Supergravity and String Theory on $AdS_3 \times S^3$

Jan de Boer

Department of Physics, University of California at Berkeley
366 Le Conte Hall, Berkeley, CA 94720-7300, U.S.A.
and
Theoretical Physics Group, Mail Stop 50A-5101
Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory
Berkeley, CA 94720, U.S.A.

記: 小田 穂高 (東工大) hoda@th.phys.titech.ac.jp
冨澤 茂光 (東工大) stomizaw@th.phys.titech.ac.jp
細道 和夫 (東大) hosomiti@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

この講義録は 研究会 “Gauge Theory Dynamics and String Duality” (1998 年 12 月 16 日 (水)−18 日 (金), 東京工業大学国際交流会館) における Jan de Boer 氏の講演の記録である。

目 次

1 イントロダクション **2**

2 AdS_3/CFT_2 双対性 **3**

3 カイラルプライマリと elliptic genus **8**

4 AdS_3 空間上の弦理論 **20**

1　イントロダクション

この講義は、$\mathcal{N}=(4,4)$ SCFT と $AdS_3\times S^3\times K3$ 上の type IIB 超弦理論との間の双対性に関する話になります。$K3$ の代わりに T^4 で考えることもできますが、その場合は少し状況が違ってきますので、この講義では $K3$ の場合のみを取り扱うことにします。この Maldacena 双対性 [1] は、平行な Q_1 枚の D1 ブレーンと Q_5 枚の D5 ブレーンの系を考えることによって現れます。空間は $K3$ コンパクト化されており、D5 ブレーンはその $K3$ 全体に延びていて、D1 ブレーンは D5 ブレーンと平行だが $K3$ 方向には延びていないという状況を考えます。このコンフィギュレーションは type IIB 超弦理論のソリトン的記述として見ることができます。ここで near horizon 極限をとれば、$AdS_3\times S^3\times K3$ 上の type IIB 超弦理論となるという訳です。一方、単にこのブレーン上の場の理論を考えるなら、それは D5 ブレーンの worldvolume の内 4 方向はコンパクト化されているために、事実上 $1+1$ 次元ゲージ理論と見ることができます。このゲージ理論の赤外極限をとれば、$\mathcal{N}=(4,4)$ SCFT[2][3] を得ます。以上のことは殆ど Maldacena の推測によるものですので、余り説明はしません。この特殊な双対性がなぜ興味深いのか、幾つか理由を上げてみます。まず第一に、この D1/D5 系のソリトン的記述は、5 次元ブラックホール解として見られるということが上げられます。つまり、この双対性を用いて、5 次元ブラックホールのエントロピーや absorption cross sections などを研究をすることができます [2][3]。第二の理由は、2 次元 CFT は他の次元の CFT よりもずっとよく理解されているので、他の次元でやるよりも多くのことが調べられるということです。第三の理由は、$AdS_3\times S^3\times K3$ 上の type IIB 超弦理論の特殊な性質から来ます。$AdS_3\times S^3$ 上の type IIB 超弦理論には R-R 2-form 場が存在し、その field strength の積分は 0 でない値をとります。これは、もとの D1/D5 系が R-R 2-form のチャージを持っているためです。このソリトン的記述の S 双対をとると、NS-NS 2-form 場のチャージのみを持った理論になりますが、それは 2 つの WZW 理論の積として記述することができます。$SL(2,\mathbf{R})$ の群多様体は AdS_3 で、$SU(2)$ の群多様体が S^3 ですから、実際、$SL(2,\mathbf{R})$ WZW 理論と $SU(2)$ WZW 理論と $K3$ との積として S 双対理論は記述されます。この性質により、R-R 背景チャージのある AdS 空間の弦理論の量子化法を知らずとも、普通の NS-NS チャージだけを持った弦理論によって議論をすることができます。したがって、その双対理論も詳しく調べられると期待できます。

この講義[*] では、まず section 2 において AdS_3/CFT_2 双対性の超重力理論側と CFT 側の簡単なレヴューを行います。更にこの双対性のいくつかの証拠を簡単にまとめます。section 3 では、その証拠の一つである、カイラルプライマリと elliptic genus が超重力理論側と CFT 側で一致していることを詳しく解説します。これは私の論文 [4][5][†] のレヴューです。section 4 では、AdS_3 空間上の弦理論について解説します。この section は、私と Ooguri-Robins-Tannenhauser による論文 [6] のレヴューです。

[*] この講義ノートの section 分けは、読者の利便を考え、ノート製作者の責任で行いました。
[†] この論文 [5] は、研究会が行われた時点ではまだ発表されていませんでした。

2 AdS_3/CFT_2 双対性

この section では、AdS_3/CFT_2 双対性の超重力理論側と CFT 側の基本的なことをまとめ、更に、AdS_3/CFT_2 双対性の証拠をまとめます。

超重力理論側　始めに、Maldacena 双対性のソリトン的な記述について詳しく述べます。Horowitz-Maldacena-Strominger[7][8] らの結果により、D1/D5 系のメトリックは次のように与えられることが知られています。

$$ds^2 = F_1^{-1/2}F_5^{-1/2}d\gamma d\bar{\gamma} + F_1^{1/2}F_5^{-1/2}ds_{K3}^2 + F_1^{1/2}F_5^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_3^2) \tag{2.1}$$

$$F_1 = 1 + \frac{\alpha' Q_1}{v r^2}, \tag{2.2}$$

$$F_5 = 1 + \frac{\alpha' Q_5}{r^2}. \tag{2.3}$$

ここで、ds_{K3}^2 は $K3$ 上のメトリックです。その $K3$ の体積は $v\alpha'^2$ とします。dilaton と R-R field strength は以下の方程式を満たします。

$$e^{-2\phi} = e^{-2\phi_\infty}F_1^{-1}F_5, \tag{2.4}$$

$$H = Q_5\epsilon_3 + \frac{Q_1}{v}F_5F_1^{-1} *_6 \epsilon_3. \tag{2.5}$$

Q_1 は必ず Q_1/v という形で現れていますが、これは D1 ブレーンチャージが $K3$ 空間の一点にあるのではなく、D5 ブレーンの $K3$ 空間全体にわたって広がっている場合を考えたためです。near horizon 極限では、γ と $\bar{\gamma}$ は AdS_3 空間の座標になり、Ω_3^2 は S^3 の metric になります。ϕ_∞ は無限遠におけるディラトン ϕ の値で、ϵ_3 は S^3 の unit volume form です。$*_6\epsilon_3$ は、ϵ_3 の 6 次元 ($AdS_3 \times S^3$ 部分)hodge 双対という意味です。

D5, D1 ブレーンチャージ Q_5、Q_1 は、以下のように与えられます。

$$Q_5 = \int_{S^3} H, \tag{2.6}$$

$$Q_1 = \int_{S^3\times K3} *_{10}H. \tag{2.7}$$

以上の D1/D5 系の near horizon 極限をとると、$AdS_3 \times S^3 \times K3$ 空間が実現されます。つまり、$U = r/\alpha'$ を固定し、$\alpha' \to 0$ の極限をとると、以下のようになります。

$$ds^2 = \alpha'\left(\frac{U^2}{l^2}d\gamma d\bar{\gamma} + \frac{l^2}{U^2}dU^2 + l^2 d\Omega_3^2\right) + \sqrt{\frac{Q_1}{vQ_5}}ds_{K3}^2, \tag{2.8}$$

$$e^{-2\phi} = \frac{Q_5}{Q_1 g_6^2}, \tag{2.9}$$

$$H = Q_5\epsilon_3 + Q_5 *_6 \epsilon_3. \tag{2.10}$$

但し、

$$g_6^2 = e^{2\phi_\infty}/v, \qquad l^2 = g_6\sqrt{Q_1 Q_5}. \tag{2.11}$$

メトリック (2.8) の括弧中の第 1 項と第 2 項が AdS_3 メトリックで、第 3 項が S^3 メトリックになっています。AdS_3 と S^3 の大きさ (半径) は l と置きました。この l が十分に大きく、同時に弦結合定数が十分に小ければ、弱結合の弦理論となり、超重力理論近似が信頼できます。したがって、$g_6 Q_i$ を大きく固定して、$g_6 \to 0$ の極限で考えます。$K3$ メトリックの係数から、near horizon 極限における $K3$ の体積は Q_1/Q_5 となることが分かります。この様に near horizon 極限における $K3$ の体積は元々の $K3$ の体積に依存しません。ここで仮に、Q_1 と Q_5 を大きく固定したまま $g_6 \to 0$ の極限を考えると、$K3$ の体積はある一定値に近づきます。この時、$K3$ は S^3 や AdS_3 に比べて非常に小さくなりますから、$K3$ 空間から生じる Kaluza-Klein 状態の質量は、S^3 空間から生じる Kaluza-Klein 状態の質量に比べ、非常に大きくなります。従って、超重力理論の一次近似では、$K3$ 空間から生じる Kaluza-Klein 状態については、全ての massive モードが非常に重くなるため、ゼロモードだけを考えれば良いことになります。これは、$AdS_3 \times S^3$ にコンパクト化された 6 次元の massless 超重力理論で、$(2,0)$ 超対称性を持ち、21 個の tensor multiplet を持つ理論です。

CFT 側　Maldacena 推測のもう一方側の、場の理論はどうなっているのでしょうか。D1/D5 ブレーン系を考えて、$\alpha' \to 0$ の極限を考えてきましたが、これはこの 2 次元理論で赤外極限を取ることに相当しますから、場の理論側は 2 次元 $\mathcal{N} = (4,4)$ SCFT となります。問題は、この 2 次元 SCFT がどのような理論であるか、ということです。この 2 次元 SCFT は、target space が $K3^N/S_N$ $(N = Q_1 Q_5)$ の $\mathcal{N} = (4,4)$ 超対称シグマ模型の変形であると言われています。大雑把に言って、これは $K3$ 上の N 個の並んだ点 (置換群 S_N で割られているため) に対応しています。これが正しいシグマ模型であるという主張は元々、CFT からブラックホールエントロピーを計算した Vafa-Strominger[2][3] の論文で初めて主張されましたが、彼らはそれほど多くの証拠を上げているわけではありません。なぜ $K3^N/S_N$ という空間が出てくるかと言いますと、一つの説明としては次のようになります。D1/D5 ブレーン系に 2 回 T 双対をとると、D(-1)/D3 ブレーン系になります。ここで、D(-1) ブレーンは、D3 ブレーンから見るとインスタントンのように見えますから、moduli 空間は $K3$ 上のインスタントン moduli 空間のように見えるという訳です。厳密に言うと、このインスタントン moduli 空間が $K3$ の対称積であるとは知られていません。しかし、これに似た多くの例で、moduli 空間が対称積の変形となることが知られています。

AdS_3/CFT_2 双対性の証拠　今まで説明してきた AdS_3/CFT_2 双対性の、超重力理論側と場の理論側が正しく双対な関係になっている証拠を三つ上げます。まず第一の証拠は、超重力理論と CFT の間のカイラルプライマリのマッチングと elliptic genus のマッチングです。これは、後ほど section 3 で詳しく解説します。第二の証拠は、moduli 空間のマッチングです。これはしばらく後で解説します。第三の証拠は、$K3$ 上のインスタントン moduli 空間は、おおよそ、$K3$ の対

