特定領域研究（Ｂ）７０７「超対称性理論」

会議録シリーズ No.8

PROCEEDINGS of Workshop on

Noncommutative Geometry in String Theory and Field Theories

２００１年2月１９日~２１日

京都大学・基礎物理学研究所

October, 2001

PROCEEDINGS of Workshop on

Noncommutative Geometry
in
String Theory and Field Theories

February 19–21, 2001

Yukawa Institute for Theoretical Physics
Kyoto University

Editors

Hiroshi Ishikawa
Mitsuhiro Kato
Teruhiko Kawano
Ryu Sasaki
Seiji Terashima
Satoshi Watamura

目 次

序文 i

プログラム iii

Matrix Model and Noncommutative Geometry ..... 石橋 延幸 1

Geometrical Aspects of Noncommutative Soliton ..... 松尾 泰 15

Deformation quantization の収束について ..... 前田 吉昭 37

Through the Instantons on Noncommutative $\mathbf{R}^4$ ..... 古内 一之 51

Noncommutative Tachyon
from Boundary String Field Theory ..... 奥山 和美 57

トーラス上の非可換ソリトンとタキオン凝縮 ..... 梶浦 宏成 62

Noncommutative geometry in SU(2) WZW-model
via tachyon condensation ..... 高柳 匡 72

Noncommutative Monopoles and Nonlinear Monopoles ..... 森山 翔文 79

Exact BPS Solitons in Noncommutative Gauge Theories ..... 浜中 真志 85

Dp-Dp' branes with B-field ..... 松尾 俊寛 101

Noncommutative Open String (NCOS) and OM Theory ..... 寺嶋 靖治 106

序文

昨年度行われた基礎物理学研究所のリーダーシップ経費に基づく小規模研究会「非可換幾何学と弦理論」(2000 年 2 月 17 日—19 日) は講師及び参加者の協力により非常に有意義な研究会になった。これを受けて、今年度も同じテーマについての研究会を科学研究費 (特定 B「超対称性と素粒子の統一理論」: 代表 江口徹) による研究活動の一環として上記の日程で京都大学 基礎物理学研究所において開催された。なお、これは基研の２０００年度後期研究計画として認められた研究会でもある。

摂動論の範囲でしかこれまで明らかではなかった超弦理論において、D ブレインが、その強結合状態での様相を最近の発展の中で明らかにしてきた。このブレインにおいて、基本弦と直接結合している 2 階の反対称テンソルが背景場として存在すると、そのブレイン上の空間が非可換幾何で記述されることが発見された。また、低エネルギー極限では、これらのブレインはゲージ場の理論によって記述されるため、今の場合には、そのような理論は非可換な空間上の場の理論になっていることがわかる。そのため、これまでも非可換な空間上の場の理論は研究されてきたが、これらの新たな弦理論からの動機づけによって、これまであまり研究されてこなかった部分について活発な研究が昨今行われてきた。また、開基本弦に存在するタキオンが、開弦がその端をもつブレインの不安定性に関係していることが認識されてきた。このタキオンが凝縮を起こして安定な真空やさらに次元の低いブレインに遷移するダイナミックスなどを明らかにする上で、その解析が容易になることから非可換な場の理論を用いられた。この方向での研究によって非可換な場の理論の興味ある性質が明らかになった。

この研究会では、上で述べた最近の弦理論の発展と非可換幾何学との豊かな交流を踏まえ、ある程度勉強会的な雰囲気の中で、非可換幾何学についての理解を深めるための講義や最新の研究成果に関するセミナー等を行った。また、数学における非可換幾何の知識を深める目的で、講師として数学の方を 2 名講師として招待した。物理サイドでは弦理論や場の理論の非可換幾何に関する分野で活発に研究されている方を講師としてお願いし、この 2 ~ 3 年間における発展をレビューを交えながら、各講師の方自身の研究を紹介していただく形をとった。参加者については、約７０名以上の方に参加して頂き、好評であった。最後に、スピーカーの方々、及び、参加してくださった皆様に世話人から感謝を申し上げます。

2001 年 10 月

研究会世話人

石川 洋 (東北大理), 加藤 光裕 (東大駒場), 川野 輝彦 (東大本郷),
佐々木 隆 (京大基研), 寺嶋 靖治 (東大本郷), 綿村 哲 (東北大理)

プログラム

2 月 19 日 (月)

9:30–11:30 石橋 延幸 (KEK) 講義
行列模型と非可換幾何
12:00–12:30 古内 一之 (KEK)
Through the Instantons on Noncommutative R^4
14:00–14:30 奥山 和美 (KEK)
Boundary String Field Theory (仮)
14:30–15:00 梶浦 宏成 (東大数理)
トーラス上の非可換ソリトンとタキオン凝縮
15:30–17:00 森吉 仁志 (慶応大理工) 講義
非可換幾何学と K 理論：入門から実例まで

2 月 20 日 (火)

9:30–11:30 松尾 泰 (東大理) 講義
Geometrical aspects of noncommutative soliton
12:00–12:30 高柳 匡 (東大理)
Noncommutative geometry in SU(2) WZW-model via tachyon condensation
14:00–15:30 森吉 仁志 (慶応大理工) 講義
非可換幾何学と K 理論：入門から実例まで (続き)
16:00–17:30 前田 吉昭 (慶応大理工) 講義
変形量子化とその収束

2 月 21 日 (水)

9:30–11:00 前田 吉昭 (慶応大理工) 講義
変形量子化とその収束 (続き)
11:30–12:00 森山 翔文 (京大理)
Noncommutative Monopoles and Nonlinear Monopoles
12:00–12:30 浜中 真志 (東大理)
Exact BPS solitons in Noncommutative gauge theories
14:00–14:30 松尾 俊寛 (阪大理)
Dp-Dp' brane with B-field
14:30–15:00 寺嶋 靖治 (東大理)
Noncommutative Open String (NCOS) and OM Theory

Matrix Model and Noncommutative Geometry

KEK Nobuyuki Ishibashi
E-mail: ishibash@post.kek.jp

We discuss the relation between matrix models and noncommutative Yang-Mills theory and its possible application to noncommutative membrane theory.

1 Introduction

What I want to discuss in this talk is the relation between matrix model and noncommutative Yang-Mills theory(NCYM). This relation has been discussed in the following three contexts.

1. Compactification of matrix models.[1]
2. D-branes in a constant $B_{\mu\nu}$ background.[2]
3. D-branes as a configuration of infinitely many lower dimensional branes. [3, 4, 5, 6, 7]

These three points of view are interrelated. In this talk, I take the third one and explain various phenomena from this point of view in the first half. Then in the latter half of the talk, I would like to discuss the relation between NCYM and membrane theory. Results presented in the latter half are obtained from discussions with M. Hayakawa and K. Okuyama.

2 Matrix Model and NCYM

2.1 From Matrix Model to NCYM

In this section, we will show that we can obtain NCYM by considering matrix models around a particular background. Let us consider the matrix model action

$$I = -\frac{1}{4} Tr([\phi^m, \phi^n])^2, \tag{2.1}$$

as an example. Here ϕ^m are $N \times N$ hermitian matrices and m, n $(= 1, \cdots, D)$ denote the directions in spacetime. A supersymmetrized version of such a model was proposed in [8] and can be used as a nonperturbative definition of Type IIB superstring theory. In such a context, how to take the limit $N \to \infty$ is a big problem. Here let us ignore this problem and simply set $N = \infty$, namely consider ϕ^m as operators acting on a Hilbert space. To be more concrete, we introduce operators $\hat{x}^\mu$, $(\mu = 1 \cdots, d)$ satisfying $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$, where $\theta^{\mu\nu}$ is a constant invertible $d \times d$ matrix. $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$ and $d = 2n$ is even. We take ϕ^m to be functions of these operators. Moreover we take ϕ^m to be of the following form:

$$\begin{aligned} &\phi^\mu = \hat{x}^\mu + \theta^{\mu\nu} \hat{A}_\nu(\hat{x}), \\ &\phi^i = \phi^i(\hat{x}) \ (i = d+1, \cdots, D). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Namely, ϕ^m are expanded around a background $\phi^\mu = \hat{x}^\mu$, $\phi^i = 0$ and the fluctuations are functions of $\hat{x}$.

Since $\hat{x}$ are noncommutative, we should specify the ordering of these variables to define a function of them. The most convenient way to do so in this situation is to use the Weyl-ordering. We define a function $f(\hat{x})$ corresponding to a c-number function $f(x)$ as

$$f(\hat{x}) \equiv \int \frac{d^{2n}xd^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} e^{ik\cdot(\hat{x}-x)} f(x). \tag{2.3}$$

The ordering of $\hat{x}$ which gives $f(\hat{x})$ from $f(x)$ is the Weyl-ordering. Then one can derive the following formula:

$$f(\hat{x})g(\hat{x}) = \int \frac{d^{2n}xd^{2n}k}{(2\pi)^{2n}} e^{ik\cdot(\hat{x}-x)} f*g(x), \tag{2.4}$$

$$Trf(\hat{x}) = \int \frac{d^{2n}xd^{2n}k}{(2\pi)^{n}\sqrt{|\det\theta|}} f(x), \tag{2.5}$$

where

$$f*g(x) \equiv e^{\frac{i}{2}\partial_1\wedge\partial_2} f(x_1)g(x_2)|_{x_1=x_2=x}, \tag{2.6}$$
$$(\partial_1\wedge\partial_2 \equiv \theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\frac{\partial}{\partial x_2^\nu}).$$

¿From now on, let us rewrite all the matrices $\phi^m(\hat{x}), \hat{A}_\mu(\hat{x})$ etc. in terms of the corresponding c-number fields $\phi^m(x), \hat{A}_\mu(x)$ etc.. Using the above formulae, we can rewrite the action as

$$I = -\frac{1}{4g^2}\int \frac{d^{2n}xd^{2n}k}{(2\pi)^{n}\sqrt{|\det\theta|}} ([\phi^m,\phi^n])^2_*. \tag{2.7}$$

Or in terms of $\hat{A}_\mu$ the action becomes of the form

$$\int d^{2n}x\sqrt{G}[\frac{1}{4}G^{\mu\rho}G^{\nu\sigma}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}G^{\mu\nu}D_\mu\phi^i D_\nu\phi^i - \frac{1}{4}([\phi^i,\phi^j])^2]_*, \tag{2.8}$$

up to an overall constant and total derivative terms. Here

$$\hat{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu,\hat{A}_\nu],$$
$$D_\mu\phi^i \equiv \partial_\mu\phi^i - i[\hat{A}_\mu,\phi^i], \tag{2.9}$$

and $G^{\mu\nu} = -(\theta^2)^{\mu\nu}$ works as a constant metric, which can be taken to $\delta_{\mu\nu}$ by changing the coordinates as $x^\mu \to \theta^{\mu\nu}x_\nu$, We have an action which looks quite like the Yang-Mills action. Indeed we have a gauge invariance

$$\delta\hat{A}_\mu = D_\mu\epsilon, \tag{2.10}$$
$$\delta\phi^i = i[\epsilon,\phi^i], \tag{2.11}$$

which stems from the $U(\infty)$ invariance of the original matrix action. This is the action of the noncommutative Yang-Mills theory.

Therefore we have shown that NCYM appears when one takes a particular background in a matrix model with the action eq.(2.1). It is straightforward to generalize this procedure to other matrix models. For example, we can consider the matrix quantum mechanics with action[9]

$$\int dt Tr(\frac{1}{2}(D_0\phi^m)^2 + \frac{1}{4}([\phi^m, \phi^n])^2). \tag{2.12}$$

Here $\phi^m(t)$ are matrix variables depending on the time t. After manipulations similar to the above, we obtain the three dimensional NCYM action:

$$\int d^3\sigma(-\frac{1}{4}\hat{F}^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^i)^2 + \frac{1}{4}([\phi^i, \phi^j])^2)_* \tag{2.13}$$

This action is relevant to noncommutative membrane theory discussed later.

2.2 NCYM from String Theory

Since D-branes can be described by using matrix models in the low energy limit, it is conceivable that NCYM can be derived from string theory. A matrix model with $N \times N$ matrix variables corresponds to N D-branes. Therefore we should start from the situation where there are infinitely many D-branes. For example, the action eq.(2.1) with $D = 26$ corresponds to D-instantons in bosonic string theory. ϕ^m correspond to collective coordinates of D-instantons. Hence, in order to obtain NCYM, we should consider ∞ D-instantons in a background

$$\begin{aligned} \phi^\mu &= \hat{x}^\mu, \\ \phi^i &= 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

with $\hat{x}^\mu$ satisfying $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ and take the limit $\alpha' \to 0$.

It is possible to show that this configuration of D-instantons is equivalent to a D$(d-1)$-brane. In string theory, a D-instanton at the origin corresponds to open string theory with Dirichlet boundary conditions $X^m|_{\sigma=0,\pi} = 0$. The configuration eq.(2.14) corresponds to such a Dirichlet open string theory deformed by vertex operators. Therefore the worldsheet action we should consider is

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8\pi}\int dt d\sigma \partial_a X^m \partial^a X_m \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma=0} dt \partial_\sigma X^\mu x_{0\mu} - \frac{1}{2}\int_{\sigma=0} dt x_0^\mu \partial_t x_0^\nu \omega_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma=\pi} dt \partial_\sigma X^\mu x_{\pi\mu} + \frac{1}{2}\int_{\sigma=\pi} dt x_\pi^\mu \partial_t x_\pi^\nu \omega_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

where $\omega_{\mu\nu} = (\theta^{-1})_{\mu\nu}$ and we have put $\alpha' = 2$. $x^\mu_{0,\,\pi}$ are the degrees of freedom living on the boundary $\sigma = 0,\ \pi$. Quantizing them with the kinetic term $\int dt x^\mu \partial_t x^\nu \omega_{\mu\nu}$, we get the canonical commutation relation $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$. Since this action is quadratic, it is essentially free and we can prove that open string theory with this action with boundary conditions $X^m|_{\sigma=0,\pi} = 0$ is

equivalent to the one with the action

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8\pi}\int dtd\sigma\partial_a X^m\partial^a X_m \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\sigma=0} dtX^\mu\partial_t X^\nu\omega_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\int_{\sigma=\pi} dtX^\mu\partial_t X^\nu\omega_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

with boundary conditions $\partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0,\pi}=0,\ X^i|_{\sigma=0,\pi}=0$.[3] Such an open string theory corresponds to a D$(d-1)$-brane with $F_{\mu\nu}=\omega_{\mu\nu}$ on the worldvolume.

It is straightforward to generalize the discussions in this subsection and obtain various D-branes. For example, the three dimensional NCYM appeared in the last part of the previous subsection can be obtained by considering a configuration of ∞ D0-branes to make a D2-brane.

One can consider more general situations. Let us consider ∞ D-instantons with the configuration eq.(2.14) in a constant $g_{\mu\nu},\ B'_{\mu\nu}$ background. In the same way as above, we can show that this configuration is equivalent to a D$(d-1)$-brane with $F_{\mu\nu}=\theta^{-1}_{\mu\nu}$ in the background $g_{\mu\nu},\ B'_{\mu\nu}$, which is gauge equivalent to a D$(d-1)$-brane with $F_{\mu\nu}=0$ in $g_{\mu\nu},\ B_{\mu\nu}=B'_{\mu\nu}+\theta^{-1}_{\mu\nu}$. The worldvolume action of this configuration for slowly-varying fields can be obtained from the D-instanton description as

$$\sqrt{\det(G_{\mu\nu}+2\pi\alpha'(\hat{F}+\Phi)_{\mu\nu})_*}, \tag{2.17}$$

where $G_{\mu\nu}$ and $\Phi_{\mu\nu}$ are symmetric and antisymmetric respectively with respect to $\mu\leftrightarrow\nu$ and

$$\frac{1}{G+2\pi\alpha'\Phi}=-\frac{\theta}{2\pi\alpha'}+\frac{1}{g+2\pi\alpha' B}. \tag{2.18}$$

$G_{\mu\nu}$ is the so-called open string metric which governs the dynamics of $\hat{A}_\mu$. From this equation, one can see that there is a way to take the limit $\alpha'\to 0$ with $G_{\mu\nu}$ fixed:

$$\begin{aligned} &\alpha'\sim\epsilon^{\frac{1}{2}}\to 0, \\ &g_{\mu\nu}\sim\epsilon\to 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

This limit is called the Seiberg-Witten limit and one can deduce NCYM from string theory using this limit.

3 Reparametrization Invariance

From the discussions in the previous section, we see that NCYM describes the worldvolume theory of a D-brane in a constant $F_{\mu\nu}$ background. Since the reparametrization invariance on the worldvolume is one of the most important aspects of the theory of an extended object, we would like to study how such a symmetry is realized in NCYM.

In order to see that closed string theory is general coordinate invariant, a quick but not so rigorous way is as follows. Let us consider string theory in a curved background. The partition function is expressed as

$$\int[dX]e^{iS}. \tag{3.1}$$

where the action S is

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu G_{\mu\nu}(X). \tag{3.2}$$

One can argue that this is invariant under the variation

$$\delta G_{\mu\nu} = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu, \tag{3.3}$$

because the variation of the action

$$\delta S = \int d^2\sigma \epsilon^\lambda \frac{\delta S}{\delta X^\lambda}, \tag{3.4}$$

is proportional to the equations of motion. Therefore one can see the general coordinate invariance at least in the limit $\alpha' \to 0$.

Let us do the same thing in the system at hand. The action we start from is eq.(2.15):

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \partial_a X^m \partial^a X_m \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} dt(\frac{1}{2}x^\mu \partial_t x^\nu \omega_{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi\alpha'}\ partial_n X^\mu x_\mu). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Here we consider the action on a worldsheet Σ with boundary $\partial\Sigma$ and t denotes the coordinate tangent to $\partial\Sigma$ and ∂_n denotes the normal derivative. The first thing we should do is to consider the system in a background. The fields on the worldvolume which can couple with this open string are $\phi^\mu,\ \phi^i,\ A_\mu$. Noticing that the above open string theory corresponds to the background $\phi^\mu = \hat{x}^\mu,\ \phi^i = 0,\ A_\mu = \frac{1}{2}\omega_{\nu\mu}x^\nu$, one can see that the action in general background is

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \partial_a X^m \partial^a X_m \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} dt(A_\mu(x)\partial_t x^\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'}\partial_n X^m \phi_m(x)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

The worldsheet path integral we deal with is

$$\int [dX dx] e^{iI}. \tag{3.7}$$

The variables x^μ are quantized and become noncommutative. As in the usual procedure of path integration, the q-number quantity $\phi_m(\hat{x})$ we can obtain from the c-number one $\phi_m(x)$ is Weyl-ordered, when $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ is a constant.

Now let us check if this path integral is invariant under the reparametrization transformation

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(x) &= -\epsilon^\nu(x)\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu \epsilon^\nu(x) A_\nu(x), \\ \delta\phi^m(x) &= -\epsilon^\nu(x)\partial_\nu \phi^m(x). \end{aligned} \tag{3.8}$$

As in the closed string case, the variation of the action is proportional to the equations of motion

$$\delta I = \int_{\partial\Sigma} dt \epsilon^\nu(x) \frac{\delta I}{\delta x^\nu}. \tag{3.9}$$

Since the Poisson bracket of x^μ deduced from the action is $\{x^\mu, x^\nu\} = (F^{-1})^{\mu\nu}$, $(F^{-1})^{\mu\nu}$ play the role of $\hbar$ in quantizing x^μ. Therefore in the limit $\alpha' \to 0,\ F_{\mu\nu} \to \infty$, the system is invariant under the transformation eq.(3.8).

However the limit we are dealing with is the Seiberg-Witten limit eq.(2.19) in which we do not take $F_{\mu\nu} \to \infty$. Hence we expect corrections to the transformation law. Indeed one can see that there should be corrections for the transformation law eq.(3.8) as follows. As we have seen in the previous section, one can realize a D$(d-1)$-brane as a configuration of ∞ D-instantons. The worldsheet action corresponding to these two descriptions are given in eqs.(2.15)(2.16). Considering the D$(d-1)$-brane as a configuration of D-instantons, the worldvolume theory is described by $\infty \times \infty$ matrices ϕ^m. In a background ϕ^m the worldsheet action of the open string theory is eq.(3.6) with $F_{\mu\nu}$ fixed to be $\omega_{\mu\nu}$. Therefore the description using D-instantons can be considered as the theory whose invariance under eq.(3.8) fixed by a condition $F_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}$. On the other hand, usually the worldvolume theory of a D$(d-1)$-brane is described by a $U(1)$ gauge field A_μ and scalars ϕ^i. Such a description can be obtained by taking a gauge fixing condition $\phi^\mu = x^\mu$ and integrating over x^μ in eq.(3.7) to implement the Neumann boundary condition for X^μ. Therefore the two descriptions corresponds to two different gauge fixing conditions of the invariance eq.(3.8). Then the gauge invariance of NCYM may be considered as the residual invariance, namely the invariance under the reparametrization transformation preserving ω. However this is not quite correct because the transformation preserving ω is the canonical transformation

$$\epsilon^\mu = \theta^{\mu\nu}\partial_\nu \epsilon, \tag{3.10}$$

and ϕ^m are transformed as

$$\delta\phi^m = \theta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^m\partial_\nu\epsilon. \tag{3.11}$$

On the other hand, the gauge transformation of NCYM is given as

$$\delta\phi^m = i[\epsilon, \phi^m]_*, \tag{3.12}$$

which coincides with eq.(3.11) only in the limit $\theta \to 0$. Namely the gauge invariance of NCYM is the "quantization" of the canonical transformation and there are "quantum corrections" when $\omega = F$ is finite. Therefore the residual invariance should be modified for finite F and so we expect the original transformation law eq.(3.8) should be modified appropriately.

Such a modification of the transformation law can be found in the paper [10]. In this paper, an associative $*$-product is given for any Poisson bracket. Let us denote the $*$-product associated with a symplectic form ω as $*_\omega$. If one changes the coordinate system, the symplectic form changes to be ω' and we obtain another associative product $*_{\omega'}$. It is known that there exists a differential operator $T = 1 + \sum \hbar^n D_n$ such that

$$T(f *_\omega g) = Tf *_{\omega'} Tg. \tag{3.13}$$

Therefore these two $*$-products are essentially equivalent and T gives the noncommutative generalization of the coordinate transformation. The explicit form of T corresponding to arbitrary coordinate change can be given in the Kontsevich's formalism.[11, 12]

Since the transformation law should be "quantized", we should quantize all the other notions. For example, in the "classical" case, a scalar field $\phi(x)$ is transformed under a change of coordinate $x^\mu \to x'^\mu$ as $\phi'(x') = \phi(x)$. The Poisson bracket $\{,\}$ is transformed to be $\{,\}'$ satisfying $\{\phi'^i, \phi'^j\}'(x') = \{\phi^i, \phi^j\}(x)$, and an action which is invariant under the coordinate transformation can be written by using the Poisson bracket. If we should quantize the transformation law, the form of the action we should consider will be as follows:

$$Tr_\omega L(\phi(x))_{*_\omega}, \tag{3.14}$$

where the subscript $*_\omega$ indicates that all the products used in the lagrangian L are $*_\omega$-products. Tr_ω denotes a trace which will be specified shortly. Under the coordinate change $x^\mu \to x'^\mu$, the symplectic form $\omega_{\mu\nu}(x)$ is transformed to $\omega'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\omega_{\rho\sigma}(x)$. Then the $*_\omega$-product is transformed as $*_\omega \to *_{\omega'}$. If one assumes that the trace Tr_ω is transformed to be $Tr_{\omega'} f = Tr_\omega T^{-1} f$, the action in eq.(3.14) is invariant under

$$\begin{aligned} \phi &\to \phi' = T\phi, & (3.15)\\ *_\omega &\to *_{\omega'}, & (3.16)\\ Tr_\omega &\to Tr_{\omega'}. & (3.17) \end{aligned}$$

Indeed one can easily prove $Tr_\omega L(\phi)_{*_\omega} = Tr_{\omega'} L(\phi')_{*_{\omega'}}$. This will be the definition of the action invariant under the "quantized" transformation law. Therefore we can generalize the matrix model actions for general ω. Or one can consider the matrix model action as the gauge fixed action with the gauge condition $\omega = \text{const.}$. Once one fixes the definition of Tr_ω for constant ω, one can obtain Tr_ω for general ω by using the above transformation law.

To summarize, we have the following generalizations of various notions:

$$\begin{aligned} & \text{classical} && \text{quantum} \\ \{f,g\} = \theta^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu g &\leftrightarrow & [f,g]_\omega = f *_\omega g - g *_\omega f, \\ \int d^{2n}x\sqrt{|\det\omega|} &\leftrightarrow & Tr_\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Action} \\ I(\omega,\phi) = \int d^{2n}x\sqrt{|\det\omega|}(\{\phi^m,\phi^n\})^2 &\leftrightarrow & -Tr_\omega([\phi^m,\phi^n]_{*_\omega})^2 \equiv Tr_\omega L(\phi)_{*_\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Coordinate Transformation} \\ \omega \to \omega' &\leftrightarrow & \omega \to \omega' \\ \phi^m \to \phi'^m &\leftrightarrow & \phi^m \to \phi'^m = T\phi^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Invariance} \\ I(\omega',\phi') = I(\omega,\phi) &\leftrightarrow & Tr'_\omega L(T\phi)_{*_{\omega'}} = Tr_\omega L(\phi)_{*_\omega} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Now what we need here is the transformation law around a background $\omega = \text{const.}$. From the

general formula, we can deduce that the transformation law $\delta\phi^m = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi^m$ is modified to be

$$\delta\phi^m = \epsilon^\mu *_2 \partial_\mu \phi^m, \tag{3.19}$$

where $*_2$ is defined as[13][14]

$$f *_2 g \equiv \frac{\sin(\frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{2})}{\frac{\partial_1 \wedge \partial_2}{2}}. \tag{3.20}$$

Indeed it is easy to check that

$$\delta\phi^m \sim \epsilon^\mu \partial_\mu \phi^m, \tag{3.21}$$

for $\theta \sim 0$ and for a canonical transformation $\epsilon^\mu = \theta^{\mu\nu}\partial_\nu \epsilon$

$$\delta\phi^m = -[\epsilon, \phi^m]_*. \tag{3.22}$$

It is possible to derive such a transformation law using the formalism developed in [15][16][17] as we will see in the next section.

