A_\mu},\bar{\chi}\right)$ をなしている。また物質場は,bifundamental つまりそれぞれのゲージ群に対して、$(\mathbf{N},\overline{\mathbf{N}})$ の変換性をもつスカラー A_1, A_2 とその superpartner χ_{A_1}, χ_{A_2} がカイラル多重項をなしている。またそれぞれのゲージ群に対して $(\overline{\mathbf{N}},\mathbf{N})$ の変換性をもつスカラー B_1, B_2 およびその superpartner χ_{B_1}, χ_{B_2} もある。conifold のアイソメトリのうち、$SU(2)\times SU(2)$ はそれぞれ A_1, A_2 と B_1, B_2 をまわす対称性として場の理論で実現される。以下では、この 2 つの $SU(2)$ を $SU(2)_A \times SU(2)_B$ と書いて区別することにする。さらに $U(1)$ は、$\mathcal{N}=1$ superconformal algebra の $U(1)_R$ 対称性として対応がつく。

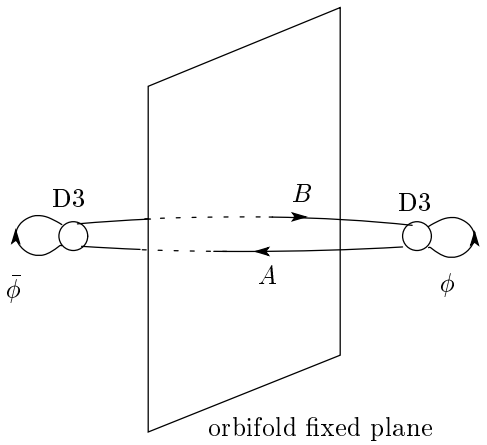
以上で conifold 上の D3-brane を記述する場の理論を導いたが、この場の理論を得る別の方法も存在する。まず $\mathcal{N}=4$ の理論である D3-brane を S^5/Z_2 という Einstein 多様体の上の cone $\boldsymbol{R}^6/\boldsymbol{Z}_2$ の orbifold 特異点に置いてみよう。そうすると $\mathcal{N}=2$ の理論へ project される [22]。この理論は、ゲージ群は上と同じ $SU(N)\times SU(N)$ であるが、matter は A_i, B_i の他に ϕ と $\bar{\phi}$ という 2 つの adjoint 表現の場が入っていて、superpotential は、

$$W \quad = \quad g\,\mathrm{tr}\,\phi(A_1B_1+A_2B_2)+g\,\mathrm{tr}\,\bar{\phi}(B_1A_1+B_2A_2), \tag{3.34}$$

を持つ。これは共形不変な理論である。この理論を絵を使ってあらわす方法が知られている[18] 。それは quiver diagram を持ちいる方法で、この理論の quiver diagram は A_1 affine Dynkin diagram で以下のようになっている。



これが D3-brane の見方でどのようにして得られるかを発見法的に見てみよう。まず orbifold 特異点に D3-brane を置いたときの場合、D3-brane とその鏡像の D3 が orbifold の fixed plane をはさんであることがわかる。実質的に N 枚の D3-brane のかたまりが 2 つあるので、対応するゲージ群は $SU(N)\times SU(N)$ である。ゲージ理論の物質場がここでの open string の描像とどのように対応しているのかを見ることにする。



右側の D3-brane からでて左側の D3-brane にいく open strings は、$SU(N)\times SU(N)$ に関して $(\mathbf{N},\overline{\mathbf{N}})$ の変換性を示すので、ゲージ理論における bifundamental matter A_1, A_2 に対応する。同様に左側の D3-brane からでて右側の D3-brane にいく open strings は、B_1, B_2 に対応する。両端とも右側の D3-brane に端を

[18] これについては [27, 30, 31] を参照せよ。

持つ open string は、右側の $SU(N)$ に関して adjoint の変換性を示すので、ϕ とみなすことができる。同様に両端とも左側の D3-brane に端を持つ open string は $\bar{\phi}$ となる。

$\mathcal{N}=2$ の理論が得られたので、次にこの理論から ϕ と $\bar{\phi}$ に質量を与えて、SUSY を破ることを考えよう。こうするとによって共形不変性が破れて、理論が繰り込み群によってフローする。低エネルギーでは軽いクォークの数がカラーの数の 2 倍であるので、非自明な相互作用する共形不変な固定点へ到達する [32]。具体的には上の superpotential(3.34) に mass term

$$\frac{1}{2}m\mathrm{tr}\left(\phi^2-\bar{\phi}^2\right), \tag{3.35}$$

を加えて、超対称性を $N=1$ に陽に破ってみる。この理論の IR でのふるまいをみるためには 0 でない質量を持つ $\phi,\bar{\phi}$ を積分してしまえばよい。このようにしてえられるスーパーポテンシャルは、

$$W=\frac{g^2}{m}\mathrm{tr}\left(A_1B_1A_2B_2-A_1B_2A_2B_1\right), \tag{3.36}$$

となり、$\lambda=g^2/m$ とおけば先ほどの $\mathcal{N}=1$ のスーパーポテンシャルに一致する。つまり

$$W \;=\; g\,\mathrm{tr}\,\phi(A_1B_1+A_2B_2)+g\,\mathrm{tr}\,\phi(B_1A_1+B_2A_2)+\frac{1}{2}m^2\,\mathrm{tr}(\phi^2-\tilde{\phi}^2), \tag{3.37}$$

で $m=0$ が S^5/Z_2 という幾何学的意味を持った $\mathcal{N}=2$ の共形場理論であり、$m\to\infty$ が欲しい $\mathcal{N}=1$ の conifold 上の共形場理論である。上で述べたことは、string 理論によれば、orbifold S^5/Z_2 と $T^{1,1}$ の間に量子論的なフローがあるということを示唆しているが、このフローは良く理解されているわけではない。ただ、これに関して次の章でアノマリーの計算を行う。アノマリーなのでこれは古典論を越えた結果を出していると考えられる。

最後に次の章でアノマリーを計算するための $U(1)_R$ 対称性を定義しておこう。これは、もともとの $\mathcal{N}=4$ の理論がもっていた $SU(4)_R$ 対称性の対角部分から適当な 1 つを取ってきたもので、traceless 4×4 matrix であらわせば

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & & \\ & -\frac{1}{3} & & \\ & & -\frac{1}{3} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

と書くことができる[19] 。ここでフェルミオン χ のもつ $U(1)_R$-charge を $r(\chi)$ と書くことにすれば、

$$r(\chi_\phi)=r(\chi_A)=r(\chi_B)=-\frac{1}{3},\qquad r(\lambda)=1. \tag{3.39}$$

と割り振ることができる。

4 Conifold Theory: anomalies, branes as baryons, domain wall

場の理論では UV(紫外) で $\mathcal{N}=2$ の理論が ϕ に質量をあたえることで、IR で $\mathcal{N}=1$ の理論に落ち着くことがわかった。これは対応する string/超重力理論の立場ではどのように見えるのであろうか？

UV $\mathcal{N}=2$ の場の理論は $AdS_5\times S^5/\boldsymbol{Z}^2$ 上の超重力理論に、IR $\mathcal{N}=1$ の場の理論は $AdS_5\times T^{1,1}$ 上の超重力理論に対応する。場の理論で $\mathcal{N}=2$ から $\mathcal{N}=1$ にくりこみ群で流れ込むということは、超重力理論の立場では時空が $S^5/\boldsymbol{Z}^2$ から $T^{1,1}$ に変化するということを意味している。

[19] この $U(1)_R$ 対称性は conifold の所で定義した $\mathcal{N}=1$ の $U(1)_R$ とは別のものである。superfield で書けば、

$$W_\alpha(\theta)\mapsto e^{i\beta}W_\alpha(e^{-i\beta}\theta),\quad \left(A_i(\theta),B_i(\theta),\phi(\theta),\bar{\phi}(\theta)\right)\mapsto e^{(2i/3\beta)}\left(A_i(e^{-i\beta}\theta),B_i(e^{-i\beta}\theta),\phi(e^{-i\beta}\theta),\bar{\phi}(e^{-i\beta}\theta)\right),$$

である。

ここでは場の理論、超重力理論それぞれの立場から UV および IR の R-current のアノマリーと Weyl アノマリーを計算して、その比を比較しよう [33]。

Anomaries

$\mathcal{N}=1$ 超共形場理論に対しては、共形不変性の条件は $\langle T^\alpha_\alpha \rangle = 0$ である。これは超共形代数のおかげで、T^α_α は R-current の発散に関係していて、$\langle \partial_\mu R^\mu \rangle = 0$ が成り立つからである。しかしこれは平坦な空間で R^μ に source がないときの条件であり、もし空間が曲がっていて R-current に対する source $B_\mu R^\mu$ があるところで超共形場理論を定式化するなら、$\partial_\mu R^\mu$ は 0 でなくなり以下の式が成り立つ [34]。

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle_{g_{\mu\nu},B_\mu} = \frac{c}{16\pi^2} W^2_{\mu\nu\rho\lambda} - \frac{a}{16\pi^2} R^2_{\mu\nu\rho\lambda} + \frac{c}{6\pi^2} B^2_{\mu\nu}, \tag{4.1}$$

$$\langle \partial_\mu R^\mu \rangle_{g_{\mu\nu},B_\mu} = \frac{c-a}{24\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu}{}_{\beta\gamma} R^{\rho\lambda\beta\gamma} + \frac{5a-3c}{9\pi^2} B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu}. \tag{4.2}$$

ここで

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \tag{4.3}$$

であり、$W_{\mu\nu\rho\lambda}$ は Weyl テンソル、˜ は field strength のデュアルである。(4.2) 式の第 1 項は [35] によってはじめて議論された重力 $U(1)$ アノマリーであり、第 2 項は通常の軸性アノマリーである。また c, a は central charge と呼ばれているもので 2 次元の時と違い 2 つ存在する。

conifold の理論を $\mathcal{N}=2$ の理論から ϕ と $\tilde{\phi}$ に mass を与えることで得られた立場で考える。mass のおかげで 3 章の最後で説明した $U(1)_R$ 対称性は明白に破れ、さらに量子効果のせいでも破れている。表記的な書き方で書けば

$$\partial_\mu R^\mu \sim \beta(g) \operatorname{tr} F^2 + (\text{superpontential、場の異常次元に依存する項}), \tag{4.4}$$