称積であることです。

$$\mathcal{M}_{\rm inst}(K3) \approx K3^N/S_N. \tag{2.12}$$

ここで、$K3$ の代わりに T^4 の場合についての Hassan-Wadia の仕事 [9] についてコメントしておきます。Hassan-Wadia は、D5 ブレインが T^4 に巻き付いた D1/D5 系を考え、その場合のゲージ理論の古典的 moduli 空間を解析することで、moduli 空間を求めました。彼らが求めた moduli 空間は、T^4 の対称積とは違った形をしていて、T^4 のある対称積の積の形をしていました。しかし、これは問題があるようです。その第一の理由は、後に section 3 で示す方法を行うことで得られるこの空間のカイラルプライマリのスペクトラムが、超重力理論から得られるカイラルプライマリのスペクトラムと一致しないことです。第二の理由は、2 次元ゲージ理論では、古典的 moduli 空間の解析から量子的 moduli 空間を求めるのは明かではないことです。第三の理由は、トーラス上のゲージ理論を考えることは困難であることです。トーラス上のゲージ理論を考えるにはスカラー場に周期的境界条件を手で入れなければなりません。そのようなトーラス上の D ブレインゲージ理論を構成する方法は明かではありません。

moduli 空間のマッチング　Dijkgraaf[10] は、最近発表した論文の中で $\mathcal{N}=(4,4)$ SCFT の moduli 空間と弦理論の moduli 空間との比較を行って、両者が対応していることを示しました。

まず、任意の $K3$ 上の CFT の moduli 空間は Grassmannian

$$\frac{O(4,20)}{O(4)\times O(20)} \tag{2.13}$$

です。しかし、既に言及したように、任意の $K3$ の体積は near horizon 極限で定数になる性質があります。はじめにどんな $K3$ をとっても、超重力理論のソリトン解で near horizon 極限を取れば、$K3$ の体積は、はじめの $K3$ の体積に依存せず一定になります。したがって、我々が考える $K3$ は $K3$ 全体の部分集合に過ぎず、それは (2.13) よりも小さい Grassmannian

$$\frac{O(3,20)}{O(3)\times O(20)} \tag{2.14}$$

によってパラメトライズされるものです。そして、弦理論に現れる $K3$ は、この (2.14) でパラメトライズされる $K3$ です。この $K3$ を "attractor $K3$" と呼ぶことにします。このことを図を使って説明します。(図 1 参照。) ブラックホールを考えて、そのブラックホールの十分遠方に $K3$ があるとしましょう。この $K3$ の形が四角形だとして、これを horizon に近づけると、$K3$ の形は徐々に円に近くなって行きます。これは超重力理論の解の特徴です。同様に始めの $K3$ が三角形だとしても、horizon に近づけると徐々に円に近くなって行きます。この様に、始め (2.13) でパラメトライズされるどんな $K3$ をとっても、near horizon 極限では、より小さい (2.14) でパラメトライズされる $K3$ になってしまいます。

以上は、$K3$ 上の CFT の moduli 空間の議論でした。今から、target 空間が $K3^N/S_N$ のシグマ模型について議論します。$K3^N/S_N$ は hyperkähler 多様体です。この hyperkähler 多様体 $K3^N/S_N$

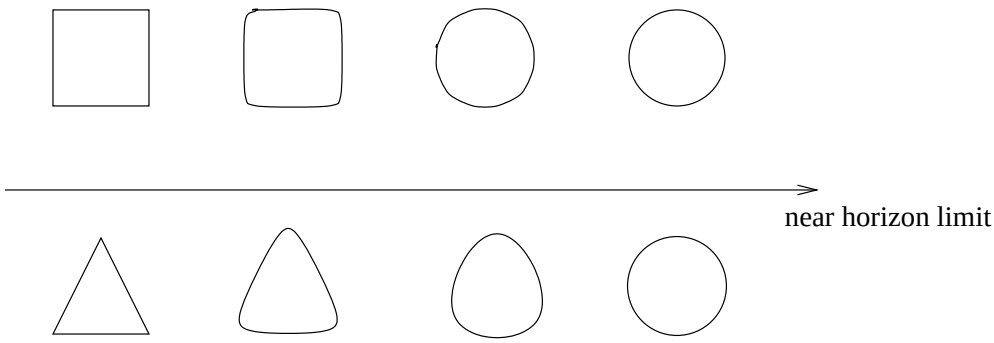

図 1: near horizon における $K3$

の 2 次コホモロジーの次元は 23 です。$K3$ それ自身の 2 次コホモロジーの次元は 22 なのですが、$K3^N/S_N$ には置換群 S_N で割ることよって生じる singularity があり、その singularity が vanishing 2-cycle に相当するために余分なコホモロジー類を与えるので、$K3^N/S_N$ の 2 次コホモロジーの次元は 23 になるのです。実際、

$$H^2(K3^N/S_N) \simeq \mathbf{R}^{3,20} \tag{2.15}$$

となっています。この hyperkähler 多様体の hyperkähler 構造は 3-plane U:

$$U \subset H^2(K3^N/S_N) \simeq \mathbf{R}^{3,20} \tag{2.16}$$

によって定義されます。ここで U は三つの Kähler form が張る 3-plane で、

$$U = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle \tag{2.17}$$

と表せます。従って、3-plane の集合は Grassmannian

$$\frac{O(3,20)}{O(3) \times O(20)} \tag{2.18}$$

です。これは、attractor $K3$ 上の CFT の議論で得られた (2.14) と同じです。このことが、AdS_3/CFT_2 双対性の有力な証拠の一つです。

更に議論を進めます。任意の $K3$ 上の弦理論の moduli 空間は Grassmannian

$$\frac{O(5,21)}{O(5) \times O(21)} \tag{2.19}$$

です。先ほどの議論と同様の理屈で、attractor $K3$ 上の弦理論の moduli 空間は、より小さい Grassmannian

$$\frac{O(4,21)}{O(4) \times O(21)} \tag{2.20}$$

となります。

hyperkähler 多様体 $K3^N/S_N$ 上の SCFT の全 moduli 空間は、

$$\frac{O(3,20)}{O(3)\times O(20)}\times \mathbf{R}^{3,20}\times \mathbf{R}_+ \tag{2.21}$$

です。(2.21) の第一項は、既に解説したように hyperkähler 多様体 $K3^N/S_N$ の hyperkähler 構造です。第二項は、SCFT が持っている 2-form B 場から生じる項です。B 場の期待値は、

$$B\in H^2(K3^N/S_N)\simeq \mathbf{R}^{3,20} \tag{2.22}$$

となります。第三項は、hyperkähler 多様体の体積の項です。この hyperkähler 多様体 $K3^N/S_N$ 上の SCFT の moduli 空間 (2.21) は、局所的には、attractor $K3$ 上の弦理論の moduli 空間 (2.20) と同等です。これが更なる AdS_3/CFT_2 双対性の証拠です。

$K3^N/S_N$ は singular な空間です。もし、素朴に CFT オービフォルドを考えると、この空間は singular になります。この singularity のために、空間の 2 次コホモロジー $H^2(K3^N/S_N)$ は、$H^2(K3)$ に vanishing 2-cycle に対応する一つの余分な生成子を足したものになります。CFT でオービフォルドをとると、この singularity に対応した vanishing 2-cycle 上ではゼロでない NS 2-form が存在し、

$$\int_{\text{vanishing 2-cycle}} B_{NS}=\pi \tag{2.23}$$

となっています。

moduli の写像を考えて幾何学的 singularity を解消させようとすると、同じ結果が得られます。幾何学的 singularity を解消したいと思うならば、$K3$ 上の自己双対 B_{NS} をノンゼロにする必要があります。$K3$ 上の B_{NS} には、3 個の自己双対 B_{NS} 場と 19 個の反自己双対 B_{NS} 場があります。反自己双対 B_{NS} 場は、attaractor $K3$ の影響でゼロとなっています。もし、hyperkähler 多様体の singularity を取り除くとすると、3 つの変形パラメータが存在します。なぜなら、3 つの Kähler form が、3 つの自己双対 B_{NS} 場に対応するためです。

我々が最初に考えた D1/D5 系では、D5 ブレーンは $K3$ に巻き付いていましたが、その $K3$ では B_{NS} 場はゼロでした。従って、singularity は解消されてなく、メトリックは singular です。

計算することによって今考えている CFT では (2.23) 式の右辺は π ではなく、ゼロであることが分かります：

$$\int_{\text{vanishing 2-cycle}} B_{NS}=0, \tag{2.24}$$

ここで、(2.24) 式の右辺の値を変えるためには、$K3$ 上の R-R 0-form と 4-form をノンゼロにしなければなりません。それゆえ、B_{NS} はゼロです。これは、非常に興味深いポイントです。(2.23) 式を満たす CFT は、smooth な CFT であると考えられているのに対して、(2.24) 式を満たす CFT は

singular な CFT だと考えられているからです。たとえば、NS 2-form がゼロの場合には、world-sheet インスタントン展開が非常に悪い振る舞いをすると考えられます。この CFT は非常に特殊だと考えられるので、通常の CFT の方法を使って様々な物理量を計算するのは非常に困難だと思われます。我々は、AdS/CFT 双対性のチェックのために、超重力理論側で計算したものと、CFT 側で計算したものとを比べたいのですが、その CFT 側の計算は困難かもしれません。しかし、moduli に依存しない物理量はまだ他にも存在します。例えばカイラルプライマリや elliptic genus がそうです。B 場がゼロであり強結合である相転移が存在しない限り、カイラルプライマリや elliptic genus は変化しません。従って、超重力理論側との比較をすることができると考えられます。これは非常に微妙な問題です。例えば Witten は自分の論文 [11] の中で、D5 ブレーンが何にも巻き付いていない D1/D5 系を議論していますが、そこでの結果は B 場がゼロであることに関係があると思われます。実際、赤外極限の CFT では B 場はゼロでした。また、Maldacena-Michelson-Strominger[12] が議論している、十分に励起した AdS_3 がブレーンを放出して崩壊する anti-de Sitter 崩壊 (Fragmentation) 現象も、NS B 場がゼロであることが関係あると思われます。このように、この CFT は非常に問題のあるメトリックを持っていますが、おそらくは、カイラルプライマリや elliptic genus の議論は問題ないと思われます。

3　カイラルプライマリと elliptic genus

この節では、カイラルプライマリと elliptic genus を、$AdS_3 \times S^3$ 上の超重力理論側と SCFT 側で求め、両者の比較を行います。

6D 超重力理論の KK スペクトラム　まず初めに、$AdS_3 \times S^3$ 上の 6 次元超重力理論の Kaluza-Klein スペクトラム求めます。