4 A Derivation of the Transformation Law

The problem is to derive the differential operator T. For the Kontsevich's $*$-product corresponding to a general Poisson manifold, T is derived in the case of infinitesimal coordinate change in [11][12]. It can be calculated using an application of the method in [15]. We start from the expression of the boundary state

$$|B\rangle = \int [dx] e^{i\int d\sigma (A_\mu(x)\partial_\sigma x^\mu - P_\mu \phi^\mu(x))} |D\rangle, \tag{4.1}$$

where $|D\rangle$ is the boundary state for a D-instanton at the origin. The T-dual of the above expression is

$$|B\rangle = \int [dxdy] e^{i\int d\sigma (A_\mu(x)\partial_\sigma x^\mu - \partial_\sigma y_\mu \phi^\mu(x))} |y\rangle. \tag{4.2}$$

The noncommutative Yang-Mills theory corresponds to the case where the gauge field A_μ is the one with the constant field strength $\omega_{\mu\nu}$, i.e. $A_\mu(x) = -\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}x^\nu$. The noncommutative gauge field $\hat{A}_\mu$ is related to ϕ^μ as

$$\phi^\mu = x^\mu + \theta^{\mu\nu}\hat{A}_\nu. \tag{4.3}$$

Then the boundary state becomes

$$|B\rangle = \int [dxdy] e^{i\int d\sigma (\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}x^\mu \partial_\sigma x^\nu - \partial_\sigma y_\mu (x^\mu + \theta^{\mu\nu}\hat{A}_\nu))} |y\rangle, \tag{4.4}$$

$$= \int [dxdy] e^{i\int d\sigma (\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(x^\mu - \theta^{\mu\rho}y_\rho)\partial_\sigma (x^\nu - \theta^{\nu\lambda}y_\lambda) + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}y_\mu \partial_\sigma y_\nu - \partial_\sigma y_\mu \theta^{\mu\nu}\hat{A}_\nu)} |y\rangle, \tag{4.5}$$

$$= \int [dxdy] e^{i\int d\sigma (\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\xi^\mu \partial_\sigma \xi^\nu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}y_\mu \partial_\sigma y_\nu + \hat{A}_\mu(y+\xi)\partial_\sigma y^\mu)} |y\rangle. \tag{4.6}$$

Here $y^\mu = \theta^{\mu\nu} y_\nu$, $\xi^\mu = x^\mu - \theta^{\mu\nu} y_\nu = x^\mu - y^\mu$.

Under the coordinate transformation, $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \delta A_\mu(x)$ and the boundary state becomes,

$$|B\rangle = \int [dxdy] e^{i\int d\sigma (\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\xi^\mu \partial_\sigma \xi^\nu + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} y_\mu \partial_\sigma y_\nu + \delta A_\mu(y+\xi)\partial_\sigma(y^\mu+\xi^\mu) + \hat{A}'_\mu(y+\xi)\partial_\sigma y^\mu)} |y\rangle. \tag{4.7}$$

T can be derived by equating the two expressions of the boundary state above. These expressions can be expanded perturbatively by using the Green function

$$< \xi^\mu(\sigma)\xi^\nu(\sigma') >= \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\epsilon(\sigma - \sigma'). \tag{4.8}$$

We get

$$\begin{aligned} \delta\hat{A}_\mu &= \hat{A}'_\mu - \hat{A}_\mu & (4.9)\\ &= -\delta A_\mu + i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{i}{2}\theta^{\mu_1\nu_1})\cdots(\frac{i}{2}\theta^{\mu_k\nu_k}) \\ &\quad \times(\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_k}\hat{A}_\mu\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_{k-1}}\delta A_{\nu_k} - \partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{k-1}}\delta A_{\mu_k}\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_k}\hat{A}_\mu). & (4.10) \end{aligned}$$

For scalar fields, one can derive the transformation rule by introducing the transverse coordinate fields in the boundary state and one gets

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{i}{2}\theta^{\mu_1\nu_1})\cdots(\frac{i}{2}\theta^{\mu_k\nu_k}) \\ &\quad \times(\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_k}\phi\partial_{\nu_1}\cdots\partial\ _{nu_{k-1}}\delta A_{\nu_k} - \partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{k-1}}\delta A_{\mu_k}\partial_{\nu_1}\cdots\partial_{\nu_k}\phi). & (4.11) \end{aligned}$$

Substituting $\delta A_\mu = \omega_{\mu\nu}\epsilon^\nu$, one obtains the modified transformation law eq.(3.19).

5 Noncommutative Membrane

NCYM appears as the worldvolume action of D-branes in special background. Since we now know how the reparametrization invariance on the worldvolume is realized, we can discuss its implication in the case of, say membrane.

Before doing so, let us recapitulate the standard procedure of quantizing membrane action. The action we start from is the usual Nambu-Goto action:

$$I = -\int d^3\sigma \sqrt{-\det \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu} = -\int d^3\sigma \sqrt{-\gamma}. \tag{5.1}$$

Here σ^a, $(a = 0, 1, 2)$ are the coordinates on the worldvolume, X^μ, $(\mu = 0, 1, \cdots, d-1)$ represents the embedding of the worldvolume in the d dimensional spacetime, $\gamma_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$ is the induced metric and $\gamma = \det \gamma_{ab}$. Canonical quantization of the action goes in the usual way. The momentum variable P_μ conjugate to X^μ can be obtained as

$$P_\mu = \frac{\delta I}{\delta \partial_0 X^\mu} = -\sqrt{-\gamma}\gamma^{0b}\partial_b X_\mu. \tag{5.2}$$

One can find the following constraints in the system

$$\phi_0 = P_\mu P^\mu + \det(\partial_r X^\mu \partial_s X_\mu) \sim 0, \tag{5.3}$$

$$\phi_r = P_\mu \partial_r X^\mu \sim 0. \tag{5.4}$$

Here r, s denote the spatial directions on the worldvolume. These constraints are due to the reparametrization invariance of the action I. In order to fix this local invariance, we take the light-cone gauge:

$$X^+ = \sigma^0, \tag{5.5}$$

$$P^+ = \text{const.}. \tag{5.6}$$

Then the variables conjugate to these can be obtained by solving the constraints as

$$P^- = \frac{1}{2P^+}(P^i P^i + \det(\partial_r X^i \partial_s X_i)), \tag{5.7}$$

$$\partial_r X^- = \frac{1}{P^+} P^i \partial_r X^i. \tag{5.8}$$

The gauge fixed action can be constructed from the Hamiltonian $H = \int d^2\sigma P^-$ as

$$\int d^3\sigma P^+ (\frac{1}{2}(\dot{X}^i)^2 - \frac{1}{4}(\{X^i, X^j\})^2), \tag{5.9}$$

where the Poisson bracket $\{A, B\} = \epsilon^{rs}\partial_r A \partial_s B$ is used. Actually there exists the residual symmetry corresponding to the reparametrization preserving P^+ and we have a constraint corresponding to it:

$$\epsilon^{rs}\partial_r P^i \partial_s X^i \sim 0. \tag{5.10}$$

This constraint is necessary for the equation (5.8) to be integrable. Such a constraint can be imposed by introducing a Lagrangian multiplier a_0 and modifying the action as

$$\int d^3\sigma P^+ (\frac{1}{2}(D_0 X^i)^2 - \frac{1}{4}(\{X^i, X^j\})^2), \tag{5.11}$$

where $D_0 X^i = \partial_0 X^i + \{a_0, X^i\}$.

Thus all we should do to quantize the membrane theory is to study this action. Since the light-cone gauge was taken, one should check if the theory possesses the Lorentz symmetry by constructing the Lorentz generators using the solutions $X^-,\ P^-$ of eqs.(5.8,5.7) and checking if they satisfy the Lorentz algebra. Since this action is nonrenormalizable, deWitt, Hoppe and Nicolai[18] proposed a matrix model to regularize the theory. The idea is to replace the variables $a_0,\ X^i$ in the action eq.(5.11) by $N \times N$ matrices $\hat{a}_0,\ \hat{X}^i$ and consider the action

$$I_{matrix} = \int d\sigma^0 P^+ Tr(\frac{1}{2}(D_0 \hat{X}^i)^2 - \frac{1}{4}([\hat{X}^i, \hat{X}^j])^2), \tag{5.12}$$

where $D_0 \hat{X}^i = \partial_0 \hat{X}^i - i[\hat{a}_0, \hat{X}^i]$. Since in the limit $N \to \infty$, one can expect that the commutator becomes the Poisson bracket with respect to some phase space variables, one can use this action

as a regularization of eq.(5.11). Although deWitt, Hoppe and Nicolai imposed the matrix regularization by hand, the matrix model appears as a model describing the system of D0-branes in [9]. It is an important problem to study how the Lorentz generators are realized in the matrix model and check if it satisfies the Lorentz algebra classically and quantum mechanically. This problem was studied in [19][20].

We now know that NCYM is realized as a matrix model with $N = \infty$ considered around some particular background, and it is intriguing to study X^-, P^- variables of the membrane theory in such a background. Moreover, since it seems that NCYM is renormalizable[21] [22] we can calculate perturbatively around such a background. In order to do so, we should construct the equations corresponding to eqs.(5.7,5.8) in the noncommutative case. These equations come from the constraints due to the reparametrization invariance of the original action. Therefore we should consider noncommutative analogue of the reparametrization invariance which is exactly what we studied in the previous sections.

The action we start from is

$$I_{NCYM} = \int d^3\sigma P^+[-\frac{1}{4}F_{ab}^2 + (D_a X^i)^2 + \frac{1}{4}([X^i, X^j])^2]_*. \tag{5.13}$$

In order to write X^- in terms of the variables X^i, we need the constraints analogous to eq.(5.8). These correspond to the generators of the time independent diffeomorphisms. Moreover the integrability of this equation is assured by the constraint eq.(5.10). Obviously the constraint we should consider in this noncommutative setting is

$$\partial_r X^- = \frac{1}{P^+} P^i *_2 \partial_r X^i. \tag{5.14}$$

Indeed we can regard this equation as coming from the constraint

$$P_\mu *_2 \partial_r X^\mu \sim 0, \tag{5.15}$$

which means the invariance under the transformation discussed in the previous section. In addition, the integrability of the equation eq.(5.14) implies

$$0 = \epsilon^{rs}\partial_r\partial_s X^- = \frac{1}{P^+}[P^i, X^i]_*, \tag{5.16}$$

which coincides with the Gauss law constraint of the NCYM.

The equation which gives P^- should come from the constraint $\phi_0 \sim 0$ corresponding to the invariance under the reparametrization in the time direction. The zero mode of P^- should coincide with the light-cone Hamiltonian:

$$\int d^2\sigma P^- = \frac{1}{P^+}\int d^2\sigma(\frac{1}{2}(P^i)^2 + \frac{(P^+)^2}{4}([X^i, X^j]_*)^2). \tag{5.17}$$

Since ϕ_0 should satisfy a closed algebra with ϕ_r, the most natural guess for P^- is

$$P^- = \frac{1}{P^+}(\frac{1}{2}P^i * P^i + \frac{(P^+)^2}{4}[X^i, X^j]_* * [X^i, X^j]_*). \tag{5.18}$$

Now that we get X^- and P^-, it is intriguing to construct the Lorentz generators M^{i-} and see if they satisfy the algebra. Unfortunately it is easy to see that our configuration is not invariant under such transformations. Indeed if it is invariant under such transformations, the equation $P^i = \dot{X}^i$ implies

$$P^- = \dot{X}^-. \tag{5.19}$$

P^- we took above does not satisfy this equation. If one takes P^- as $\dot{X}^-$, from eq.(5.14) and the equations of motion satisfied by X^i's, we get the following equation:

$$\partial_r \dot{X}^- = \frac{1}{P^+}\partial_r(\frac{1}{2}P^i *_2 P^i + \frac{1}{4}[X^i, X^j] *_2 [X^i, X^j] - \frac{i}{2}\theta^{st}[\partial_s X^i \partial_t X^j [X^i, X^j]]_{*_3}). \tag{5.20}$$

Here $[\cdot]_{*_3}$ is defined as [14]

$$[fgh]_{*_3} = [\frac{\sin(\frac{\partial_2 \wedge \partial_3}{2})}{\frac{(\partial_1+\partial_2)\wedge\ partial_3}{2}} \frac{\sin(\frac{\partial_1 \wedge (\partial_2+\partial_3)}{2})}{\frac{\partial_1 \wedge (\partial 2+\partial_3)}{2}} + (1 \leftrightarrow 2)] f(x_1)g(x_2)h(x_3)|_{x_i=x}. \tag{5.21}$$

Therefore we get

$$P^- = \frac{1}{P^+}(\frac{1}{2}P^i *_2 P^i + \frac{1}{4}[X^i, X^j] *_2 [X^i, X^j] - \frac{i}{2}\theta^{st}[\partial_s X^i \partial_t X^j [X^i, X^j]]_{*_3}) + f(\tau). \tag{5.22}$$

However it is easy to check that this P^- does not satisfy the equation of motion

$$\dot{P}^- = -[X^j, [X^j, X^-]], \tag{5.23}$$

which one can get by Lorentz transforming the equation of motion for X^i.

As was shown in [2], NCYM appears if one takes the Seiberg-Sen [23] [24] limit in M-theory in the presence of a constant C_{-ij} background. Carefully examining the argument, we can see that it is necessary for us to take $N \to \infty$ limit in the NCYM to have the Lorentz symmetry we expected above. Considering the above procedure for nonabelian NCYM and studying the Lorentz symmetry is left as a future problem.

参考文献

[1] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, "Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori," JHEP **9802** (1998) 003 [hep-th/9711162].

[2] N. Seiberg and E. Witten, "String theory and noncommutative geometry," JHEP **9909** (1999) 032 [hep-th/9908142].

[3] N. Ishibashi, "p-branes from (p-2)-branes in the bosonic string theory," Nucl. Phys. B **539** (1999) 107 [hep-th/9804163].

[4] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, "Noncommutative Yang-Mills in IIB matrix model," Nucl. Phys. B **565** (2000) 176 [hep-th/9908141].

[5] N. Ishibashi, "A relation between commutative and noncommutative descriptions of D-branes," hep-th/9909176.

[6] N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai and Y. Kitazawa, "Wilson loops in noncommutative Yang-Mills," Nucl. Phys. B **573** (2000) 573 [hep-th/9910004].

[7] N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai and Y. Kitazawa, "String scale in noncommutative Yang-Mills," Nucl. Phys. B **583** (2000) 159 [hep-th/0004038].

[8] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "A large-N reduced model as superstring," Nucl. Phys. B **498** (1997) 467 [hep-th/9612115].

[9] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, "M theory as a matrix model: A conjecture," Phys. Rev. D **55** (1997) 5112 [hep-th/9610043].

[10] M. Kontsevich, "Deformation quantization of Poisson manifolds, I," q-alg/9709040.

[11] Dominique Manchon, "Poisson bracket, deformed bracket and gauge group actions in Kontsevich deformation quantization," Letters in Mathematical Physics **52** (2000) 301 [math.QA/0003004].

[12] B. Jurco, P. Schupp and J. Wess, "Noncommutative gauge theory for Poisson manifolds," Nucl. Phys. B **584** (2000) 784 [hep-th/0005005].

[13] M. R. Garousi, "Non-commutative world-volume interactions on D-branes and Dirac-Born-Infeld action," Nucl. Phys. B **579** (2000) 209 [hep-th/9909214].

[14] H. Liu, "*-Trek II: *n operations, open Wilson lines and the Seiberg-Witten map," hep-th/0011125.

[15] K. Okuyama, "A path integral representation of the map between commutative and noncommutative gauge fields," JHEP **0003** (2000) 016 [hep-th/9910138].

[16] A. S. Cattaneo and G. Felder, "Poisson sigma models and deformation quantization," Mod. Phys. Lett. A **16** (2001) 179 [hep-th/0102208].

[17] A. S. Cattaneo and G. Felder, "On the AKSZ formulation of the Poisson sigma model," math.qa/0102108.

[18] B. de Wit, J. Hoppe and H. Nicolai, "On The Quantum Mechanics Of Supermembranes," Nucl. Phys. B **305** (1988) 545.

[19] B. de Wit, U. Marquard and H. Nicolai, "Area Preserving Diffeomorphisms And Supermembrane Lorentz Invariance," Commun. Math. Phys. **128** (1990) 39.

[20] K. Ezawa, Y. Matsuo and K. Murakami, "Lorentz symmetry of supermembrane in light cone gauge formulation," Prog. Theor. Phys. **98** (1997) 485 [hep-th/9705005].

[21] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, "Noncommutative perturbative dynamics," JHEP **0002** (2000) 020 [hep-th/9912072].

[22] M. Hayakawa, "Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on R**4," Phys. Lett. B **478** (2000) 394 [hep-th/9912094].

[23] N. Seiberg, "Why is the matrix model correct?," Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 3577 [hep-th/9710009].

[24] A. Sen, "D0 branes on T(n) and matrix theory," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 51 [hep-th/9709220].

Geometrical Aspects of Noncommutative Soliton

東京大学理学部物理　松尾 泰
E-mail: matsuo@phys.s.u-tokyo.ac.jp

非可換空間におけるソリトンとその幾何学的な取り扱い，および手法についてレビューを行った．内容としては以下の項目についての解説を行った．
1. 非可換空間の基本的な性質
2. 非可換ソリトン
3. D-brane と K 理論
4. タキオン凝縮と非可換ソリトン
5. Solution generating technique
6. 森田同値と Heisenberg module

1　弦理論と非可換幾何学

まず，弦理論 [1, 2] で何故非可換幾何学が必要であるのか，私なりの動機についてのべたいと思います．まず従来の古典的な場の理論と比較してみることにします．普通量子場の理論は場 $\phi(x)$ という無限個の自由度を量子化することから議論が始まります．ここで x は場が定義されている空間の座標であり，普通は可換なものを考えます．ところが弦の場の理論では対応する概念は弦の場 $\Psi[X(\sigma)]$ になります．ここで $X(\sigma)$ は弦の埋め込みを記述する場であり，σ は世界面を記述する座標になります．弦の場の理論においては $X(\sigma)$ 自身を量子化する必要があり，それは二次元共形場理論理論で記述されているものになります．これは場の理論で座標 x で記述されていたパラメーターが非可換な量子場 $X(\sigma)$ に拡張されてしまうことを意味し，弦理論にはおいては最初から非可換幾何学が必要であることを示唆しています．

もう少し議論を正確にするために $X(\sigma)$ をモード展開してみます．(ここでは簡単のため開いた弦を考えます)

$$X^\mu(\sigma) = x^\mu + ip^\mu\sigma + i\sum_{n>0} a_n^\mu \frac{1}{n}\cos(n\sigma). \tag{1.1}$$

ここで x^μ は適当に想定した弦が埋め込まれている時空の座標でありお互いに可換なものです．このモード展開を用いると弦の場は次のように展開できます．

$$\Psi[X] = \left(T(x) + A_\mu(x)a_{-1}^\mu + \cdots\ \right)|0\rangle. \tag{1.2}$$

ここで $T(x)$, $A_\mu(x)$ などはタキオン場，ゲージ場などですがゼロモードの x が可換であるおかげで，従来の場の理論と同様に可換な座標関数として捕らえることが可能です．このような意味で弦理論は粒子場の理論を内包しています．

この例は特定の時空をまず想定して弦理論を構成した例になっていますが，一般には弦理論はそれより遥かに大きい解空間を持っています．つまり無矛盾な弦理論を定義するためには時空という解念は必要ではなく必要であるのは

$\hat{c} = 10$ の超対称共形場理論

とそのモジュラー不変な表現だけである，という点です．この中には例えばゲプナー模型 [3] や自由フェルミオン場構成 [4] などのように純粋に代数的に構成され，時空の概念を全く持たない理論も含まれています．

しかしその一方で閉じた弦の理論はスペクトルに重力子を含んでいるわけですから重力，つまり何らかの意味での幾何学情報を内在していることは明らかなわけです．したがってここで問題になるのは，上で取り上げたような純粋に代数的に構築された模型に対して，どのように幾何学を定義するべきかという問題に帰着します．

ここで代数的に定義される情報としては，

- プライマリー場の集合
- 演算子積の係数
- モジュラー不変な場の組み合わせ

などがあげられます．これから例えば，幾何学的情報

- 大局的な位相不変量
- モジュライの自由度

などの情報をどう取り出すかという問題です．先にのべたゲプナー模型などはこれらの問題については Landau-Ginzburg 理論などを通してかなりいろいろな知見が得られるようになってきました．(読みやすいレビューとしては例えば [5]) しかし，それらの多くは結果的にみて正しく見えるというレベルであり，数学的に確立された対応と言うにはまだ遠い気がします．したがって，純粋に代数的に定義された幾何学，「非可換幾何学」が必要であると考えられるわけです．

以上でのべた非可換幾何学は Connes 達が言っているもの [6] とは違っており，実際には可換な時空を少しだけ非可換にした空間をこれ以降は議論します．[7] これは B 場の導入と Seiberg-Witten 極限 [8] により弦理論に実際に現れることがわかってきたものであり，最近大いに研究されているものはむしろこの幾何学です．

2 非可換空間の基本的性質

非可換空間の定義を始める前にまず可換空間のことを思い出します．可換空間では例えば二つの座標に対して次の交換関係が成立します．

$$[x^1, x^2] = 0. \tag{2.1}$$

この関係式は x^i $(i = 1, 2)$ という演算子が同時対角化可能であると意味しており，x という作用素は連続スペクトルを持ちますから固有値は 2 次元平面上の「点」を定義します．

この関係は非可換空間では次のように変更されます．

$$[x^1, x^2] = i\theta. \tag{2.2}$$

この場合二つの座標は同時対角化ができなくなり「点」という概念がなくなります．量子力学で学んだことを思い出すと不確定性関係式の類似で次のような関係式が成立することがわかります．

$$\Delta x^1 \cdot \Delta x^2 \geq 2\pi\theta. \tag{2.3}$$

これは点が $2\pi\theta$ 程度の広がりを最小の場合でも持つことを意味します．
このことは物理においては次のようなインパクトをもたらします．

- 特異点の解消: 可換理論では特異性のため可能でなかったような新しいタイプのソリトンが定義できる．例えば $U(1)$-インスタントン (古内氏のトークを参照) などがあげられる．[9, 10]
- トポロジーを変えてしまうようなゲージ変換が可能になる．これは上の問題とも関連しているが，可換理論では特異点を持つようなゲージ変換が非可換理論ではなめらかになってしまうことから来ており，“Solution generating technique” と呼ばれるソリトン生成の変換群を定義する．[11](浜中氏のトークを参照)
- 排他則： 各点が有限の大きさを持ってしまうので，単位面積当たり有限個の点しか存在することができない．この問題は後で述べるコンパクトな非可換空間で定義された理論を考える際に顕在化する．[13] (梶浦氏のトークを参照) このことは Giant graviton の現象とも関連があると思われる．[14]

2.1 非可換空間の例

以下では物理で主に利用されている非可換空間の定義を与える．(最近の良いレビューとしては [15] があげられる)

2.1.1 Moyal 平面

非可換空間の最も基本的な例は Moyal 平面である．(2.2) で定義された座標 x^i $(i = 1, 2)$ を用いて調和振動子の生成消滅演算子を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}^1 + i\hat{x}^2) \quad \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}^1 - i\hat{x}^2), \quad [a, \bar{a}] = 1, \tag{2.4}$$

と定義する．ここで調和振動子のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}\bar{a}^n|0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

で張られる空間と定義し，2 次元平面上の関数 $f(x^1, x^2)$ から $\mathcal{H}$ に作用する Bounded operator $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の元 $\mathcal{O}_f$ への対応を Weyl ordering を用いて次のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_f &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k\tilde{f}(k)e^{-i(k^1\hat{x}^1+k^2\hat{x}^2)} \\ \tilde{f}(k) &= \int d^2x e^{ikx}f(x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

このような量子化を用いると特徴的な性質として以下のように Moyal 積が現れる．(この積の収束性については前田氏の講義を参照)

$$\mathcal{O}_f \cdot \mathcal{O}_g = \mathcal{O}_{f\star g} \tag{2.6}$$

$$f \star g(x) = e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_1\partial'_2 - \partial_2\partial'_1)}f(x)g(x')\Big|_{x'=x}. \tag{2.7}$$

この空間における微分は座標との交換関係を用いて定義することができる．

$$\partial_{x^i} f(x^1, x^2) \to \frac{\epsilon_{ji}}{\theta}[x^j, \mathcal{O}_f] \equiv d_i \mathcal{O}_f. \tag{2.8}$$

逆に積分は微分との関連を用いて次のような性質をもつ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ から $\mathbf{C}$ への線形演算子 τ で定義される．

$$\begin{aligned} \int d^2x f(x) &\to \tau(\mathcal{O}_f) \\ \tau(\mathcal{O}_f \cdot \mathcal{O}_g) &= \tau(\mathcal{O}_g \cdot \mathcal{O}_f) \\ \tau(d\mathcal{O}_f) &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

実際にはこのような性質を持つ演算子は $\mathcal{H}$ 空間における跡を用いて次のように書き下すことができる．

$$\tau(\mathcal{O}_f) = 2\pi\theta \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \mathcal{O}_f. \tag{2.10}$$

2.1.2 非可換トーラス

まず可換な 2 次元トーラスを x^i $(i = 1, 2)$ で座標づけされる 2 次元平面を周期性 $x^i \sim x^i + 2\pi n^i$ $(n^i \in \mathbf{Z})$ で割った空間と定義する．[7, 16] このときトーラス上の任意の関数は次のように Fourier 展開可能である．

$$f(x^1, x^2) = \sum_{n,m \in \mathbf{Z}} a_{n,m} u^n v^m, \quad u = e^{ix^1}, v = e^{ix^2}. \tag{2.11}$$

ここで x^i を (2.2) のように非可換化すると周期関数の基底も非可換化される。

$$U = e^{i\hat{x}^1}, \ V = e^{i\hat{x}^2} \quad VU = UVe^{i\theta}. \tag{2.12}$$