となる。ただし $\beta(g)$ はベータ関数である。しかし軸性カレントの supersymmetric な拡張である Konishi current[36, 37] と組み合わせることで量子異常を持たずかつ保存する current が作れて [38]、それは

$$S_\mu = R_\mu + \frac{2}{3} \sum_i (\gamma_i^{\mathrm{IR}} - \gamma_i) K^i_\mu, \tag{4.5}$$

とあらわされる。これを $U(1)_S$-current と呼ぶ。ただしここで K^i_μ は Konishi current であり、その charge の割り振りは chiral multiplet に 1 、vector multiplet に 0 となるようにとっている。さらに γ_i は場の異常次元で全体の次元 Δ_i が

$$\Delta_i = 1 + \gamma_i, \tag{4.6}$$

となるように決めてある。また γ_i^{IR} は IR での異常次元で

$$\gamma_A^{\mathrm{IR}} = \gamma_B^{\mathrm{IR}} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(1 - \frac{3N_C}{N_f}), \qquad N_f = 2N_c, \tag{4.7}$$

$$\gamma_\phi^{\mathrm{IR}} = \gamma_{\tilde{\phi}}^{\mathrm{IR}} = \frac{1}{2}, \tag{4.8}$$

である。これは [32, 39] の方法を使えばわかる。つまり、superpotential の次元が 3 であることを考慮して superpotential の式 (3.37) を見ればわかる。もしくは厳密なベータ関数 [40, 41]

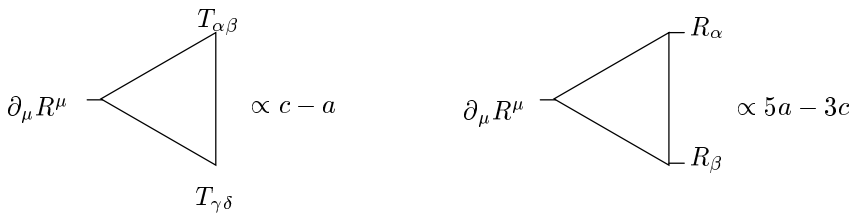
$$\beta(g) \propto 3T_2(G) - \sum_i (1 - 2\gamma_i) T_2(\boldsymbol{R}_i) \tag{4.9}$$

表 2: UV-charge of mass deformed theory

fermion field	gauginos λ	adjoint quarks χ_ϕ	bifundamental quarks χ_A, χ_B
$U(1)_R$	1	$-1/3$	$-1/3$
$U(1)_S$	1	0	$-1/2$

を使えば IR 固定点での異常次元 (4.7) を求めることができる。ただし $T_2(G), T_2(\boldsymbol{R}_i)$ はそれぞれ adjoint 表現、$\boldsymbol{R}_i$ 表現の 2 次の Casimir である。S-current は IR では $\gamma_i = \gamma_i^{\rm IR}$ なので、R-current に一致している。UV 固定点での S-charge の値は、3 章の終りで定義した R-charge の値と、UV 固定点で $\gamma_i = 0$ であることから (4.5) の定義式を使って計算できて、表 2 のようになる。

重力および 軸性アノマリーの係数を図 8 の三角ダイアグラムを評価することで計算しよう。まず UV の



$U(1)$ anomaly　　$U(1)^3$ anomaly

図 8: anomaly triangle graph

立場での計算を行なおう。$U(1)$ 重力アノマリーは、

$$c - a \propto \sum_\psi r(\psi) = 2N^2 \left(1 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = 0, \tag{4.10}$$

$U(1)^3$ 軸性アノマリーは

$$5a - 3c \propto \sum_\psi r(\psi)^3 = 2N^2 \left(1 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3\right) = 2N^2 \times \frac{8}{9}, \tag{4.11}$$

上式で $\sum_\psi$ は理論に含まれるすべての Weyl フェルミオンに関する足しあげである。$U(1)$ 重力アノマリーがないことは場の理論の観点からも自然である。なぜなら $U(1)_R$ 対称性はもともと $SU(4)_R$ 対称性の対角成分であるが、よく知られているように単純ゲージ群は重力アノマリーをもてないからである [35]。

次に IR でのアノマリーを計算する。IR の R-current のアノマリーは、UV のそれとは異なる。理由は、IR では massive $\phi, \bar{\phi}$ がありそれが R-current のソースとなるので、R_μ は保存しない。そこですこし巧妙な方法で IR アノマリーを計算することにしよう。ここで使うトリックとは、R_μ の代わりに S_μ のアノマリーを計算することである。

$$\langle(\partial_\mu R^\mu) T_{\alpha\beta} T_{\gamma\delta}\rangle_{\rm IR} = \langle(\partial_\mu S^\mu) T_{\alpha\beta} T_{\gamma\delta}\rangle_{\rm IR} = \langle(\partial_\mu S^\mu) T_{\alpha\beta} T_{\gamma\delta}\rangle_{\rm UV} \tag{4.12}$$

上式で、一番目の等式は IR で $R_\mu = S_\mu$ (定義 (4.5) より) ということを、二番目の等式は S-current のアノマリーはスケールによらない, つまりくりこみ群でフローしないということを用いた。この式をもちいて、IR での R-current のアノマリーを計算することができる。重力アノマリーは、

$$c - a \propto \sum_\psi s(\psi) = 2N^2 \left(1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0, \tag{4.13}$$

軸性アノマリーは、

$$5a - 3c \propto \sum_{\psi} s(\psi)^3 = 2N^2 \left(1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) = 2N^2 \times \frac{3}{4} \tag{4.14}$$

と得ることができる。UV のときと同様、重力アノマリーが消えていることに注意しよう。UV,IR ともに重力アノマリーがない、つまり $c = a$ なので、c のみ考えればよい。そこで UV,IR における c の値をそれぞれ c_{UV},c_{IR} とおくと、IR と UV における軸性アノマリーの比は、

$$\frac{c_{IR}}{c_{UV}} = \frac{2N^2\left(1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)}{2N^2\left(1 + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)} = \frac{27}{32} \tag{4.15}$$

と得られる。

ここで、4 次元において “conjectured c-theorem” と呼ばれる定理があることをコメントしておこう[20] 。もともと Cardy[43] によって提案されたもので、最近 Forte と Latorre[44] によって証明された。その証明は厳密なものではないが、反例も見つかっていない。この (4.15) は、この c-theorem の一つの例となっている。

この SCFT からの結果を、超重力理論から再現できるかどうか、確かめることにする。超重力理論では軸性アノマリーを計算するのが難しいが、軸性アノマリーは SUSY によって Weyl アノマリー $\langle T^{\alpha}_{\alpha}\rangle_{g_{\mu\nu}}$ と比例していることがわかるので、こちらを計算するほうが簡単である。この計算で用いる基本公式は、(2.1) 式である。いま場の理論ではエネルギー運動量テンソルのみ考えているので、超重力理論で考える必要があるのは重力場のみである。このとき 10 次元の重力を記述する作用は、

$$S_{10} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\sqrt{g}R_{10}, \tag{4.16}$$

で、背景場は Freund-Rubin 解 ((3.1) 式から (3.6) 式) を使う。ここでは、AdS_5 の半径 L についての依存性は前にくくり出しておくのが便利である。10 次元の重力の作用 (4.16) に計量 (3.1) を代入して、得られる 5 次元の作用は、

$$S_5 = \frac{L^8 \mathrm{Vol}(\mathcal{M}_5)}{2\kappa^2}\int d^5x\sqrt{g}(R_5 + 3\Lambda), \tag{4.17}$$

で、L 依存性は前にくくり出してある。ここに AdS_5 の半径 L と $\mathcal{M}_5$ の体積 $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_5)$ の間の関係式 (3.4) [21] を代入すれば、作用 (4.17) は、

$$S_5 = \frac{\pi}{8}\frac{N^2}{\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_5)}\int d^5x\sqrt{g}(R_5 + 3\Lambda), \tag{4.18}$$

となるので、すべての一点関数は $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_5)$ に反比例することがわかる。つまり、

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha}\rangle_{g_{\mu\nu}} \propto \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_5)}, \tag{4.19}$$

を得る。UV では $\mathcal{M}_5 = S^5/\boldsymbol{Z}_2$、IR では $\mathcal{M}_5 = T^{1,1}$ なので、式 (4.19) を用いると、

$$\frac{c_{IR}}{c_{UV}} = \frac{\mathrm{Vol}\left(S^5/\boldsymbol{Z}_2\right)}{\mathrm{Vol}(T^{1,1})} = \frac{\pi^3/2}{16\pi^3/27} = \frac{27}{32}, \tag{4.20}$$

[20] もともと c-theorem とは Zamoldchikov によって二次元の場合に証明されたものである [42]。その内容は、二次元の理論をある結合定数の集合 $\{g_i\}$ で特徴付けたとすると以下の二つの性質を満たす関数 $c\{g_i\}$ が存在する、というものである。1)$c\{g_i\}$ はくりこみ群で UV から IR にフローさせるときに単調非増加な関数で、2)$c\{g_i\}$ の固定点では理論は CFT となり、そのときの $c\{g_i\}$ の値は CFT の central charge となる。

[21] この関係式は、3-brane 解の ADM tension $\frac{2\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_5)L^4}{\kappa^2}$ が、N 枚の D3-brane の tension $\frac{N\sqrt{\pi}}{\kappa}$ と等しいとおくことでも得られる。

で場の理論の結果と一致する。これは AdS/CFT 対応の非自明な検証である。

次に Henningson-Skendekis [45] の仕事について簡単に紹介しよう。この論文では、境界上で任意の計量を与えたときのグリーン関数を holographical に計算してある。まず出発点は、Fefferman-Graham[46] による以下の定理である。