AdS_3 での議論を始める前に、AdS_5 の場合について議論をします。$AdS_5 \times S^5$ の場合の Kaluza-Klein スペクトラムは、Kim-Romans-Neuwenhuizen[13] によって求められました。彼らは、超重力理論の場の方程式を解いて、S^5 コンパクト化をした上で運動項の AdS_5 部分を対角化し、それぞれの場の質量を求めました。その後、Günaydin-Marcus[14] により、表現論を使った別の方法が発表されました。彼らの方法なら場の方程式を実際に解く必要はありません。実際、Kaluza-Klein モードは、S^5 の等長群 $SU(6)$ の量子数を持っています。その量子数から質量を計算し、質量から境界における場のスケーリング次元 Δ を計算することができます。ところが、表現論を使うことで $SU(6)$ 量子数とスケーリング次元 Δ を直接関係づけることができる場合があります。Kaluza-Klein モードが short 表現の成分の場合には、$SU(6)$ 量子数から直接スケーリング次元 Δ を求めることができるのです。ここでも、この表現論を使用する方法で議論したいと思います。

以上の議論と同様に、表現論を使用する方法では、超重力理論が持っている対称性が重要となります。この対称性を anti-de Sitter 超群と呼びます。考えている $AdS_3 \times S^3$ の理論は、AdS_3

の isometry と S^3 の isometry の対称性を持っています。その対称性を、超対称に拡張したものが AdS 超群です。実際、AdS 超群のボゾン部分は

$$\begin{aligned} \mathrm{Isom}(AdS_3 \times S^3) &= SO(2,2) \times SO(4) && (3.1) \\ &= SO(1,2) \times SO(2,1) \times SU(2) \times SU(2) && (3.2) \end{aligned}$$

となっています。ここで、$SO(1,2)$ と $SU(2)$ を一つずつ統合し、更に fermionic な生成子を含むように拡張したものが $SU(1,1|2)$ となります。結局 AdS 超群全体で

$$\text{AdS 超群} = SU(1,1|2)_L \times SU(1,1|2)_R \tag{3.3}$$

となります。ここで、$SU(1,1|2)_L$ は境界における CFT の左向き部分に対応しています。実際、$SU(1,1|2)_L$ のボゾン部分の $SO(1,2)$ には、CFT の左向き部分の生成子 L_{-1}, L_0, L_{+1} が対応しています。同様に、$SU(1,1|2)_R$ は右向き部分に対応していて、$SU(1,1|2)_R$ のボゾン部分の $SO(2,1)$ には、CFT の右向き部分の生成子 $\bar{L}_{-1}$, $\bar{L}_0$, $\bar{L}_{+1}$ が対応しています。

$\mathcal{N} = 4$ 超共形代数は、

$$T(z), G^i(z), J^j(z) \tag{3.4}$$

で構成されています。ここで、$T(z)$ は stress energy tensor、$G^i(z)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ は spin-$3/2$ カレント、$J^j(z)$ $(j = 1, \ldots, 3)$ は spin-1 カレントです。この $\mathcal{N} = 4$ 超共形代数のモードの部分生成子

$$\left\{ L_{\pm 1}, L_0, G^i_{\pm 1/2}, J^j_0 \right\} \tag{3.5}$$

は、それ自身で閉じていて、$SU(1,1|2)$ を構成しています。

$\mathcal{N} = 4$ 超共形代数には massive 表現と massless 表現があります。これらは、long 表現、short 表現と呼ばれます。short 表現の成分には、カイラルプライマリと呼ばれる状態があります。カイラルプライマリ状態 $|\Phi\rangle$ は以下の条件を満たす状態のことです。

$$L_0|\Phi\rangle = \frac{1}{2} J^3_0 |\Phi\rangle \tag{3.6}$$

つまり、$SU(2)$ の量子数が conformal weight と関係しています。このカイラルプライマリがもつ量子数を指定すると、そのカイラルプライマリを含む short 表現を指定することになります。実際に今からカイラルプライマリの量子数を指定し、short 表現の構成方法を示します。L_0, J^3_0 の固有値をそれぞれ h, j としますと、カイラルプライマリ状態では (3.6) 式から、$h = j/2$ となっています。このカイラルプライマリ状態に $SU(2)$ 下降演算子を掛けてやることで、$SU(2)$ の multiplet (conformal weight $h = j/2$) を作ることができます。

$$\begin{pmatrix} j/2 \\ j/2 - 1 \\ \vdots \\ -j/2 \end{pmatrix} \; ; h = \frac{j}{2} \tag{3.7}$$

この $SU(2)$ multiplet に演算子 G^i を掛けて生じる状態を考えます。しかし、$G^i_{+1/2}$ $(i=1,\ldots,4)$ を掛けた場合と、$G^i_{-1/2}$ $(i=3,4)$ を掛けた場合は状態は消滅してしいます。$G^i_{-1/2}$ $(i=1,2)$ を掛けると、新たな $SU(2)$ multiplet を作ることができます。更に得られた全ての状態には L_{-1} を任意回数掛けることができますから、次のような表現が構成されます。

$$
\begin{array}{ccc}
 & (L_{-1})^k \begin{pmatrix} \frac{j}{2} \\ \vdots \\ -\frac{j}{2} \end{pmatrix} \ ; h=\frac{j}{2}+k & \\
G^1_{-1/2}\swarrow & & \searrow G^2_{-1/2} \\
(L_{-1})^k \begin{pmatrix} \frac{j-1}{2} \\ \vdots \\ -\frac{j-1}{2} \end{pmatrix} \ ; h=\frac{j+1}{2}+k & & (L_{-1})^k \begin{pmatrix} \frac{j-1}{2} \\ \vdots \\ -\frac{j-1}{2} \end{pmatrix} \ ; h=\frac{j+1}{2}+k \\
G^2_{-1/2}\searrow & & \swarrow G^1_{-1/2} \\
 & (L_{-1})^k \begin{pmatrix} \frac{j-2}{2} \\ \vdots \\ -\frac{j-2}{2} \end{pmatrix} \ ; h=\frac{j+2}{2}+k &
\end{array}
\tag{3.8}
$$

但し、$k=0,1,2,\ldots$。以上の全ての状態により、$SU(1,1|2)$ の short 表現を構成しています。この short 表現 (3.8) 全体を $(j)_S$ と書き表すことにしましょう。

(3.8) を見て分かるように、short 表現 $(j)_S$ には 4 つの $SU(2)$-multiplet が含まれます。従って、$SU(1,1|2)_L \times SU(1,1|2)_R$ の下で short 表現 $(j,j')_S$ には、16 個の $SU(2)_L \times SU(2)_R$ multiplet が含まれています。逆に言えば、もし全ての Kaluza-Klein モードの $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 量子数 (表現) が分かれば、それを short 表現に当てはめることにより、全ての場の comformal weight を知ることができて、スペクトラムを完全に求めることができます。よって、次の課題は全ての Kaluza-Klein モードの $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 量子数を調べることとなります。

6 次元の場の理論の物理的自由度は、小群 $SO(4)_l$ の表現として変換します。(小群 $SO(4)_l$ は、S^3 の isometry である $SO(4)$ とは別物です。) 例えば、Vector 場 A_μ は $SO(4)_l$ の **4** 表現として変換します。Vector 場は 6 成分持っていますが、2 成分は gauge away できるので、物理的自由度は 4 です。これら物理的自由度は、S^3 の座標に依存しています。S^3 上の場は、S^3 の局所 Lorentz 群 $SO(3)$ の表現 R_3 として変換するはずであり、これら物理的自由度の表現 R^3 を求めることが、スペクトラムを求める第一段階です。ここでこの局所 Lorentz 群 $SO(3)$ は $SO(4)_l$ の部分群です。よって、全ての表現 R_3 は、$SO(4)_l$ の表現を $SO(3)$ に分解すれば求められます。先ほどの Vector 場 A_μ の例では以下のようになります。

$$
A_\mu \ (\mathbf{4}) \to \left\{ \begin{array}{lll} A_a & (\mathbf{1}) & a: AdS_3 \text{ 方向} \\ A_{\hat{\mu}} & (\mathbf{3}) & \hat{\mu}: S^3 \text{ 方向} \end{array} \right.
\tag{3.9}
$$

これら A_a、$A_{\hat{\mu}}$ 等は、波動方程式の S^3 部分の解としては球面調和関数になっているはずです。つ

まり、

$$A_a(x,y) = \sum_k A_{a,k}(x) Y_k(y) \qquad x:\ AdS_3 \text{ 座標},\ \ y:\ S^3 \text{ 座標} \tag{3.10}$$

とモード展開できるはずです。ここで、おのおのの球面調和関数$Y_k(y)$は、S^3 の isometry $SO(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$ の表現 R_4 として変換します。この R_4 が、求めたかった $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の量子数です。既に説明したように、全ての場について表現 R_4 が分かれば、それを short 表現の表 (3.8) に当てはめることにより、comformal weight が分かります。ここで問題となるのが、表現 R_3 として変換する場がどのような表現 R_4 を持つ球面調和関数で展開されるかということです。この問に対し、Salam-Strathdee[15] が単純な解法を示しました。Salam-Strathdee は、表現 R_3 として変換する場を球面調和展開した時に現れる表現 R_4 は、その表現 R_4 を $SO(3)$ 表現に分解した時に、元々の表現 R_3 を生じることのできる表現 R_4 だけであることを示しました。例として $R_3 = \mathbf{3}$ の場合を考えましょう。$SO(3) = SU(2)$ は $SO(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$ の対角 $SU(2)$ 部分群です。今、$SO(4)$ の $(\mathbf{2j_1}+\mathbf{1}, \mathbf{2j_2}+\mathbf{1})$ 表現を考えます。これを $SO(3)$ に分解した時に $R_3 = \mathbf{3}$ を出すためには、$|j_1 - j_2| = 0, 1$ でなければならないです。よって表現 R_4 は、$(\mathbf{m}+\mathbf{2}, \mathbf{m})$, $(\mathbf{m}, \mathbf{m})$, $(\mathbf{m}, \mathbf{m}+\mathbf{2})$ $(\mathbf{m} \in \mathbf{N})$ です。

ここまでに説明したスペクトラムの求め方を箇条書きでまとめます。

- 6 次元場の理論の物理的自由度は、小群 $SO(4)_l$ の表現として変換するが、その $SO(4)_l$ の表現を $SO(3)$ に分解して $SO(3)$ の表現 R_3 を全て求める。
- 分解すると表現 R_3 を出すような $SO(4)$ の表現 R_4 を全て求める。
- 得られた結果を short 表現 (3.8) に当てはめる。そこから conformal weight を知ることができる。