トーラス上の任意関数は U, V により生成されるので非可換トーラス上の非可換環 $\mathcal{A}_\theta$ を U,V の free module を上の関係式で割ったものとして定義する。

非可換トーラスの特殊なものとして Fuzzy torus があげられる。これはパラメーター θ が互いに素な整数 p, N を用いて $2\pi \times \frac{p}{N}$ と書かれる場合であり、U, V は次のように与えられる。

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

ここで $\omega = e^{2\pi ip/N}$ である。この場合どうして行列表現が可能であるのか考えることは興味深い。前にふれたように、非可換空間では各点は $2\pi\theta$ 程度の広がりを持つ。今の場合それは $2\pi \times 2\pi/N = 4\pi^2/N$ 程度の大きさになる。一方トーラスの面積は $4\pi^2$ であるから全体に N 個しか「点」が入らないことになる。これは Fuzzy torus 上の関数空間は基底が $\left\{1, U, U^2, \cdots, U^{N-1}\right\}$ が張られる実

質的に N 次元のベクトルになっていることを意味する。つまり "Fuzzy torus" とは実質的には N 個の点の集まりであり、広がっている空間というイメージとはかなり違ったものであることがわかる。このような現象が起こるのは非可換空間がコンパクトな場合に共通するものである。

一般に非可換トーラスという場合には上で定義した ω が 1 のべき根で無い場合を指す。この場合は各点の広がりがトーラス全体の面積を「割り切れない」場合であり奇妙な現象が起こる。詳しくは梶浦氏のトークを参照して貰いたいが例えば次のような交換関係を考えてみる。

$$V^m U = U V^m e^{2\pi m\nu}, \quad \nu = \theta/2\pi. \tag{2.14}$$

非可換パラメーター $m\nu$ は整数ずらしても $e^{2\pi i m\nu}$ の値は変わらないので 1 を法として定義されている。つまりこの場合の非可換パラメーターは適当な整数 n を選んで

$$0 < n + m\nu < 1 \tag{2.15}$$

という値をとることになる。この値は一般の (n, m) に対しては $[0, 1]$ の間の稠密な集合を張る。つまりいくらでも小さな値をとりうる。従ってこの場合はトーラス全体に無限個の「点」が入りうるということになり広がった空間として考え得ることになる [13]. しかし、「点」がいくらでも小さくなりうると言うことは非可換平面の場合には無かった現象である。これは数学的に見ると非可換平面が I 型の von Neumann 環に分類される (トレースの値が整数になる) のに対して非可換トーラスは II 型 (トレースの値が実数になる) に分類されていることに関連している [17] 。このことは非可換トーラスが数学的には非常におもしろい対象であることを意味するが、例えば次に述べる非可換ソリトンとの対応を考えると奇妙な現象が起こる。

3 非可換ソリトン

非可換ソリトンは Gopakumar, Minwalla, Strominger (GMS)[18] により導入された概念で、非可換理論に固有のソリトン解であり、同時に非可換空間の幾何学と物理の対応をつけるのに重要な概念になっている。

まず $2+1$ 次元のスカラー場の理論のエネルギー汎関数を考える。

$$E = \frac{1}{g^2}\int d^2z \left(\frac{1}{2}\partial_z\phi\partial_{\bar{z}}\phi + V(\phi)\right) \tag{3.1}$$

ここで $V(\phi)$ はスカラー場のポテンシャルエネルギーである。空間 2 次元を非可換化するとポテンシャルエネルギーの中の場の積が Moyal 積に置き換わる。

$$V(\phi) \to V(\star\phi) \tag{3.2}$$

非可換ソリトンの構成において基本的な仮定は非可換パラメーターを非常に大きくとったときエネルギー汎関数の中の場の微分の部分が無視できポテンシャルエネルギーのみを考えれば良くなると言う点にある。つまり

$$z \to z\sqrt{\theta} \quad \bar{z} \to \bar{z}\sqrt{\theta} \quad \star_\theta \to \star_{\theta=1} \tag{3.3}$$

と置き換えるとエネルギー汎関数は次のように置き換わる。

$$E = \frac{1}{g^2}\int d^2z \left(\frac{1}{2}\partial_z\phi\partial_{\bar{z}}\phi + \theta V(\star\phi)\right) \tag{3.4}$$

ここで $\theta \to \infty$ の極限をとると第一項を無視でき、エネルギー汎関数の極小値をとるための条件は

$$\frac{\partial}{\partial\phi}V(\star\phi)\Big|_{\phi=\phi_0} = 0 \tag{3.5}$$

という条件に帰着する。

非可換ソリトンは一般形として次の形を持つ。

$$\phi_0(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i(x) \tag{3.6}$$

ここで $\lambda_i \in \mathbf{R}$ は $\frac{\partial V(\lambda)}{\partial\lambda} = 0$ の解であり、$p_i(x)$ は Moyal 平面の代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ における互いに直交する射影演算子である。

$$p_i \star p_j(x) = \delta_{ij} p_j(x) \tag{3.7}$$

$V(\phi)$ が Taylor 展開可能な場合 (3.6) が (3.5) を満たすことは以下のような簡単な計算で理解できる。$\partial V/\partial\lambda$ の Taylor 展開が $\sum_{r=1}^{\infty} v_r\lambda^r$ で与えられているとして

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial\phi}\Big|_{\phi=\phi_0} &= \sum_{r=1}^{\infty} v_r \left(\star\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i p_i(x)\right)^r \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} v_r \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i^r p_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial V(\lambda)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_i}\right) p_i(x) = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

射影演算子のいくつかの具体例を挙げる。$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は調和振動子のヒルベルト空間に作用する線形演算子であるから n 番目の励起状態 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\bar{a})^n|0\rangle$ を用いて

$$|n\rangle\langle n| = \frac{1}{n!} : \bar{a}^n e^{-\bar{a}a} a^n : \tag{3.9}$$

という演算子を書くと n 番目の励起状態に対する射影演算子になっている。Weyl 対応を用いて関数として書くとこの演算子は

$$\begin{aligned}
q_n(x) &= (-1)^n e^{-r^2} L_n(2r^2) \\
r^2 &= x_1^2 + x_2^2 \\
L_n(z) &= e^z \frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^n)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

とかけることが知られている。GMS は特に次の形の解をレベル k の解と呼んだ。

$$p_k(x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} |\ell\rangle\langle\ell| \tag{3.11}$$

この場合のエネルギーは Moyal 平面における積分が跡を用いてかけることを思い出すと、

$$E = \frac{2\pi\theta}{g^2}V(\lambda_*)\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}p_k = \frac{2\pi\theta}{g^2}V(\lambda_*)k \tag{3.12}$$

で与えられる。

以下非可換ソリトンについていくつかのコメントを書いておく。

1. まず非可換ソリトンは $q_0(x) = 2e^{-r^2}$ という形 (およびパラメーターのスケーリング) を見れば明らかなように大きさ $2\pi\theta$ 程度の広がりを持っている。前の章で述べたことを照らし合わせると、ちょうどこれは非可換ソリトンが非可換空間の「点」を表現するソリトンであることがわかる。
2. レベル k の非可換ソリトンは同じエネルギーを持ついくつかの解、つまり任意性が存在している。つまり $g \in U(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ に作用するユニタリー演算子として p_k の代わりに $p'_k = gp_kg^{-1}$ を用いても $(p'_k)^2 = p'_k$, $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}p'_k = k$ である。Moyal 平面で見ると元の p_k が原点を中心として回転対称に広がっている解であるのに対して新しい射影演算子は広がり $2\pi\theta k$ を不変にしたまま形を変形した解になる。ここで g は面積を不変にする変換 (Area preserving diffeomorphism) を量子化した対称性の元であることが理解できる。
3. 上のコメントは θ が小さいときの非可換ソリトンとは何かを考えるとより明らかになる。もちろんこの場合エネルギー汎関数の中の第一項を無視できないので本来の意味でのソリトンにはならないが、ポテンシャルエネルギーを極小にするだけであれば次のような配意をソリトン考えることは可能である。 2 次元平面の中の勝手な部分集合を Σ として

$$p_\Sigma(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Sigma \\ 0 & \text{otherwize} \end{cases} \tag{3.13}$$

と置くとあきらかに $p_\Sigma^2 = p_\Sigma$ が関数積の意味で成立する。このとき対応するエネルギーは Σ の面積に比例し、上で議論した $U(\mathcal{H})$ は Area preserving diffeomorphism そのものとなる。

4 D-brane charge と K 理論

D ブレイン上に境界を持つ開いた弦の質量ゼロのモードは以下の 2 つのものである。

- ϕ^i: ターゲット空間への埋め込みを記述する場
- A_μ: D ブレイン上のゲージ場

最初の自由度は部分多様体としてのブレインのターゲット空間内の配位を記述しており、ホモロジー群のどの元かを指定するものである。一方二番目の自由度は D ブレイン上のベクトルバンドルの構造を指定しており位相的な K 群との関連を示していることになる [19]。

この 2 つの点は D ブレインのチャージを記述する Chern-Simons 項に反映されている [20]。

$$\begin{aligned} S_{CS} &= \int_M P(C) \wedge \left(e^{\frac{F}{2\pi i}} \sqrt{\hat{A}(R)} \right) \\ C &= C^{(p)} + C^{(p-2)} + \cdots \\ P & \quad \text{ターゲットからブレイン上への微分形式の引き戻し} \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで ϕ^I は引き戻し $P(C)$ の中にあってブレインの位置の指定を行っている。もし第 2 項はブレインがもし非自明なベクトルバンドルをその上に持っていると p ブレインとしてのチャージだけでなく低い次元のチャージももてることを意味している。ここでは A_μ が本質的な役割を果たしている。この低い次元のブレインチャージは以下のようなタキオン凝縮のプロセスを考えるとよりあからさまな形で現れる。

4.1 タキオン凝縮

今 N 枚の D-brane と N 枚の反 D-brane が重なっている状況を考える。D-brane の上にはランク N のベクトルバンドル $\mathcal{F}$ が存在し、反 D-brane の上にはベクトルバンドル $\mathcal{G}$ があったとする。このとき Sen によれば [21] これらのブレインはタキオン凝縮を通して対消滅を起こし低い次元のブレインになることが予測されている。このプロセスにおいては低い次元のブレインチャージは二つのベクトル束の形式差

$$\mathcal{F} \ominus \mathcal{G} \tag{4.2}$$

が Chern-Simons 結合を通して現れると考えられる。実際その項に現れる Chean character は次の性質を持っていることが良く知られている。

$$e^{\mathcal{F}\ominus\mathcal{G}} = e^{\mathcal{F}} - e^{\mathcal{G}} \tag{4.3}$$

これは実際に低い次元のブレインが二つのベクトルバンドルから定義されているものの差になっていることを示しており非常に自然である。ベクトルバンドルの形式差は $K^0(M)$ の元を定義している訳であるから、D ブレインのチャージとはコホモロジーではなく K 群の元としてとらえる方がより自然であると考えられる。

この考えを推し進めて Witten は [19] タイプ IIB の超弦理論では 9-brane、すなわちターゲット空間全体 X を覆うブレインからすべてのブレインはタキオン凝縮を通じて表せることを証明した。つまりこの理論ではブレインの次元は $1, 3, 5, 7, 9$ であるから十分多い枚数のブレイン-反ブレイン対を 9 次元に用意しておけばそれから補次元が偶数のブレインは

$$K^0(X)$$

の元として得られるのである。

タイプ IIA の弦理論の場合にはブレインの次元が $0, 2, 4, 6, 8$ であるのでこのような対応は使えないが Horava は [22] ブレイン–反ブレインの対ではなくターゲット空間を覆う不安定な 9 ブレインに注目して同様の結論を導いた。つまり例えばそのようなブレインが $2N$ 枚あったとしよう。不安定なブレインの場合は GSO プロジェクションを考えないスペクトルが現れることが知られているので relevant な場は $U(2N)$ の随伴表現に従うタキオン場とゲージ場となる。ここでタキオン場のポテンシャル関数を考えるとエネルギー最低の状態は次のモジュライ空間で記述されることが知られている。

$$\frac{U(2N)}{U(N) \times U(N)} \equiv V_N. \tag{4.4}$$

この空間は次のホモトピー群を持っている。

$$\pi_{2n}(V_N) = \mathbf{Z}, \qquad \pi_{2n+1}(V_N) = 0. \tag{4.5}$$

タキオン場がブレインの補空間の無限遠方でこのモジュライ空間に非自明な巻き付きをするためには補空間の次元が奇数ではならなければならないことがわかる。Horava が考えたのはこのような状況で 9 次元から奇数次元だけ次元の低いブレインがタキオン凝縮により現れることを示した。K 群の言葉ではこれは IIA 理論のブレインチャージは

$$K^1(X)$$

により分類されることを意味している。

4.2 Myers 項

以上の結果を非可換幾何学に拡張する上で最も大きな違いは可換の場合には低い次元のブレインが現れるだけであるのが非可換の場合には高い次元のブレインも現れうると言う点である。例えば無限個の D p-ブレインがあり、それらの埋め込み関数が $\mathrm{Tr}[\phi^1, \phi^2] \neq 0$ という関係を満たす場合には高い次元のブレインが現れることは良く知られている。このことを Chern-Simons の補正としてより正確に表現したのが Myers 項 [23] である。

$$S_{CS} = \int_M \mathrm{Tr}\left(P(e^{i\lambda i_\phi i_\phi C}) \wedge \left(e^{\frac{\mathcal{F}}{2\pi i}}\sqrt{\hat{A}(R)}\right)\right) \tag{4.6}$$

ここで i_ϕ は微分形式の外積に対する内積を意味していて例えば次のように計算される。

$$\begin{aligned} C^{(2)} &= \frac{1}{2}C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ i_v i_w C^{(2)} &= v^\mu w^\nu C_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

特に $i_v^2 C^{(2)} = 0$ であるが Myers 項では ϕ は行列であるのでゼロでない結果を与える。

$$i_\phi^2 C^{(2)} = \frac{1}{2}C_{\mu\nu}[\phi^\mu, \phi^\nu] \tag{4.8}$$

Myers 項は T 双対性に対する Lagrangian の不変性の要請により導くことができる。ここで例えば y という方向に対する T 双対性は Ramond-Ramond 場に対して次のように作用する。

$$\tilde{C}^{(n)}_{\mu\cdots\nu y} = C^{(n-1)}_{\mu\cdots\nu}, \quad \tilde{C}^{(n)}_{\mu\cdots\nu} = C^{(n+1)}_{\mu\cdots\nu y}. \tag{4.9}$$

これはブレインの次元が変化することを意味しているがそれに対応してブレイン上の埋め込み関数とゲージ場も役割を入れ替える。

$$A_y \leftrightarrow \phi^y. \tag{4.10}$$

ブレインの枚数が 1 枚の場合には可換の場合の Chern-Simons 項が T 変換に対して不変であることが確かめられる。一方ブレインの枚数が複数の場合にはゲージ場が非可換となり、埋め込み関数に現れる $D_y\phi^i$ の中に $[A_y, \phi^i]$ という項が必要となるので i_ϕ^2 の項が必要となる。

結局ブレインの枚数が複数となるときには T 双対性の要請により非可換幾何学が必要になると言うことがわかる。

4.3 Brane charge に関するその他のアイディア

以上 K 群が D ブレイン charge と深い関連があることを見てきたが、K 群は基本的にはブレインの枚数の情報を含むのみであって例えば低次元のブレインが高次元のブレインのどこに埋め込まれているかは全く情報を与えない。最近、このことに関連して導来圏 (Derived category) [24] を用いてブレイン charge を書き下すことが議論されて [25] いるのでここで少し紹介する。

まずこれまではブレイン上にベクトルバンドルが存在するという事実を用いてきた。しかし、一般に高次元のブレイン上に低次元のブレインがデルタ関数的に埋め込まれているという状況を書き下すことはベクトルバンドルという言葉では不十分である。(Witten により small instanton と

よばれた)　つまり高次元のブレインの部分多様体上でファイバーの次元 (=ブレインの枚数) がジャンプするという記述しなくてはいけない。

幾何学的な言葉でこの状況を議論するためには連結層 (coherent sheaf) という概念を導入する必要がある。またベクトルバンドルでは $\mathcal{E}$ と $\mathcal{F}$ というベクトル束を仲介する開いた弦はコホモロジーの元としては $H^*(X, \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F})$ に属するが、それを層に拡張すると $\mathrm{Ext}^*(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に置き換えられる。ここで Ext は連結層の導来圏上で定義されている関手で次のように定義される。

連結層は次のような完全系列を使って次のように分解されることが知られている。(injective resolution と呼ばれる)

$$0 \to \mathcal{F} \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

ここで I^* は自由加群である。$\mathrm{Ext}^*(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ はこの分解を用いて書かれる次の完全系列

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, I^0) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, I^1) \to \cdots \tag{4.11}$$

のコホモロジー類として定義される。連結層をそのまま扱うとここで定義したような完全系列を書くことができない。つまり連結層をそのものではなくてその完全系列を用いた分解そのものを幾何学的な実体として考えたものが連結層の圏の導来圏 $\mathcal{D}(\mathbf{Coh}M)$ である。これはK群でベクトル束そのものではなく形式差を考えることによりいくつかのよけいな幾何学的な情報が落ちて扱いやすいものになったことに対応している。

導来圏の扱い安さのもう一つの例としてはT双対性に関連する Fourier-Mukai 変換 [26] にも現れる。Fourier-Mukai 変換は Torus 上で定義されているベクトル束の Fourier 変換である。複素トーラス X とその双対トーラス X^* を用意しその直積から X と X^* への射影を π_1, π_2 とすると $\mathcal{F} \in \mathcal{D}(\mathbf{Coh}X)$ から $\mathcal{F}^* \in \mathcal{D}(\mathbf{Coh}X^*)$ への写像は

$$\mathcal{F}^* = R_!\pi_{2*}(P \otimes^L \pi_1^*\mathcal{F}) \tag{4.12}$$

と定義される。ここで P は $X \times X^*$ 上で定義される Poincarre 直線束であり Fourier 変換で e^{ikx} をかけることに対応している。また π_{2*} は Fourier 変換で x について積分して k の関数を得る手続きに他ならない。そのほかの記号 R, L はこれらの作業が導来圏の意味で行われていることを意味している。

この例では連結層そのものを Fourier 変換しても連結層の元を定義するとは限らないが、それを導来圏の元としてとらえると well-defined となることが本質的である。

4.4　非可換幾何学におけるベクトル束

非可換幾何学におけるベクトル束の類似物を議論する上では Serre-Swan の定理 [17]、つまり X 上の任意のベクトル束 $\mathcal{F}$ に対して適当なベクトル束 $\mathcal{E}$ が存在していて $\mathcal{F} \oplus \mathcal{E}$ が直積束 $X \times \mathbf{C}^N$ と isomorphic になるという事実が本質的である。

このことは底 X 上の各点 x に対して $N \times N$ 行列の元 $p(x) \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbf{C})$ が存在していてそれが射影演算子つまり

$$p(x) \cdot p(x) = p(x) \tag{4.13}$$

となり、$p(x)$ による $\mathbf{C}^N$ の像が $\mathcal{F}$ の x の上のファイバーになることを意味している。

また $\Gamma(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の切断全体の集合とするとそれは $C(X)$ 加群になっている。つまり f を $C(X)$ の元とし、$\sigma \in \Gamma(\mathcal{F})$ とすると $f\sigma \in \Gamma(\mathcal{F})$ となる。また $\Gamma(\mathcal{F})$ は直積束 $X \times \mathbf{C}^N$ の切断全体の集合 $\Gamma(C(X) \otimes \mathbf{C}^N)$ にたいして射影演算子 p をかけることにより得られる。このように射影演算子を用いて定義される加群を射影加群 (projective module) とよぶ。

ベクトル束の概念を上のように書き換えるとその非可換空間への拡張が直ちになされる。つまり X 上の関数環 $C(X)$ を非可換 C^* 代数 $\mathcal{A}$ に置き換えることが非可換幾何学の出発点である。このことを用いて非可換環 $\mathcal{A}$ と $\mathbf{C}^N$ の直積の切断全体 $\mathcal{F}_N$ にたいして射影演算子 $p \in \mathrm{Mat}_N(\mathcal{A})$ を作用させ、$p\mathcal{F}_N$ がつくる $\mathcal{A}$ 加群を切断全体の非可換化と考える。

ベクトル束の概念が以上のように得られたのでそれに関連してK群の拡張もなされる。つまり非可換幾何学におけるK群とは $\mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathcal{A})$ 上で定義される射影演算子の isomorphic class の分類となる。これは前章で議論した非可換ソリトンの定義そのものとなる。[27, 28]

5 Tachyon 凝縮と非可換ソリトン

前章でDブレインチャージがK群で定義されると考える方が自然であるということ、および C^* 代数のK群の元が非可換ソリトンと対応つけられていることを議論した。この二つを結びつけると、非可換空間におけるDブレインチャージもK群の元、すなわち非可換ソリトンと深く結びついておいると考えることが自然であると思われる。

可換の場合にDブレインチャージとK群の対応を示すためにタキオン凝縮を用いた。同様なことを非可換の場合にも行う [29, 15]。つまり考えるべき現象は

- Dブレインと反Dブレイン対から低い次元のブレインを作る
- 不安定なDブレインから低い次元のブレインを作る

という2種類のプロセスである。以下簡単のため後者の場合を考え特に Bosonic 弦の場合を考えることにする。

まずタキオン場の有効作用を考える。

$$S = \frac{C}{g_s}\int d^{26}x\sqrt{g}\left(\frac{1}{2}f(t)g^{\mu\nu}\partial_\mu t\partial_\nu t + \cdots - V(t)\right) \tag{5.1}$$

ここで $\cdots$ は高階微分の項などをまとめて省略して書いている。このとき Sen の予想は次のようにまとめられる。

- ポテンシャルエネルギーは2つの点で極値をとる。それぞれ $t=0$ (極小)、$t=t_*$ (極大) とする。
- $t=t_*$ は Bosonic string の摂動論的な真空 (不安定なもの) に対応する。
- $t=0$ は不安定なブレインが消滅して開いた弦が無くなってしまう非摂動論的な真空に対応する。(Nothing 状態と呼ばれる)。開いた弦のモードが無くなってしまうことに対応して $f(0)=V(0)=0$ とならなくてはいけない。
- 二つの真空の間のポテンシャルエネルギーの差はブレインのテンションをちょうどキャンセルしなくてはならない。ここでは適当に正規化して $V(t_*)-V(0)=1$ とする。

ここで B 場を入れて非可換性を導入する。このとき各パラメーターは次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} g_s &\rightarrow G_s = g_s \left(\frac{\det G}{\det(g + 2\pi\alpha' B)} \right) \\ g_{\mu\nu} &\rightarrow G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - (2\pi\alpha')^2 (B g^{-1} B)_{\mu\nu} \\ & \quad \theta_{\mu\nu} = -(2\pi\alpha')^2 \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha' B} B \frac{1}{g - 2\pi\alpha' B} \right)_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで G_s は開いた弦の結合定数、$G_{\mu\nu}$ は開いた弦の計量、$\theta_{\mu\nu}$ はブレイン上に定義される非可換パラメーターである。

ブレイン上に非可換理論を定義するためには以下の Seiberg-Witten 極限を定義しなくてはならない。

$$\alpha' B \rightarrow \infty, \quad g_{ij} \rightarrow \text{fixed} \quad \theta^{ij} = (B^{-1})^{ij} \quad G_{ij} \rightarrow \infty \tag{5.3}$$

この極限では閉じた弦のモードは分離され、またタキオン場の運動項や高階微分項などはすべて無視できる。

従って運動方程式はポテンシャルエネルギーに対する次の条件に帰着してしまう。

$$\left. \frac{\partial V(\star_\theta t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0 \tag{5.4}$$

この方程式は非可換ソリトンの運動方程式と一致する。弦理論の場合にはタキオンポテンシャルの詳細な形はわからないが非可換ソリトンの構成の上では極値の情報、すなわち Sen の予想だけで十分な情報が与えられる。

非可換ソリトンのうち特にレベル k の解を考えると

$$t(x) = t_* \phi_0(x), \quad \phi_0(x) \leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{k-1} |\ell\rangle\langle\ell| \tag{5.5}$$

この解は 2 5 ブレインのうち非可換の 2 次元方向に局所的に $2\pi\theta k$ 程度の広がりを持つ解であり、可換な 2 3 次元方向に広がっている配位である。つまり 2 3 ブレインと解釈すべき形をしている。またレベル k の解を用いることはブレインの枚数が k であることを意味している。実際 Harvey 達はこの解釈を支持するいくつかの事実を示した。

1. こうしてできた $D23$ ブレインが正しいテンションを持つ
2. $D23$ 上のタキオンが正しい質量を持つ
3. $D23$ 上に $U(k)$ のゲージ対称性がある。

このうち最後のゲージ対称性、すなわち $D23$ ブレイン上に rank k のベクトル束ができることについては次のように解釈するのが自然に思われる。Harvey 達は 23 次元方向には定数の射影演算子を用いたが、最も一般的な射影演算子は次のような形をしている。

$$U(x) \pi_k \bar{U}(x) = \pi_k(x) \quad U(x) \in U(\mathcal{H}) \tag{5.6}$$

ここで x は 23 次元方向の (可換な) 座標である。このような射影演算子もやはりタキオンの運動方程式の解になっていることは明らかである。一方この射影演算子は Serre-Swan の定理に現れる

ものに他ならない。すなわちこのように一般化された非可換ソリトンは 23 次元方向 X 上の任意のベクトル束を与える [27, 28]。

この一般化された場合には 23 ブレイン上のゲージ場の接続や曲率などは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla &= \pi(x)d\pi(x) \\ F &= \pi(x)d\pi(x)d\pi(x). \end{aligned} \tag{5.7}$$