Theorem(Fefferman-Graham)

境界上での計量 $g_{\mu\nu}(\vec{x})(\mu,\nu$ は境界の座標の添字とする) をひとつ特定したとすると、anti-de Sitter 空間の動径方向 z のとり方は一意的に決まり、計量は、以下の形でかける。

$$ds^2 = \frac{dz^2 + g_{\mu\nu}(\vec{x},z)dx^\mu dx^\nu}{z^2}, \qquad \lim_{z\to 0} g_{\mu\nu}(\vec{x},z) = g_{\mu\nu}(\vec{x}). \tag{4.21}$$

式 (4.21) を作用 (4.17) に代入して素朴 ($z \to 0$) に計算すると、体積が無限大であることからの発散が生じてしまう。そのため 2 章でやったように IR カットオフ R を導入して積分を $z > R$ に正則化する。つまり理論をある特定のスキームで正則化したことになる。z を変えることはスキームを変えることに相当するが、同時に

$$g_{\mu\nu}(\vec{x}) \to e^{2\sigma} g_{\mu\nu}(\vec{x}), \qquad R \to e^{2\sigma} R, \tag{4.22}$$

とすることで作用を不変に保つことができる。しかし R を不変に保ったままで z を変えると

$$\delta g_{\mu\nu}(\vec{x}) = 2\delta\sigma g_{\mu\nu}(\vec{x}), \tag{4.23}$$

でこの作用の変化分は、エネルギー運動量テンソルのトレースの Weyl アノマリーになる。

このようにして Henningson-Skenderis は、

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle_{g_{\mu\nu}} = \frac{\pi^2}{8}\frac{N^2}{\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_5)}\frac{1}{4}\left(R^2_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\right), \tag{4.24}$$

を得た。この形を Weyl アノマリーの標準的な形 [47]、

$$\langle T^\alpha_\alpha \rangle_{g_{\mu\nu}} = -a\frac{1}{16\pi^2}\left(R^2_{\mu\nu\rho\sigma} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2\right) - c\left(-\frac{1}{16\pi^2}\left(R^2_{\mu\nu\rho\sigma} - 2R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2\right)\right) \tag{4.25}$$

$$= \frac{1}{16\pi^2}\left((c-a)R^2_{\mu\nu\rho\sigma} + (4a-2c)R^2_{\mu\nu} + \left(\frac{c}{3} - a\right)R^2\right), \tag{4.26}$$

と比較すると

$$a = c = \frac{N^2}{4}\frac{\pi^3}{\mathrm{Vol}\mathcal{M}_5}, \tag{4.27}$$

の場合を考えていることに対応する[22] 。

AdS/CFT 対応を用いて holographical に場の理論を作りたいとするのなら、このとき作ることができる場の理論は $a = c$ であるもの、つまり $U(1)_R$ current に重力アノマリーがないものである。

Chiral primary field

この節では、bulk AdS_5 での場と boundary CFT における chral primary operator との対応をみよう。この対応は、AdS/CFT 対応の初期の研究における重要な結果の一つである。

[22] S_5 のとき $a = c = N^2/4$ となり、$\mathcal{N} = 4$ SCFT の結果と一致する。

Chiral primary field in $\mathcal{N}=4$ SYM

$AdS_5\times T^{1,1}$ の場合は後回しにして、簡単な $AdS_5\times S^5$ における対応を見ることにしよう。$\mathcal{N}=4$ SYM には以下の adjoint field がある。

spectrum	$SU(4)$	Δ
A_μ	$\mathbf{1}$	1
ψ_I	$\mathbf{4}$	3/2
X^i	$\mathbf{6}$	1

これらの場のコンフォーマル次元は、superconformal 代数のおかげで量子補正を受けない[23] 。

コンフォーマル次元 Δ と $U(1)_R$-chrage r には、superconformal 代数からユニタリー性の制限 $\Delta\geq\frac{3}{2}r$ がつく。とくに等号が成立している場合には、表現は short multiplet を構成する。chiral primary field は、与えられたコンフォーマル次元において R-charge を最大にするものなので、上の場から作るとすれば X^i の完全対称積、

$$\mathrm{tr}\left(X^{(i_1}\cdots X^{i_\ell)}\right), \tag{4.28}$$

としたものを考えるとよい。このゲージ理論の chral primary field にデュアルであるような超重力理論の場はいったいなんであるかを以下で議論しよう。

$\mathbf{R}^6$ の座標 $\{x_1,\cdots,x_6\}$ の関数、

$$f\equiv x^{(i_1}\cdots x^{i_\ell)}, \tag{4.29}$$

を考えよう。この関数を S^5 上に制限すると、

$$(\Box+\ell(\ell-4))\,f\big|_{S^5}=0, \tag{4.30}$$

を満たすことがわかり、S^5 上の球面調和関数になることがわかる。実際、すべての S^5 上の球面調和関数をこのようにして作ることができる。

Kim-Romans-van Nieuwenhuizen[18] は、IIB 超重力理論において S^5 上の Kaluza-Klein reduction を行なった。S^5 上の球面調和関数がわかれば、すべての Kaluza-Klein モードの質量がわかる。これによると、Kaluza-Klein reduction を行なったときにでてくる最も軽いスカラー場は S^5 上の計量のトレースの微小変分 h^α_α で、このスカラーの質量の二乗は $\ell(\ell-4)/L^2$ で与えられることがわかる。[18] の結果によると、

$$h^\alpha_\alpha=f_{S^5}, \tag{4.31}$$

と球面調和関数で展開することができ、Kaluza-Klein モードからくる質量は、

$$(mL)^2=\ell(\ell-4), \tag{4.32}$$

と求めることができる[24] 。AdS/CFT 対応では、AdS_5 中のスカラー場はゲージ理論における gauge singlet operator にデュアルなので、スカラー場の質量 (4.32) をもちいてゲージ理論の operator のコンフォーマル次元を計算することができて、

$$\begin{aligned}\Delta &= 2+\sqrt{4+(mL)^2} \\ &= 2+\sqrt{4+\ell(\ell-4)} \\ &= \ell\end{aligned} \tag{4.33}$$

[23] この SYM にはコンフォーマル次元がフローするような operator も存在する。たとえば $\mathrm{tr}X^2$ については異常次元が 2-ループまで計算されている。

[24] [18] の table III。

となり、$\mathcal{N}=4$ SYM の operator $\mathrm{tr}X^{(i_1}\cdots X^{i_\ell)}$ の次元と一致する。

以上の解析から、IIB 超重力理論を $AdS^5\times S^5$ にコンパクト化したときでてくる Kaluza-Klein モード h^α_α は、boundary $\mathcal{N}=4$ SYM における gauge singlet operator $\mathrm{tr}X^{(i_1}\cdots X^{i_\ell)}$ にデュアルであることがわかる。

これまでは、$AdS_5\times S^5$ の場合を議論してきたが、同様の解析が $AdS_5\times T^{1,1}$ の場合にもできるので以下で行なう。

Chiral primary field in $\mathcal{N}=1$ SYM

ここでの議論は任意の (ADE) conifold に適用できるが、話を簡単にするため A_1 型の conifold で議論しよう。

A_1-conifold に対応するゲージ理論における chiral primary field は、

$$\mathrm{tr}A_{(i_1}B^{(j_1}A_{i_2}B^{j_2}\cdots A_{i_\ell)}B^{j_\ell)}, \tag{4.34}$$

という gauge singlet な組み合わせである。ここで $(i_1,\cdots,i_\ell)$、$(j_1,\cdots,j_\ell)$ は $SU(2)\times SU(2)$ のインデックスである。chiral primary において A,B のみ現れているのは、あたえられたコンフォーマル次元で最大の R-charge を持つようにするためである[25] 。また $SU(2)\times SU(2)$ の添え字に関して完全対称にとったのは、F-flattness condition からである。

A_i,B^j はそれぞれ $\Delta=3/4$ を持つので、chiral primary(4.34) の次元は $\Delta=3\ell/2$ であることがわかり、R-charge は $r=\ell$ であることがわかるので、ユニタリー性からの R-charge の制限 $(r=3\ell/2)$ をみたし、short multiplet を構成することがわかる。これらの chiral primary が $AdS_5\times T^{1,1}$ 上の超重力理論におけるどのような場にデュアルなのかをこれから見ることにする。

conifold 上の座標 $\{z_1,\cdots z_4\}$ の関数、

$$f(z_i)=a_{i_1}b^{j_1}\cdots a_{i_\ell}b^{j_\ell}, \tag{4.35}$$

を考えよう。$\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$ は conifold 上の座標 $\{z_1,\cdots z_4\}$ を以下のように組みなおしたものである。

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1+iz_4 & iz_2-z_3 \\ iz_2+z_3 & z_1-iz_4 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

f は z_i について正則な関数である。関数 f と chiral primary field (4.35) には 1 対 1 対応がある。

$$f(z)=a_{i_1}b^{j_1}\cdots a_{i_\ell}b^{j_\ell}\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{tr}A_{(i_1}B^{(j_1}\cdots A_{i_\ell)}B^{j_\ell)}. \tag{4.37}$$

これからすることは、前節の S^5 のときと同様に、関数 f から $T^{1,1}$ 上の球面調和関数の類似物を作ることである。

コンフォーマル次元を計算するためには、S^5 上のときと同様に直接 $T^{1,1}$ 上での固有関数を見つけてもいいわけだが、ここでは効率のよい方法を用いる。conifold 上の massless Klein-Gordon 方程式、

$$\Box_c f=\left[\frac{1}{r^5}\partial_r(r^5\partial_r)+\frac{1}{r^2}\Box_{T^{1,1}}\right]f=0, \tag{4.38}$$