以上で準備は全て整いました。これから実際に、Type IIB 超重力理論を $K3$ 上にコンパクト化した 6 次元理論の Kaluza-Klein スペクトラムを求めます。Type IIB 超重力理論を $K3$ 上にコンパクト化すると、6 次元 $(2,0)$ 超重力理論で 21 個の tensor multiplet をもつ理論になります。しばらくの間、tensor multiplet の数を一般化し、6 次元 $(2,0)$ 超重力理論で n_T 個の tensor multiplet をもつ理論を考えることにします。この理論は $n_T = 21$ 以外の場合はアノマラスですが、Kaluza-Klein スペクトラムを計算する目的には n_T は任意の整数で問題はありません。この 6 次元超重力理論の gravity multiplet は、1 個の graviton と 4 個の gravitino と 5 個の自己双対 2-form でできています。一方 tensor multiplet は、1 個の反自己双対 2-form、4 個の fermion、5 個の scalar でできています。以上の場の小群 $SO(4)_l = SU(2) \times SU(2)$ の表現は次のようになります。

$$[(\mathbf{3},\mathbf{3}) \oplus 4(\mathbf{2},\mathbf{3}) \oplus 5(\mathbf{1},\mathbf{3})] \oplus n_T\,[(\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus 4(\mathbf{2},\mathbf{1}) \oplus 5(\mathbf{1},\mathbf{1})] \tag{3.11}$$

求めた (3.11) から、全ての表現 R_3 を求めます。まずは graviton $(\mathbf{3},\mathbf{3})$ を考えます。局所 Lorentz 群 $SO(3) = SU(2)$ は、小群 $SO(4)_l = SU(2) \times SU(2)$ の対角部分群であり、表現 R_3 は

$$(\mathbf{3},\mathbf{3}) \to R_3 = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{5} \tag{3.12}$$

となります。求めた R_3 から R_4 を求めます。まずは $R_3 = \mathbf{1}$ の場合を考えます。

$$R_3 = \mathbf{1} \to R_4 = (\mathbf{1},\mathbf{1}), (\mathbf{2},\mathbf{2}), (\mathbf{3},\mathbf{3}), \cdots \tag{3.13}$$

$R_3 = \mathbf{3}$ の場合では以下の様になります。

$$R_3 = \mathbf{3} \to R_4 = \begin{cases} (\mathbf{1},\mathbf{3}), (\mathbf{2},\mathbf{4}), (\mathbf{3},\mathbf{5}), \cdots \\ (\mathbf{2},\mathbf{2}), (\mathbf{3},\mathbf{3}), (\mathbf{4},\mathbf{4}), \cdots \\ (\mathbf{3},\mathbf{1}), (\mathbf{4},\mathbf{2}), (\mathbf{5},\mathbf{3}), \cdots \end{cases} \tag{3.14}$$

$R_3 = \mathbf{5}$ の場合では以下の様になります。

$$R_3 = \mathbf{5} \to R_4 = \begin{cases} (\mathbf{1},\mathbf{5}), (\mathbf{2},\mathbf{6}), (\mathbf{3},\mathbf{7}), \cdots \\ (\mathbf{2},\mathbf{4}), (\mathbf{3},\mathbf{5}), (\mathbf{4},\mathbf{6}), \cdots \\ (\mathbf{3},\mathbf{3}), (\mathbf{4},\mathbf{4}), (\mathbf{5},\mathbf{5}), \cdots \\ (\mathbf{4},\mathbf{2}), (\mathbf{5},\mathbf{3}), (\mathbf{6},\mathbf{4}), \cdots \\ (\mathbf{5},\mathbf{1}), (\mathbf{6},\mathbf{2}), (\mathbf{7},\mathbf{3}), \cdots \end{cases} \tag{3.15}$$

同様に graviton 以外の場についても表現 R_4 を求めることができます。よって非常に大きな R_4 の表ができ上がります。

得られた大きな R_4 の表が、(3.8) を通して当てはまるような short 表現の和

$$\bigoplus_{j,j'} N_{j,j'}(j,j')_S \tag{3.16}$$

を求めることができます。結果は次の表 (の和) になります。

$$\begin{array}{l} (1,3)_S, (2,4)_S, \cdots \\ 21(1,1)_S, 22(2,2)_S, 22(3,3)_S, \cdots \\ (3,1)_S, (4,2)_S, \cdots \end{array} \tag{3.17}$$

となります。ここで、$n_T = 21$ にしました。short 表現が全て分かったことにより、全ての場の Kaluza-Klein モードのスペクトラムが導き出せるのです。

いままで、Kaluza-Klein モードから short 表現を求めてきたのですが、さらに余分に二つの short 表現 $(0,2)_S$, $(2,0)_S$ を考えなければなりません。この二つの short 表現は、境界以外の AdS_3 空間中においては pure gauge であり gauge away できてしまうが、例外的に境界では gauge away できない自由度に対応しています。つまり、バルクでは非物理的であるけれども、境界でのみ物理的である自由度に対応しています。このような自由度のことを、singleton[‡] と呼ぶこともあり

[‡] “singleton” とは、元々は AdS_5 の空間に存在する、境界以外では pure gauge である自由度に対して名付けられた。従ってここで使っている “singleton” は、元々の意味の “singleton” とは異なる。

ます。これらの自由度は、Brown-Henneaux[16] によって議論された特殊な diffeomorphism と関連があります。その diffeomorphism は pure gauge である graviton に対応していますが、境界においては非自明な効果を起こします。これらの自由度を詳細に解析し、short 表現に当てはめると、$(0,2)_S$, $(2,0)_S$ に当てはまります。short 表現 $(0,2)_S$, $(2,0)_S$ は、$\mathcal{N}=4$ 超共形代数の higher モード L_{-2-k}, $G^i_{-3/2-k}$, J^i_{-1-k} $(k \geq 0)$ を含んでいます。したがって、Virasoro 代数の higher モードを含んでいるのです。Brown-Henneaux の論文では、この diffeomorphism の性質から Virasoro 代数を導いていました。実際、対応する short 表現 $(0,2)_S$, $(2,0)_S$ は、Virasoro 代数の全ての higher negative モードを含んでいます。

この $(0,2)_S$, $(2,0)_S$ に、既に見つけてある short 表現 (3.17) を加えると、

$$\begin{array}{l} (0,2)_S, (1,3)_S, \cdots \\ 21(1,1)_S, 22(2,2)_S, \cdots \\ (2,0)_S, (1,3)_S, \cdots \end{array} \tag{3.18}$$

になります。ここで見つけたそれぞれの short 表現は、一つのカイラルプライマリを含んでいます。それぞれの short 表現からカイラルプライマリを取り出すことによって、超重力理論から得た境界上のカイラルプライマリの表を作ることできます。

このカイラルプライマリの表は CFT 側の議論からも導くことができます。それを導き、両者のカイラルプライマリを比較することから明日は始めます。

CFT のカイラルプライマリのスペクトラム　昨日は、$AdS_3 \times S^3$ 空間上の 6 次元超重力理論の KK スペクトラムの計算方法と、それらを AdS 超リー代数 $SU(1,1|2)_L \times SU(1,1|2)_R$ の short 表現にまとめあげる方法を説明しました。そしてその結果は次の表のようになりました。

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} (0,2)_S & , & (1,3)_S & , & \cdots \\ 21(1,1)_S & , & 22(2,2)_S & , & \cdots \\ (2,0)_S & , & (3,1)_S & , & \cdots \end{array} \right.$$

この次にやるべきことは、超重力理論を $AdS_3 \times S^3$ 空間上の超重力理論の KK スペクトラムのなかのカイラルプライマリを、$K3^N/S_N$ 上の超共形シグマ模型の中に現れるカイラルプライマリと比べることです。AdS 超群の short 表現の一つ一つが、カイラルプライマリを 1 つずつ含んでいます。ここでカイラルプライマリというのは、leftmover のほうのカイラルプライマリと rightmover のほうのカイラルプライマリを掛けたもので、つまり

$$(j,j')_S \tag{3.19}$$

のなかには $h = j/2, \bar{h} = j'/2$ のカイラルプライマリが含まれます。

それでは CFT のほうを詳しく見ていきましょう。$\mathcal{N}=4$ の 2 次元超共形シグマ模型では、カイラルプライマリと、ターゲットのコホモロジーの間には 1 対 1 の関係のあることが知られてい

ます。この関係を式で書くために、カイラルプライマリ状態全体の上で次のような量のトレースをとると、

$$\mathrm{Tr}_{\{\text{chiral primaries}\}} t^{J_0^3} \bar{t}^{\bar{J}_0^3} \tag{3.20}$$

これは次のような、ターゲット空間の (p,q) 次コホモロジーの元についての和に等しくなります。

$$\mathrm{Tr}_{\{\text{chiral primaries}\}} t^{J_0^3} \bar{t}^{\bar{J}_0^3} = \sum_{p,q} h_{p,q}(\mathcal{M}) t^p \bar{t}^q = P(\mathcal{M}) \tag{3.21}$$

ここで、$h_{p,q}$ は Betti 数です。従って CFT のカイラルプライマリのセットを求めるには、ターゲット空間 $K3^N/S_N$ のコホモロジーの計算をすればよいことになります。

このターゲット空間のコホモロジーの計算は Gottsche, Soergel のような数学者によってなされていますし [17]、オービフォルド上の CFT のテクニックを使って物理流に計算することもできます。

答はというと、先ほどの量 $P(\mathcal{M})$ の母関数は次のように与えられます。

$$\begin{aligned}\sum_{N\geq 0} x^N P(K3^N/S_N) &= \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m t^{m-1}\bar{t}^{m-1})^{-1}(1-x^m t^{m-1}\bar{t}^{m+1})^{-1} \\ &\quad \cdot (1-x^m t^{m+1}\bar{t}^{m-1})^{-1}(1-x^m t^{m+1}\bar{t}^{m+1})^{-1}(1-x^m t^m \bar{t}^m)^{-20}\end{aligned} \tag{3.22}$$

この式から、特に興味のある量 $P(\infty)$ を求めてみましょう。この量が特に興味があるというのは、我々は超重力理論の近似のよい領域に限って議論をしないと行けませんので、上の N を大きいと仮定しなければならないからです。

さて、$P(\infty)$ を上の母関数の表式から求めるのは、簡単な計算です。というのは、この表式は $(1-x)^{-1}$ という因子を含んでいるのが分かりますので、次の関係式を使うことによって

$$a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \tag{3.23}$$

$P(\infty)$ を次のように求めることができます。

$$\begin{aligned} P(K3^\infty/S_\infty) &= \lim_{x\to 1}\left[(1-x)\sum_{N\geq 0} x^N P(K3^N/S_N)\right] \\ &= \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^{m-1}\bar{t}^{m+1})(1-t^{m+1}\bar{t}^{m-1})} \cdot \frac{1}{(1-t\bar{t})^{21}\prod_{m>1}^{\infty}(1-t^m\bar{t}^m)^{22}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

この式の結果を超重力理論のほうで求めた表と比べると、両者は同じであることが分かります。

というのは、超重力理論のほうで求めたカイラルプライマリのスペクトラムは、いわゆる 1 粒子のカイラルプライマリ状態であって、これらを掛け合わせて多粒子のカイラルプライマリ状態