つまりタキオン場にゲージ場などの情報が含まれていることになる。

6 Solution generating technique

非可換な空間では可換な空間になかったような性質がいくつかある。この章で述べる解の生成テクニック (Solution generating technique) [11] の方法はその一つの典型的な例になっている。可換な空間においてはあるソリトン解を別のソリトンチャージを持つ解にゲージ変換を用いて移すことはできない。しかしもしソリトンチャージを変更しようと思えば空間を幾つかのパッチに分けて共通部分で非自明な変換を行っていく必要がある。ところが非可換な空間にはパッチ分けという概念はなく大局的なゲージ変換があるだけであるが、その代わりに特異性という概念は無いので可換な空間では特異点があるようなゲージ変換を考えることができる。ここで考える変換は Partial Isometry と呼ばれるもので次の性質を満たすものである。

$$U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \bar{U}U = 1, \quad U\bar{U} \neq 1. \tag{6.1}$$

このとき $P = U\bar{U}$ と置くと容易に確認できるように P は射影演算子となる。

$$P^2 = (U\bar{U})^2 = U(\bar{U}U)\bar{U} = U\bar{U} = P. \tag{6.2}$$

最も大事な性質としては U は非可換ソリトンの解を別の解に移すという点である。つまりもし ϕ_0 が $\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=\phi_0} = 0$ を満たすとすると $\phi_0' = U\phi_0\bar{U}$ も解になる。なぜなら

$$\left.\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}\right|_{\phi=\phi_0'} = \sum a_n (U\phi_0\bar{U})^n = U\left(\left.\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}\right|_{\phi=\phi_0}\right)\bar{U} = 0. \tag{6.3}$$

Partial Isometry を用いた変換ではソリトンチャージは一般には変化してしまう。このことは Partial Isometry の最も典型的な例であるシフト演算子で見てみる。ここで $\mathcal{H}$ に対するシフト演算子とは

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|, \quad \bar{S}S = 1 \quad S\bar{S} = 1 - |0\rangle\langle 0|. \tag{6.4}$$

最も簡単な非可換ソリトンは単位元に比例する $\phi = \lambda_* 1$ であるが $S\phi\bar{S} = \lambda_*(1 - |0\rangle\langle 0|)$ はソリトン数が 1 だけ変化したものである。

この解生成テクニックをゲージ理論に適用してみよう。今 2 ブレインを考え、その上に存在する 0 ブレインチャージを考えてみる。可換な理論においてはそれは 1st Chern class

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int F \tag{6.5}$$

で与えられる。ここではこの量の非可換幾何学における対応物を計算する。Moyal 平面における座標微分が次のように書かれていたことを思い出す。

$$\partial_z \mathcal{O} = \frac{-1}{\sqrt{\theta}}[\bar{a}, \mathcal{O}], \quad \partial_{\bar{z}} \mathcal{O} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}[a, \mathcal{O}] \tag{6.6}$$

共変微分はそれを次のように変更したものである。

$$\begin{aligned} D_z \mathcal{O} &= \frac{-1}{\sqrt{\theta}}[C, \mathcal{O}], \qquad & D_{\bar{z}} \mathcal{O} &= \frac{1}{\sqrt{\theta}}[\bar{C}, \mathcal{O}], \\ C &= \bar{a} + i\sqrt{\theta} A, \qquad & \bar{C} &= a + i\sqrt{\theta}\bar{A}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

ここで $A, \bar{A}$ は非可換空間におけるゲージポテンシャルである。この共変微分から曲率を計算すると

$$F = i(\partial_z \bar{A} - \partial_{\bar{z}} A - i[A, \bar{A}]) = \frac{1}{\theta}\left([C, \bar{C}] + 1\right). \tag{6.8}$$

ここで自明な解 $(A = \bar{A} = 0)$ に対して解生成テクニックを適用してみる。$U = S^n$ とすると U は非自明なゲージポテンシャルを生成する。

$$C = S^n \bar{a} \bar{S}^n, \quad \bar{C} = S^n a \bar{S}^n. \tag{6.9}$$

このゲージポテンシャルは U をゲージ変換と考えると pure gauge の形をしているが対応する曲率を計算してみると

$$F = \frac{1}{\theta}\left(S^n[\bar{a}, a]\bar{S}^n + 1\right) = \frac{1}{\theta}\sum_{\ell=0}^{n-1} |\ell\rangle\langle\ell|. \tag{6.10}$$

となり非自明なものになる。非可換空間における積分の定義を思い出すとこの曲率に対応する first Chern class は次のようになる。

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int F \to \theta \mathrm{Tr} F = n. \tag{6.11}$$

つまり元々ゼロブレインチャージが 0 であったものが解生成テクニックにより n に変化したことになる。

なぜ単なるゲージ変換を行っただけなのに非自明な直線束ができたのか直感的な考察を行ってみる。可換な極限においては極座標表示 $z = re^{i\theta}$ を用いると U は次のような形に書くことができる。

$$U = S^n \sim e^{in\theta}. \tag{6.12}$$

このゲージ変換は $z \neq 0$ では有限であるが原点では不定つまり特異点を持っている。つまりこのゲージ変換は可換な理論においては複素空間の帯状の領域 $0 < |z| < \infty$ でのみ定義されたものであり二つの patch の間で定義されたゲージ変換と見なすべきものである。非可換空間においてはパッチという概念は存在しないが上の変換も正則なものとなり異なるトポロジーを持つ解を結びつけるものになっている。

7　森田同値と非可換ソリトン

これまでは主に Moyal 平面について非可換ソリトンの考察を行ってきたが、この場合対応する C^* 代数は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ であり比較的簡単なものであった。つまり例えばその射影演算子の跡は常に整数値に量子化されており、ブレインのチャージとして解釈することは容易であった。可換な幾何学においてはＫ群は常に整数または $\mathbf{Z}_n$ (torsion) の形をしており、非可換平面はその最も素直な拡張を与えている訳である。しかしこの状況は非可換トーラスを考えると一変する。この場合対応する C^* 代数を $\mathcal{A}_\theta$ と書くとそのＫ群は次のように与えられる。

$$K_0(\mathcal{A}_\theta) = \mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z} \tag{7.1}$$

ここでもし非可換パラメーター θ が無理数の場合を考えるとＫ群は実数 $\mathbf{R}$ の中に稠密に分布することになる。これはタイプ II 型の von Neumann 環では典型的に起こる現象である。(type II の von Neumann 環は跡が実数のものとして定義されている。) つまり C^* 代数のＫ群の場合は整数などの飛び飛びの値をとる場合だけではなく連続的な値をとることもあり得るわけで、それをＤブレインチャージとして解釈することはそのままでは難しいということになる。この問題については梶浦氏のトークを参照して貰いたい。この章では一般の C^* 代数において非可換ソリトンをどのように構成するべきかどうかを森田同値 [30] という観点から考察したいと思う [31, 32]。

7.1　森田同値

二つの C^* 代数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が与えらた時、それらが非可換幾何学として同値なものを判定するべき条件としてそれらの代数が森田同値かどうかという条件が同値類の定義として与えられる。つまり非可換空間においては「点」に相当する概念は代数のイデアルに対応するが森田同値な 2 つの代数はイデアルの集合が一対一に対応することが知られている。

二つの C^* 代数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が森田同値であるとは次のような条件が満たされている場合である。

1. 左 $\mathcal{A}$ 加群であり同時に右 $\mathcal{B}$ 加群となるような bimodule X が存在する。
2. X の任意の 2 元 x, y に対して二種類の内積 $\langle x, y\rangle_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, および $\langle x, y\rangle_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$ が存在していて次の性質を満たしている。

$$\langle ax, y\rangle_{\mathcal{A}} = a\langle x, y\rangle_{\mathcal{A}} \qquad \langle x, ay\rangle_{\mathcal{A}} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{A}} a^*$$
$$\langle x, yb\rangle_{\mathcal{B}} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{B}} b \qquad \langle xb, y\rangle_{\mathcal{B}} = b^*\langle x, y\rangle_{\mathcal{A}} \tag{7.2}$$
$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{A}} z = x\langle y, z\rangle_{\mathcal{B}} \qquad x, y, z \in X,\ a \in A,\ b \in B \tag{7.3}$$

3. X の 2 つの内積についての像が A, B の中で密 (dense) である。

以上森田同値の基本的な性質を書いたが、これらの性質のみから射影演算子を作ることができる。まず第三の性質より $\mathcal{B}$ の単位元 $1 \in \mathcal{B}$ に対して X の元 x_i, y_i $(i = 1, \cdots, N)$ が存在していて

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \langle x_i, y_i\rangle_{\mathcal{B}} \tag{7.4}$$

とする事ができる。このとき $P \in \mathrm{Mat}_N(\mathcal{A})$ を次のように

$$P_{ij} = \langle y_i, x_j\rangle_{\mathcal{A}} \tag{7.5}$$

定義すると P は射影演算子となる。

$$\begin{aligned}(P^2)_{ik} &= \sum_j \langle y_i, x_j\rangle_{\mathcal{A}}\langle y_j, x_k\rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \sum_j \langle\langle y_i, x_j\rangle_{\mathcal{A}} y_j, x_k\rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \sum_j \langle y_i, \langle x_j, y_j\rangle_{\mathcal{B}}, x_k\rangle_{\mathcal{A}} \\ &= \langle y_i, x_k\rangle_{\mathcal{A}} = P_{ik}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

森田同値は C^* 代数の抽象的な性質であるが開いた弦を用いて解釈できるのではないかと考えられる。つまり 2 つの D ブレインを考えそれぞれの上に定義されている幾何学が二つの C^* 代数 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ で与えられていると考える。このとき bimodule X はその二つの D ブレインを結ぶ開いた弦と考えられる。二つの内積は弦の場の理論の内積を考えて $\mathcal{A}$ あるいは $\mathcal{B}$ の端を短絡したときできる新しい弦を考えることに対応する。また森田同値の Associativity は対応する弦の内積の Associativity と考えればつじつまが合う。

7.2 Heisenberg 加群と非可換トーラス

上の構成法は抽象的であるので非可換トーラスの具体例を通してそれが実際にどのように使われるのかを議論する。まず最も簡単な非可換トーラスの実現を次のように与える。

$$U_2U_1 = \lambda U_1U_2, \qquad \lambda = e^{2\pi i\theta}. \tag{7.7}$$

この代数を $\mathcal{A}_\theta$ と書くと森田同値の最も簡単な例として $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\theta$ と $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{1/\theta}$ の間の bimodule を次のように構成する [31, 16].

いま X として Schwartz 空間 $S(\mathbf{R})$ を考える。それは無限遠で十分早くゼロになる関数の集合であり $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &: \quad (U_1\cdot f)(t) = f(t+\theta), \quad (U_2\cdot f)(t) = e^{2\pi i t} f(t) \\ \mathcal{B} &: \quad (f\cdot \tilde{U}_1)(t) = f(t+1) \quad (f\cdot \tilde{U}_2)(t) = e^{-2\pi i t/\theta} f(t) \end{aligned} \tag{7.8}$$

このとき無矛盾条件

$$(U_i\cdot f)\cdot \tilde{U}_j = U_i\cdot(f\cdot \tilde{U}_j) \tag{7.9}$$

などは容易に確認できる。このとき $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ に値を持つ内積を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_{\mathcal{A}} &\equiv \frac{1}{\theta}\sum_{n,m\in\mathbf{Z}} (U_2^{-m}U_1^{-n} f, g)_{\mathcal{A}} U_1^n U_2^m \\ \langle f, g\rangle_{\mathcal{B}} &\equiv \sum_{n,m\in\mathbf{Z}} (f, \tilde{U}_2^{-m}\tilde{U}_1^{-n} g)_{\mathcal{B}} \tilde{U}_1^n \tilde{U}_2^m \\ (f, g)_{\mathcal{A}} &= (g, f)_{\mathcal{B}} = \int_{\mathbf{R}} dt\, f(t)\,\overline{g(t)}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

このとき (7.2) については $(,)_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ の性質

$$(af,g)_{\mathcal{A}} = (f,a^*g)_{\mathcal{A}} \qquad (fb,g)_{\mathcal{B}} = (f,gb^*)_{\mathcal{B}} \tag{7.11}$$

より直ちに従う。また Associativity(7.3) については Poisson の和公式

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(\alpha n) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\in\mathbf{Z}} \tilde{f}(2\pi m/\alpha) \qquad \tilde{f}(k) = \int_{\mathbf{R}} dx e^{-ikx} f(x) \tag{7.12}$$

を用いると両辺は

$$\sum_{n,m\in\mathbf{Z}} (U_1^n\cdot f)(x)\overline{(\tilde{U}_1^m\cdot g\cdot U_1^n)}(x)(h\cdot\tilde{U}_1^m)(x) \tag{7.13}$$

に等しくなるので正しいことがわかる。

以上は非可換トーラスの最も簡単な場合であったがより一般的で抽象的な構成法は以下のようなものである。[16, 33] 今 M と $\hat{M}$ を互いに双対な空間とする。ここでは次のような 3 種類の例を考える。

1. $M = \hat{M} = \mathbf{R}$
2. $M = S^1 = \mathbf{T}$, $\hat{M} = \mathbf{Z}$
3. $M = \hat{M} = \mathbf{Z}_N$

M と $\hat{M}$ が互いに双対であることから次のように 2 cocycle を定義することができる。$(e(x) \equiv e^{2\pi i x})$ として

$$\begin{aligned}
1 &: \quad \mu(x_1,k_1;x_2,k_2) \equiv e(x_1k_2 - x_2k_1) \quad (x_i,k_i)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R} \\
2 &: \quad \mu(x_1,n_1;x_2,n_2) \equiv e(x_1n_2 - x_2n_1) \quad 0\le x_i<1, n_i\in\mathbf{Z} \\
3 &: \quad \mu(n_1,m_1;n_2,m_2) \equiv e((n_1m_2 - n_2m_1)/N) \quad n_i,m_i\in 0,\cdots,N-1
\end{aligned} \tag{7.14}$$

非可換トーラスを与えると言うことは $M\times\hat{M}$ に 2 次元格子を与えることと等価になっている。つまり (1) の例では格子の基底として $e_1 = (x_1,k_1)$, $e_2 = (x_2,k_2)$ を考え、格子点 $u = ne_1 + me_2$ に対応する代数の generator U_u を次の交換関係式で定義すればよい。

$$U_uU_v = \mu(u;v)U_vU_u \tag{7.15}$$

(2)(3) についても定義は全く同様である。注意としては (1) は今まで取り扱ってきた非可換トーラスそのものであり、(3) は 2 章で考えた Fuzzy トーラスの定義そのものとなる。Fuzzy トーラスは実際には広がった空間ではなく点の集合であると書いた。つまりトーラスの 2 つの方向が実際にはつぶれていているようなものになっている。(2) は今までは現れていなかったようなものであるがちょうど (1) と (3) の中間、つまりトーラスの一方向のみがつぶれているような非可換トーラスを記述している。

(7.15) を満たす実際の generator は Schwartz 空間を用いて定義できる。$\mathcal{S}(M)$ を M 上の関数空間とし $u = (y,k)\in M\times\hat{M}$ とすると U_u の $f\in\mathcal{S}(M)$ への作用を

$$(U_u\cdot f)(x) = e(kx)f(x+y) \tag{7.16}$$

と定義すると交換関係 (7.15) が容易に確認できる。

一般次元の非可換トーラスは以上の構成を一般化することにより得られる。つまり M を直積空間

$$M = \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^{m_1} \times \mathbf{Z}^{m_2} \times \mathbf{Z}_{N_1} \times \cdots \mathbf{Z}_{N_k} \tag{7.17}$$

および $\hat{M}$ をその双対空間として、その積空間 $X \times \hat{X}$ 上に d 次元格子 Γ を与えればよい。この構成が d 次元の「つぶれていない」非可換トーラスを与えるためには次の条件が成立していなければならない。

$$d = 2n + m_1 + m_2 \tag{7.18}$$

格子 Γ の各点に対応する生成子の交換関係や Schwartz 空間を用いた表現などはすべて上の構成に準じているので省略する。

森田同値に戻ると、このように Schwartz 空間を与えたときそれは格子 Γ で定義された非可換トーラスとその双対格子 $\Gamma^* \in M \times \hat{M}$ で定義された非可換トーラスの間の同値を表すことになる。ここで双対格子とはその上の任意の点 v が元の格子の任意の点 u に対して

$$\mu(u; v) = 1 \tag{7.19}$$

を満たすようなものとして定義されている。従って交換関係の定義に戻ると常に

$$[U_u, U_v] = 0, \quad u \in \Gamma, \quad v \in \Gamma^* \tag{7.20}$$

が成立し bimodule としての解釈が可能となる。

格子 Γ で定義された非可換トーラスの代数を $\mathcal{A}$ とし Γ^* に対応するものを $\mathcal{B}$ とすると $\mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ に値をとる内積の定義は $x, y \in \mathcal{S}(M)$ に対して

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_{\mathcal{A}} &= \sum_{u \in \Gamma} (U_u^* f, g)_{\mathcal{A}} U_u \\ \langle x, y \rangle_{\mathcal{B}} &= \sum_{v \in \Gamma^*} (f, g U_v^*)_{\mathcal{B}} U_v \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$(f, g)_{\mathcal{A}} = (g, f)_{\mathcal{B}} = \int_M f(x)\overline{g(x)}dx \tag{7.22}$$

で与えられる。このとき Associativity の確認は自明でないが Poisson の和公式の適用により Rieffel により証明されている [33]。

以上により一般の非可換トーラスの構成が可能になったがこのように定義された非可換トーラスは Heisenberg module と呼ばれる。一般に非可換空間上の Projective module の構成は難しいが非可換トーラスについては Heisenberg module で与えた Projective module が一般の元を与えることが知られている。つまり高次元トーラス上の非可換ソリトンは常に上のような構成により得られることになる。

8 将来的な課題

8.1 非可換 D-brane の Chern-Simons 結合

Dブレインチャージを与える Chern-Simons 結合は D-brane 上のベクトル束の Chern 指標を用いて書き下されていたが、非可換Dブレインの場合には Projective module の Chern 類をどのように用いるか、またそれが Myer 項とどのように関するかを考えることは興味深い問題であるように思える。

8.2 $K_1(\mathcal{A})$ と非可換ソリトン

射影演算子を通して $K_0(\mathcal{A})$ と非可換ソリトンが深い関連にあることは基本的な視点であったが、$K_1(\mathcal{A})$ がどのようにそれと関連するかはそれほど明らかではない。$K_1(\mathcal{A})$ は次のように抽象的に定義される [17]。

$$\pi_0(U(\mathcal{A})) \tag{8.1}$$

例えば $\mathcal{A} = C(S^1)$ とすると $U(C(S^1))$ は S^1 から $U(1)$ への写像と同一視できるので

$$\pi_0(U(C(S^1))) = \pi_1(U(1)) = \mathbf{Z} \tag{8.2}$$

となる。また非可換トーラスの場合は $K_1(\mathcal{A}_\theta) = \mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z}$ であり U, V で生成されることが知られている。

8.3 Virasoro 代数と K 群

弦の場の理論における $\star$ 積を非可換空間の $\star$ 積と真剣に対応させようと思うと Virasoro 代数を C^* 代数ととらえてその K 群はどうなるかを考えることは重要な問題であると思われる。Virasoro 代数における射影演算子は次の性質を満たすべきであると考えるのが自然であろう。

$$[L_n, P] = [\bar{L}_n, P] = 0 \tag{8.3}$$

Virasoro 代数の既約表現を一つ与えて上の条件を満たすものを定めようとするとそれは必然的に次の形に帰着してしまう [34]。

$$P^{(j,\bar{j})} = \sum_{n,\bar{n}} |j,n\rangle \otimes |\bar{j},\bar{n}\rangle\langle j,n| \otimes \langle\bar{j},\bar{n}| \tag{8.4}$$

ここで $j, \bar{j}$ は Virasoro 代数の Higherst weight vector をラベルしている足であり、$n, \bar{n}$ は一般の $L, \bar{L}$ を用いて励起された状態を一般的に表現したものである。これから Virasoro 代数における射影演算子の性格付けとして次の二つの点が頭に浮かぶ。

- Virasoro 代数の射影演算子は Highest weight 表現と一対一に対応する。
- 上の射影演算子のトレースの値は常に無限大である。つまり Virasoro 代数は type III の van Neumann 代数と分類される

開いた弦は森田同値を定義することなどを思い出すと、上のように定義された射影演算子の間の関連をつける Virasoro 代数を用いて定義された森田同値の定義は何かを考えることは興味深い問題であると思われる。

8.4 NS brane charge

これまでの議論はすべて D-brane charge の計算が K 理論でできることを用いてきた。一方 NS-brane のチャージについてはどのように考えれば良いのであろうか [31]. ここでは例として NS 5-brane チャージの解釈は何かを考えてみる。NS 5 ブレインは B 場に対する磁価単極子と考えられるので NS 5 ブレインがもし存在していれば B 場の曲率は非自明なコホモロジー類に属している必要がある。

$$[dB] \neq 0 \in H^3(X, \mathbf{Z}) \tag{8.5}$$

Cech コホモロジーの言葉で表現するとこのことは次の事実を意味している。今 X の上の局所座標系 (U_i, x_i) を置いたとすると、2 つの U_i の交差に対して Λ_{ij} を $U_i \cap U_j$ で定義された適当な 1-form として

$$B_j - B_i = d\Lambda_{ij} \tag{8.6}$$

と「ゲージ変換」が定義される。さらにこの Λ_{ij} が 3 つの交差 $U_i \cap U_j \cap U_k$ で定義された $U(1)$ に値を持つ関数 α_{ijk} を用いて

$$\Lambda_{ij} + \Lambda_{jk} + \Lambda_{ki} = -id \log \alpha_{ijk} \tag{8.7}$$

と変換を受ける。この α_{ijk} は無矛盾条件として四次の交差 $U_i \cap U_j \cap U_k \cap U_\ell$ 上で

$$\alpha_{ijk}\alpha^{-1}_{jk\ell}\alpha_{ik\ell}\alpha^{-1}_{ij\ell} = 1 \tag{8.8}$$

を満たす必要があるので四次の交差上で定義される整数 $m_{ijk\ell}$ が存在していて

$$-\log \alpha_{ijk} + \log \alpha_{jk\ell} - \log \alpha_{ik\ell} + \log \alpha_{ij\ell} = i m_{ijk\ell} \tag{8.9}$$

とかけることになる。この $m_{ijk\ell}$ が Cech コホモロジーの意味で $H^3(X, \mathbf{Z})$ の元を表現していることになる。

このような非自明な B 場の背景があったときにはゲージ場もその性質が変更を強いられることになる。開いた弦においてゲージ場のゲージ変換が B 場のそれの追加を受けることを思い出す。

$$A_i = g_{ij} A_j g_{ij}^{-1} + i g_{ij} d g_{ij}^{-1} - \Lambda_{ij} \tag{8.10}$$

この変更のために 3 次の交差 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上でゲージ変換は次の条件を満たすことになる。

$$g_{ij} g_{jk} g_{ki} = \alpha_{ijk} \tag{8.11}$$

これは順番にパッチの間でゲージ変換していったときにゲージポテンシャルが元に戻らないことを意味しており A をゲージポテンシャルと解釈する上で困難をもたらすことになる。

ただもし $H^3(X, \mathbf{Z})$ が torsion つまり例えば $\mathbf{Z}_N$ の元であり $\alpha^N_{ijk} = 1$ を満たしているとするとそれが与える twist はもしゲージ群が $SU(N)$ であればその中心の元と考えることができて一応 adjoint で変換する開いた弦には矛盾無く定義できることになる。

一方 $H^3(X, \mathbf{Z})$ が torsion で無い場合にはもし同じ議論を使おうとすると $N \to \infty$ の極限をとる必要がでてしまう。つまり無限枚の D ブレインが無いと理論が無矛盾に定義できないこととなる。

このように非自明なB場背景はDブレイン上の幾何学に対して大きな変更をもたらしてしまう。K群の言葉で言えばもはやブレイン上にあるものは通常のベクトルバンドルではなく上のようなtwistを受けたものに変更する必要があるのでtwisted K群$K(X,[\delta])$を用いてDブレインチャージを与えなくてはならないことになる[35, 36, 37]。

結局NS 5ブレインが存在することはそれに対応するK群でD-braneチャージを特徴づけることになった。ただ明らかなように例えばこの立場ではDブレインとNSブレインのチャージを平等に扱うことはできないのでこの点をどう見るかは今後の課題である。またChern-Simons項の構成や非可換幾何学でどのようにこの背景場を扱うべきかは未解決の問題として残っている。

参考文献

[1] J. Polchinski, "String Theory" Vol. 1,2 (Cambridge 1998).

[2] M. Green, J. Schwarz, E. Witten "Superstring Theory" Vol. 1,2 (Cambridge, 1987).

[3] D. Gepner, Phys. Lett. B199 (1987) 380-388;
D. Gepner, Nucl. Phys. B296 (1988) 757.

[4] H. Kawai, D. C. Lewellen, S. H. H. Tye, Nucl. Phys. B288 (1987) 1.

[5] B. R. Greene, "String Theory on Calabi-Yau Manifolds" hep-th/9702155.

[6] A. Connes, "Noncommutative Geometry" (Academic Press, 1994).

[7] A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz, JHEP 9802 (1998) 003 hep-th/9711162.

[8] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 9909 (1999) 032, hep-th/9908142.

[9] K. Furuuchi, "Topological Charge Of U(1) Instantons On Noncommutative R^4" hep-th/0010006.

[10] N. A. Nekrasov, "Trieste Lectures On Solitons In Noncommutative Gauge Theories" hep-th/0011095.

[11] J. A. Harvey, P. Kraus, F. Larsen, JHEP 0012 (2000) 024, hep-th/0008064.

[12] M. Hamanaka, S. Terashima, JHEP 0103 (2001) 034, hep-th/0010221.

[13] I. Bars, H. Kajiura, Y. Matsuo, T. Takayanagi, Phys. Rev. D63 (2001) 086001, hep-th/0010101.

[14] J. Polchinski, M. J. Strassler, "The String Dual Of A Confining Four-Dimensional Gauge Theory" hep-th/0003136;
J. Brodie, L. Susskind, N. Toumbas, JHEP 0102 (2001) 003, hep-th/0010105.

[15] J. Harvey, "Komaba Lectures On Noncommutative Solitons And D-Branes", hep-th/0102076.