を考えよう。ここで conifold の計量 $ds_c^2=dr^2+r^2g_{ij}dx^idx^j$ を採用して、動径方向 r と $T^{1,1}$ の方向 $\{x^i\}$ と分けた。いま conifold の base $T^{1,1}$ での固有関数を求めたいので、その固有値を E とおいて

$$[\Box_{T^{1,1}}+E]\,f\big|_{T^{1,1}}=0, \tag{4.39}$$

[25] $A^\dagger$,$B^\dagger$ は A,B と逆符号の R-charge を持つ。

を課すことにしよう。この式を conifold 上の Klein-Gordon 方程式 (4.38) に代入すると、関数 f は動径座標 r に関して以下の方程式を満たすことがわかる。

$$r\partial_r f = \Delta f, \qquad \Delta = -2 + \sqrt{4+E}. \tag{4.40}$$

これから関数 f がどのような r 依存性を持つか調べることで、コンフォーマル次元 Δ を決めることができる。

最も小さいコンフォーマル次元 $\Delta = 3/2$ を持つ chiral primary $\mathrm{tr}AB$ について conifold 上の関数 f がうまく対応しているか見てみよう。対応する conifold 上の関数 $f = ab \sim z$ であるから、これが $\mathrm{tr}AB$ と同じコンフォーマル次元をもつことを見るためには (4.40) より、

$$r\partial_r z_i = \frac{3}{2} z_i, \tag{4.41}$$

であることを示せばよい。

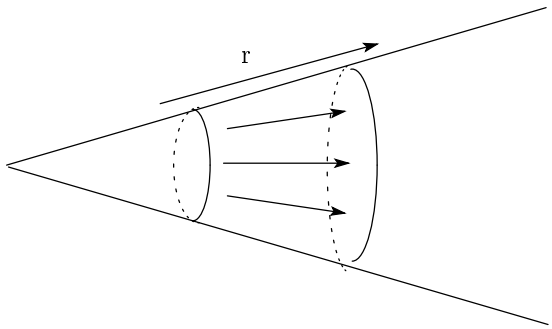
conifold には $\mathbf{R}^+$ "dilatation" symmetry があって、それのもとで conifold 上のすべての点は頂点から離れるようにスケールする。この dilatational symmetry をパラメタ λ を用いて、

$$z_i \quad \longrightarrow \quad \lambda^{\frac{3}{2}} z_i, \qquad \lambda \in \mathbf{R}^+, \tag{4.42}$$

と書くことにすれば、conifold の正則 3-form $\Omega = \frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3}{z_1}$ はこの変換のもと、

$$\Omega \quad \longrightarrow \quad \lambda^3 \Omega, \tag{4.43}$$

とふるまう。



Calabi-Yau 多様体では、Kähler potential $K(z_i, \bar{z_i})$ と 3-form Ω の間には Calabi-Yau condition(Ricci-flatness) からくる関係式、

$$\omega \wedge \omega \wedge \omega = -i\Omega \wedge \bar{\Omega}, \quad \omega = -i dz_i \wedge d\bar{z}_j \frac{\partial^2 K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}, \tag{4.44}$$

があるので、これからこの dilatation のもとで Kähelr potential は、

$$K(z_i, \bar{z}_i) \quad \longrightarrow \quad \lambda^2 K(z_i, \bar{z}_i), \tag{4.45}$$

という単純なスケール則を満たすことがわかる。さらに $K(z_i, \bar{z}_i)$ に $SO(4)$ のもとでの不変性を課すと、

$$K(z_i, \bar{z}_i) = \left(\sum_{i=1}^{4} z_i \bar{z}_i \right)^{\frac{2}{3}}, \tag{4.46}$$

の形に決まる。

計量は Kähler potential とは、スケール変換の下で同じ変換則、

$$ds_c^2 = dr^2 + r^2 g_{ij} dx^i dx^j \quad \longrightarrow \quad \lambda^2 \left(dr^2 + r^2 g_{ij} dx^i dx^j \right), \tag{4.47}$$

を満たすべきなので、動径方向の座標 r は $r \to \lambda r$ とふるまうことがわかる。

以上より r と z_i のスケール変換は、

$$r \quad \longrightarrow \quad \lambda r, \qquad z \quad \longrightarrow \quad \lambda^{\frac{3}{2}} z, \tag{4.48}$$

で、$r\partial_r z_i = \frac{3}{2} z_i$ であることがわかる。

より大きいコンフォーマル次元をもつ chiral primary field (4.34) も、$\mathrm{tr}AB$ の場合と同様にして、conifold 上の関数 (4.35) にデュアルであることを示せる。

以上で、(4.34) の形を持つ chiral primary field がどのような超重力理論の場に対応するかを見ることができた。しかし実は他の chiral primary field も作ることができる。それが次の章で説明する " バリオン " である。

5 Baryons and domain walls

Brane as baryons [48]

超重力理論の質量 m のスカラー場は、CFT における次元 $\Delta = 2 + \sqrt{4 + (mL)^2}$ の gauge singlet operator に結合するので、$AdS_5 \times T^{1,1}$ 上の 超重力理論もしくは string 理論では、CFT のゲージ群 $SU(N) \times SU(N)$ を直接見ることはできない。

前節で見たタイプの chiral primary field,

$$\mathrm{tr} A_{(i_1} B^{(j_1} \cdots A_{i_\ell)} B^{j_\ell)}, \tag{5.1}$$

を " メソン " と呼ぶことにしよう。片方のゲージ群に対して A はクォーク、B は反クォークとして変換するからである。

異なるタイプの chiral primary field も考えることができる。$SU(N) \times SU(N)$ のカラーの添字をそれぞれの完全反対称テンソルでつぶしたもので、

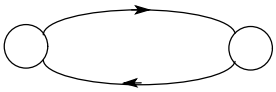
$$\epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} \epsilon^{\beta_1 \cdots \beta_N} A^{\alpha_1}_{\beta_1} \cdots A^{\alpha_N}_{\beta_N}, \tag{5.2}$$

で、$SU(N) \times SU(N)$ の gauge singlet になっている。この operator を " バリオン " と呼ぶことにする。というのも、QCD においてクォーク 3 個から陽子をつくるやりかたとまったく同じだからである[26] 。この operator は N 個のクォークからできているので、非常に大きい次元 $\Delta = \frac{3}{4} N \gg 1$ を持っている。A だけからできていることから、グローバルな対称性 $SU(2)_A \times SU(2)_B$ のもと $(\mathbf{N}+\mathbf{1}, \mathbf{1})$ で変換することもわかる。

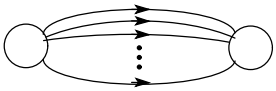
ここで quiver diagram において、これら メソンやバリオンがどのようなものか、図で説明する。conifold が $T^{1,1}$ の場合、対応する quiver diagram A_1 は以下のようなものである。

2 個の ◦ はゲージ群が $SU(N) \times SU(N)$ であることを示している。同じ ◦ に両端を持つ open string はゲージ理論における adjoint matter を表す。異なる ◦ に両端をもつ open string は向きがあるので、それに対応して bifundamental matter A, B を表している。この図においてメソン $\mathrm{tr}AB$ を表したければ、quiver 上で閉じた経路を考えればよいことになる。

[26] ここで、bifundamental field A,B が対称性の下、どのような変換性をもっていたかについては表 1(12 ページ) を参照のこと。α, β はそれぞれ $SU(N) \times SU(N)$ の添字、また i, j は $SU(2)_A \times SU(2)_B$ の添字である。

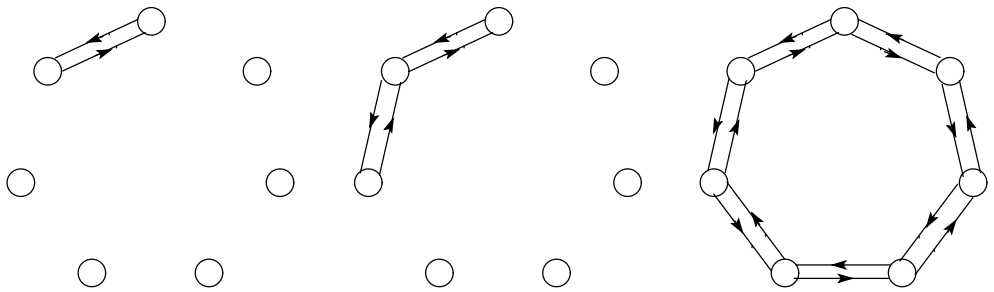


バリオンはどう表されるのであろうか？ 左側のゲージ群でのバリオンは、B を N 個もってきてカラーの添字を完全反対称テンソルでつぶすことで得られる。

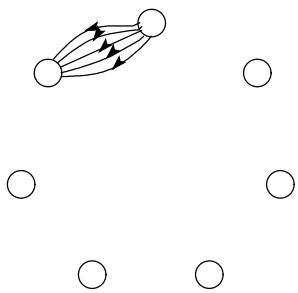


•

より一般の conifold 上の理論を考える場合、より複雑な quiver が対応している。ここでは例として A_6-型の conifold を考えることにしよう。この quiver では、いろいろなタイプの閉じた経路を考えることができる。これらには適当な名前がついていないが、これらはいくつかの bifundamental quarks を含んでいるという点で、メソンと呼ぶことにする。



バリオンは、A_1 のときと同様に作ることができる。



string 理論における記述で、このバリオンに対応するものはいったい何であろうか？ (5.2) は $SU(2)_B$ singlet なので、対応する string 理論での対応物も $SU(2)_B$ singlet であるべきである。そのようなものでまず思いつくのは、$T^{1,1}$ の $SU(2)_B$ のオービットに巻きついた D3-brane である。これからこれが本当にゲージ理論のバリオンに対応するものである証拠を見ることにする。

$SU(2)$ は 3 次元の多様体で、実際のところ $T^{1,1}$ には $SU(2)$ のオービットがある。このオービットは homology cycle となっており、3-brane が巻きつくことができる。

$AdS_5 \times T^{1,1}$ の計量をもう一度思い起こすことにすると、

$$ds^2 = L^2 \frac{dz^2 + d\vec{x}^2}{z^2} + L^2 ds_{T^{1,1}}, \tag{5.3}$$

$$L^4 = \frac{\sqrt{\pi}\kappa N}{2\mathrm{Vol}(T^{1,1})}, \quad \mathrm{Vol}(T^{1,1}) = \frac{16\pi^3}{27}, \tag{5.4}$$