をつくることができます。その結果、超重力理論側で全てのカイラルプライマリ状態を尽くすには、それぞれの 1 粒子のカイラルプライマリを ボソン振動子におきかえて、その結果得られる量子力学系の分配関数を考えればよいことになります。[§] そのようにして超重力理論の分配関数を求めてみると、それは丁度今求めた CFT のほうの分配関数の表式と一致することが分かるでしょう。

elliptic genus の対応　以上で見てきたのは、カイラルプライマリのスペクトラムは $N = \infty$ において完全な対応を持っているということでした。次に考えるのは elliptic genus という量ですが、この量を比較するときにはある種の exclusion principle を手で導入しなければなりません。というのは elliptic genus という量は $K3^\infty/S_\infty$ 上で計算すると無限大になってしまうのです。そこで elliptic genus の計算は N を有限において行わなければなりません。そうすると状態のスペクトラムは無限に上に延びたものではなくなり、またさっきまでのように状態のテンソル積を無限にとることも許されなくなります。このような exclusion principle を超重力理論側で考えることは非常に難しいのですが、式 (3.22) をよく見ると一つのヒントになるアイデアが得られます。

式 (3.22) を使って、カイラルプライマリのスペクトラムを $N = \infty$ のときだけでなく有限の N のときも対応づけることを考えてみましょう。そのためには次のようにすればよいことが分かります。まずやることは、超重力理論の KK スペクトラムの表を次のように書き換えることです。

$$\left\{\begin{array}{cccc} (0,2;1)_S & , & (1,3;2)_S & , \cdots \\ (1,1;2)_S & , & (2,2;3)_S & , \cdots \\ 20(1,1;1)_S & , & 20(2,2;2)_S & , \cdots \\ (2,2;1)_S & , & (3,3;2)_S & , \cdots \\ (2,0;1)_S & , & (3,1;2)_S & , \cdots \end{array}\right.$$

AdS 超群の short 表現をラベルする数をもう一つ手で導入します。新たに導入した 3 番目の数は超重力理論の枠内では意味のないものです。この数を導入した意図は、式 (3.22) において $t^p\bar{t}^q$ に掛かっている x の指数を表そうというもので、CFT 側との対応において初めて意味をなすものです。

この時次のような多粒子カイラルプライマリ状態全体の集合を考えると、

$$\prod (j_i, j_i'; d_i)_S \quad \text{such that} \quad \sum d_i \leq N \tag{3.25}$$

これは、N が有限の時の $K3^N/S_N$ の厳密なコホモロジーを与えていることが分かります。したがってカイラルプライマリ状態の間の対応を N が有限の時にも見いだすためには、次のような exclusion principle

$$\sum d_i \leq N \tag{3.26}$$

[§] ここで大切なことは、AdS 超群の short 表現 2 個のテンソル積を既約表現に分解すると、short 表現はただ一つ含まれるということです。この short 表現は多粒子状態によって実現されているのですが、やはり量子補正の影響を受けないものと考えることができます。

を手で導入すればよいということになります[¶] 。よって、N が有限の時の、超重力理論側の Hilbert 空間として、次のようなものを考えるのがよいと思われます。

$$\mathcal{H}^{(N)}_{\rm SUGRA} = \bigoplus_{\{j_i,j'_i,d_i\}\ ;\ \sum d_i \le N} \left(\bigotimes_i (j_i, j'_i; d_i)_S \right) \tag{3.27}$$

さて、N が有限の時の超重力理論側の Hilbert 空間が定義されましたので、いよいよ elliptic genus の対応を見ようと思います。しかしその前に、超重力理論側の Hilbert 空間の構造について少しコメントしたいことがあります。

$(2,0)_S$, $(0,2)_S$ 表現の中には、Virasoro 生成子 $\mathcal{L}_{-2}, \mathcal{L}_{-3}$ が含まれます。一方 $L_{\pm 1}, L_0$ といった生成子は、AdS 超群に含まれる生成子です。したがって $\mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_{-2}, \cdots$ たちは議論に全く非対称な形で現れるのです。

具体的に議論してみましょう。超重力理論側の Hilbert 空間の元は、leftmover の部分に限ってみると次のような表式で書けるでしょう。

$$(\mathcal{L}_{-2})(\mathcal{L}^{i_1}_{-1}\mathcal{O}_1)(\mathcal{L}^{i_2}_{-1}\mathcal{O}_2)\cdots \tag{3.28}$$

ここで、$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots$ はカイラルプライマリ状態で、それぞれ AdS 超群の short 表現をラベルする highest weight state です。これに $\mathcal{L}_{-1}$ の適当な巾をかけた descendant によって、任意の short 表現に含まれるベクトルを表すことができます。さらに、特別な short 表現 $(0,2)_S$ に含まれる、例えば $\mathcal{L}_{-2}$ のような元を掛けてもかまいません。

上の表式から次のような規則を読み取ることができます: 沢山の $\mathcal{L}_{-1}$ を、それぞれの 1 粒子カイラルプライマリ状態に何個ずつ掛けるかによって、別の状態を得ることができる。一方 $\mathcal{L}_{-2}$ のほうは、1 通りの掛かり方があるだけで、違う掛け方が違う状態に対応するような事情はない。CFT のほうでは highest weight 表現の任意のテンソル積をとって状態を構成するではないかと、上のような規則が不自然に思われるかもしれません。しかし現に超重力理論側の Hilbert 空間には上の規則があります。この規則は CFT 側でも次のように解釈できます。CFT では $\mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_{-2}$ がそれぞれ ∂ 微分および $T(z)$ の演算に対応していることを思い出しましょう。この時一般に、次の式が成り立ちます。

$$(\partial A)B \neq A(\partial B) \tag{3.29}$$

$$(TA)B - A(TB) \sim \partial^2(AB) \tag{3.30}$$

最初の式から、$\mathcal{L}_{-1}$ がどの演算子に掛かるかによって異なる状態に至ることが分かります。これに対して 2 番目の式から、T がどの演算子に掛かるかの違いからは本質的に新しい状態はでてこ

[¶] この時 $d \le N$ であって $d = N$ でないのは、d が N に満たない分だけ AdS 超群の表現 $(0,0;1)_S$ がかけられていると思えばよく、これは $K3^N/S_N$ の Poincare 多項式の母関数の表式から $1/(1-x)$ の因子を取り除いたことと対応しています。

ないことが分かります。これらの性質がちょうど、超重力理論側の スペクトラムの構造と対応しているのです。

いよいよ本当に、超重力理論と CFT の間の elliptic genus の対応を見ていきましょう。CFT 側では、elliptic genus という量は、RR セクターの Hilbert 空間上での次のようなトレースで定義されます。

$$Z(q,y) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{RR}}\left((-1)^F q^{L_0-\frac{c}{24}}\bar{q}^{\bar{L}_0-\frac{\bar{c}}{24}}y^{J_0^3}\right) \tag{3.31}$$

但し、$q = e^{2\pi i\tau}$, $y = e^{2\pi iz}$。そしてこのトレースに効いてくるのは right-mover の基底状態と left-mover の任意の状態の積であるような状態だけです。ところで R セクターの基底状態というのはスペクトラルフローにより NS セクターのカイラルプライマリ状態と 1 対 1 に対応しているので、elliptic genus を NS セクターの状態空間上のある量のトレースとして定義することができます。超重力理論のほうではスペクトラムが NS セクターのような分布をとっているので、超重力理論との比較の際には あとで与える NS セクターの表式を用いることにします。まず、CFT のほうで知られている結果をまとめましょう。$K3$ 上の CFT の elliptic genus は次のようになります。[18, 19]

$$Z_{K3}(q,y) = \sum c(m,l)q^m y^l = 24\left(\frac{\vartheta_3(\tau,z)}{\vartheta_3(\tau,0)}\right)^2 - 2\frac{\vartheta_4(\tau,0)^4-\vartheta_2(\tau,0)^4}{\eta(\tau)^4}\left(\frac{\vartheta_1(\tau,z)}{\eta(\tau)}\right)^2 \tag{3.32}$$

$$c(m,l) = c(4m-l^2) \tag{3.33}$$

上の表式は $K3$ が 1 個の時ですが、$K3^N/S_N$ のときは、elliptic genus は [20] により、次の母関数によって与えられます。

$$\sum_N p^N Z(K3^N/S_N,q,y) = \prod_{N>0}\prod_{m\geq 0,l}\frac{1}{(1-p^N q^m y^l)^{c(Nm,l)}} \tag{3.34}$$

上の表式はいずれも RR セクターの表式ですので、これらを NS セクターの表式に翻訳しますと、次のようになります。

$$Z = \sum_N p^N Z_{\mathrm{NS}}(K3^N/S_N,q,y) = \prod_{N>0}\prod_{m\in\frac{1}{2}\mathbf{Z}\ ;\ \frac{l}{2}-m\in\mathbf{Z}\ ;\ m\geq|\frac{l}{2}|}\frac{1}{(1-p^N q^m y^l)^{c_{CFT}(N,m,l)}} \tag{3.35}$$

$$c_{\mathrm{CFT}}(N,m,l) = c(4Nm-N^2-l^2) \tag{3.36}$$

さて、上の定義から次式を導くことができます。

$$c_{\mathrm{CFT}}(1,0,0) = c(-1) = 2 \tag{3.37}$$

したがって上の Z は $(1-p)^{-2}$ という因子を持っていることが分かります。この因子が、elliptic genus が $N\to\infty$ で発散する理由になっています。というのは次のような簡単な関係式により、

$$\frac{1}{(1-p)^2}(a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots) = \sum_N p^N\left\{(N+1)a_0+Na_1+(N-1)a_2+\cdots\right\} \tag{3.38}$$

elliptic genus は N に線形に依存していることが分かりますので、$N \to \infty$ とすると単純に N に比例して発散してしまうのです。このことを考慮にいれると、次のような式が成り立っていることがいえます。

$$\sum_{N\geq 0} p^N Z_{\rm NS}(K3^N/S_N, q, y) = \sum_{N,m,l\ ;\ m\leq \frac{N+1}{4}} p^N q^m y^l \left(a_{CFT}(m,l)N + b_{CFT}(m,l)\right) + \sum_{m>\frac{N+1}{4}} (\text{something}) \tag{3.39}$$

上の式にあるように conformal weight が十分小さいもの、つまり与えられた N に対して次の式

$$m \leq \frac{N+1}{4} \tag{3.40}$$

を満たす、conformal weight m を持った状態のみについての和に限れば、elliptic genus は本当に N に線形に依存するという主張です。ここで N はだいたい CFT の central charge の $1/6$ であるので、上の条件式は conformal weight を central charge の $1/24$ で制限する式になっています。この制限は丁度 Ramond vacuum の現れる m の値に対応していますので、m がこれを越えると NS セクターから R セクターへの遷移などの stringy な現象が起こり始めると想像できるのです。このような stringy な寄与は右辺の第 3 項にまとめられるのですが、この項は恐らく複雑な表式になっているはずです。超重力理論と CFT の対応があるのは低エネルギーの状態のみでしょうから、上の CFT での elliptic genus の表式のうち 右辺の第 3 項が超重力理論で再現できなくても不思議ではありません。しかし第 1、2 項については CFT と超重力理論が同じ結果を出すことが示せます。