[16] A. Konechny, A. Schwarz, "Introduction To M(atrix) Theory And Noncommutative Geometry" hep-th/0012145.

[17] N. E. Wegge-Olsen, "K-theory and C^*-algebras" (Oxford, 1993).

[18] R. Gopakumar, S. Minwalla, A. Strominger, JHEP 0005 (2000) 020, hep-th/0003160.

[19] E. Witten, JHEP 9812 (1998) 019, hep-th/9810188,

[20] M. Green, J. Harvey, G. Moore, Class.Quant.Grav.14 (1997) 47-52, hep-th/9605033.

[21] A. Sen, "NonBPS States And Branes In String Theory" hep-th/9904207 and references therein.

[22] P. Horava, Adv, Theor. Math. Phys. 2 (1999) 1373-1404, hep-th/9812135.

[23] R. C. Myers, JHEP 9912 (1999) 022, hep-th/9910053.

[24] S. I. Gelfand, Yu. I. Manin, "Homological Algebra" (Springer 1994).

[25] M. R. Douglas, "D-Branes, Categories And N=1 Supersymmetry", hep-th/0011017.

[26] 向井茂 "Fourier-Mukai 変換", Lecture note (1998) available from http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/japanese/tokutei99.html .

[27] Y. Matsuo, Phys. Lett. B499 (2001) 223-228, hep-th/0009002.

[28] J. Harvey and G. Moore, "Noncommutative Tachyon and K theory" hep-th/0009030.

[29] J. A. Harvey, P. Kraus, F. Larsen, E. J. Martinec, JHEP 0007 (2000) 042.

[30] I. Raeburn, D. Williams, "Morita Equivalence and Continuous-Trace C^*-Algebras, (AMS Mathematical Surveys and Monographs 60, 1991).

[31] E. Martinec and G. Moore, "Noncommutative Solitons On Orbifolds", hep-th/0101199.

[32] H. Kajiura, Y. Matsuo, T. Takayanagi, "Exact Tachyon Condensation On Nocommutative Torus", hep-th/0104143.

[33] M. Rieffel, Can. J. Math Vol XL, (1998)257-338.

[34] V.B. Petkova,J.B. Zuber, "The Many Faces Of Ocneanu Cells", hep-th/0101151.

[35] D. S. Freed, E. Witten, "Anomalies In String Theory With D-Branes", hep-th/9907189.

[36] A. Kapustin, Adv. Theor. Math. Phys. 4 (2001) 127-154, hep-th/9909089.

[37] P. Bouwknegt, V. Mathai, JHEP 0003 (2000) 007, hep-th/0002023.

Deformation quantization の収束について

前田 吉昭　慶應義塾大学理工学部数理科学科
E-mail:

1 Deformation quantization

変形量子化 (Deformation quantization) というのは簡単に言って Poisson 代数の変形問題のことである．Poisson 代数を (結合律をもつ代数の範囲で) 変形をして，非可換な代数を作ることが目的である．ここではまず，今回の話の基本になる変形量子化について簡単にまとめておく．

滑らかな多様体 M の上の関数環

$$\mathfrak{A} = C^\infty(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R}(\text{または } \mathbb{C}), C^\infty\text{-function}\} \tag{1.1}$$

を考える．この関数環 $C^\infty(M)$ には，次のような積が自然に定義される．

$$f, g \in \mathfrak{A} \mapsto (f \cdot g)(p) = f(p)g(p) \tag{1.2}$$

このようにして，この C^∞ 関数全体の集合 $\mathfrak{A}$ には可換で結合律をもつ代数の構造が自然に入る．これから議論する Poisson 代数は，ここにもうひとつ幾何学的構造を入れる．物理や数学で良く知られている Poisson 括弧と呼ばれるものである．その定義を思い出しておく．

Poisson 代数の定義　代数の元 $f, g \in \mathfrak{A}$ に対して Poisson bracket と呼ばれる写像

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (f, g) \longrightarrow \{f, g\} \in \mathfrak{A} \tag{1.3}$$

が定義されていて次のような性質を満たす．

1. 双線形 (Bilinear), 非対称 (Skewsymmetric) 性:

$$\begin{aligned} \{f + f', g\} &= \{f\,, g\} + \{f', g\} \\ \{\lambda f, g\} &= \lambda\{f, g\} \\ \{f, g\} &= -\{g, f\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. ヤコビ (Jacobi) の恒等式:

$$\{f, \{g, h\}\} + (cyclic) = 0 \tag{1.5}$$

3. 微分法則 (Derivation rule):

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \tag{1.6}$$

(1.6) は可換積と Poisson 括弧の整合性条件である．

例　多様体 $M = \mathbb{R}^{2n}$ を考え，座標を $(x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$ とする．$C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ 上の Poisson 括弧を，

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f \partial_{y_i} g - \partial_{y_i} f \partial_{x_i} g) \\ &= f(\overleftarrow{\partial}_x \cdot \overrightarrow{\partial}_y - \overleftarrow{\partial}_y \cdot \overrightarrow{\partial}_x) g \end{aligned} \tag{1.7}$$

と定義する．(1.7) で使っている記号だが，例えば，$\overleftarrow{\partial}_x$ は左側の関数 f を微分することで，$\cdot$ はベクトルの内積である．この定義から，Poisson 括弧が双微分作用素 (bidifferential operator) であることが分かる．この空間を標準シンプレクティク空間 (canonical symmplectic space) と呼ぶ．

Deformation Quantization　Poisson 代数の定義を与えたが，次に変形量子化 (deformation quantization) の定義を与える．ここで考えるのは，いわゆる形式的な変形量子化 (formal deformation quantization) であるが，後で収束の問題を取り扱う時のために，ここでは "formal" であることに注意する．

Poisson 代数をどのように変形するかを述べる. 変形パラメータ $\hbar$ を導入して，Poisson 代数を結合律を持つ代数の範囲で動かしてみる．具体的には次のような形式的級数を考える．

$$\mathfrak{A}[\![\hbar]\!] = \{F = f_0 + f_1\hbar + f_2\hbar^2 + \cdots\}, f_i \in \mathfrak{A} \tag{1.8}$$

これは，$\hbar$ の 0-th order が普通の関数なので, $\mathfrak{A}[\![\hbar]\!]$ は代数 $\mathfrak{A}$ を部分代数として含み，最初の代数を拡げたものになっている．変形量子化とは，この拡張された空間 (代数) $(\mathfrak{A}[[\hbar]], *_\hbar)$ に新しい積 $*_\hbar$ を導入し，その積のもとで代数 $(\mathfrak{A}[[\hbar]], *_\hbar)$ が結合律をもつ代数となるようにすることである．この積は一般に $\hbar$ に依存している．これを $*$ 積 (スター積) と呼ぶ．この $*$ 積には，次のことを要請する．

1. (結合律) 任意の $F, G, H \in \mathfrak{A}[[\hbar]]$ に対して，

$$F *_\hbar (G *_\hbar H) = (F *_\hbar G) *_\hbar H \tag{1.9}$$

　が成り立つ．
2. (古典近似) 任意の $f, g \in \mathfrak{A}$ について，その積が次を満たす:

$$f *_\hbar g = fg + \frac{\hbar}{2}\{f, g\} + O(\hbar^2) \tag{1.10}$$

上の条件 2 は Poisson 括弧を古典的なものとして，それを変形したことになっているという意味である．

以上が形式的変形量子化の概要である．形式的 (formal) と断るのは，代数の元と積が $\hbar$ による展開として見たとき，それが形式的巾級数であって，収束することを要請はしていないということである．

このようにして $*$ 積を定義すると，一般には発散する無限級数になり，収束していたとしても，その形を具体的に決定するのはかなり非自明なことである．

"形式的"な変形量子化の存在に関して Kontsevich[KO] の結果が知られている (シンプレクティックの場合には，[DL],[F],[OMY] の結果がある)．

定理 1 (Kontsevich[KO])　任意の Poisson 代数 $\mathfrak{A} = C^\infty(M)$ に対して変形量子化 $(\mathfrak{A}[[\hbar]], *_\hbar)$ が存在する．

この定理によって，一応 Poisson 代数の変形量子化の問題は解決を見たわけである．この定理を踏まえて更に，量子化に関係する問題を考えていきたい．

第一の問題は変形量子化の収束性である．収束性の問題と言うのは，上記(1.10) の $\hbar$ についての形式巾級数が収束しているかという問題である．これは，数学的な問題であるという印象を受けるかもしれない．しかし，巾級数の収束・発散に関わる問題については奥深いものがありそうで物理的にもその性質は面白いのではないかと思える．ここは，物理の方々から教えていただきたいと思っている．

Weinstein[W] や Karasev[KM] は変形量子化の幾何学的構成を考えている．また，Cattaneo-Felder[CF] 等が行なった変形量子化の Path-integral 表示の仕事とも関連している．以下，この 2 つの問題について簡単な例で紹介することがこの話しの目的である．

変形量子化の収束の問題は，Rieffel[R], Nest-Natsume[NN] によって議論されている C^* 環の category での変形量子化の問題とも関連している．

まず，形式的巾級数からさらに収束性のある変形量子化を議論するために， Rieffel により導入された strict deformation quantization の概念を与えておく．

定義 1 (Strict deformation quantization):　Poisson 代数 $\mathfrak{A} = C^\infty(M)$ の密な部分 $*$ 代数 $\mathcal{A} \subset \mathfrak{A}$ を考える (ただし，$*$ 代数とは involution のある代数) . ここで，$\mathfrak{A}$ には適当な位相が入っているとする．閉区間 $I = [-\epsilon, \epsilon] \in \mathbb{R}$ を考える．任意の $\hbar \in I$ について，積 $\star_\hbar$ と involution $*_\hbar$ とノルム $\|\cdot\|_\hbar$ が定義できて次を満すとする:

1. $\mathcal{A}$ が結合律をもつ代数で，$\mathcal{A}$ の完備化 $\overline{\mathcal{A}}$ が C^* 環になる．
2. $f, g \in \mathcal{A}$ に関して

$$\|f \star_\hbar g - fg - \frac{i\hbar}{2}\{f, g\}\|_\hbar \to 0 \quad (\hbar \to 0) \tag{1.11}$$

(即ち，変形された積が与えられたノルムの意味で近似になっている).

積 $\star_\hbar$ というのは，今までの $*$ 積そのものだが, involution $*_\hbar$ と記号が同じになってしまい，混乱を避けるために，ここでは $\star_\hbar$ と記号を使い分ける. 後では，involution は話しのなかには現れてこないので，同じ記号を用いている．

この話しのなかで収束性のある変形量子化の例として使う最もよく知られている Moyal 積と呼ばれる $*$ 積の定義を与えておく．

例 (Moyal 積 (Moyal product):　標準的なシンプレクティク空間 $\mathbb{R}^{2n}$ の座標を

$$(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$$

とする．ここで，次の $*$-積を考える．

$$\begin{aligned} f *_\hbar g &= f(x) e^{\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_x \cdot \overrightarrow{\partial}_y - \overleftarrow{\partial}_y \cdot \overrightarrow{\partial}_x)} g(y)|_{x=y} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^k \frac{1}{k!} f(\overleftarrow{\partial}_x \cdot \overrightarrow{\partial}_y - \overleftarrow{\partial}_y \cdot \overrightarrow{\partial}_x)^k g \end{aligned} \tag{1.12}$$

この右辺の級数はほとんどの場合収束しない．以下ではまず，$*$ 積が収束した場合についてその幾何学的意味について考えてみよう．

2　変形量子化の幾何学的構成

$\mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)\}$ での 標準的な シンプレクティック構造 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ を考える．即ち，

$$\omega_0 = \sum_i dx_i \wedge dy_i \tag{2.1}$$

なる標準的な 2-form を考える．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の上の急減少関数全体の集合とする．この空間上で Weyl 型の量子化 $W_\hbar$ を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の線形作用素

$$W_\hbar : C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \supset \mathcal{S}(R^{2n}) \ni f \mapsto W_\hbar(f) \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n)) \tag{2.2}$$

で次の積分表示で与えられるものと定義する: 2 乗可積分関数 $U(q) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，以下のようにおく．

$$W_\hbar(f)U(q) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(q + \frac{\eta}{2}, \xi) e^{\frac{i}{\hbar}\langle q-\eta, \xi\rangle} U(\eta) d\eta d\xi \tag{2.3}$$

で与えられる．ただし，$\mathbb{R}^{2n} \ni (q, \xi)$. これは，$L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の擬微分作用素を与えている．作用させる関数が急減少であれば，この積分の収束は楽に保証ができる．この積分作用素の積を考えてみよう．

$$W_\hbar(f)W_\hbar(g) = W_\hbar(f *_\hbar g) \tag{2.4}$$

このとき，$f *_\hbar g$ が次のように書けることがわかる．

$$(f *_\hbar g)(x) = \frac{1}{\hbar^{2n}} \int_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(z)e^{-\frac{2i}{\hbar}S_0(x,y,z)} dydz \tag{2.5}$$

ただし，指数の肩は 標準的シンプレクティック 2-形式 ω_0 を使って，

$$S_0(x, y, z) = \omega_0(x, y) + \omega_0(y, z) + \omega_0(z, x) \tag{2.6}$$

とおく．ただし, $\omega_0(x, y) = x \times y$．ここで，$x \times y$ はベクトル x と y の外積である．この $*_\hbar$ 積によって，代数 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}), *_\hbar)$ が，結合律をもつ位相代数となる．このとき $f *_\hbar g$ は収束し, きちんとした C^∞ 関数としてみることができる．一方， $\hbar$ で展開してみると，形式的変形量子化と見ることができる．

この積の定義に現れる積分変換の幾何学的意味を考える．そうすると，Cattaneo-Felder[CF] の場合と似たような表現が見えてくる．

一般の場合に $*_\hbar$ 積を積分表示で次の様に表すことを考えてみる:

$$f *_\hbar g = \int_{M\times M} f(y)g(z)K(x, y, z)dydz \tag{2.7}$$

とする．さらに，この積分核 K を

$$K(x,y,z) = A_\hbar(x,y,z)e^{\frac{i}{\hbar}S(x,y,z)} \tag{2.8}$$

のように，(物理的に言うならば)，振幅関数 (amplitude) と相関数 (phase) の形で書くことが可能かを考える．

これが可能だと仮定すると，積分核 K は次のような性質を持たなければならない．まず，結合律の要請から

$$\int_M K(a,b,t)K(t,c,d)d\mu(t) = \int_M K(a,\tau,d)K(\tau,b,c)d\mu(\tau) \tag{2.9}$$

を満たす必要がある．ここで，変数変換 $\tau = \varphi(t)$ を行ってみる．すると，次のような条件が必要である．

次の定義をしておこう．

定義 2　$K(a,b,c)$ が geometric associative とは，$\varphi : (M, d\mu(t)) \longrightarrow (M, d\mu(\tau))$ が測度不変同相写像で，

$$K(a,b,t)K(t,c,d) = K(a,\varphi(t),d)K(\varphi(t),b,c) \tag{2.10}$$

を満たすときをいう．

これは強い条件であるが，この性質があれば $*_\hbar$ 積は結合律を満たす．

さらに，これを相関数 $S(x,y,z)$ の性質に読み替えるために次で定義する **Weyl triplet** という概念を導入しておく．

定義 3　(M,S,s) が Weyl triplet であるとは

$$S : M \times M \times M \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.11}$$

で，次の性質をみたすもののことをいう．

1. $S(x,y,z) = S(z,x,y) = -S(y,x,z)$
2. $S(x,y,z) = S(x,y,m) + S(y,z,m) + S(z,x,m)$
3. 各点 $x \in M$ に対して測度不変微分同相写像 $s_x : M \longrightarrow M$ が存在して

$$S(x,y,z) = -S(x,s_x(y),z) \tag{2.12}$$

これだけの準備をしておくと，次のことが言える．

補題 1　(M,S,s) を Weyl triplet とすると $K = e^{\frac{i}{\hbar}S}$ は geometric associative になる．

Proof ：いま，$\hbar = 1$ として議論をしても同じなので

$$f * g = \int_{M\times M} f(y)g(z)e^{iS(x,y,z)}d\mu(y)d\mu(z) \tag{2.13}$$

とする．結合律

$$f*(g*h)=(f*g)*h \tag{2.14}$$

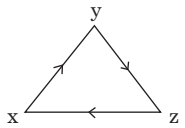
が成り立つように，関数 $S(x,y,z)$ を決めるためには，

$$S(a,b,t)+S(t,c,d)=S(a,d,\tau)+S(\tau,b,c) \tag{2.15}$$

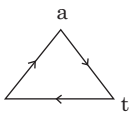
が成り立つ $\tau=\varphi(t)$ を見つければよい．

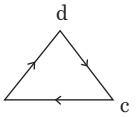
これを Path-integral 的な見方で書いてみよう．そうすると，Cattaneo-Felder[CF] の考えに近いことがわかるだろう．

まず $S(x,y,z)$ に向きのついた三角形のグラフを対応させる:

$S(x,y,z):=$ 

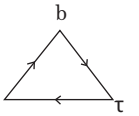
このグラフを用いると，

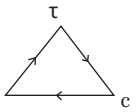
$$f*(g*h)(a)=\int \exp\left(i \right.$$ 

$$\left. \right) \int \exp\left(i \right.$$ 

$$\left. \right) f(b)g(c)h(d)$$

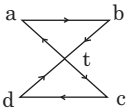
一方で，

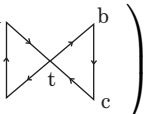
$$f*(g*h)(a)=\int \exp\left(i \right.$$ 

$$\left. \right) \int \exp\left(i \right.$$ 

$$\left. \right) f(b)g(c)h(d)$$

となる．そして，結合律については，

$$\int \exp\left(i \right.$$ 

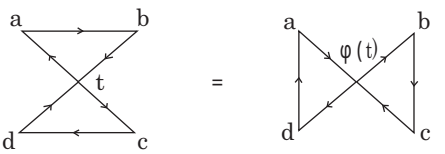
$$\left. \right) = \int \exp\left(i \right.$$ 

$$\left. \right)$$

である．これは，単に

$$S(a,b,t)+S(t,c,d)=S(a,d,t)+S(t,b,c)$$

をいっているにすぎない式である．ここで，$\phi(\tau)=t$ となる τ で次を満たすものを見つける．



実際には，具体的な例でこの関係が成り立つように求めていくことになる．

Rieffelの$*$積　Rieffelに従って，今の$\mathbb{R}^d$-actionをG-actionに拡張する．今，$K \in C^\infty(G\times G\times G)$がgeometric associativeであって，左からの群作用に関して不変であるとする．さらに，

$$\alpha : G \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad G\text{-action on } \mathcal{A} \tag{2.16}$$

を考える．このとき，$\mathcal{A}$上の$*$積を次のように定める．

$$f * g = \int_{G\times G} K(e,a,b)\alpha_a(f)\alpha_b(g)d\mu(a)d\mu(b) \tag{2.17}$$

Rieffelは，特に，$G = \mathbb{R}^d$のとき，$J \in so(\mathbb{R}^d)$を使って

$$S^J(x,y,z) = \langle x, Jy\rangle + \langle y, Jz\rangle + \langle z, Jx\rangle \tag{2.18a}$$

$$s_x(y) = 2x - y \tag{2.18b}$$

としてWeyl triplet $(\mathbb{R}^{2d}, S^J, s_x)$を考えたことになる．

さらに，次のように一般化することができる．

1. シンプレクティック多様体(M,ω)にトーションがない接続∇が与えられている．
2. シンプレクティックsymmetric作用

$$s : M \times M \ni (x,y) \longrightarrow s(x,y) = s_x(y) \in M \tag{2.19}$$

がつぎの条件を満たす．

(a) sはシンプレクティック同相写像,
(b) xのみがs_xの固定点,
(c) $s_x s_y s_x = s_{s_x(y)}$を満たす．

このとき，(M,μ,S)を構成することができ，geometric associativityを満たすKが求まる．この構成については，ここでは詳しくは述べない．

Hermitian symmetric space　Weinstein[W]やKarasev[KM]はシンプレクティック対称空間について次のような形の$*$積を具体的に与えている．

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(z)a_\hbar(x,y,z)e^{\frac{i}{\hbar}S_W(x,y,z)}d\mu(y)d\mu(z) \tag{2.20a}$$

$$S_W(x,y,z) = -\int_\Sigma \omega \tag{2.20b}$$

シンプレクティックsymmetric作用s_xを使って，$t \in M$に対して，

$$A = s_x(t),\ B = s_y(A),\ t = s_x s_y x_z(t) \tag{2.21}$$

とする．ΣはA,B,tでできるgeodesic triangleである．

3　収束性の問題

この節では，Moyal 積 を例にあげて $*$ 積の収束性の問題について説明したい．簡単のために 2 次元の場合を考える．座標を (x, y) として，関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ の Moyal product は

$$f * g = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^p \frac{1}{p!} \sum_{i+j=p} (-1)^j \binom{p}{i} (\partial_x^i \partial_y^j f)(\partial_x^j \partial_y^i g) \tag{3.1}$$

で与えられていた．単純な代数として多項式環

$$\wp(\mathbb{R}^2) = \{p(x, y); \mathbb{R}^2 \text{ 上の polynomial}\} \tag{3.2}$$

を考えてみる．この場合，関数が多項式なので Moyal 積を採用して積を計算すると，無限回の微分が実際は有限で切れてしまうので，

$$(\wp(\mathbb{R}^2), *) \tag{3.3}$$

は結合律を満たす代数（非可換代数）となる．

収束に関する基本的な問題は，無限和を考える時に生じる．そこで，多項式環を拡張してそれを密に含むような結合律をみたす代数を作りたい:

$$(\wp(\mathbb{R}^2), *) \subset (\mathfrak{A}, *) \tag{3.4}$$

具体的には，多項式環からどこまで Moyal 積が拡張できるかということを考える．Moyal 積の拡張にともなう問題というのは，簡単には無限回の微分が出てくる時，収束を要請すると結合律が崩れるという現象が生じることである．実は，簡単な例でその現象を見ることができる．ここで参考にする関数族は [GS] のものである．

例 1　第一の例として，右逆元と左逆元の存在に関係した現象がある．よく知られているように，結合律をもつ代数の基本的な性質として $a \in \mathfrak{A}$ の右逆元 a^r と左逆元 a^ℓ があった場合は $a^r = a^\ell$ が成り立つ．

$$a * a^r = 1 \quad \text{and} \quad a^\ell * a = 1 \Rightarrow a^r = a^\ell \tag{3.5}$$

Proof :

$$\begin{aligned} a^\ell * a * a^r &= (a^\ell * a) * a^r = a^r \\ &= a^\ell * (a * a^r) = a^\ell \end{aligned} \tag{3.6}$$

このように，結合律があるならば右逆元と左逆元が一致しなくてはならない．このことを覚えておいて，次のような計算をやってみる．ここでは，Moyal 積に現れているパラメータが実際に数であると思うことにする．即ち，$\hbar > 0$ となる数と仮定しておく．この時，$x, y \in \mathbb{R}$ について

$$y^r := \frac{1}{y}(1 - e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}) \tag{3.7a}$$

$$y^\ell := \overline{y^r} = \frac{1}{y}(1 - e^{\frac{2i}{\hbar}xy}) \tag{3.7b}$$

という元を考える．ここに現れる指数の項は $\frac{1}{\hbar}$ が現れているので非常にたちの悪いものと感じるかも知れないが，ここでは $\hbar$ が単なる正の数なので，問題はなく定義されている．一方，$y * y^r$ を計算してみる．

$$y * y^r = (1 - e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}) - (\frac{i\hbar}{2})(-\frac{2i}{\hbar}y) \times \frac{1}{y}(-e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}) = 1 \tag{3.8}$$

Moyal product の高次の項は消えるので，これは厳密な計算である．一方，同様の計算で

$$y^\ell * y = 1 \tag{3.9}$$

が示せる．y^r も y^ℓ も意味のある元なので，y には右逆元と左逆元があることが示せた．これは，結合律が破れていることを示している．このようなものが代数の元としてあると，一般に代数が結合律を持たなくということを意味する．

さらに，注意として，$y^r * y^\ell$ を計算すると発散することが分かる．実は，$*$ 積の発散の問題と代数が結合律をもつかどうかの問題が密接に関係している.