である。$T^{1,1}$ はトポロジカルに $S^3 \times S^2$ であったから、D3-brane の巻きつくことのできる 3-cycle S^3 がある。$T^{1,1}$ の計量 (3.27) 式において、$SU(2)_B$ オービットに対応する S^3 の座標を (ψ, θ_1, ϕ_1) ととると、巻きついた D3-brane は $SU(2)_B$ の座標をまわす変換に対して **1**、つまり不変である。

一枚の D3-brane が $SU(2)_B$ に巻き付いているとして、その質量を計算してみる。$SU(2)_B$ のオービットの計量は、式 (3.27) において $(\theta_1, \phi_1) = const.$ と置くことで得られて、

$$ds^2_{SU(2)_B} = \frac{1}{9}\left(d\psi + \cos\theta_2 d\phi_2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2\right), \tag{5.5}$$

となる。これから容易に体積を求めることができて、

$$V_3 = \frac{8\pi^2 L^3}{9}, \tag{5.6}$$

である。一枚の D3-brane の tension は、$T_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa}$ であるから、巻きついた D3-brane の質量は、

$$m_{3brane} = \frac{8\pi^2 L^3}{9} \times \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa} = \frac{8\pi^{5/2}}{9\kappa} L^3, \tag{5.7}$$

と求まる。これから、

$$\Delta = 2 + \sqrt{4 + (m_{3brane} L)^2} \simeq m_{3brane} L = \frac{3}{4} N, \tag{5.8}$$

で、バリオンの次元 (5.2) と正確に一致する。

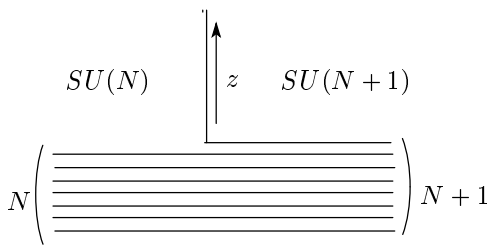
さらに $SU(2)_A$ に関しては、集団座標量子化の方法によってこの 3-brane が $(\mathbf{N+1})$ で変換することが確かめられる。

同様にして、反クォーク B から反バリオン $\epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_N} \epsilon_{\beta_1 \cdots \beta_N} B^{\beta_1}_{\alpha_1} \cdots B^{\beta_N}_{\alpha_N}$ も作ることができる。対応する 3-brane は $SU(2)_A$ に巻き付いているものであることがわかる。

$SU(2)_A$ と $SU(2)_B$ は反対の homology を持つので、バリオンと反バリオンは相互作用の後、N 個のメソンになることもわかるだろう。

Branes as domain walls [48]

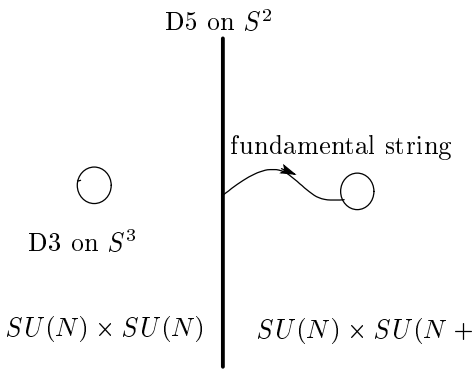
Witten の議論にしたがって、brane がゲージ理論のドメインウォールとして働く場合について考えることにする。$T^{1,1}$ に巻き付いていない D3-brane は、AdS_5 の動径方向 z に広がることができる。このような D3-brane は、ゲージ理論のドメインウォールとして働くことがわかる。



この D3-brane を左から右に横切る際に、RR 5-form field strength F_5 の flux が 1 だけ増えることから、ゲージ群は $SU(N) \times SU(N)$ から $SU(N+1) \times SU(N+1)$ に変化する。

conifold $T^{1,1}$ の場合には、このほかにより興味深いドメインウォールを作ることができる。トポロジカルに $T^{1,1} \simeq S^2 \times S^3$ なので、AdS_5 中の D3-brane を $T^{1,1}$ の S^2 に巻きついた D5-brane から作ることができる。このようにして作ったドメインウォールを横切ると、もともと $SU(N) \times SU(N)$ であったゲージ群が $SU(N) \times SU(N+1)$ に変化すると期待できる。このように期待できる根拠を 2 つ、以下に示そう。

1. S^3 に巻きついた D3-brane は、ゲージ理論のバリオンとみなせることを前節で見た。ここではこの D3-brane が、S^2 に巻きついた D5-brane を横切ると何が起こるか見てみよう。



D5-brane の左側にでは、ゲージ群は $SU(N) \times SU(N)$ で S^3 に巻きついた D3-brane はバリオンとみなせる。これが D5-brane を横切ると、一方の端を D5-brane に、もう一方の端を D3-brane にもつような fundamental string ができる。これは Hanany-Witten 効果 [49] と呼ばれる現象の例で、Daniellson-Ferretti-Klebanov によって議論されている [50]。fundamental string ができるということは、もはやゲージ群に対して singlet ではなく、ゲージ群の基本表現もしくは反基本表現として変換性をもつということである。
対応するゲージ群では、この Hanany-Witten 効果はどのように見えるだろうか？　ドメインウォールの左側ではゲージ群は $SU(N) \times SU(N)$ で、バリオンは

$$\epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} \epsilon^{\beta_1 \cdots \beta_N} A^{\alpha_1}_{\beta_1} \cdots A^{\alpha_N}_{\beta_N}, \tag{5.9}$$

であったが、ドメインウォールを横切った右側ではゲージ群は $SU(N) \times SU(N+1)$ とかわり、$\epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_N}$ はもはや不変テンソルではない。ここでの不変テンソルは $\epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_N \alpha_{N+1}}$ だから、バリオンは

$$\epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} \epsilon^{\beta_1 \cdots \beta_N} A^{\alpha_1}_{\beta_1} \cdots A^{\alpha_N}_{\beta_N} \quad \to \quad \epsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_N \alpha_{N+1}} \epsilon^{\beta_1 \cdots \beta_N} A^{\alpha_1}_{\beta_1} \cdots A^{\alpha_N}_{\beta_N} \tag{5.10}$$

となり、$SU(N+1)$ の基本表現として変換することがわかる。Hanany-Witten 効果による fundamental string の生成が、ゲージ理論ではこのように現れていることがわかる。

2. conifold 上の D3-brane は、トポロジカルに $S^5/\boldsymbol{Z}_2$ orbifold 上の D3-brane の deformation と同じになる。以下で理由を説明しよう。S^5 を $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = \text{const.}$ とし $\boldsymbol{Z}_2$ orbifold の作用を $\boldsymbol{Z}_2 : (z_2, z_3) \longmapsto (-z_2, -z_3)$ とする。この時、$S^5/\boldsymbol{Z}_2$ の通常点で射影 $\pi : S^5/\boldsymbol{Z}_2 \to S^2$ が

$$\pi : (z_1, z_2, z_3) \quad \longmapsto \quad \vec{b} = \frac{(z, \vec{\sigma} z)}{(z, z)}, \tag{5.11}$$

で定義できる。ただし $(z, z) = |z_2|^2 + |z_3|^2$ である。すると例えば $\vec{b} = (0, 0, 1)$ の π に関する逆像は $z_3 = 0$ となるので fibre は $|z_1|^2 + |z_2|^2 = \text{const.}$ となり、$S^5/\boldsymbol{Z}_2$ は局所的には $S^2 \times S^3$ とみなせる。そこで orbifold の作用で不変な特異点の集合 $S^1(|z_1|^2 = \text{const.})$ を blow up すると、射影 π がどの点でも定義できるようになって

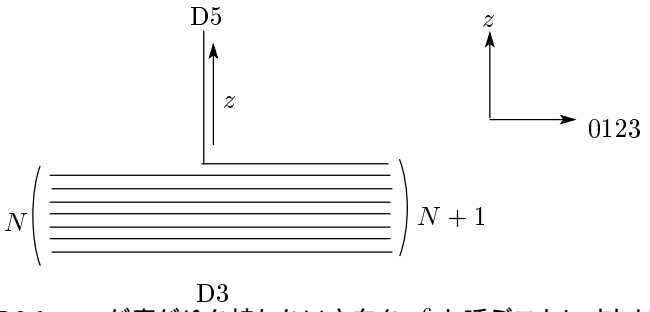
$$S^5/\boldsymbol{Z}_2 \quad \underset{\text{blow up}}{\longrightarrow} \quad S^2 \times S^3, \tag{5.12}$$

となる[27] 。これはまさにトポロジカルに $T^{1,1}$ である。
いま、orbifold $S^5/\boldsymbol{Z}_2$ の fixed circle S^1 を blow up してできる S^2 に巻き付いた D5-brane を考えよう。この S^2 は orbifold の固定点でつぶれてしまうので、これに巻き付いている D5-brane もつぶれて

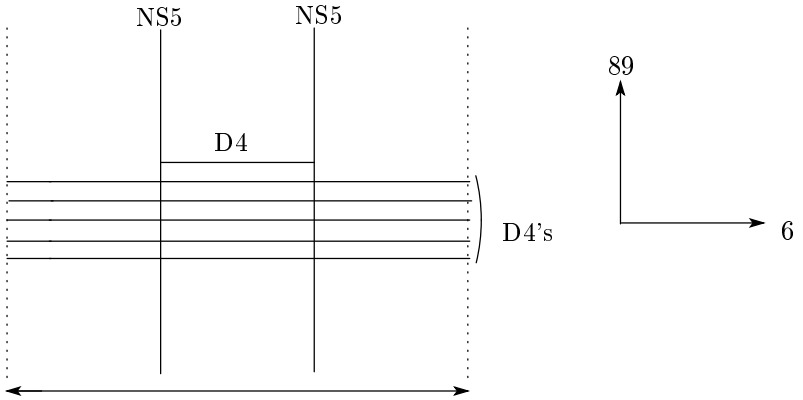
[27] より詳しくは論文 [24] を参照のこと。

massless になるように見える。しかし実際は orbifold の固定点上にある NS 2-form B-flux が $\frac{1}{2}$ unit ある、つまり $\frac{1}{2\pi}\int_{S^2} B_{NS} = \frac{1}{2}$ あるので、このようなことは起きない。$S^5/\boldsymbol{Z}_2$ を blow up して $T^{1,1}$ にするとき、この B-flux を保つように行なうと、$T^{1,1}$ の S^2 部分に巻きついた D5-brane も NS B-field に関して $1/2$ の charge を持つ。