式 (3.39) を証明しましょう。まず $c(r)$ が $r < -1$ では 0 になることから、m, l が与えられたとき $c_{\rm CFT}(N, m, l) \neq 0$ であるような N は $N \leq N_0 = 4m$ であることが分かります。すると elliptic genus の母関数を次のように書くことができます。

$$\sum_{N\geq 0} p^N Z_{\rm NS}(K3^N/S_N, q, y) = \sum q^m y^l \cdot (1-p)^{-2} \left\{a_0(m,l) + a_1(m,l)p + \ldots + a_{N_0}(m,l)p^{N_0}\right\} \tag{3.41}$$

これを (3.38) を使って書き直すと式 (3.39) が得られます。

さて、今度は elliptic genus を超重力理論側で計算しましょう。これは先ほど定義した超重力理論の Hilbert 空間を使って、その上で CFT 側と同じ量のトレースを計算することで求められます。この時も母関数をまず求めることにすると、CFT のほうと同様の表式を得ることができます。

$$\begin{aligned} \sum p^N Z^{\rm sugra}_{\rm NS}(K3^N/S_N, q, y) &= \sum p^N {\rm Tr}_{\mathcal{H}^{(N)}_{\rm sugra}} \left((-)^F q^{L_0} y^{J^3_0}\right) \\ &= \prod_{N,m,l} \frac{1}{(1-p^N q^m y^l)^{c_{\rm sugra}(N,m,l)}} \end{aligned} \tag{3.42}$$

式の形は CFT のほうと似ていますが、指数 $c_{\rm sugra}(N, m, l)$ はもちろん $c_{\rm CFT}(N, m, l)$ とは別のものです。この指数は与えられた量子数 N, m, l を持つ KK 1 粒子状態の数を表しています。興味深い

ことに、上の表式が次のように、CFT の場合と同じような形に変形できることが分かります。

$$\begin{aligned}\sum p^N Z_{\rm NS}^{\rm sugra}(K3^N/S_N,q,y) &= \sum p^N \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{(N)}_{\rm sugra}}\left((-)^F q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}y^{J^3_0}\right) \\ &= \sum_{m\leq\frac{N+1}{4}} p^N q^m y^l \left(a_{\rm sugra}(m,l)N + b_{\rm sugra}(m,l)\right) + \sum_{m>\frac{N+1}{4}} (\text{something})\end{aligned} \tag{3.43}$$

これは式 (3.39) を示したのと同じ議論で示すことができます。

先ほど話したように、CFT と超重力理論の間には低エネルギー状態に限って対応関係があると予想されるのですが、その対応関係は次のようなものと予想します。

$$a_{\rm CFT}(m,l) = a_{\rm sugra}(m,l) \quad , \quad b_{\rm CFT}(m,l) = b_{\rm sugra}(m,l) \tag{3.44}$$

式 (3.38), (3.39), (3.41) を見るとこれらの係数は elliptic genus の母関数の極 $p=1$ のまわりの 1 次、2 次の留数に関係しています。したがって上の関係式は次の式と等価であることがいえます。

$$\begin{aligned}\sum_N c_{\rm CFT}(N,m,l) &= \sum_N c_{\rm sugra}(N,m,l) \\ \sum_N N c_{\rm CFT}(N,m,l) &= \sum_N N c_{\rm sugra}(N,m,l)\end{aligned} \tag{3.45}$$

これを証明するためにまず左辺から評価しましょう。左辺を計算するには次の式を使って、

$$Z_{K3} = \sum c(4m-l^2)q^m y^l \tag{3.46}$$

$$Z_{K3}(q,y)|_{y=1} = 24 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} Z_{K3}(q,y)|_{y=1} = 0 \tag{3.47}$$

左辺の量を、例えば次のように計算します。

$$\begin{aligned}\sum_N c_{\rm CFT}(N,m,l) &= \sum_N c(4Nm - l^2 - N^2) \\ &= \sum_N c(4u(t-u) - (N-t)^2) \\ &= 24\delta_{m,|\frac{l}{2}|} \quad (|l|>1)\end{aligned} \tag{3.48}$$

ここで $t=2m, l=t-2u$ と定義しました。このようにして左辺は最終的に次のようになります。

$$\sum_N c_{\rm CFT}(N,m,l) = \begin{cases} 24\delta_{m,|l/2|} & (|l|>1) \\ 24\delta_{m,1/2} & (|l|=1) \\ 22\delta_{m,0} & (l=0) \end{cases} \quad , \quad \sum_N N c_{\rm CFT}(N,m,l) = \begin{cases} 48m\delta_{m,|l/2|} & (|l|>1) \\ 48m\delta_{m,1/2} & (|l|=1) \\ 2\delta_{m,0} & (l=0) \end{cases} \tag{3.49}$$

一方右辺の量を計算するには、まず次のような母関数を計算します。

$$\begin{aligned} s(p,q,y) &= \sum_{N,m,l} c_{\text{sugra}}(N,m,l)p^N q^m y^l \\ &= \frac{1}{(1-q)(y-y^{-1})}\Big[2p(1-q)(y-y^{-1}) + (20p+p^2)\left\{q^{\frac{1}{2}}(y^2-y^{-2}) - 2q(y-y^{-1})\right\} \\ &\qquad + \frac{2p+20p^2+2p^3}{1-pq^{\frac{1}{2}}y}(qy^3 - 2q^{\frac{3}{2}}y^2 + q^2 y) \\ &\qquad + \frac{2p+20p^2+2p^3}{1-pq^{\frac{1}{2}}y^{-1}}(-qy^{-3} + 2q^{\frac{3}{2}}y^{-2} - q^2 y^{-1})\Big] \end{aligned} \tag{3.50}$$

この式は超重力理論の KK スペクトラムが与えられているので、直接計算により得られる表式です。この式から超重力理論でも (3.49) と全く同じ表式が導けますので、証明ができたことになります。

ここまでの考察により、低エネルギー状態に限ってはカイラルプライマリのスペクトラムや elliptic genus のレベルでの対応があることが分かりました。ここで低エネルギーという制限について考えてみましょう。elliptic genus の計算のように、一般に状態数を勘定するというようなことは Strominger-Vafa[3] の論文などでも行われていますが、彼らの論文を振り返ってみると、状態数は N について指数的に増大するような振る舞いであったことを思い出してください。このような振る舞いはここまで我々が考えてきた中には現れてきませんでしたので、$m \leq \frac{N+1}{4}$ の制限をはるかに越えた stringy な領域の現象を見ていると考えられます。つまり Black hole の物理を説明するようなたくさんの微視的状態は超重力理論を考えている範囲では見えてこず、実際我々がこれまで扱ってきた状態はそれよりもずっと少ないということになります。一方 6 次元超重力理論を 6 次元の無質量粒子の理論という観点で見ると、状態数は系のエネルギー E に $\sim E^{\frac{5}{6}}$ という具合いに依存するはずで、これは弦理論から来る状態数 $\sim \sqrt{E}$ よりもずっと大きくなります。(つまり stringy な効果によって状態が増えると見ることもできるし、状態が減ると見ることもできるわけです。) このように考えてみると我々は非常に低エネルギーにおける、一握りの状態の対応のみを見ていたことになります。

4 AdS_3 空間上の弦理論

それでは、残りの時間をかけて AdS_3 空間上の弦理論について議論したいと思います。

今まで考えてきたのは、D1-brane と D5-brane の束縛状態でしたが、AdS_3 空間上の弦理論を考えるにあたってこの束縛状態の S 双対を考えます。そうすると D1-brane と D5-brane はそれぞれ IIB string と NS5-brane になりますから、背景は NS-NS チャージだけを持つことになり、その結果従来から知られた CFT で系を記述できることが望めるようになります。NS1/NS5-brane の

束縛状態は次のような古典解に対応します。

$$
\begin{aligned}
e^{-2\phi} &= g_6^2 Q_1/Q_5 && (4.1)\\
H_{\rm NS} &= Q_5(\epsilon_3 + *\epsilon_3) && (4.2)\\
ds^2 &= \alpha'\left(\frac{u^2}{Q_5}d\gamma d\bar{\gamma} + \frac{Q_5}{U^2}dU^2 + Q_5 d\Omega_3^2\right) + \frac{1}{g_6\sqrt{v}}ds_{K3}^2 && (4.3)
\end{aligned}
$$

この解は昨日紹介した D1/D5-brane 解の S 双対を取ったものです。注目すべきことは、メトリック中の AdS_3 空間のサイズや、3-form 場の強さなどには Q_5 のみがあらわれていて、Q_1 があらわれてこないという点で、これは D1/D5-brane の場合と非常に異なっています。Q_1 は dilaton の表式中にしか現れてきません。上の表式で例えば昨日のように $g_6 \to \infty$ とすると $K3$ の大きさが大きくなってしまい、KK スペクトラムを考えるときに $K3$ の存在が無視できなくなってしまいます。このことから S 双対をとったために、モジュライ空間全体の中で昨日とは全く違う領域における議論をしていることになります。最近では RR チャージを持った AdS 空間上の GS タイプの弦理論の作用が幾つか分かってきていますが、それらを量子化して超重力理論の近似からの補正を求めるまでには到っていません。したがって NS1/NS5-brane 解上の弦理論は元々のセッティングとは違うものではあるけれど、弦理論の量子化を行える数少ない例の一つとして興味深いのです。

NS1/NS5 チャージを持った AdS_3 空間上の弦理論を扱った論文として主要なものに Giveon, Kutasov and Seiberg の仕事 [21] があります。これを振り返ってみましょう。要点のみを見るために $S^3, K3$ の部分を忘れて、残った AdS_3 空間にのみ注目します。さらにこれをユークリッド化した空間 $\simeq SL(2,\mathbf{C})/SU(2)$ を考えます。この空間上の弦理論の作用は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
S &= Q_5 \int \left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + e^{2\phi}\partial\bar{\gamma}\bar{\partial}\gamma\right)\\
&\sim \frac{1}{2}\int\left(\partial\phi\bar{\partial}\phi + \beta\bar{\partial}\gamma + \bar{\beta}\partial\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}e^{-2\phi/\alpha_+} - \frac{2}{\alpha_+}\phi\sqrt{g}R\right) && (4.4)
\end{aligned}
$$

上の表式で一行めを見ますと、$\gamma, \bar{\gamma}$ の運動項は NS-NS 2-form の寄与を含んでいますが、このような簡単な形になります。これを、補助場を導入してさらに自由場による議論をしやすくしたのが 2 行めになっています。2 行めで右辺の第 4、5 項を忘れますと、作用はよく知られた自由場の作用に帰着します。まず第 4 項は string の世界面が AdS 空間の端付近にいると考えると、ϕ が大きいために無視してよくなります。また第 5 項は higher genus からの寄与の大きさに関わりますが、string の世界面が AdS 空間の端付近にいる時は弦の結合定数が小さいことになります。結局 AdS 空間の端付近では上の作用が自由場の作用に帰着するといえます。

自由場近似のもとでは次のような $SL(2,\mathbf{R})$ カレント演算子があることが分かります。

$$
J^- = \frac{1}{2}\beta \qquad (4.5)
$$

$$J^3 = \frac{1}{2}(\beta\gamma - \alpha_+\partial\phi) \tag{4.6}$$

$$J^+ = \frac{1}{2}\left(\beta\gamma^2 - 2\alpha_+\gamma\partial\phi - \alpha_+^2\partial\gamma\right) \tag{4.7}$$