例 2　もうひとつの例としては，逆元の一意性が崩れる現象を通じて結合律の破れが見えるという例もある．逆元の一意性もやはり結合律をもつ代数の基本的性質のひとつである．ここで，次のような計算をすると簡単にそれが崩れていることが分かる．

まず，次のような元を用意する．

$$f_t(x, y) := e_*^{itxy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(itxy) * \cdots * (itxy) \tag{3.10}$$

ここで，$*$ 付きの指数は，右辺のように積を $*$ 積で置き換えた展開で定義されている．この関数を $f_t(x, y)$ と書くことにする．この関数の解析関数としての形を実際に微分方程式から求めてやることができる．微分方程式

$$\frac{d}{dt}f_t(x, y) = ixy * f_t(x, y),\ f_0(x, y) = 1 \tag{3.11}$$

を Moyal 積の公式(1.12) を使って実際に計算してやると

$$\frac{d}{dt}f_t(x, y) = ixyf_t(x, y) - \frac{\hbar}{2}(x\partial_x f - y\partial_y f) + \frac{i\hbar^2}{4}\partial_y\partial_x f \tag{3.12}$$

という 2 階の微分方程式を得る．この方程式の中で

$$f_t(x, y) = F_t(xy) \tag{3.13}$$

の形の解を探す．微分方程式に (3.13) の形を代入して $z = xy$ とすると

$$\frac{d}{dt}F_t(z) = zF_t + i\frac{\hbar^2}{4}(F_t' + F_t'') \tag{3.14}$$

なる．(3.14) の解は

$$F_t(xy) = \frac{1}{\cosh\frac{t\hbar}{2}}e^{i\frac{2}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}xy} \tag{3.15}$$

で与えられる．ただし，分母がゼロに成るところは定義できていないので t の範囲は

$$t \in \mathbb{C} - \left\{ (m + \frac{1}{2}) \frac{i}{\hbar} \pi;\, m \in \mathbb{Z} \right\} \tag{3.16}$$

である．このようにして，Moyal 積を使って定義した指数関数の解析的な表現

$$e_*^{itxy} = \frac{1}{\cosh \frac{t\hbar}{2}} e^{i \frac{2}{\hbar} \tanh \frac{\hbar t}{2} xy} \tag{3.17}$$

を得ることができた．この関数は t が実数のところでは定義可能で，さらに分母に $\cosh$ があるので次のような積分も可能である．

$$\int_0^\infty e_*^{itxy} dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^0 e_*^{itxy} dt < \infty \tag{3.18}$$

ここで，(3.18) に xy をかけてみる:

$$\begin{aligned} (xy) * (-i \int_0^\infty e_*^{itxy} dt) &= -i \int_0^\infty (xy) * e_*^{itxy} dt \\ &= -\int_0^\infty \frac{d}{dt} e_*^{itxy} dt = -[e_*^{itxy}]_0^\infty = 1 \end{aligned} \tag{3.19}$$

同様の計算をすると

$$(xy) * i \int_{-\infty}^0 e_*^{itxy} dt = 1 \tag{3.20}$$

を得る．これは，両方とも定義可能な元なので結局，右逆元が 2 個あることになる．この 2 個の元が本当に異なるかを見るために，その差を取ってみると

$$\begin{aligned} -i(\int_0^\infty e_*^{itxy} dt - i \int_{-\infty}^0 e_*^{itxy} dt) &= -i \int_{-\infty}^\infty e_*^{itxy} dt \\ &= -i \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\cosh \frac{t\hbar}{2}} e^{i \frac{2}{\hbar} \tanh \frac{\hbar t}{2} xy} \\ &= -i \frac{\pi}{2} J_0(\tfrac{2xy}{\hbar}) \end{aligned} \tag{3.21}$$

を得る．ただし，J_0 はベッセル関数である．これは，一般にゼロではないので確かに，逆元が 2 個存在することがわかる．

これらの例からは一般に 2 次の関数を指数の肩に載せると問題が起こると考えられる．これをもう少し詳しく見てやり，どういう所に問題があるか，また，どこで結合律が崩れるかを詳細に調べたい．前に述べた多項式環の Moyal 積をどこまで拡張できるかを調べる．

話しを少し変えて，今までの議論を解析接続して実空間 $\mathbb{R}^2$ から複素空間 $\mathbb{C}^2$ に拡張する．Moyal 積も，座標 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を単に複素数 $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ だと思って書いてみる．すると，$\mathbb{C}^2$ 上の正則関数 (holomorphic function) に $*$ 積が入ったと思うことができる．

今，$\mathbb{C}^2$ 上全体で正則な関数 (entire function) の集合を考える．

$$\mathcal{E}(\mathbb{C}^2) = \{ f(x, y) : \text{entire function on } \mathbb{C}^2 \} \tag{3.22}$$

このクラスで $*$ 積の収束を考えるのはまだ広いので, この中に多項式が密に入るぐらいの適当な部分代数を作ってみよう．具体的には，Fréchet 代数を作ることを目標にする．このためにまず，次のようなセミノルムを $\mathcal{E}(\mathbb{C}^2)$ に入れる：$p>0$ として

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)=\{f\in\colon \|f\|_{p,s}=\sup|f|e^{-s|\xi|^p}<\infty, |\xi|=(|x|^2+|y|^2)^{1/2}, s>0\} \tag{3.23}$$

ここで，$p>0$ を固定して $s>0$ を動かすことによってセミノルムの族 $\{\|\cdot\|_{p,s}\}_{s>0}$ を考え，このセミノルムに関して収束するような $\mathbb{C}^2$ 上の正則関数全体の中の部分空間 $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ を考える．大まかにいえば，f の指数的振る舞いの指数が，x,y のほぼ p 次以下の関数になっているような関数のクラスといえる．多項式はすべて $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ 含まれている．

$$\wp(\mathbb{C}^2)\subset\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2) \tag{3.24}$$

他には，指数関数は，p が 1 より少し大きい時に，

$$e^x\in\mathcal{E}_{1+} \tag{3.25}$$

である．この意味は，任意の $p>1$ に対して，$\mathcal{E}_p$ に含まれるということである．

また，同様な記号を用いて，2 次式を指数の方に持つ関数について

$$e^{xy}\in\mathcal{E}_{2+} \tag{3.26}$$

である．このように，p は大体 exponent の次数と思って構わない．

この空間に実空間から自然に拡張した標準的な Poisson 括弧を考えると，

$$(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2),\{\ ,\ \}) \tag{3.27}$$

これは，積で閉じて (i.e.,$f,g\in\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)\to f\cdot g\in\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$) いるので Poisson 代数になる．また，これらは Fréchet 代数である．

余談だが，トポロジーでは C^* 環の方がいいのだが，微積分をやる時には Fréchet 代数の方が扱いやすく微分幾何としては都合がいいので Fréchet 代数にこだわるわけである．

本題にもどると，この代数に Moyal 積を入れる時にどこまで拡張できるかというのが，考えたい問題となるわけで、その答えが次のように成り立つ．

定理 2　Moyal 積 による収束条件付きの変形量子化が

$$0<p\leq 2 \tag{3.28}$$

ならば

$$(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2),*_\hbar) \tag{3.29}$$

は結合律を持つ代数である．この時，$\hbar$ については $*_\hbar$ 積は解析的である．[注意] $p=2$ では指数が 2 次の場合は入らないことを注意する．

ここで，証明の概略を説明する. 次のようなテンソル代数を考える．

Free tensor algebra　生成元 X_1, X_2 で生成される自由テンソル代数 (free tensor algebra) $\mathcal{T}$ とは，

$$\mathcal{T} = \{T = \sum C_\alpha X_\alpha \text{ (有限和)}, X_\alpha = X_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes X_{\alpha_n}, \alpha_i = 1, 2\} \tag{3.30}$$

である．このときの積はテンソル積とする．X_α を単語 (word) と呼びのその長さを，テンソル積で出てくる生成元の数とし，これを $|\alpha|$ と書く．この代数にはセミノルムを入れることができる．$\tau > 0, s > 0$ に対して，$T \in \mathcal{T}$ のセミノルムを

$$\|T\|_{\tau,s} = \sum |C_\alpha||\alpha|^{\tau|\alpha|} s^{\tau|\alpha|} \tag{3.31}$$

ここで，τ を固定して $s > 0$ を動かすことによってセミノルムの族を与える．そして，代数 $\mathcal{T}$ のこのセミノルムによる完備化を

$$\mathcal{T}_\tau : \mathcal{T} \text{ の } \{\|\cdot\|_{\tau,s}\}_{s>0} \text{ による完備化} \tag{3.32}$$

とする．この空間の中にさらに次のような対称テンソル積を考え，それらのなす空間 $\mathcal{S}$ を考える：

$$\mathcal{S} : \text{対称テンソル積のなす空間} \subset \mathcal{T} \tag{3.33}$$

まず，$a, b \in \mathcal{T}$ に対して

$$a \circ b = \frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a) \in \mathcal{S}, \tag{3.34}$$

という対称積を導入する．この $\circ$ 積は結合律は持っていない．そこで，積の順序を次のように指定する．

$$(a\circ)^p \circ c = a \circ (a \circ \cdots \circ (a \circ c)) \cdots) \tag{3.35}$$

また

$$(a\circ)^p \circ (b\circ)^q \circ c = a \circ (a \circ \cdots \circ ((b\circ)^q \circ c)) \cdots) \tag{3.36}$$

とする．このような積を使って

$$\mathcal{S} = \{\sum C_{\alpha\beta} (X_1\circ)^\alpha (X_2\circ)^\beta\} \tag{3.37}$$

を作るとこれは自由テンソル代数の部分空間になる．

この中に，つぎの積 $\odot$ を定義する：

$$((X_1\circ)^k (X_2\circ)^\ell) \odot ((X_1\circ)^m (X_2\circ)^n) = (X_1\circ)^{k+m} (X_2\circ)^{\ell+n}. \tag{3.38}$$

この積のもとで $(\mathcal{S}, \odot)$ が可換代数になる．このセミノルムによる閉包をとってやると，$\mathcal{T}_\tau$ の完備部分空間になる．

$$\mathcal{S}_\tau \subset \mathcal{T}_\tau \tag{3.39}$$

つぎに，この中にちょうど交換関係に相当する両側イデアル $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \{\text{two-sided ideal of } \mathcal{T} \text{ generated by } X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1 - i\hbar\} \tag{3.40}$$

を考え，この閉包を $\mathcal{R}_\tau \subset \mathcal{T}_\tau$ とする．

多項式のレベルでは

$$\mathcal{T}/\mathcal{R} \simeq (\wp(\mathbb{C}^2), *) \tag{3.41}$$

が成り立つ．

これを完備化した時に $*$ 積がどこまで結合律を持つことができるかを調べる．次に注意をしておく．

補題 2　$p > 0, \tau > 0$ の時，次の同型が成り立つ．

$$(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2), \cdot) \simeq (\mathcal{S}_\tau, \odot) \tag{3.42}$$

ただし，$\tau = \frac{1}{p}$.

この同型関係を使って，最初に述べた定理が証明できる．

定理 2 の証明　代数 $(\mathcal{S}_\tau, \odot)$ の積が可換なので，関数の場合と同様に積の微分を考え Moyal 積を $\mathcal{S}, \odot$ の上に定義してやる．これを $(\mathcal{S}, \odot, *)$ と書く．級数の評価を丹念にやることにより，$\tau \geq \frac{1}{2}$ の時に $*$ 積が閉じていることが分かる．

さらに $p \leq 2$ のところでは，つまり $\tau \geq \frac{1}{2}$ のときは，次のように $\mathcal{T}_\tau$ が直和分解することが分かる．

$$\mathcal{T}_\tau = \mathcal{S} \oplus \mathcal{R}_\tau \tag{3.43}$$

したがって，次の同型が分かる:

$$\mathcal{T}_\tau/\mathcal{R}_\tau = (\mathcal{S}, \odot, *) \tag{3.44}$$

最終的にこれが $\simeq (\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2), *)$ のようになる．

一方 $0 < \tau \leq \frac{1}{2}$ のときは

$$\mathcal{T}_\tau = \mathcal{R}_\tau \tag{3.45}$$

となってしまうから，$\mathcal{T}_\tau/\mathcal{R}_\tau$ からはなにも意味のあることは得られない．この証明は $\hbar \neq 0$ のとき

$$e_\odot^{\frac{\tau}{\hbar} X_1 \odot X_2} = \sum \frac{1}{k!} (\frac{t}{\hbar})^k X_1^k \odot X_2^k \in \mathcal{S}_\tau \tag{3.46}$$

という $\mathcal{S}_\tau$ 元を使って

$$X_2^\odot = \frac{1}{X_2}(1 - e_\odot^{-\frac{2}{\hbar} X_1 \odot X_2}) \in \mathcal{S}_\tau \tag{3.47}$$

$$X_2 * X_2^\odot = 1 - 2e_\odot^{-\frac{2}{\hbar} X_1 \odot X_2} \tag{3.48}$$

などを計算していくと最終的に(3.40) で定義されれた両側イデアル $\mathcal{R}$ の中に 1 が入ってしまう．これが，代数を潰してしまうメカニズムである．

4　補足

変形量子化の収束の問題として，Moyal 積を例にあげて，その問題点等を説明したが，このことは，もっと一般の Poisson 多様体についても考察していくことができるだろうと思える．実際，Linear poisson structure と呼ばれるもの, Lie 環の双対空間の上に定義された Poisson 構造であるが，この場合については，もっといろいろな現象が現れることが分かってきた．これについては，今回述べることができなかった. 機会があればお話ししたいと思っている．

参考文献

[BF] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer , *Deformation theory and quantization I, II*, Ann. Phys. 111, (1977), 61-151.

[CF] A. Cattaneo, G. Felder , *A path integral approach to the Kontsevich quantization formula*, Commun. Math. Phys. 212 (2000), 591-611.

[DL] M. De Wilde, P. Lecomte , *Existence of star products and of formal deformations of the Poisson-Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys. 7 (1983), 487-496.

[F] B. Fedosov, *Deformation quantization and index theory, Mathematical Topics*, vol. 9, Birkhäuser, 1996.

[GS] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, 2*, Acad. Press, 1968.

[KM] M. Karasev, V. Maslov, *Nonlinear Poisson Brackets, Geometry and Quantization*, Translations of Mathematical Monographs, 119, A.M.S. 1993

[KO] M. Kontsevich , *Deformation quantization of Poisson manfolds, I*, to appear

[NN] T. Natsume and R. Nest , *C^*-algebraic deformation quantization and the index theorem for families*, in preparation.

[OMY] H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka, *Weyl manifolds and deformation quantization,* Adv. Math. 85, (1991), 224-255.

[OMMY] H. Omoiri, Y. Maeda, N. Miyazaki and A. Yoshioka, *Convergence of the Moyal product defined on the Fréchet-Poisson algebras of entire functions*, to appear.

[R] M. Rieffel, *Deformation quantization for actions of $\mathbb{R}^n$*, Memoir. A.M.S. 106, 1993.

[W] A. Weinstein, *Traces and Triangles in symmetric symplectic spaces*, Contemp.Math. 179 (1994), 261-270.

Through the Instantons on Noncommutative $\mathbf{R}^4$

KEK　古内　一之
E-mail: furuuchi@post.kek.jp

Nekrasov-Schwarz による非可換 $\mathbf{R}^4$ 上のインスタントンの ADHM 構成の発見以後、非可換空間上のゲージ理論の古典解に対する理解は飛躍的に発展した。その中でも特に重要なものは、インスタントンの巻きつき数がある射影演算子の次元と Partial Isometry を通して関係づくことの発見であった。Partial Isometry を中心にこの 1 年の発展を振り返る。

1 Introduction

Nekrasov-Schwarz による非可換 $\mathbf{R}^4$ 上のインスタントンの ADHM 構成の発見 [1] によって、非可換空間上のゲージ理論の古典解に対する我々の視野は大きく広がった。[1] この非可換版 ADHM 構成によって多くの非可換 $\mathbf{R}^4$ 上のインスタントン解が具体的に得られ、これらの具体的な解から我々は非可換空間上の古典解について多くの知見を得ることができた。実際、非可換空間上の場の理論の古典解で重要な役割を担う射影演算子と Partial Isometry は、[1] で構成された $U(1)$ インスタントン解にすでに登場するべきものだったのである (しかし歴史的には、これらはその後の研究 [2][3][4] を経て理解された[2])。ここでは非可換空間上のゲージ理論の古典解の研究の様々な場面で重要な役割を果たす Partial Isometry を中心にこの 1 年間の発展を振り返る。

2　準備：非可換 $\mathbf{R}^4$ 上のゲージ理論

ここで考える非可換 $\mathbf{R}^4$ は $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ という交換関係を満たす非可換な座標 x^μ $(\mu = 1, \cdots, 4)$ によって定義される。座標の回転により一般性を失わずに $\theta^{12} = -\theta^{21}$ と $\theta^{34} = -\theta^{43}$ 以外の成分をゼロにできる。座標を次のように複素に組んでおくと便利である。

$$z_1 = \hat{x}^2 + i\hat{x}^1, \quad z_2 = \hat{x}^4 + i\hat{x}^3. \tag{2.1}$$

これらは次のような交換関係を満たす。

$$[z_1, \bar{z}_1] = \zeta_1, \quad [z_2, \bar{z}_2] = \zeta_2, \quad [z_1, z_2] = [z_1, \bar{z}_2] = 0. \tag{2.2}$$

インスタントン解の振る舞いは $\theta^{\mu\nu}$ の値によって異なる面がある。歴史的にはインスタントンの巻きつき数と Partial Isometry の関係は $\theta^{\mu\nu}$ が自己双対である場合に発見された [4] (インスタントンは反自己双対とする)。この場合のインスタントン解の振る舞いも色々と興味深い特徴があるのだが、多少説明を要する部分があるので詳細は文献 [4][5][7] に譲ることにして、ここでは [8][9] で考察された $\theta^{\mu\nu}$ が反自己双対である場合 $(\theta^{12} + \theta^{34} = 0)$ について述べる。このとき $\zeta_1 = -2\theta^{12}$, $\zeta_2 = -2\theta^{34}$ となる。さらに $\zeta_1 > 0$ として一般性を失わない。$z, \bar{z}$ は基底 $|n_1, n_2\rangle$ によって張られるフォック空間 $\mathcal{H}$ に作用する生成・消滅演算子 $a^\dagger, a$ を用いて次のように表現される。

$$z_1 = \sqrt{\zeta_1} a_1, \quad \bar{z}_1 = \sqrt{\zeta_1} a_1^\dagger, \qquad z_2 = \sqrt{\zeta_1} a_2^\dagger, \quad \bar{z}_2 = \sqrt{\zeta_1} a_2 \,. \tag{2.3}$$

[1]非可換版 ADHM 構成については Lecutere notes [5],[7] に詳しく解説されている。
[2][1] の解自体は修正を要したため [2][3][4][6] (このあたりの事情は [5][7] にまとめられている)。

$$a_1^\dagger |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1+1}\,|n_1+1, n_2\rangle\,, \quad a_1 |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1}\,|n_1-1, n_2\rangle\,, \tag{2.4}$$

$$a_2^\dagger |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2+1}\,|n_1, n_2+1\rangle\,, \quad a_2 |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2}\,|n_1, n_2-1\rangle\,. \tag{2.5}$$

2.1 非可換 $\mathbf{R}^4$ 上の並進・微分・共変微分・ゲージ場

非可換 $\mathbf{R}^4$ 内の並進はユニタリー演算子 $T_y \equiv \exp[y^\mu \hat{\partial}_\mu]$ ($\hat{\partial}_\mu \equiv iB_{\mu\nu}\hat{x}^\nu$, $B_{\mu\nu} = (\theta^{\mu\nu})^{-1}$) で表される: $T_y\,\hat{x}^\mu\,T_y^\dagger = \hat{x}^\mu + y^\mu$. 任意の演算子 $\hat{O}$ に対して、微分を可換な場合と同じように微小並進によって定義する。

$$\partial_\mu \hat{O} \equiv \lim_{\delta y^\mu \to 0} \frac{1}{\delta y^\mu}\left(T_{\delta y^\mu}\hat{O}T_{\delta y^\mu}^\dagger - \hat{O}\right) = [\hat{\partial}_\mu, \hat{O}].$$

ゲージ場 A_μ はユニタリー変換 $U: UU^\dagger = U^\dagger U = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{Id}_n$ のもとでの共変微分 $D_\mu \equiv \partial_\mu + A_\mu$ にともなって導入される。ゲージ場の曲率は $F_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ で与えられる。Yang-Mills 作用

$$S = \frac{1}{4g^2}\,(\pi\zeta_1)^2\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\mathrm{tr}_{U(n)}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.6}$$

はゲージ変換 $A_\mu \to U\partial_\mu U^\dagger + UA_\mu U^\dagger$ のもとで不変である。

2.2 インスタントン

ゲージ場 A_μ が式 $F_{\mu\nu}^+ = 0$ ($F_{\mu\nu}^- = 0$) を満たすとき反自己双対 (自己双対) と呼ぶ。ただし

$$F_{\mu\nu}^\pm \equiv \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu}), \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \quad (\epsilon_{1234} = 1). \tag{2.7}$$

インスタントンとは反自己双対条件を満たし、Yang-Mills 作用が有限となるようなゲージ場の配位である。インスタントン数は

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}_{U(n)}\,FF \qquad (F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) \tag{2.8}$$

で定義され、整数となる。

2.3 Weyl Symbol とスター積

可換な $\mathbf{R}^4$ の場合との比較やインスタントン数の topological な解釈のために、演算子から可換な $\mathbf{R}^4$ 上の関数への写像を考えることが必要となる。演算子を Weyl 順序で書いたときに関数形が同じになるように演算子から関数への写像 Ω_W を定義する:

$$\Omega_W\ :\ f(\hat{x}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\tilde{f}(k)\,e^{ik\hat{x}} \ \Rightarrow f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\tilde{f}(k)\,e^{ikx}$$

(ここで x^μ は可換な $\mathbf{R}^4$ の座標)。写像 Ω_W で演算子から移された関数を元の演算子の **Weyl symbol** と呼ぶ。スター積 $\star$ は次のように定義される:

$$f(x)\star g(x) \ \equiv\ \Omega_W(\Omega_W^{-1}(f(x))\Omega_W^{-1}(g(x))) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu}}f(x)g(x')\Big|_{x'=x} \tag{2.9}$$

2.4 IIB 行列模型と非可換空間上の Yang-Mills 理論

IIB 行列模型の変数 X^μ を用いる方がゲージ場 A_μ を用いるよりも見通しが良い場合があるので少し触れておく。IIB 行列模型の作用は 10 次元の超対称 Yang-Mills 作用の 0 次元への dimensional reduction で与えられる。

$$S = -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}_{U(N)}\left(\frac{1}{4}[X_\mu, X_\nu][X^\mu, X^\nu] + \frac{1}{2}\bar{\Theta}\Gamma^\mu[X_\mu, \Theta]\right) \quad (\mu = 0, \cdots, 9). \tag{2.10}$$

ここで X^μ は $N \times N$ のエルミート行列、Θ は X^μ の超対称性の相棒である。N が無限大のとき、行列 X^μ は $\mathcal{H}^{\oplus n}$ に作用する演算子と同一視することができる。

$$X^\mu = -\theta^{\mu\nu} i(\hat{\partial}_\nu + A_\nu)\,, \qquad X_I = \Phi_I\,. \tag{2.11}$$

と置くと (2.10) は非可換 $\mathbf{R}^4$ 上の超対称 $U(n)$ Yang-Mills 理論に帰着する ((2.6) からは少しずれがあるが、[10] 参照)。A_μ が超対称 Yang-Mills 理論の古典解のとき、X^μ は IIB 行列模型の古典解となる。

3 インスタントンと Partial Isometry

$UU^\dagger = (\text{Identity}), U^\dagger U = (\text{射影演算子})$ を満たす U を **Partial Isometry** と呼ぶ。Partial Isometry が重要なのは、後で説明するようにインスタントン数という topological な量が Partial Isometry を通してある射影演算子の次元と関係づくからである。非可換幾何は代数を中心として幾何学を構成するという思想なので、インスタントン数という topological な量が射影演算子の次元という代数的な量に帰着するということが重要な意味を持つ。また行列模型 (IIB,M) においては変数が行列なので、時空は行列の代数により記述されると考えられる。したがって上のような topological な量と代数的な量の等価性は行列模型から時空の topology がどのように現れてくるかを理解するための重要な手がかりを与える。さらにインスタントン以外でも、その後発見された様々な非可換空間上のソリトン解において Partial Isometry が本質的な役割を担っていることも Partial Isometry の重要性を示していると言える。

ここでは非可換パラメータ $\theta^{\mu\nu}$ が反自己双対の場合のインスタントン解を例に、Partial Isometry について説明する。

3.1 $U(2)$ 1-インスタントン解と Partial Isometry

ADHM 構成により反自己双対な非可換パラメータを持つ $\mathbf{R}^4$ 上に $U(2)$ 1-インスタントン解を構成したとき、解はインスタントンの大きさを特徴づけるパラメータ ρ をもつ [9]。[3] $\rho = 0$ のときインスタントンの大きさは最小となり、このときの解の形は IIB 行列模型の変数 X^μ ((2.11)) を用いると

$$X^\mu = U^\dagger \hat{x}^\mu U, \quad X_I = c_I \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{Id}_2, \tag{3.1}$$

[3] 非可換 $\mathbf{R}^4$ 上では $\mathrm{tr}_{U(n)} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ がゲージ不変な量でないためインスタントンのかたちはゲージによるが、ここでは非可換パラメータがゼロになる極限で自然に可換 $\mathbf{R}^4$ の場合に帰着するようなゲージをとっている。

$$U \equiv \frac{1}{\sqrt{z_1\bar{z}_1 + \bar{z}_2 z_2 + \zeta_1}} \begin{pmatrix} z_2 & z_1 \\ -\bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\hat{N}+1}} \begin{pmatrix} a_2^\dagger & a_1 \\ -a_1^\dagger & a_2 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

となり、[8] で議論された解に帰着する。ただし $\hat{N} \equiv a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2$. U は次の式を満たし、したがって Partial Isometry である。

$$UU^\dagger = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{Id}_2, \qquad U^\dagger U = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - |0,0\rangle\langle 0,0| \end{pmatrix} \equiv p \tag{3.3}$$

p は射影演算子になっている: $p^2 = p$, $p^\dagger = p$. Partial Isometry U ((3.2)) は次のような性質を持つ。

1. $r = \sqrt{x^\mu x_\mu}$ が大きいときの Weyl symbol の振る舞いは

$$\Omega_W(U) \to \frac{x^\mu \bar{\sigma}_\mu}{r} \quad (r \to \infty) \tag{3.4}$$

   となる。ここで $\bar{\sigma}_\mu$ は $U(2)$ ゲージ群の行列の基底。(3.4) より U(の Weyl symbol) はインスタントンの巻きつき数 $\pi_3(U(2))$ の生成子になっていることがわかる。
2. U は $\mathcal{H}^{\oplus 2}$ から $p\mathcal{H}^{\oplus 2}$ への写像である。

1,2 により、 Partial Isometry を通してインスタントンの巻きつき数と射影演算子 $(1-p)$ の次元が一致することが示される。ここで現れる射影演算子の物理的な意味については最後に触れる (非可換パラメータ $\theta^{\mu\nu}$ が自己双対部分を含む場合 Partial Isometry の現れ方は少し異なり、可換な空間の特異なゲージ変換に対応する非可換空間での類似物と関係する。[4][5][7] 参照)。

3.2 $U(1)$ 1-インスタントン解と Partial Isometry

非可換 $\mathbf{R}^4$ 上の $U(1)$ インスタントン解は非特異である。これは非可換性により場の配位に特異性が現れなくなる典型的な例であり、非常に興味深い。というのも、可換な $\mathbf{R}^4$ 上では滑らかな $U(1)$ インスタントン解は存在できないからである。すなわち、インスタントン数は無限遠での表面項に帰着するが、無限遠で曲率 F が $O(r^{-3})$ であるため、これはゼロになる。