ここで T-dual の後、この brane configuration がどのようなものになるか見てみたい。conifold の T-dual が何になっているかはよくわからないが、orbifold が T-dual の後何になるかは簡単にわかるので、まずここでは後者について見てみよう。もともと IIB の描像では、D3-brane の広がっている world volume の広がっている方向を (0123)、brane から離れる方向を z とすると、



という絵が書ける。いま D3-brane が広がりを持たない方向を x^6 と呼ぶことにすれば、x^6 方向の T-dual の後、得られる IIA での描像は、

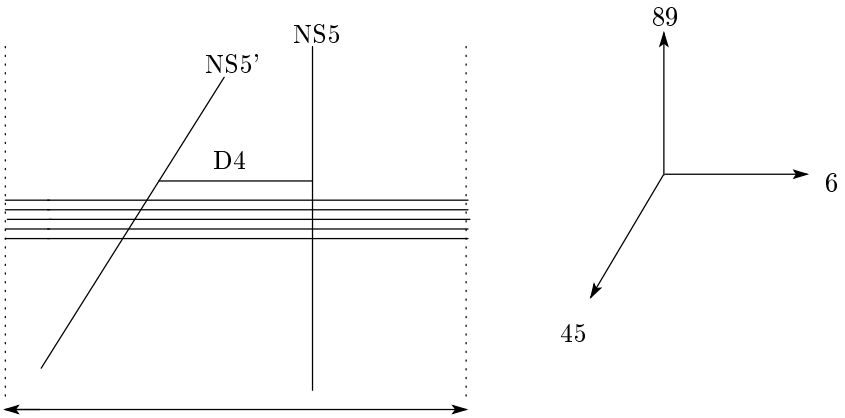


となる。IIB における orbifold と D3-brane が、T-dual の後 IIA においてそれぞれ NS5-brane と D4-brane に化けたことに注意しよう[28] 。また S^5 に巻きついた D5-brane は余分な D4-brane として現れるので、上の図に対応する world volume 上のゲージ群は、$SU(N) \times SU(N+1)$ であることがわかる。NS5-brane をまたぐ open string はゲージ群の下 $(\mathbf{N}, \overline{\mathbf{N+1}})$ もしくは $(\overline{\mathbf{N}}, \mathbf{N+1})$ の変換性を持つので、bifundamental field となる。実際残っている SUSY は $\mathcal{N} = 2$ であるから、world volume 上では chiral bifundamental を物質場として持つ $\mathcal{N} = 2$ $SU(N) \times SU(N+1)$ のゲージ理論となることがわかる [52]。

この $\mathcal{N} = 2$ の理論の SUSY を半分破って、$\mathcal{N} = 1$ の理論にすることを考えよう。brane configuration の言葉では一つの NS5-brane を “ねじる” ことで、SUSY を半分にすることができる。brane configuration において NS5-brane をねじって SUSY を破るということは、ゲージ理論においては adjoint chiral multiplet に質量を与えることに対応している。この brane configuration の T-dual は、Uranga[53]、また Dasgupta-Mukhi[54] によって conifold 上の理論になることが議論されている。下の図において余分に出ている D4-brane は、この T-dual ののち $T^{1,1}$ の S^2 部分に巻きついた D5-brane として現れ

[28] これらの図については、Giveon-Kutasov の MQCD のやり方 [51] に従っている。

ると期待されている。



6 Finite temperature and non-extremal 3-branes

いままでは温度 0 のところを議論してきたが、ここでは有限温度の場合を考えよう。温度が有限の場合は supersymmetry がすべて破れてしまうので、非常に扱いにくい。理論が持つ対称性は 4 次元の共形対称性だけで、これからスケーリングにのみ制限がつく。

3/4 problem

まず near-extremal D3-brane の計量を考えよう。

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}\left(-h(r)dt^2 + d\vec{x}^2\right) + \frac{L^2}{r^2}\frac{dr^2}{h(r)} + L^2 d\Omega_5^2, \tag{6.1}$$

$$h(r) = 1 - \frac{r_0^2}{r^4}, \qquad L^4 \equiv \frac{N\kappa}{2\pi^{5/2}}. \tag{6.2}$$

この計量から、Bekenstein-Hawking エントロピー、すなわち horizon($r = r_0$) の面積を計算することができる。Strominger-Vafa は、5 次元ブラックホールの Bekenstein-Hawking エントロピーが brane 上の CFT の状態数の数え上げから導かれるエントロピーと厳密に一致することを示した [55]。このことから、near-extremal D3-brane の計量から導かれるエントロピーは、brane 上の free $\mathcal{N} = 4$ SUSY YM から計算されたエントロピーと一致するであろうと期待できる。

しかし実際には両者から計算されたエントロピーは、

$$\frac{S_{SUGRA}}{V} = 2^{5/4}3^{-3/4}\sqrt{\pi N}\left(\frac{E}{V}\right)^{3/4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4}\frac{S_{SYM}}{V}, \tag{6.3}$$

また自由エネルギーは、

$$F_{SUGRA} = -\frac{\pi^2}{8}N^2VT^4 = \frac{3}{4}F_{SYM}, \tag{6.4}$$

と係数 $\frac{3}{4}$ のみが異なることが示された [56]。この食い違いは、“$\frac{3}{4}$ 問題” と呼ばれることがある。

これは本当に矛盾だろうか？ いやそうではない。実は超重力理論の計算と free SYM の計算は異なるパラメタ領域で行なっているのである。つまり、超重力理論の計算が正当化できるのは、AdS_5 の半径 L が string の長さよりも十分大きい、つまり $g_sN \gg 1$ の強結合のところである。一方 SYM での計算は、free での計算なので $g_{\rm YM}^2 \ll 1$ という弱結合のところで正当化できる。4 次元でのコンフォーマル対称性はそれほど強力でないので、単に自由エネルギーが VT^4 でスケールすることしか保証しない。

いま't Hooft 結合定数,

$$\lambda \equiv g_{YM}^2 N = 4\pi g_s N = \frac{L^4}{\alpha'}, \tag{6.5}$$

を定義すると便利である。カップリング λ での自由エネルギーと $\lambda = 0$ でのそれの比を

$$f(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{F(0)}, \tag{6.6}$$

で定義しよう。弱結合における 2-ループの補正は Fotopoulos-Taylor[57] によって計算されていて、

$$f(\lambda) = 1 - \frac{3}{4\pi^2}\lambda + \cdots, \tag{6.7}$$

となる。

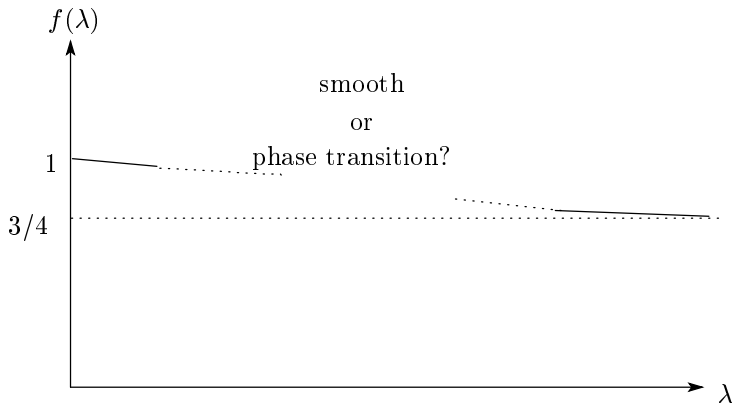
また強結合での補正は α' による subleading の補正を加えた超重力理論の解から計算されており、その結果は

$$f(\lambda) = \frac{3}{4} + \frac{45}{32}\zeta(3)\lambda^{-3/2} + \cdots, \tag{6.8}$$

で与えられる [58]。

λ が増加するにつれて自由エネルギーが減少するのは自然である。なぜならポテンシャルに $g_{\rm YM} tr[X_i, X_j]^2$ の項があるので、X_i の非対角な成分はこの項により " 凍結 " されてしまうからである [59]。しかし強結合極限ですべての非対角成分の自由度がなくなってしまったとしても、それは $\lambda = 0$ の場合の自由度の $3/4$ にはならない。強結合極限での自由エネルギーが、どうして弱結合極限におけるそれの $3/4$ になるか、場の理論からの自然な説明は今のところ知られていない。

また強結合と弱結合の中間のあたりでの自由エネルギーはどのようなふるまいをみせるだろうか？まず 1 つの予想として、$f(\lambda)$ は λ の単調減少関数になっているだろうというものである [58]。もう 1 つには、中間のカップリング λ で相転移が起こっているだろうというものである [60]。どちらが正しいのかは今のところわからない。



Schwarzschild black hole in AdS_5

ここでは AdS_5 中の Schwarzshild ブラックホールの安定性について議論しよう。これは以前 Hawking-Page[61] によって 4 次元の場合が、最近 Witten[15] によって一般の次元の場合が議論されている。5 次元の Einstein 作用で負の宇宙定数をもつもの、

$$S_5 = -\frac{1}{16\pi G_5^{(N)}} \int d^5x\sqrt{g}\left(R_5 + \frac{12}{L^2}\right), \tag{6.9}$$