この表式はよく知られた Wakimoto 表示のものです。この理論において Giveon, et.al が見つけたのは次のようなことです。

1. 次のような vertex operators がある：

$$V_{jm\bar{m}} = \gamma^{j+m}\bar{\gamma}^{j+\bar{m}}e^{2j\phi/\alpha_+}. \tag{4.8}$$

   但し、Giveon, et.al は自由場近似のもとで議論しています。
2. boundary CFT の Virasoro 代数の生成子が次のように worldsheet の自由度で書ける。

$$-L_n = \oint\left((n+1)J^3\gamma^n - nJ^-\gamma^{n+1}\right) \tag{4.9}$$

   この演算子のセットも自由場近似のもとで求められたもので、例えば background charge 演算子と可換ではありません。ですから完全な弦理論の中には自由場近似で得られるもの以上のものが含まれていると考えなければなりません。
3. 上の Virasoro 代数の center が $c = 6Q_1Q_5$ となる。ただし次の式を仮定せねばならない。

$$\oint\frac{\partial\gamma}{\gamma} = Q_1 \tag{4.10}$$

上の式 (4.10) を仮定することは、弦理論の乗っている世界面として AdS 空間の境界に Q_1 回巻き付いた、特殊なものを考えなければならないということになります。これはチャージ Q_1 を稼ぐためには必要なことですが、この条件を課して果たして無矛盾な弦理論が相互作用も込めて定式化できるのかという問題が出てきます。

また、上の条件式は閉路上の積分として定義されていますが、この閉路についてもよく分かりません。3 次元 AdS 空間の境界というのは 2-球面であることが知られています。Minkowski で考えた場合は境界を円筒であると思うこともでき、その場合はその円筒に弦が巻き付いている状態を想像することもできますが、その場合でも弦の相互作用によって円筒に巻き付いた閉路を 0 に変形することもできるだろうと考えられるのです。

この他の疑問として、AdS 空間上の弦理論の Hilbert 空間の中に、上の条件式の演算子が作用して値 Q_1 を返すような状態があるのかということです。これについては最近の Hosomichi, Sugawara の論文 [22] によれば、$Q_1 = 1$ のときはそのような状態を見つけることができ、boundary CFT の真空と同定できるようなものを見つけることができるのですが、$Q_1 > 1$ のときは簡単ではないようです。

いずれにせよ上のような条件が AdS 空間上の弦理論を考えるときに自然にでてくる条件なのか、あるいは自由場近似で得られた結果がそのままもとの (近似のない) 理論にもそのままいえるのかどうかについては分かりません。

したがって、Giveon, et.al. の議論に対しては次にあげるような問題がまだ残っています。

1. どうして自由場の議論でよいのか。そして自由場の議論を越えた議論をするにはどうしたらよいか。
2. 本当は AdS 空間上の弦理論の第 2 量子化をしなければならないはずなのに、Giveon, et.al. の議論では第 1 量子化しか行っていないのではないか。前に超重力理論のスペクトラムを考えたときは、L_{-2} 等の演算子が一種の粒子と見なされていました。これはつまり、boundary CFT の Virasoro 代数を考えるときは弦理論の第 2 量子化をするべきだと思われるのです。
3. 式 $\oint \partial\gamma/\gamma = Q_1$ をどう解釈するか。
4. 理論のスペクトラムの問題。Giveon, et.al. の議論では AdS 空間上の弦理論は level=Q_5 の WZW 理論になりますから、Hilbert 空間にはスピンが Q_5 までの状態しか有り得ません。しかし boundary CFT にはスピンが Q_1Q_5 までの状態があるはずで、合っていません。Giveon, et.al. によれば足りない状態はある種の marginal bound states からなっていると考えられていますが、これは足りない 1 粒子状態を補うために bound states を当てているのであって、それらの積によって多粒子状態を作ったりするのはおかしいと思われます。
5. Kutasov, Larsen, Leigh が最近指摘した、スペクトラムの不一致の問題 [23]。これは K3 を T^4 に置き換えた理論で、T^4 方向の運動量を持った状態を考えると、AdS 空間上の弦理論からの結果は boundary CFT からの予想と ($Q_5 > 1$ のときは) 一致しないことが指摘されています。

そこで、これらの問題の幾つかに答を与えるものとして、私の H. Ooguri, H. Robins, J. Tannenhauser との最近の論文 [6] の紹介をしたいと思います。実際はこの中ではスペクトラムについての議論はしていないので、上の 4 つ目や 5 つ目についての答を与えることはできませんが、我々は central charge の起源について Giveon, et.al とは全く異なる考え方をとっているので、我々の議論にしたがってこれらの問題を考えてみることによってあるいは解決するかも知れないと思っています。

まず、次のような vertex operator を導入します。これは今までに現れた場の自由度に加えて、パラメータ $x, \bar{x}$ に依っています。

$$V_j(z, x, \bar{x}, \gamma, \bar{\gamma}) = \left((\gamma - x)(\bar{\gamma} - \bar{x})e^{\phi/\alpha_+} + e^{-\phi/\alpha_+}\right)^{2j} \tag{4.11}$$

この vertex operator は ϕ が大きいときは Giveon, et.al. の定義したものと同じになりますが、ϕ が有限の時は違ってきます。この演算子のよい性質は、表式のなかの $\phi, \gamma, \bar{\gamma}$ に $SL(2, \mathbf{C})$ 変換 (Euclidean AdS 空間のアイソメトリー) を施した結果が、パラメータ $x, \bar{x}$ に $SL(2, \mathbf{C})$ 変換を施

したのと同じ結果になることです。

$$J^a(z)V_j(w,\bar{w};x,\bar{x}) \sim \frac{1}{z-w}D^a V_j(w,\bar{w};x,\bar{x}) \tag{4.12}$$

$$D^- = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D^3 = x\frac{\partial}{\partial x} - j, \quad D^+ = x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2jx. \tag{4.13}$$

この vertex operator を使って相関関数を計算することにします。相関関数を古典近似で計算するには、弦理論の作用を最小にするような弦の worldsheet を求めればよいのですが、上の V_j の相関関数の計算の場合、考える worldsheet は次のようなものになります。(図 2)

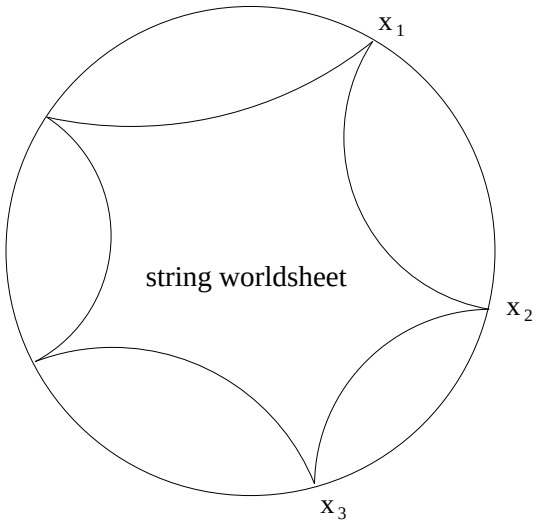

図 2: 境界に演算子が挿入された場合の、弦の世界面の古典的配位

このような図形は、通常の AdS/CFT の議論の時に書かれる Feynman 図形の弦理論版になっていて、Bulk to Bulk とか Bulk to Boundary とかのプロパゲータの塊が 1 枚の worldsheet になっていると見なせます。この図のように、AdS 空間の境界の幾つかの点に V_j が挿入されているとき、その点において弦の worldsheet は AdS 空間の境界に接しています。V_j の持つパラメータ $x, \bar{x}$ は、境界上で演算子の挿入された位置座標を表しています。また worldsheet が 0 より大きな genus を持っている場合も考えることができます。

このように考えると、boundary CFT の相関関数を worldsheet 上の理論でどのように計算すればよいのかが明らかになってきます。それは次のように表されるでしょう。

$$\left\langle \prod_i \int d^2 z_i V_{j_i}(z_i,\bar{z}_i;x_i,\bar{x}_i) \right\rangle_{\text{worldsheet}} = \left\langle \prod_i V_{j_i}(x_i,\bar{x}_i) \right\rangle_{\text{boundary CFT}} \tag{4.14}$$

上のアイデアにしたがって実際に計算する際に重要なのが、vertex operator に対して次のように「波動関数繰り込み」を行わねばならないことです。

$$V_j^{\rm ren} = \varepsilon^{8j^2} V_j \tag{4.15}$$

ここで ε は UV cutoff です。興味深いのは幾つかの場合に我々は $e^{-\phi/\alpha_+}$ が小さいと思って近似的議論をしますが、この量について subleading な項たちは皆 ε を 0 に飛ばすと 0 になっているということです。このようにして、Giveon, et.al では与えられなかった、超重力への補正を計算する方法が与えられたことになります。

では Virasoro 代数はどうなるかといいますと、これは Brown, Henneaux にしたがって、AdS 空間上で次のようなベクトル場を考えることから始めます。

$$\begin{aligned}
\xi^\gamma &= -\gamma^{n+1} + \mathcal{O}(e^{-4\phi}) \\
\xi^{\bar\gamma} &= \frac{1}{2} n(n+1)\gamma^{n-1} e^{-2\phi} + \mathcal{O}(e^{-4\phi}) \\
\xi^\phi &= \frac{1}{2}(n+1)\gamma^n + \mathcal{O}(e^{-2\phi})
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Brown, Henneaux によれば、上のベクトル場で定義される座標変換のそれぞれに対して、ADM type の電荷を定義すると、それらの満たす代数が Virasoro 代数になります [16]。これは Brown, Henneaux の Virasoro 代数として最近はよく知られているものです。ですからこの Virasoro 演算子や、boundary CFT のストレステンソルに対応する worldsheet 上の演算子は、上の座標変換に対応する graviton の vertex operator だと思うのが自然です。

$$T = \int d^2z \left(\frac{1}{(\gamma - x)^3}(\partial\gamma\bar\partial\phi - \bar\partial\gamma\partial\phi) - \frac{3}{(\gamma - x)^4}\partial\gamma\bar\partial\gamma \right) \tag{4.17}$$

さて、通常は座標変換に対応する graviton の vertex operator は、pure gauge ですから BRST exact です。したがってこれを $\delta_{\rm BRS}$(something) と書くことができます。しかし something が規格化可能でない場合は、このような演算子を完全に理論から decouple すると結論づけることはできません。このことはまさに、ストレステンソルが singleton と呼ばれる自由度であることをいっています。つまりこれらは bulk を伝搬する自由度ではないけれども、これらの自由度を完全に消し去ることはできず、結局境界上の自由度として残ることになるのです。

AdS/CFT 対応からいえるのは、worldsheet 上の理論の相関関数に上の T を挿入したものは、boundary CFT の相関関数にストレステンソルを導入したものに対応するということです。その中でとくに、boundary CFT の Virasoro Ward identiry が worldsheet 上の理論の枠内でどのように見えるかを考えてみましょう。