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbf{R}^4} FF = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbf{R}^4} d(AF) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3_{\text{無限遠}}} (AF) = 0. \tag{3.5}$$

(場の配位がある点で特異になるときは、その点からゼロでない表面項が出ても良いので、インスタントン数がゼロでなくても良い)。単純に考えると無限遠では非可換性の効果は無視できると期待されるので、非可換な場合でも滑らかなインスタントンは存在できないように思える。しかし注意深く考察すると、実は $U(1)$ インスタントン解の場合には無限遠でも非可換性の効果が残っていることがわかる [5]。これを以下で説明する。

$U(2)$ の場合の大きさが最小のインスタントン解の形 (3.1) を知っていれば、$U(1)$ の場合の解が同じように

$$X^\mu = U^\dagger \hat{x}^\mu U, \tag{3.6}$$

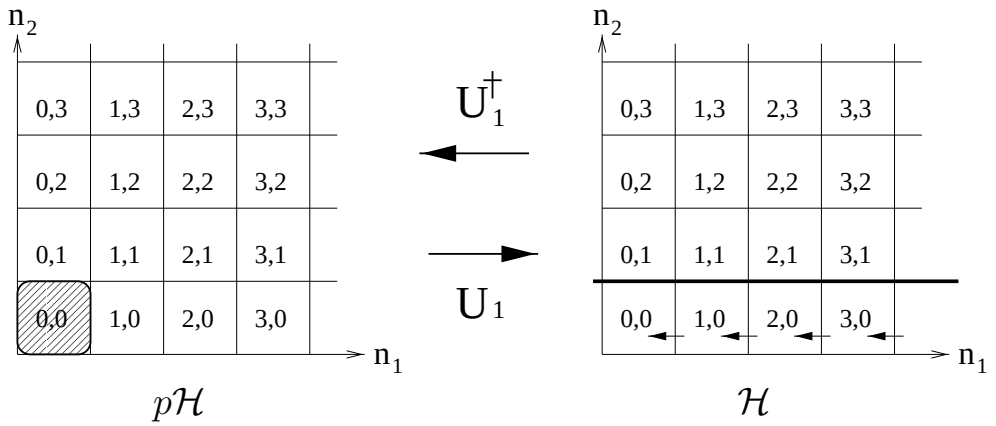


図 1: $n_2 = 0$ の行だけ 1 つずつ左にずらす写像 U_1 は、$|0,0\rangle$ を抜いた空間 $p\mathcal{H}$ から全フォック空間 $\mathcal{H}$ への写像の例になっている。

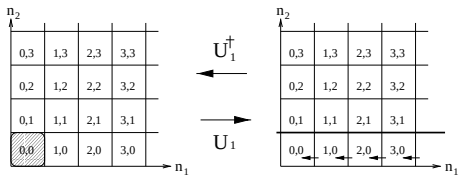


図 2: $r \to \infty$ でゲージ場は $z_2 = 0$ 平面に局在する ((3.8) で定まるゲージにおける描像)。

$$UU^\dagger = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \qquad U^\dagger U = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} - |0,0\rangle\langle 0,0| \equiv p \tag{3.7}$$

で与えられるということは予想できるだろう。(3.7) を満たすような U はいくらでもあるが、それらは全てゲージ同値なゲージ場を与える。例として次のように U を選ぶことができる。

$$\begin{aligned} U = U_1 &\equiv (1 - |0\rangle\langle 0|_2) + \sum_{n_1=0}^{\infty} |n_1, 0\rangle\langle n_1 + 1, 0| \\ &= (1 - |0\rangle\langle 0|_2) + |0\rangle\langle 0|_2 \frac{1}{\sqrt{\hat{n}_1 + 1}} a_1, \end{aligned} \tag{3.8}$$

ただし $|m\rangle\langle n|_2 \equiv \sum_{n_1=0}^{\infty} |n_1, m\rangle\langle n_1, n|$, $\hat{n}_1 \equiv a_1^\dagger a_1$ である。U_1 は図 1 に描かれているように $p\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への写像となっている。$|0\rangle\langle 0|_2$ の Weyl symbol $\Omega_W(|0\rangle\langle 0|_2) = 2e^{-\frac{2}{\zeta_1}|z_2|^2}$ は、$z_2 = 0$ のとき $r \to \infty$ でもゼロにならないことに注意。このためゲージ場は無限遠で $z_2 = 0$ 平面に局在する。図 2 では x^1-x^2 平面で極座標 $r_1 = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$, $\phi = \tan^{-1}(\frac{x^2}{x^1})$ をとったときのゲージ場の角度成分 iA_ϕ を描いた。図 2 から予想されるように、今とっているゲージのもとで、インスタントン数は本質的に x^1-x^2 平面の無限遠の S^1 への iA_ϕ の巻きつき数 $\pi_1(U(1))$ に帰着する [5]。

Partial Isometry によって書かれた解 (3.1) や (3.6) は、IIB 行列模型において次のような物理的な解釈ができる。これらの解では、曲率 $F_{\mu\nu}$ を変えずに新しいパラメータ y^μ, y_I を付け加えることができる。

$$X^\mu = U^\dagger \hat{x}^\mu U + y^\mu(1-p), \quad X_I = c_I p + y_I(1-p). \tag{3.9}$$

これは例えば $U(1)$ ゲージ群の場合、Partial Isometry U が $p\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への写像であることからフォック空間 $\mathcal{H}$ の適当な基底を選ぶと

$$X^\mu = \begin{pmatrix} \hat{x}^\mu \otimes \mathrm{Id}_2 & \\ & y^\mu \end{pmatrix}, \quad X_I = \begin{pmatrix} c_I \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{Id}_2 & \\ & y_I \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

とブロック対角な形に書けることによる ($U(2)$ ゲージ群の場合も同様)。IIB 行列模型では左上のブロックは D3-brane, 右下のブロックは D-インスタントンと解釈される。y^μ は ADHM モジュライ空間でインスタントンの位置を表すパラメータであることが示せる [9]。すなわち、行列模型において D-インスタントンの D3-brane に平行な方向での位置と解釈されるパラメータ y^μ は、期待されるようにインスタントンの位置と一致している。一方、c_I、y_I はそれぞれ D3-brane, D-インスタントンの D3-brane に直交する方向の位置と解釈される。任意の y_I に対して曲率 $F_{\mu\nu}$ が反自己双対に保たれることは、超対称性を保ったまま D-インスタントンが D3-brane から離れられることを表す [8]。

参考文献

[1] N. Nekrasov and A. Schwarz, "Instantons on Noncommutative $\mathbf{R}^4$ and (2, 0) Superconformal Six Dimensional Theory", Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689.

[2] K. Furuuchi, "Instantons on Noncommutative $\mathbf{R}^4$ and Projection Operators", Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043.

[3] P.-M. Ho, "Twisted Bundle on Noncommutative Space and $U(1)$ Instanton" hep-th/003012.

[4] K. Furuuchi, "Equivalence of Projections as Gauge Equivalence on Noncommutative Space", hep-th/0005199, to appear in Commun. Math. Phys.

[5] Furuuchi, K. "Topological Charge of $U(1)$ Instantons on Noncommutative $\mathbf{R}^4$ ", hep-th/0010006.

[6] N. Nekrasov, "Noncommutative Instantons Revisited", hep-th/0010017.

[7] N. Nekrasov, "Trieste Lectures on Solitons in Noncommutative Gauge Theories", hep-th/0011095.

[8] M. Aganagic, R. Gopakumar, S. Minwalla, A. Strominger, "Unstable Solitons in Noncommutative Gauge Theory", hep-th/0009142.

[9] Furuuchi, K. "Dp-D(p+4) in Noncommutative Yang-Mills", hep-th/0010119, to appear in JHEP.

[10] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, T. Tada, "Noncommutative Yang-Mills in IIB Matrix Model", Nucl. Phys. **B565** (2000) 176.

Noncommutative Tachyon from Boundary String Field Theory

KEK　奥山和美
E-mail: kazumi@post.kek.jp

定数 B-場中の開弦タキオンの作用を boundary string field theory を用いて計算する。得られた作用を微分で展開すると Born-Infeld 型になる。一方、非可換性 θ が大きい極限ではポテンシャル項のみが残り、場の積は $\star$-積で与えられる。

1 Introduction

近年、開弦のタキオン場が注目を集めている。開弦のタキオンモードの凝縮を調べることは、non-BPS 状態及び $D\bar{D}$ 系等の不安定なブレーンの振舞いを知る上で不可欠である。また、タキオン場のトポロジカルな配位により安定な BPS ブレーンを構成することが出来る。このことは D ブレーンのチャージの K 理論による分類と密接に関係している。

タキオンの凝縮という現象は本質的に off-shell なので、摂動的な弦理論では捉えることが難しい。従って弦の場の理論を考える必要が生じる。開弦の場の理論には大きく分けて、キュービック型と以下で使う BSFT の 2 種がある。キュービック型ではポテンシャルの極値を求める際、多くのモードが互いに結合しているため厳密に解くことが困難であり、近似に頼らざるを得ない。一方、BSFT ではタキオンと質量の大きい粒子がうまく分離しているので、ポテンシャルを厳密に議論することが出来るのが特長である。

他方、定数 B 場中のブレーンを考えると、ブレーン上の力学は非可換場の理論で記述されることが知られている。特に B が大きい極限では運動項がポテンシャル項に比べて小さくなるためにソリトンが射影演算子で書かれる等、力学が簡単化するという現象が起る。

以上を踏まえて、以下では定数 B 場中の BSFT を調べ、タキオンの作用を考察する [4]。

2 Review of BSFT

この節では BSFT について簡単にレビューする。Witten は、2 次元 Disk 上の場の理論全体の空間の上に Batalin-Vilkovisky 形式を適用することで、開弦の場の理論が定式化できる可能性を示唆した [1]。しかし、この空間自体の定義が well-defined ではないので、BSFT と言ってもきちんと定義された理論ではないことを認識しておく必要がある。だが、この理論を使うとタキオンのポテンシャルが厳密に計算できること等、多くの利点を持っていることも事実である。

さて、Batalin-Vilkovisky 形式では作用は master 方程式 $\{S, S\} = 0$ の解として与えられる。これは nilpotent なベクトル場 V と odd なシンプレクティック形式 ω を用いて S が

$$dS = i_V \omega$$

と書けることと同値である。この一般論を BSFT に適用するには、V を BRST 変換に取り、ω を disk 上の相関関数として与えればよい。即ち、

$$dS = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma d\sigma'}{(2\pi)^2} \Big\langle d\mathcal{O}(\sigma)\{Q, \mathcal{O}(\sigma')\} \Big\rangle.$$

ここで、$\mathcal{O}$ は disk の境界上のオペレーター $\mathcal{V}$ と

$$\mathcal{V} = b_{-1}\mathcal{O}$$

なる関係で結ばれている。以上が Witten による議論であるが、BSFT の作用の表式には幾つかの亜種が知られている。

(i) $dS = i_V \omega$ (Witten[1])

(ii) $S = (\beta^i \partial_i + 1)Z$ (Shatashvili[2])

(iii) $\partial_i S = G_{ij}\beta^j$ (Kutasov et al[3])

ただし (ii) に於いて Z は disk 上の分配関数である。

$$Z = \int e^{-S_\Sigma - S_{\partial\Sigma}}.$$

これらの表式には、それぞれに長所が有るが、次節では (ii) の表式を用いてタキオンの作用を計算する。

(iii) の表式を用いると、タキオンの形として X の 2 次まで取れば「厳密」なポテンシャルを求められることが、次のような議論によりわかる [3]。境界の作用を

$$S_{\partial\Sigma} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} T(X),$$

とし、T を 2 次とそれ以外の項に分離する。

$$T(X) = a + \frac{1}{2\alpha'} u_{\mu\nu} X^\mu X^\nu + \lambda^i \mathcal{O}_i.$$

すると、(iii) の定義から S を λ^i で微分したものはベータ関数に比例するはずであるが、$\lambda^i = 0$ では free な理論になっているので、この値はゼロになる。即ち、S を λ^i の冪で展開すると、1 次の項を含まない。

$$S(a, u, \lambda_i) = S^{(0)}(a, u) + S^{(2)}_{ij}(a, u)\lambda^i\lambda^j + \cdots.$$

このことから、$S^{(0)}$ の極値が S の極値を与えることがわかる。つまり、$T(X)$ として X の 2 次まで取れば作用の極値問題の解 (の 1 つ) を厳密に解けることになる。同様の議論はキュービック型の開弦場の理論にも適用でき、タキオンポテンシャルがコンパクト化に依らずユニバーサルであることが示されている。

3 Tachyon in B-field Background

この節では定数 B 場中のタキオンの作用を計算する。まず、disk の内部に於ける作用は

$$\begin{aligned} S_\Sigma &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{h} h^{ab} g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \\ &\quad -\frac{i}{2} \int_\Sigma B_{\mu\nu} dX^\mu \wedge dX^\nu \end{aligned}$$

で与えられる。次に disk の境界にはタキオン場を挿入する。

$$S_{\partial\Sigma} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} T(X(\sigma)).$$

前節の議論により、$T(X)$ としては X の 2 次式を取る。

$$T(X) = a + \frac{1}{2\alpha'} u_{\mu\nu} X^\mu X^\nu.$$

すると、X の境界条件は

$$g_{\mu\nu}\partial_r X^\nu - i2\pi\alpha' B_{\mu\nu}\partial_\sigma X^\nu + u_{\mu\nu} X^\nu = 0$$

となる。この境界条件の元で X のプロパゲーターを計算すると、

$$\frac{2}{\alpha'}\langle X(z)X(w)\rangle = G^{-1}F_N(z,w) - \Theta G\Theta F_D(z,w) + 2\pi i\Theta F_\epsilon(z,w)$$

となることがわかる。ここで、F_N、F_D、F_ϵ は次のような関数である。

$$\begin{aligned} F_N(z,w) &= -\log|z-w|^2 - \log|z-\bar{w}|^2, \\ F_D(z,w) &= -\log|z-w|^2 + \log|z-\bar{w}|^2, \\ F_\epsilon(z,w) &= \frac{1}{\pi i}\log\left(\frac{w-\bar{z}}{z-\bar{w}}\right). \end{aligned}$$

次に分配関数を以下のようにプロパゲーターを積分することで求める。

$$\frac{d}{du}\log Z = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_0^{2\pi} d\sigma \Big\langle X(\sigma)X(\sigma)\Big\rangle.$$

ここで同一点から来る発散を point-splitting で処理する。すると、Z は

$$Z = e^{-a+\gamma\mathrm{tr}(E_+ u)}\det\Big((E_+u)^{\frac{1}{2}}\Gamma(E_+u)\Big)$$

と求まる。ここで、E_+ は

$$E_+ = (g + 2\pi\alpha' B)^{-1} = G^{-1} + \Theta = G^{-1} + \frac{\theta}{2\pi\alpha'}$$

である。よく知られているように、G は開弦の感じる計量であり、θ は非可換パラメターという意味を持つ。

以上の情報から BSFT の作用を求めることができる、ここでは (ii) の定義から S を求めてみる。そのためには a と u のベータ関数が必要だが、いま disk 上の理論は free なので非自明な繰り込みは正規順序だけから来る。

$$\begin{aligned} &a + \frac{1}{2\alpha'} u_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = a_\epsilon + \frac{1}{2\alpha'} u_{\mu\nu} :X^\mu X^\nu: \\ &a_\epsilon = a + G^{\mu\nu} u_{\mu\nu}\log\epsilon \end{aligned}$$

ここで ϵ は紫外のカットオフである。この表式からベータ関数は

$$\beta^a = -a - G^{\mu\nu}u_{\mu\nu}, \quad \beta^u = -u$$

となる。これを (ii) の定義に入れると、BSFT の作用が

$$\begin{aligned} S &= (\beta^a\partial_a + \beta^u\partial_u + 1)Z \\ &= \Big(G^{\mu\nu}u_{\mu\nu} - a\partial_a - u\partial_u + 1\Big)Z \end{aligned}$$

と求まる。

4 Action of Tachyon Field

前節の作用の表式を 2 つの極限で評価してみる。1 つは u が小さい極限、もう一つは θ が大きい極限である。

まず、u が小さい極限を考える。これは $T(X)$ の微分が小さいという近似と同じである。このとき、Z は

$$\begin{aligned} Z &\sim e^{-a}\det{}^{-\frac{1}{2}}(E_+u) \\ &= T_{25}\int d^{26}x\,\mathcal{L}_{\rm BI}(B)\,e^{-T(x)} \end{aligned}$$

と書ける。ここで、$T_{25}=(2\pi\alpha')^{-13}$, $\mathcal{L}_{\rm BI}(B)=\sqrt{\det(g+2\pi\alpha' B)}$ という記号を導入した。また、S の表式に現われる各項は、

$$G^{\mu\nu}u_{\mu\nu}=\alpha' G^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu T$$

$$(-a\partial_a-u\partial_u+1)\int d^{26}x\,e^{-T(x)}=\int d^{26}x\,(T(x)+1)e^{-T(x)}$$

と評価される。従って、u が小さいときのタキオンの作用は

$$S=T_{25}\int d^{26}x\,\mathcal{L}_{\rm BI}(B)\,e^{-T}(\alpha' G^{\mu\nu}\partial_\mu T\partial_\nu T+T+1)$$

となる。この式からポテンシャルは $e^{-T}(T+1)$ であり、B の依存性は Born-Infeld 型であることがわかる。

一方、

$$G^{-1}\ll\frac{\theta}{2\pi\alpha'}$$

という θ が大きい極限を考える。すると Z は

$$\begin{aligned} Z &= e^{-a}\det{}^{\frac{1}{2}}\Big(\Gamma(\Theta u)\Gamma(1-\Theta u)\Big) \\ &= e^{-a}\det{}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{\sin\pi\Theta u}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、ハミルトニアンが $H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2x^2$ で与えられる調和振動子の分配関数が

$$\mathrm{Tr}\Big(e^{-\beta H}\Big)=\frac{1}{2\sinh\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right)}$$

であったことを思い出すと、Z は

$$Z=\mathrm{Tr}\,e^{-T(\hat{x})}$$

と書けることがわかる。$\hat{x}$ は

$$[\hat{x}^\mu,\hat{x}^\nu]=i\theta^{\mu\nu}$$

を満すオペレーターである。このことから、θ が大きい時のタキオンの作用は

$$S=\mathrm{Tr}\left[(T(\hat{x})+1)e^{-T(\hat{x})}\right]=\int\frac{d^{26}x}{\mathrm{Pf}(2\pi\theta)}\Big[(T+1)e^{-T}\Big]_\star$$

となる。即ち、作用はポテンシャル項のみになり、場の積は $\star$-積で書かれる。これは非可換場の理論ではよく知られた現象であるが、BSFT でも同様であることを陽に示したことになる。

5 Summary

本稿では定数 B 場中の BSFT を考察し、タキオンの作用を求めた。この作用の B 依存性は、微分展開では Born-Infeld 型であり、非可換パラメターの大きい極限では $\star$-積にまとまる。一般の場合の作用はこの 2 つを補間するものであると考えられる。

参考文献

[1] E. Witten, "On Background Independent Open-String Field Theory," Phys. Rev. **D46** (1992) 5467, `hep-th/9208027`.

[2] S. L. Shatashvili, "Comment on the Background Independent Open String Theory," Phys. Lett. **B311** (1993) 83, `hep-th/9303143`; "On the Problems with Background Independence in String Theory," `hep-th/9311177`.

[3] D. Kutasov, M. Marino and G. Moore, "Some Exact Results on Tachyon Condensation in String Field Theory," JHEP **0010** (2000) 045, `hep-th/0009148`.

[4] K. Okuyama, "Noncommutative Tachyon from Background Independent Open String Field Theory," Phys. Lett. **B499** (2001) 167, `hep-th/0010028`.

トーラス上の非可換ソリトンとタキオン凝縮

東京大学大学院 数理科学研究科　梶浦宏成
E-mail: kuzzy@ms.u-tokyo.ac.jp

[1] に沿ってトーラス $\mathbb{T}^2$ 上の非可換ソリトンについて議論する. $\mathbb{T}^2$ の non-BPS D2, D0-brane と非可換ソリトンの質量が対応することをみる. $\mathbb{R}^2$ の場合 [2] と異なり $\mathbb{T}^2$ の体積が有限であることから, その上の D-brane は $\mathbb{R}^2$ の時と異なりいくらでも小さく分離してしまうことができる. また, $\mathbb{T}^2$ 上で考えることにより T-duality について議論でき, $\mathbb{T}^2$ 上の D-brane の質量スペクトラムは T-duality で不変であることが分かる.

1 Introduction

D-brane は, open string の境界として発見されたが, ゲージ理論におけるインスタントン, モノポールなどと同様, それは弦理論におけるソリトン解であるので, 弦の場の理論, またその低エネルギー有効理論の古典解として表されることが期待され, 特に最近 non-BPS D-brane (や brane-antibrane 系) とタキオン場の理論の古典解との対応に関する Sen の予想 [3] について研究が盛んである.

しかし, このタキオン場を含む弦の場の理論, あるいはその有効理論の exact な古典解を見つけるのは一般には難しい.

一方, B 場のある open string の有効理論は, 通常の有効理論と別に非可換幾何による表示を持ち, その非可換空間上の有効場の理論は通常の表示による有効理論と等価であることが知られている [4]. そしてこの B 場が強い極限で非可換場の理論はタキオン場の有効場の理論の運動項が落ち, ポテンシャルだけになり, 運動方程式は解ける. 解の基底はポテンシャルの形によらず, 射影演算子で与えられる[1][5][6]. このようにして得られる解を非可換ソリトン (NCS) と呼ぶ[2].

よって非可換空間上の非可換ソリトンを探すことは, 非可換空間上の射影演算子を見つけることと等価である. また, タキオン場を C^*-代数と見ると, 射影演算子はその C^*-代数の代数的 K 群の K_0 群の元である. よって, D-brane (の電荷) が位相的 K 群によって分類されたのと同様, 非可換空間上ではこの代数的 K 群が D-brane を分類すると思われる [6].

そのような理由からも非可換ソリトンが D-brane に対応していることが期待される. そしてその対応は時空が $\mathbb{R}^2$ の時に [2] で肯定的に議論された [6]. Fuzzy sphere の場合についても議論されている [7].

ここではそれを $\mathbb{T}^2$ の時について考える [1]. $\mathbb{T}^2$ の場合射影演算子が C^*-代数の元として具体的に与えられている [8]. それを使って非可換トーラス上の非可換ソリトンと D-brane の質量の一致を示す. また, トーラスの場合, T-duality が具体的に見え, T-duality の作用が, 非可換ソリトンとして与えられる D-brane の質量スペクトラムを保つことを見る. さらに射影演算子の直交性と D-brane の不安定性 (分裂することができる) を同一視して, 非可換トーラス上の D-brane が不安定性であることについて議論する. これは $\mathbb{T}^2$ 体積が $\mathbb{R}^2$ の時とは異なり有限であることに起因する.

[1] 解は一般にその基底のある線形結合で表される. その線形結合の係数はポテンシャルの形によって決まっている.
[2] $\mathbb{R}^2$ 上での一般解の構成が行われた.

2 open/closed string の変数の関係

Seiberg-Witten(SW)[4] によって与えられた, open string の有効場の理論の 2 つの表示 (open/closed string の変数による表示) の対応について簡単に復習する.

$(x_0, x_1, \cdots, x_p)$ を平坦な $(p+1)$ 次元時空の座標とし, $i, j = 1, \cdots, p$ とする. closed string の変数を (g_s, g, B), open string の変数[3]を (G_s, G, Θ) として,

1. $(g, B) \Longleftrightarrow (G, \Theta)$ の関係は disk の open string の OPE から,
2. $g_s \Longleftrightarrow G_s$ の関係は上の $(g, B) \Leftrightarrow (G, \Theta)$ と, あと Dp brane の質量 (DBI-作用の定数項の部分) が 2 つの表示で等しくなるように決められる;

$$\frac{\sqrt{\det(g + 2\pi\alpha' B)}}{g_s \sqrt{\alpha'}(2\pi\sqrt{\alpha'})^p} = \frac{\sqrt{\det(G)}}{G_s \sqrt{\alpha'}(2\pi\sqrt{\alpha'})^p} \tag{2.1}$$

(α' は string 結合定数, また $T_p = \frac{1}{g_s\sqrt{\alpha'}(2\pi\sqrt{\alpha'})^p}$ は Dp-brane tension と呼ばれる.)

3. $|\alpha' G^{-1}| << |\Theta|$ で, open string の変数による理論は非可換幾何で表される.

◦ あとの議論では $\mathbb{T}^2$ 上で考えるので, それに適した notation をここで整理する. 細かいことなので読み飛ばしてもよい. [4] の convention から座標 x_i を無次元化[4]し, (長さ)^2, (長さ)^0 の次元を持った計量, B 場をそれぞれ $g^{(SW)}$, $B^{(SW)}$ とする. 3. として [4] では $\epsilon \to 0$ として, $g^{(SW)} \sim \epsilon$, $B^{(SW)} \sim \epsilon^0$ という極限を考えた. 一方, [2] では "large B limit$(B\infty)$" と呼ばれる極限 $g^{(B\infty)} \sim \epsilon^0$, $B^{(B\infty)} \sim \epsilon^{-1}$ をとり, 以下 3 章で説明する議論を展開した. この 2 つの notation は $R_i \sim \epsilon^{\frac{1}{2}}$ をとって座標を $R_i x_i^{(SW)} = x_i^{(B\infty)}$ と rescale することにより関係づく ($R_i R_j g_{ij}^{(B\infty)} = g_{ij}^{(SW)}$, $R_i R_j B_{ij}^{(B\infty)} = B_{ij}^{(SW)}$) .

以降, 無次元化した $g := g^{(SW)}/\alpha'$, $B := 2\pi B^{(SW)}$ を使って ((SW) 側の座標で) 議論する. この convention で 1. の関係は

$$(g + B)^{-1} = G^{-1} + \Theta$$

であり, $\epsilon^{\frac{1}{2}} \lesssim \alpha' (\lesssim 1)$ で $|G_{ij}| >> 1$ となり[5], (3.1) で考える極限と一致する.