には、無限遠方 $r \to \infty$ で漸近的に anti-de Sitter になる解は AdS_5 のほかに次のもの、

$$ds_{BH}^2 = f_{BH}dt^2 + \frac{1}{f_{BH}}dr^2 + r^2 d\Omega_3^2, \tag{6.10}$$

$$f_{BH}(r) \equiv \frac{r^2}{L^2} + 1 - \frac{w_4 M}{r^2}, \qquad w_4 = \frac{16\pi G_N^{(5)}}{3Vol(S^3)}, \tag{6.11}$$

があることが知られている。この解は $f_{BH}(r_+) = 0$ をみたす $r = r_+$ に horizon をもつ Schwarzshild 解である。この解で S^3 の一点が flat $\mathbf{R}^3$ になるくらいにスケールしなおすと、near-extremal 3-brane の計量になる。いま AdS_5 の境界が、$\mathbf{R}^3 \times S^1$ ではなく $S^3 \times S^1$ であるので、興味深い有限体積の効果が現れる。この解が horizon で特異的でないことを要請すれば、ユークリッド時間 t の周期 β は、

$$\beta = \frac{\pi L^2 r_+}{2r_+^2 + L^2}, \tag{6.12}$$

と決まる。また Bekenstein-Hawking エントロピーは、

$$s = \frac{S}{V} = \frac{N^2}{2\pi} 2^{-3/2} \left(\frac{16M}{3N^2L^2}\right)^{3/4} \left(\sqrt{1 + \frac{3N^2L^2}{16M}} - \sqrt{\frac{3N^2L^2}{16M}}\right)^{3/2} \tag{6.13}$$

ここで $V = 2\pi L^3$ は境界の S^3 の体積である[29] 。Schwarzschild ブラックホールを特徴付ける無次元のパラメタとして、$x = \frac{16M}{3N^2L^2}$ を導入するとエントロピーは、

$$s = (constant) \times x^{3/4} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{3/2}, \tag{6.14}$$

とまとまる。

これから比熱を計算することができて、

$$\begin{aligned} C_V &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V & (6.15)\\ &= -\beta \left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)_V & (6.16)\\ &\propto -\beta \frac{\partial r_+^3}{\partial \beta}, & (6.17) \end{aligned}$$

となる。これから x を横軸に、比熱を縦軸にとったときのグラフは以下のように描くことができる。

このグラフから、$x = 3$ で相転移が起こっていることがわかる。さらに $x < 3$ では比熱が負になっていて、Minkowski 時空における Schwartzshild ブラックホールと同じふるまいをしていることがわかる。この領域はブラックホールの半径が小さいときで AdS_5 の有限体積の効果を感じていないところである。$x > 3$ では、比熱 C_V は正となりこのブラックホールは熱力学的に安定である。

いままではブラックホールの局所的な安定性について議論した。もうひとつのブラックホールの安定性を評価する方法は大局的な安定性、つまり作用が単なる極値なのか、本当の最小値かを見ることである。それには black hole 解があたえる作用の値と AdS_5 計量が与える作用の値の大小を比較すればよい。Einstein 方程式を縮約すると、$R_5 = -20/L^2$ であることがわかるので action は単に体積に比例する。素朴に体積を計算すると発散するので、Witten[15] にならって IR のカットオフ R を導入しよう。

$$V_{BH}(R) = 2\pi^2 \int_0^\beta dt \int_0^R dr \cdot r^3, \tag{6.18}$$

$$V_{AdS}(R) = 2\pi^2 \int_0^{\beta'} \int_0^R dr \cdot r^3. \tag{6.19}$$

[29] $G_N^{(5)} = \frac{\pi}{2N^2}$.

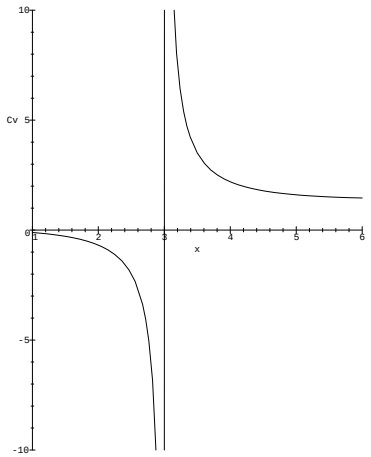


図 9: AdS_5 空間中の Schwarzschild BH の比熱

ここで AdS_5 において t の周期 β' は、$r = R$ で Schwarzshild ブラックホールと一致するように、つまり

$$\beta'\sqrt{\frac{R^2}{L^2}+1} = \beta\sqrt{\frac{R^2}{L^2}+1-\frac{w_4 M}{R^2}}, \tag{6.20}$$

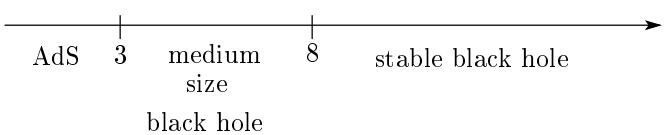
で決める。これから

$$\frac{\lim_{R\to\infty} V_{BH}(R) - V_{AdS}(R)}{2\pi^2} = \frac{\beta}{8} r_+^2 (L^2 - r_+^2), \tag{6.21}$$

と計算されるので、$r_+ > L$、つまり $x > 8$ のときブラックホール解は作用の最小値を与える。

まとめると、いま考えているブラックホールには以下の三つの相が存在する。

- $x > 8$ の場合、ここではブラックホールが正の比熱をもちかつ作用の最小値をあたえるので、ブラックホールが安定に存在する相である。
- $3 < x < 8$ の場合、ブラックホールは正の比熱をもつが、作用の最小値ではないので、metastable、つまり熱力学でいうところの”過冷却”の状態になっている。この相でのブラックホールを medium-size black hole と呼ぶことにする。
- $x < 3$ の場合、このときは AdS_5 時空のほうが安定である。この相を thermal gas phase とよぶ。



R-charged black hole

D3-brane に直交する方向は $\mathbf{R}^6 = SO(6) \simeq SU(4)$ であるので、この $\mathbf{R}^6$ 方向の回転している D3-brane を考えることができる[30] 。D3-brane のもつ S^5 のスピンは、AdS_5 では $SU(4)$ の R-charge として現れる。

[30] $SU(4)$ はランク 3 なので三つの独立した方向に回転している場合を考えることができるが、ここでは話を簡単にするため 1 つの方向のみに角運動量を持つ場合に限定する。

spin をもつ D3-brane 解の horizon 近くの幾何は、次の 5 次元ブラックホール解 [62]、

$$ds^2 = -\frac{f}{H^{2/3}}dt^2 + \frac{H^{1/3}}{f}dr^2 + H^{1/3}r^2 d\Omega_3^2, \tag{6.22}$$

$$f = 1 - \frac{M}{r^2} + \frac{r^2}{L^2}H, \qquad H = 1 + \frac{q}{r^2}, \tag{6.23}$$

で与えられる。有限体積からの補正をひとまず無視すると、エントロピーは

$$s = \frac{2^{5/4}3^{-3/4}\sqrt{\pi N}e^{-3/4}}{\sqrt{\sqrt{1+\chi}+\sqrt{\chi}}}, \tag{6.24}$$

$$\chi = \frac{27}{8\pi^2 N^2}\frac{j^4}{e^3}, \tag{6.25}$$

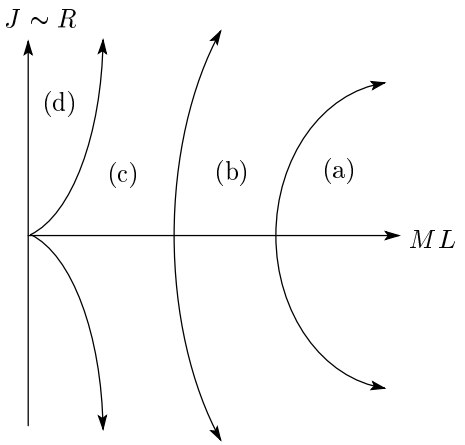
$$s = \frac{S}{V}, \quad e = \frac{E}{V}, \quad j = \frac{J}{V}, \quad j^2 = q\frac{\sqrt{\pi}Ne}{3\kappa}, \tag{6.26}$$

となる。この解が局所的に安定かどうかを見るためには、エントロピーを e とスピン j の関数 $s = s(e, j)$ としてみたとき、$s(e, j)$ のヘシアンが負であるかどうかを見ればよい。その結果 $\chi < 1/3$ のときだけが安定であることがわかる。

これは物理的には、非常に大きな R-charge を持ったブラックホール (つまり非常に速く回転している D3-brane) は不安定だということである。R-charge が非常に大きいときには特異点が裸で出てきてしまい、ブラックホールの熱力学は定義すらできない。

対応する場の理論でこのようなブラックホールのふるまいはよく理解されていない。とくに $C_V < 0$ のようなふるまいは puzzling である。定性的なふるまいは $\mathcal{N} = 4$ SYM に基づいたモデルで、説明することができる [63]。このモデルでは R-chrage の臨界値以下での自由エネルギーをほぼ再現するが、超重力理論から期待される臨界点近傍での臨界指数をうまく再現しない。

最後に、有限体積の効果まで考慮した R-charge をもつブラックホールの相図は以下のようになっていることを見せて、終わりにしたいと思う。[64]。



a) Large stable black hole

b) Metastable medium-sized black hole, or else thermal gas

c) Thermal gas

d) Metastable small R-charged black hole

参考文献

[1] J. Polchinski, "Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges," *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724, hep-th/9510017.

[2] E. Witten, "Bound states of strings and p-branes," *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 335, hep-th/9510135.

[3] G.T. Horowitz and A. Strominger, "Black string and p-branes," *Nucl. Phys.* **B360** (1991) 197.

[4] M.J. Duff and J.X.Lu, "The Selfdual TypeIIB Superthreebrane," *Phys. Lett.* **273B** (1991) 409.

[5] I.R. Klebanov, "World volume approach to absorption by nondilatonic branes," *Nucl. Phys.* **B496** (1997) 231, `hep-th/9702076`.

[6] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, and A.A. Tseytlin, "String theory and classical absorption by three-branes," *Nucl. Phys.* **B499** (1997) 217, `hep-th/9703040`.