例えば、AdS 空間の座標変換を考えてみましょう。これは worldsheet 上の理論にとっては、理論にあらわれる場 $\phi, \gamma, \bar\gamma$ を新しい場のセットで書き直すことにあたります。この操作が経路積分

表示で書かれた相関関数をどのように変化させるかを考えましょう。まず作用の変化分は、相関関数に graviton の vertex (=ストレステンソル) を挿入したもので表されます。そのほかに、相関関数に現れる vertex operator それぞれの変化分からの寄与があります。式で書くと次のようになるでしょう。

$$0 = \langle TV_1 \cdots V_n \rangle + \sum_j \langle V_1 \cdots \delta V_j \cdots V_n \rangle \tag{4.18}$$

上の表式中で vertex operator の変化分は次のようになります。

$$\begin{aligned} \delta_\xi V_{j_i} &= -\left(\frac{-j_i}{(x-x_i)^2} + \frac{1}{x-x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \right) V_{j_i}(x_i) \\ &\quad -\frac{j_i(\gamma-x_i)^2}{(\gamma-x)^3(x-x_i)^2} \left(e^{\phi}(\gamma-x_i)(\bar{\gamma}-\bar{x}_i) + e^{-\phi} \right)^{2j_i-1} R \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$R = e^{-\phi}(\gamma - 3x + 2x_i) + e^{\phi}(\gamma - x_i)(\bar{\gamma} - \bar{x}_i)(\gamma - x) \tag{4.20}$$

第 1 項は boundary CFT の Virasoro 演算子の作用として自然な形ですが、それに加えておつりがでてきます。しかしこのおつりは先ほどふれたように、cutoff を飛ばす極限で消える項になっており、結局第 1 項のみが残ります。このようにして、boundary CFT の Virasoro Ward identity がどのように worldsheet theory の中で見えるかが分かったと思います。

さて、相関関数に挿入された演算子 T は d^2z 積分の形で書かれていますが、これは座標変換に対応する電荷ですので、運動方程式に比例する項と全微分項の 2 つの和に書き直せます。このうち運動方程式に比例する項は 0 とおいてしまえばよいのですが、全微分項のほうは、reguralization の操作を worldsheet に穴を開ける操作と思うならば、その穴のまわりの次のような閉路積分に書き換えられます。

$$\sum_i \oint_{z_i} dz \left(\frac{-1}{\gamma - x} e^{2\phi} \partial\bar{\gamma} + \frac{-1}{2(\gamma-x)^2} \partial\phi \right) + \sum_i \oint_{z_i} d\bar{z} \left(\frac{-1}{(\gamma-x)^3} \bar{\partial}\gamma + \frac{-1}{2(\gamma-x)^2} \bar{\partial}\phi \right) \tag{4.21}$$

この閉路積分の表式を調べると、実は Giveon, et.al. の表式と等価であることも分かるのです。

最後に、center がどのようにあらわれるかです。これは T が 2 回挿入された相関関数を評価することにより調べることができます。(図 3)

するとでてくるのは、$\gamma^{-1}\partial\gamma$ の、vertex operator の挿入された各点を囲む閉路に沿った積分という量です。しかしこれは普通 0 になりますから、結局得られるのは、center が 0 の Ward identity です。

ここで思い出さねばならないのは、我々は実際は AdS 空間上の第 2 量子化された弦理論を考えるべきだということです。すると今まで考えてきた相関関数などは全て 1 枚のつながった worldsheet 上で計算されていたことに気付くでしょう。すると、そのような 1 枚の worldsheet からの寄与と同時に、幾つかの離れた部分からなる worldsheet からの寄与も合わせ考えないといけません。例え

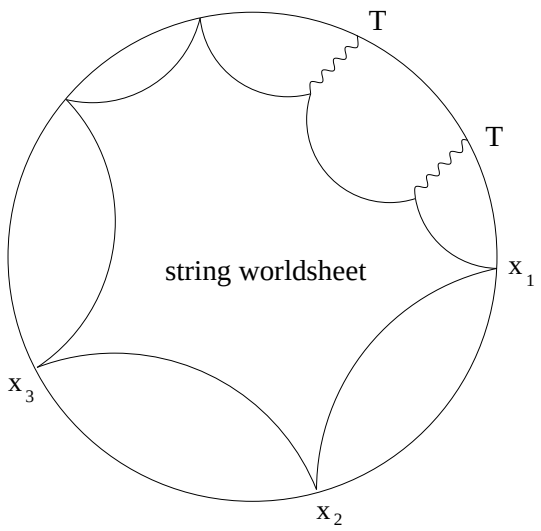

図 3: $< TTV...V >$ 相関関数に効くグラフ (1)：worldsheet が 1 枚からなっている場合

ば、$< TTV \cdots V >$ という相関関数への寄与の中で、TT と $V \cdots V$ がそれぞれ別々の worldsheet の上に乗っかっている場合を考えてみましょう。(図 4) この場合は worldsheet が 2 個の連結成分 $(\simeq S^2)$ からなっていますから、1 個の連結な worldsheet$(\simeq S^2)$ の場合に比べて $1/g^2$ だけの余分な因子を生ずることが分かります。実は $1/g^2 = Q_1\sqrt{Q_5}$ なのですが、worldsheet 上の理論にしたがって相関関数をあらわに計算することにより余分に $\sqrt{Q_5}$ の因子がでてくることが期待され、ちゃんと計算すれば $c = 6Q_1Q_5$ が導けるであろうと期待されます。

我々の扱い方のよいところは、Q_1 への依存性が複数の連結部分からなる worldsheet を考えることによって自然にでてくることです。これに対して Giveon, et.al の扱い方では弦の worldsheet として AdS 空間の境界に Q_1 回巻き付いているという特殊な配位を考えない限り、理論に Q_1 を登場させることができません。

最後に一つコメントしておきます。AdS 空間上の第 2 量子化された弦理論を考える方法として、AdS 空間上の Matrix string 理論を考えるというのは興味深いテーマでしょう。もしそれができたとすると、Giveon, et.al の議論はその中の "Maximally twisted sector", つまり Q_1 本の弦が 1 本の長い弦につながってしまったセクターを考えていることになっているはずです。このような議論は今のところなされていませんが、今日紹介した議論ほど簡単ではないことは確かです。今後この方面で進展のあることも期待されます。

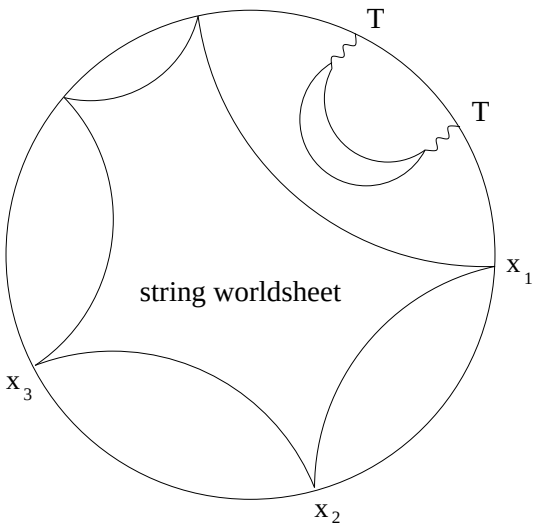

図 4: $< TTV...V >$ 相関関数に効くグラフ (2)：worldsheet が 2 枚の連結成分からなっている場合

参考文献

[1] J. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity", hep-th/9711200.

[2] C. Vafa, "Gas of D-Branes and Hagedorn Density of BPS States", Nucl. Phys. **B463** (1996) 415, hep-th/9511088.

[3] A. Strominger and C. Vafa, "Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy", Phys. Lett. **B379** (1996) 99, hep-th/9601029.

[4] J. de Boer, "Six-Dimensional Supergravity on $S^3 \times AdS_3$ and 2d Conformal Field Theory", hep-th/9806104.

[5] J. de Boer "Large N Elliptic Genus and AdS/CFT Correspondence", hep-th/9812240.

[6] J. de Boer, H. Ooguri, H. Robins and J. Tannenhauser, "String Theory on AdS_3", hep-th/9812046.

[7] G. Horowitz, J. Maldacena and A. Strominger, "Nonextremal Black Hole Microstates and U-duality", Phys. Lett. **B383** (1996) 151, hep-th/9603109.

[8] J. Maldacena and A. Strominger, "AdS_3 Black Holes and a Stringy Exclusion Principle", hep-th/9804166.

[9] S.F. Hassan and S.R. Wadia "Gauge Theory Description of D-brane Black Holes: Emergence of the Effective SCFT and Hawking", Nucl. Phys. **B526** (1998) 311, hep-th/9712213.

[10] R. Dijkgraaf, "Instanton Strings and HyperKähler Geometry", hep-th/9810210.

[11] E. Witten, "On the Conformal Field Theory of the Higgs Branch", hep-th/9707093.

[12] J. Maldacena, J. Michelson and A. Strominger, "Anti-de Sitter Fragmentation", hep-th/9812073.

[13] H.J. Kim, L.J. Romans and P. van Nieuwenhuizen, "Mass Spectrum of Chiral Ten-Dimensional $\mathcal{N} = 2$ Supergravity on S^5", Phys. Rev. **D32** (1985) 389.

[14] M. Günaydin and N. Marcus, "The Spectrum of the S^5 Compactification of the Chiral $\mathcal{N} = 2$, $D = 10$ Supergravity and the Unitary Supermultiplets of $U(2|2,4)$", Class. Quantum Grav. **2** (1985) L11.

[15] A. Salam and J. Strathdee, "On Kaluza-Klein Theory", Ann. Phys. **141** (1982) 316.

[16] J. D. Brown and M. Henneaux, "Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotoic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity", Commun. Math. Phys. **104** (1986) 207.

[17] L. Göttsche and W. Soergel, "Perverse Sheaves and the Cohomology of Hilbert Schemes of Smooth Algebraic Surfaces", Math. Ann. **296** (1993) 235.

[18] T. Eguchi, H. Ooguri, A. Taormina and S. -K. Yang, "Superconformal Algebras and String Compactification on Manifolds with $SU(N)$ Holonomy", Nucl. Phys. **B315** (1989) 913.

[19] T. Kawai, Y. Yamada and S. -K. Yang, "Elliptic Genera and $\mathcal{N} = 2$ Superconformal Field Theory", Nucl. Phys. **B414** (1994) 191, hep-th/9306096.

[20] R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde and H. Verlinde, "Elliptic Genera of Symmetric Products and Second Quantized Strings" Commun. Math. Phys. **185** (1997) 197, hep-th/9608096.

[21] A. Giveon, D. Kutasov and N. Seiberg, "Comments on String Theory on AdS_3", hep-th/9806194.

[22] K. Hosomichi and Y. Sugawara, "Hilbert Space of Space-time SCFT in AdS_3 Superstring and T^{4kp}/S_{kp} SCFT", hep-th/9812100.

[23] D. Kutasov, F. Larsen and R. G. Leigh, "String Theory in Magnetic Monopole Background", hep-th/9812027.