[7] S.S. Gubser and I.R. Klebanov, "Absorption by branes and Schwinger terms in the world volume theory," *Phys. Lett.* **B413** (1997) 41, `hep-th/9708005`.

[8] M. Doulgas, J. Polchinski and A. Strominger. "Probing Five-dimensional Black Holes with D-brane," *J.High Energy Phys.* **12** (1997) 3, `hep-th/9703031`.

[9] J. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal field theories and supergravity," *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231, `hep-th/9711200`.

[10] G. 't Hooft, "A Plannar Diagram Theory for Strong Interactions," *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 461.

[11] M. Bershadsky, Z. Kakushadze and C. Vafa, "String Expansion as Large N Expansion of Gauge Theory," *Nucl. Phys.* **B523** (1998) 59, `hep-th/9803076.`

[12] T. Banks and M. B. Green, "Nonperturbative effects in $AdS_5 \times S^5$ String Theory and $d = 4$ SUSY Yang-Mills," *J. High Energy Phys.* **5** (1998) 2, `hep-th/9804170.`

[13] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, and A.M. Polyakov, "Gauge theory correlators from noncritical string theory," *Phys. Lett.* **B428** (1998) 105, `hep-th/9802109`.

[14] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**(1998) 253, `hep-th/9802150`.

[15] E. Witten, "Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, and Confinement in Gauge Theories," *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505, `hep-th/9805112`.

[16] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis and L. Rastelli, "Correlation Functions in the $\mathrm{CFT}_d/\mathrm{AdS}_{d+1}$ Correspondence," hep-th/9804058.

[17] V. Balasubramanian, P. Kraus and A. Lawrence, "Bulk vs. Boundary Dynamics in Anti-de Sitter Spacetime," *Phys. Rev.* **D59** (1999) 46003, hep-th/9805171.

[18] H.J. Kim, L.J. Romans and P. van Nieuwenhuizen, "Mass spectrum of chiral ten-dimensional $N = 2$ supergravity on S^5," *Phys. Rev.* **D32** (1985) 389.

[19] S. Lee, S. Minwalla, M.Rangamani and N.Seiberg, "Three-Point Functions of Chiral Operators in $D = 4$,$\mathcal{N} = 4$ SYM at Large N," *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1999) 697, `hep-th/9806074`.

[20] P. Freund and M. Rubin, "Dynamics of Dimensional Reduction," *Phys. Lett.* **97B** (1980) 233.

[21] A. Kehagias, "New Type IIB Vacua and Their F-Theory Inerpretation," *Phys. Lett.* **435B** (1998) 337, `hep-th/9805131`.

[22] S. Kachru and E. Silverstein, "4d Conformal Field Theories and Strings on Orbifolds," *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4855, hep-th/9802183.

[23] O. Aharony, "M Theory on $AdS_p \times S^{11-p}$ and Superconformal Field Theories," *Phys. Lett.* **430B** (1998) 87, hep-th/9803051.

[24] I. Klebanov and E. Witten, "Superconformal Field Theory on Threebranes at a Calabi-Yau Singularity," *Nucl. Phys.* **B536** (1998) 199, hep-th/9807080.

[25] D. R. Morrison and M. R. Plesser, "Nonspherical Horizons. I.," hep-th/9810201.

[26] S. Gubser, N. Nekrasov and S. Shatashvili, "Generalized Conifolds and 4-dimensional $\mathcal{N} = 1$ Superconformal Field Theory," hep-th/9811230.

[27] N. Nekrasov 氏の講義は同じく東工大で行われた。

[28] P. Candelas, de la Ossa and C. Xenia, "Comments on Conifolds," *Nucl. Phys.* **B342** (1990) 246.

[29] L.Romans, "New compactifications of chiral $N = 2$ $d = 10$ supergravity," *Phys. Lett.* **B153** (1985) 392.

[30] M. R. Douglas and G. Moore, "D-branes, Quivers, and ALE Instantons," hep-th/9603167.

[31] C. V. Johnson and R. C. Myers, "Aspects of Type IIB Theory on ALE Spaces," *Phys. Rev.* **D55** (1997) 6382, hep-th/9610140.

[32] N. Seiberg, "Electric-Magnetic Duality in Supersymmetric Nonabelian Gauge Theories," *Nucl. Phys.* **B435** (1995) 129, hep-th/9411149.

[33] S.Gubser, "Einstein Manifolds and Conformal Field Theories," *Phys. Rev.* **D59** (1999) 25006, hep-th/9807164.

[34] D. Anselmi, D. Z. Freedman, M. T. Grisaru and A. A. Johansen, 'Nonperturbative Formulas for Central Functions of Supersymmetric Gauge Theories," *Nucl. Phys.* **B526** (1998) 543, hep-th/9708042.

[35] L. Alvarez-Gaumme and E. Witten, "Gravitaional Anomalies," *Nucl. Phys.* B234 (1984) 269.

[36] K. Konishi, "Anomalous Supersymmetry Transformation of Some Composite Operators in SQCD," *Phys. Lett.* **135B** (1984) 439.

[37] K. Konishi and K. Shizuya, "Functional Integral Approach to Chiral Anomalies in Supersymmetric Gauge Theories," *Nuoco Cim.* **90A** (1985) 111.

[38] I. I. Kogan, M. Shifman and A. Vainshtein, "Matching Conditions and Duality in $\mathcal{N} = 1$ SUSY Gauge Theories in the Conformal Window," *Phys. Rev.* **D53** (1996) 4526, hep-th/9507170.

[39] R. G. Leigh and M. J. Strassler, "Exactly Marginal Operators and Duality in Four-dimensional $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetric Gauge Theory," *Nucl. Phys.* **B447** (1995) 95, hep-th/9503121.

[40] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein and V. Zakharov, "Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus," *Nucl. Phys.* **B229** (1983) 381.

[41] M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, "Solution of the Anomaly Puzzle in SUSY Gauge Theories and the Wilson Operator Expansion," *Nucl. Phys.* **B277** (1986) 456.

[42] A.B.Zamolodchikov, " 'Irreversibility' of the Flux of the Renormalization Group in a 2-D Field," *JETP Lett.* **43** (1986) 730.

[43] J. Cardy, "Is There A C Theorem In Four Dimensions?," *Phys. Lett.* **B215** (1988) 749,

[44] S. Forte and J. Latorre, "A Proof Of The Irreversivility Of Renormalization Group Flows In Four Dimensions," *Nucl. Phys.* **B535** (1998) 709, `hep-th/9805015`; "Realization of symmetries and the c-theorem," `hep-th/9811121`.

[45] M. Henningson and K. Skenderis, "The Holographic Weyl Anomaly," *J. High Energy Phys.* **7** (1998) 23, `hep-th/9806087`; "Holography and the Weyl anomaly," `hep-th/9812032`.

[46] C. Fefferman and C. Graham, "Conformal Invariants," *Elie Cartan et les Mathmátiques d'Aujourdhui* (Asterisque, 1985) 95.

[47] For example, M. Duff, "Twenty Years of the Weyl Anomaly," *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 1387, `hep-th/9308075`.

[48] S. Gubser and I. Klebanov, "Baryons and Domain Walls in an $\mathcal{N} = 1$ Superconformal Gauge Theory," *Phys. Rev.* **D58** (1998) 125025, `hep-th/9808075`.

[49] A. Hanany and E. Witten, "Type IIB Superstring, BPS monopoles, and Three-Dimensional Gauge Theories," *Nucl. Phys.* **B492** (1997) 152, `hep-th/9611230`.

[50] U. Danielsson, G. Ferretti and I. Klebanov, "Creation of Fundamental Strings by Crossing D-branes," *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 1984, `hep-th/9705084`.

[51] A. Giveon and D. Kutasov, "Brane Dynamics and Gauge Theory," `hep-th/9802067`.

[52] A. Karch, D. Lüst and D. Smith, "Equivalence of Geometric Engineering and Hanany-Witten via Fractional Branes," *Nucl. Phys.* **B533** (1998) 348, `hep-th/9803232`.

[53] A. Uranga, "Brane configurations for Branes at Conifolds," `hep-th/9811004`.

[54] K. Dasgupta and S. Muhki, "Brane constructions, orbifolds and M-theory," `hep-th/9811139`.

[55] A. Strominger and C. Vafa, "Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy," *Phys. Lett.* **379B** (1996) 99, `hep-th/9601029`.

[56] S. Gubser, I. Klebanov and A. Peet, "Entropy and temperature of black 3-branes," *Phys. Rev.* **D54** (1996) 3915, `hep-th/9602135`; I. Klebanov and A. Tseytlin, "Entropy of Near-Extremal Black p-branes," *Nucl. Phys.* **B475** (1996) 164, `hep-th/9604089`.

[57] A. Fotopoulos and T.R. Taylor, "Comment On Two-Loop Free Energy In $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory At Finite Temperature," `hep-th/9811224`.

[58] S. Gubser, I. Klebanov and A. Tseytlin, "Coupling Constant Dependence in the Thermodynamics of N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory," *Nucl. Phys.* **B499** (1997) 217, `hep-th/9805156`.

[59] G. Horowitz and J. Polchinski, "A Correspondence Principle for Black Holes and Strings," *Phys. Rev.* **D55** (1997) 6189, `hep-th/9612146`.

[60] M. Li, "Evidence for Large N Phase Transition in N=4 Super Yang-Mills Theory at Finite Temperature," hep-th/9807196.

[61] S. Hawking and D. Page, "Thermodynamics of Black Holes in Anti de Sitter Space," *Comm. Math. Phys.* **87** (1983) 577.

[62] K. Behrndt, M. Cvetic and W. A. Sabra, "Non-Extreme Black Holes of Five Dimensional N=2 Ads Supergravity," hep-th/9810227.

[63] S. Gubser, "Thermodynamics of spinning D3-branes," hep-th/9810225.

[64] この講義録が完成した後で論文として出たようである。
S. Gubser and M. Cvetic, "Phases of R-charged Black Holes, Spinning Branes and Strongly Coupled Gauge Theories," hep-th/9902195