◦ 以下, これからやることを大雑把にまとめる. (SW) の定義 2. より, Dp-brane の質量は (open/closed string) の表示で等しい.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \boxed{\text{closed}} & & & \boxed{\text{open (NCS)}} \\
\mathrm{M}_{D2} = & \dfrac{\sqrt{2}}{g_s\sqrt{\alpha'}}\sqrt{\det(g+B)} & \overset{\text{(SW)}}{=\!=} & & \dfrac{\sqrt{2}}{G_s\sqrt{\alpha'}}\sqrt{\det G} \\
 & \Updownarrow & & & \Big\Downarrow \mathrm{Tr}(P_\Theta) \\
\mathrm{M}_{D0} = & \dfrac{\sqrt{2}}{g_s\sqrt{\alpha'}} & \overset{\bigstar}{=\!=} & & \Theta \mathrm{M}_{D2} : \text{NCS mass}
\end{array}$$

3 章で open (NCS) 側と, その $\Big\Downarrow \mathrm{Tr}(P_\Theta)$ の意味について説明し, 4 章で ★ の対応についてみる.

[3] open string で時空をみた時に自然な表示

[4] このような操作は長さの次元を持つ $\sqrt{\alpha'}$ を掛けたり割ったりすればよい.

[5] (SW)[4] では α' についての極限は $\alpha' \sim \epsilon^{\frac{1}{2}}$ がとられた.

3　非可換ソリトン (NCS) の構成法

3.1　一般的な非可換ソリトン NCS の構成法

有効理論の open string の変数による記述, つまり非可換空間上での場の理論の運動方程式の解の構成法について復習する [5].

$M(\times\mathbb{R})$ を p 次元「非可換多様体」(と時間 $\mathbb{R}$ の直積) とし, $G_{\mu\nu}$ を $\mathbb{R}\times M$ 上の計量とする. $(G^{-1})^{\mu\nu} =: G^{\mu\nu}$, また M と $\mathbb{R}$ は直積なので, $\sqrt{G} := \sqrt{\det(G_{ij})} \propto \sqrt{\det(G_{\mu\nu})}$ $(i,j=1,\cdots,p)$ である. G_s を open string の結合定数とし, 以下 non-BPS D-brane 上の物理を考えるので, ϕ は実タキオン場とし, 積は $*$-積であるが $*$ を以下省略する.

以下の M 上の作用 S を考える;

$$S \sim -\frac{1}{G_s}\int dx^{p+1}\sqrt{G}\left(f(\phi)G^{\mu\nu}\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(x) + V(\phi(x))\right) \ .$$

$G_{\mu\nu} >> 1$ の極限[6]でその運動項 (μ,ν の足を持った項) は落ち ;

$$S \sim -\frac{1}{G_s}\int dx^{p+1}\sqrt{G}V(\phi(x)) \tag{3.1}$$

運動方程式はポテンシャルの微分 ;

$$\frac{\partial V(\phi(x))}{\partial\phi(x)} = 0$$

という簡単な形になる. ここでは以降, この運動方程式 (3.1) の解を非可換ソリトン (NCS) と呼ぶことにする.

◦　NCS の構成をおおざっぱに説明する. まず 作用素 ϕ を $\infty\times\infty$ 行列として表現できるとし, $\infty\times\infty$ 行列 ϕ を U で対角化する[7] ;

$$U^{-1}\phi U = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_i\mathbf{1} & & \\ & & \lambda_{i+1}\mathbf{1} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \ . \tag{3.2}$$

ポテンシャル $V(\phi)$ は多項式で $V(\phi) = \frac{1}{2}g_2\phi^2 + \frac{1}{3}g_3\phi^3 + \cdots$ と表されるものとし, よって運動方程式も $\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} =: V'(\phi) = g_2\phi + g_3\phi^2 + \cdots$ と (1 次以上の) 多項式で表されているものとする. 運動方程式の両辺に U^{-1}, U を掛けることにより,

$$\begin{aligned} \phi : [\text{運動方程式の解}] \iff 0 &= U^{-1}V'(\phi)U = V'(U^{-1}\phi U) \\ &= \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & V'(\lambda_i\mathbf{1}) & & \\ & & V'(\lambda_{i+1}\mathbf{1}) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[6]正確には $G^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \sim 0$ の極限. あとで考える $\mathbb{T}^2_\Theta$ 上でもこの極限がとれる.

[7]今 ϕ は non-BPS D-brane 上のタキオン場なので ($*$-積の表示で) 実であり, つまり行列表示で ϕ はエルミートなので, U をユニタリーとして対角化できる.

となるので, ϕ が運動方程式である必要十分条件は, 対角化された ϕ が, すべての i に関して $V'(\lambda_i)=0$ となることである.

よって, ϕ の一般解は, λ_i を $\{\lambda|V'(\lambda)=0\}$ の元, $\{P_i\}$ を ((3.2) の $\mathbf{1}$ に対応する) 互いに直交する射影演算子の組とし,

$$\phi_{eom}=\sum_i \lambda_i P_i \qquad (\text{を任意の } U \text{ の随伴作用で変換したもの})$$

と表される. $\{\lambda|V'(\lambda)=0\}$ は 0 を含むことに注意する.

◦ ここで NCS の質量を求める. ϕ_{eom} を (3.1) で与えられたものとし, Tr を $\mathrm{Tr}(\mathbf{1})=1$ と規格化されたトレース, Vol を M の体積とする. $(Vol\cdot \mathrm{Tr}=\int dx^p\sqrt{G}.\ )$

NCS の質量 $E(\phi_{eom})$ とは, 作用 (3.1) からハミルトニアンを作り, それに運動方程式の解 ϕ_{eom} を代入したものとする. ϕ_{eom} が射影演算子の和で表されている性質から, C を比例定数として

$$\begin{aligned} E(\phi_{eom}) &:= \frac{C}{G_s}\int dx^p\sqrt{G}V(\phi_{eom}(x)) = \frac{C\cdot Vol}{G_s}\mathrm{Tr}V(\phi_{eom}) \\ &= \frac{C\cdot Vol}{G_s}\sum_i V(\lambda_i)\mathrm{Tr}(P_i) = \sum_i \frac{C\cdot Vol\cdot V(\lambda_i)}{G_s}\mathrm{Tr}(P_i)\ . \end{aligned}$$

と簡単な形になる. 1 行目から 2 行目の等号では $(\sum_i \lambda_i P_i)^n=\sum_i \lambda_i^n P_i$ より $V(\phi_{eom})=\sum_i V_i(\lambda_i)P_i$ となることを使った.

とにかく, ポテンシャル $V(\phi)$ が与えられた時, NCS や, その質量を求めるには 射影演算子の組 $\{P_i\}$ (とそのトレースの値) が分かればよいことが分かる.

◦ タキオンポテンシャル $V(\phi)$ は Sen のシナリオ [3] に沿って次のように決める [2]. 射影演算

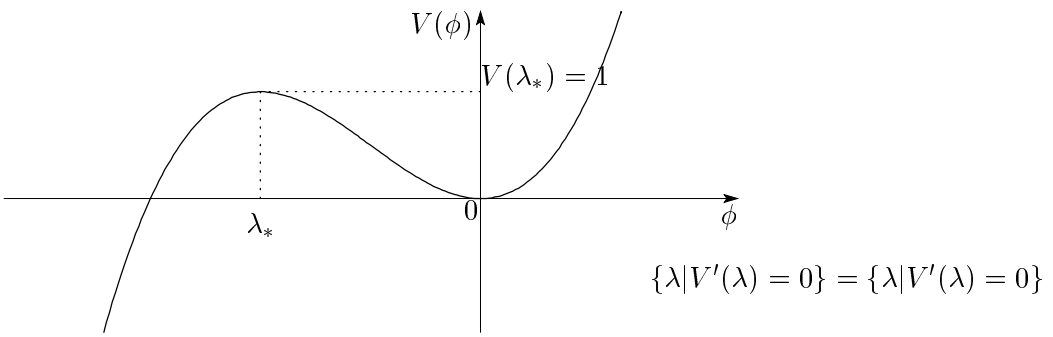


図 3: タキオンポテンシャルの形

子が $\mathbf{1}$, つまり $\phi_{eom}=\lambda_*\cdot\mathbf{1}$ の時が (non-BPS)Dp-brane の存在する状態, また, 射影演算子が $\mathbf{0}$, つまり $\phi_{eom}=0$ の時を D-brane のない状態 (閉弦の真空) とするのが Sen の予想である. この時さらに, ϕ_{eom} が局所的な解, つまり ($*$-積の表示で) 空間の d 次元分に関して $\phi(x)$ が局在している時, $(p-d)$ 次元空間上にエネルギーが密度 $\propto V(\lambda_*)$ で溜っていて, それが余次元 d の D$(p-d)$-brane を表すのではないか ? という予想が立つ. この予想を $\mathbb{R}^2$ の時 ($d=2$) について [2] で肯定的に議論され, 以下ではそれを $\mathbb{T}^2$ 上で考える.

M_{Dp} を Dp-brane の質量とし, このポテンシャル $V(\phi)$ の時について NCS の質量を求めておく. (3.1) より

$$E(\lambda_*\cdot\mathbf{1})=\frac{C\cdot Vol\cdot V(\lambda_*)}{G_s}$$

であり, これを M_{Dp} とおく[8]. すると

$$E(\lambda_* \cdot P) = \frac{C \cdot Vol \cdot V(\lambda_*)}{G_s} \mathrm{Tr}(P) = \mathrm{M}_{Dp}\mathrm{Tr}(P)$$

となるが, この右辺が $\mathrm{M}_{D(p-d)}$ と等しいか？というのが考える問題である.

3.2 非可換トーラス $\mathbb{T}^2_\Theta$ 上の射影演算子

非可換トーラス上の射影演算子を構成する. まず非可換トーラスについての notation をまとめる.

非可換トーラス (上の非可換関数環)[9] は U, V をユニタリー要素として,

$$\mathbb{T}^2_\Theta := \{U, V | UV = e^{-2\pi i\Theta} VU\}$$

で表される. $\mathbb{T}^2_\Theta$ の表現として, $*$-積表現で[10].

$$U = e^{ix_1} \ , \quad V = e^{ix_2} \ , \quad * = e^{-\pi i\Theta(\overleftarrow{\partial_1}\cdot\overrightarrow{\partial_2} - \overleftarrow{\partial_2}\cdot\overrightarrow{\partial_1})}$$

と表す. ここで $0 \leq x_1, x_2 < 2\pi$ は $\mathbb{T}^2_\Theta$ 上の座標である.

一般の元 $\phi \in \mathbb{T}^2_\Theta$ は

$$\phi = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \phi_{mn} U^m V^n \ , \qquad \phi_{mn} \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

と表され, 非可換トーラス上の積分は

$$\mathrm{Tr}\ \phi := \phi_{00} \ . \tag{3.4}$$

で定義される. これは可換なトーラス上の関数のフーリエ展開表示とその積分の, 自然な一般化である.

$\mathbb{T}^2_\Theta$ 上の射影演算子は [8] で構成されている. 以下それを簡単に紹介する.

$P^2 = P$ を満たす射影演算子 P を求める時, P を U のみで生成する代数から作ろうとすると, それは可換代数なので, ($P = 0$,$P = 1$ 以外の) 連続的な射影演算子ができない. よって, V の 1 乗を入れて,

$$P = V^\dagger \left(g(U)\right)^\dagger + f(U) + g(U)V \tag{3.5}$$

という形のものを考える. 上の P は $P = P^\dagger$ を満たし, それは P が場として実スカラーであり, non-BPS D-brane 上のタキオン場であることに対応する. これが $P * P = P$ を満たす条件は

$$\begin{aligned}
&g(e^{ix_1})g(e^{i(x_1+2\pi\Theta)}) = 0 \ , \\
&g(e^{ix_1})[1 - f(e^{ix_1}) - f(e^{i(x_1+2\pi\Theta)})] = 0 \ , \\
&f(e^{ix_1})[1 - f(e^{ix_1})] \\
&\qquad = |g(e^{ix_1})|^2 + |g(e^{i(x_1-2\pi\Theta)})|^2 \ .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

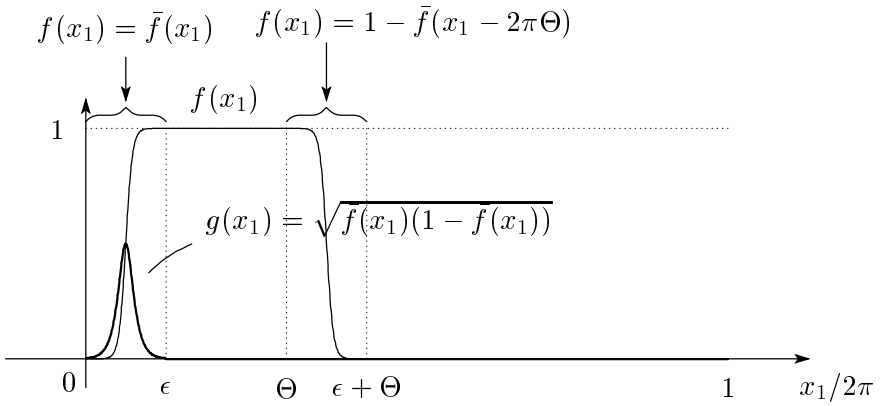


図 4: (Powers-Rieffel (PR) projection)

である. (3.6) を満たす f, g の一つとして以下の図のようなものがある. これを Powers-Rieffel projection と呼ぶ. (3.4) より明らかに

$$\mathrm{Tr}\, P = \int_0^{2\pi} f \frac{dx_1}{2\pi} = \Theta$$

であるのでこれを P_Θ とラベルする.

$\mathbb{T}^2_\Theta$ 上の一般の射影演算子は, 質量 $n + m\Theta$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ の射影演算子を $P_{n+m\Theta}$ として,

$$\boxed{\begin{array}{c} \{Mat(\mathbb{T}^2_\Theta) \text{ の射影演算子 }\} = \{P_{n+m\Theta} | n + m\Theta \geq 0\} \\ (\ \{\mathbb{T}^2_\Theta \text{ の射影演算子 }\} = \{P_{n+m\Theta} | 0 \leq n + m\Theta \leq 1\}\ ) \end{array}}$$

であることが知られている [8][9]. これは射影演算子が K_0 群の元であり, 以下の Tr 写像[11]

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr}: & K_0(\mathbb{T}^2_\Theta) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} + \Theta\mathbb{Z} \\ & P_{n+m\Theta} & \mapsto & n + m\Theta \end{array} .$$

が同型であることから保証されるし, $\mathbb{T}^2_\Theta$ の射影演算子は具体的に PR-projection を少し変えることによって作ることもできる.

4 D-brane と 射影演算子

4.1 D-brane の質量

今 $\mathbb{T}^2$ 上で非可換ソリトンを構成したので, それを (closed string の変数側での) D-brane と比べる準備ができた. ここで両者の質量を比べ, その一致をみる.

[8]Sen のシナリオを仮定し, そうなるように比例定数 C を決める.

[9]非可換環を, それの表す「非可換空間」と同一視し, 以下この $\mathbb{T}^2_\Theta$ を非可換トーラスと呼ぶ.

[10]歴史的には接合積で表される [8][9] が, 以下構成する Powers-Rieffel projection も, もともとはその表現で見つけられた. しかし, 表現が忠実ならば問題ないので $*$-積で表すことにする.

[11]このときの Tr は $Mat(\mathbb{T}^2_\Theta)$ 上に自然に拡張された Tr である.

open string の変数の定義より, まず非可換 $\mathbb{T}^2$ の体積を D2-brane と同一視し, その質量は M_{D2} である. この時, (3.1) より NCS $P_{n+m\Theta}$ の質量は

$$E(P_{n+m\Theta}) = \mathrm{Tr}(P_{n+m\Theta})\mathrm{M}_{D2} = (n + m\Theta)\ \mathrm{M}_{D2}\ .$$

である. 右辺の $n\mathrm{M}_{D2}$ は n 枚の D2-brane の質量と考えられるので, $\mathbb{T}^2$ 上で NCS と D-brane の質量が一致するためには $m\Theta\mathrm{M}_{D2}$ を m 個の D0-brane の質量である必要がある. これが成り立つこと, つまり

$$\mathrm{M}_{D0} = \Theta\mathrm{M}_{D2} \tag{4.1}$$

が満たされることをこれから確認する.

closed string の変数側で, Dp-brane の質量 M_{Dp} (DBI-作用の定数項) は

$$\mathrm{M}_{Dp} = \frac{\sqrt{2}(2\pi)^p\sqrt{\det\left(\alpha' g + \alpha' B\right)}}{g_s\sqrt{\alpha'}(2\pi\sqrt{\alpha'})^p} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\det\left(g+B\right)}}{g_s\sqrt{\alpha'}}$$

である. $(2\pi)^p$ は $\mathbb{T}^2$ の体積であり, $\sqrt{2}$ は D-brane が non-BPS D-brane であることから来る. これより D2-brane, D0-brane の質量はそれぞれ $|g| << |B|$ の極限で

$$\mathrm{M}_{D2} \sim \sqrt{2}\frac{B_{12}}{g_s\sqrt{\alpha'}}\ , \qquad \mathrm{M}_{D0} = \sqrt{2}\frac{1}{g_s\sqrt{\alpha'}}\ . \tag{4.2}$$

となる. ここで, B_{12} は 2×2 行列の $(1,2)$ 成分とする. よって $B_{12} = 1/\Theta$ より (4.1) が成り立つことが分かった. つまり Powers-Rieffel projection, あるいはそれを適当にユニタリー変換したものが D0-brane と対応することが分かった.

これより, NCS $P_{n+m\Theta}$ は n 個の D2-brane と m 個の D0-brane の束縛状態であると言える.

注意 4.1 $\Theta \to 0$ で P_Θ の形は (適当なユニタリー変換 U により) $\mathbb{R}^2$ の場合 [2] に帰着させることができる.

注意 4.2 non-BPS D-brane の質量スペクトラム;

$$E(P_{n+m\Theta}) := (n + m\Theta)\ \mathrm{M}_{D2}\ ,$$

つまり $n + m\Theta$ は $\mathbb{R}$ 上で稠密 (dense) であることに注意する (図 5). これは 4.3 で議論する $\mathbb{T}^2_\Theta$ 上の non-BPS D-brane の不安定性と関係する.

4.2 質量スペクトラムの T-duality

G_s を open string の結合定数とし, $Vol = (2\pi)^2\sqrt{G}$ を $\mathbb{T}^2$ の体積とする. 2 章の (SW) の関係により D2-brane の質量は NCS 側で,

$$\mathrm{M}_{D2} = \frac{C\cdot Vol}{G_s} = \frac{\sqrt{2}}{G_s\sqrt{\alpha'}}\sqrt{G}$$

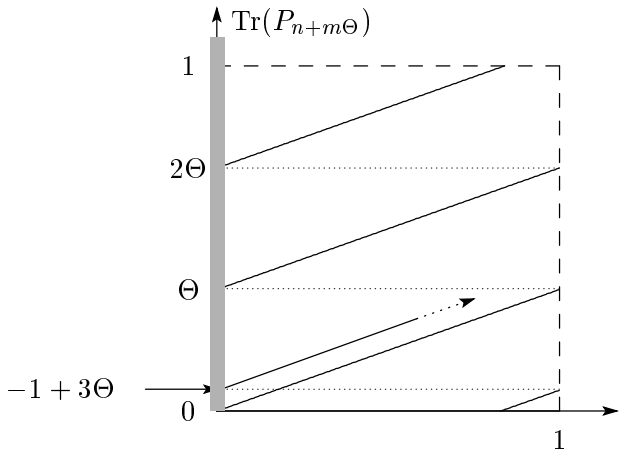


図 5: $n + m\Theta$ は縦軸の太線と傾き Θ の直線の交点であり, それは縦軸の太線上稠密である.

と表せる. よって NCS $P_{n+m\Theta}$ の質量は

$$E(P_{n+m\Theta}) = (n + m\Theta)\frac{\sqrt{2}}{G_s\sqrt{\alpha'}}\sqrt{G} \ .$$

である.

ここで T-duality group の作用を考える. $\mathbb{T}^2_\Theta$ 上で T-duality group は $SO(2,2|\mathbb{Z}) \simeq SL(2,\mathbb{Z}) \times SL(2,\mathbb{Z})$ であり, 片方の $SL(2,\mathbb{Z})$ は $\Theta, \sqrt{G}, G_s$ を不変に保つので, もう片側の $SL(2,\mathbb{Z})$ の作用について考える.

$\mathcal{T} \in SL(2,\mathbb{Z})$ の $\Theta, \sqrt{G}, G_s$ への作用は

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Theta) &= \frac{d\Theta + c}{b\Theta + a} \\ \mathcal{T}(\sqrt{G}) &= (a + b\Theta)^2\sqrt{G} \ , \\ \mathcal{T}(G_s) &= (a + b\Theta)G_s \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \\ &(ad - bc = 1, \ a,b,c,d \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

である[12].

このとき, 質量スペクトラム $E(P_{n+m\Theta})$ は, (n,m) が

$$\begin{pmatrix} n' \\ m' \end{pmatrix} = \mathcal{T}^{-1}\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \ . \tag{4.3}$$

と変換すれば不変である. $\mathcal{T}$ は (n,m)-lattice の自己同型変換であり, これより質量スペクトラムは T-duality で不変であることが言えた. これは BPS D-brane の場合について議論されていた [10] のと同様の結論である.

注意 **4.3** k を (m,n) の最大公約数とすると, T-duality により常に $P_{n+m\Theta}$ は $P_{k\Theta}$, すなわち k 個の D-brane の束縛状態に移すことができる. このとき理論は $U(k)$ ゲージ理論であると言える.

[12]これらの変換は closed string の変数側での $\mathcal{T}$ の (g_s, g, B) への作用を (SW) の関係で open string の変数側に移して定義している [4]

4.3 $\mathbb{T}^2_\Theta$ 上の D-brane の不安定性

(4.1) で NCS $P_{n+m\Theta}$ は (n,m) D-brane と同一視された. ここで $P_{n+m\Theta}$ が, それより小さい質量を持つ互いに直交する射影演算子に分かれる

$$P_{n+m\Theta} \Longrightarrow P_{\Theta_1} \oplus \cdots \oplus P_{\Theta_n}$$
$$\left(\begin{array}{c} 0 < \Theta_i = n_i + m_i\Theta < n + m\Theta,\ i = 1, \cdots, n \\ \sum_{i=1}^n \Theta_i = n + m\Theta \end{array} \right)$$

ことを, 物理的に, (n,m) D-brane がそれより小さい質量を持つ D-brane の和に分解する

$$(n,m) \text{ D-brane} \overset{\text{decompose}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} ((n_i, m_i) \text{ D-brane})$$

ことと同一視する. つまり (n,m) D-brane はこのとき不安定である.

[注意 4.2] の質量スペクトラムの性質から, 実は, 任意の $\mathbb{T}^2_\Theta$ 上の射影演算子 $P_{n+m\Theta}$ は (ユニタリー変換により) 互いに直交するより小さい射影演算子に分けることができる.

例えば P_Θ について考える. $0 < a+b\Theta < \Theta$ となる $a, b \in \mathbb{Z}$ をとり $\Theta = (a+b\Theta)+(-a+(1-b)\Theta)$ と分けると, それに対応した 2 つの互いに直交する射影演算子 $P_{a+b\Theta}, P_{-a+(1-b)\Theta}$ を PR-projection の構成と同様にして作ることができる. よって $\mathrm{Tr} : P_{n+m\Theta} \overset{isom.}{\longrightarrow} n + m\Theta$ より, ユニタリー変換により $P_\Theta = P_{a+b\Theta} + P_{-a+(1-b)\Theta}$ とできる.

物理的には, P_Θ に対応する D0-brane は有限な質量 Θ という単位を持っているが, それはさらに小さい D-brane に分かれていってしまうという, 非可換トーラス上の D0-brane の不安定性を意味する.

この事実は D2 の体積が有限であったこと (と Θ が無理数であったこと) による. D2 の体積が有限であるために, それを D0 で埋め尽くしていくと D2 の質量を越えてしまうという, $\mathbb{R}^2$ の時には起こり得なかった現象が起こる.

数学的には $\mathbb{T}^2_\Theta$ が type II von Neumann factor に属し, 射影演算子の Tr が最小の単位を持たないという事実が対応している.

5 Conclusion , Discussions , & Future directions

Harvey らの $\mathbb{R}^2$ 上での議論 [2] に沿って, $\mathbb{T}^2$ 上で NCS の質量 $E(P_\Theta)$ と non-BPS D0-brane の質量が一致することを示した (4.2). その結果, 射影演算子 $P_{n+m\Theta}$ は (n D2)-(m D0) の束縛状態と同定できた. また質量スペクトラム $E(P_{n+m\Theta})$ は T-duality と両立することが分かった (4.3).

しかし, $P_{n+m\Theta}$ の $n < 0$ のものの物理的な対応物の説明は良く分からない[13]. これは $\mathbb{T}^2$ の体積が有限であること (と Θ が無理数であること) から来る, $\mathbb{R}^2$ の時には起こらない現象である. またそれと関係して, 4.3 で $\mathbb{T}^2_\Theta$ の射影演算子の性質から, $P_{n+m\Theta}$, 特に P_Θ(non-BPS D0-brane) が $\mathbb{T}^2_\Theta$ 上で不安定であることをみた.

他の関連する文献も兼ねて, 今後の方向性についていくつか述べる. 以上の議論を $\mathbb{T}^p$ また他の軌道体について拡張することは可能な問題である. [11] では $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{T}^2$ の解を直積して $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{T}^{2n}$ の

[13] T-duality の存在を仮定すれば, そのような質量を持つ D-brane の存在は (open/closed の変数のどちら側でも) 保証されてはいるが.

解を得るという幾分自明な方法で考えられているが, [12] ではもう少し一般論からこの問題をとらえていて, その参考文献もまた勉強になる.

射影演算子の具体的な形[14] を求めるのは, 非可換ソリトンの弦理論的な解釈 [14] のためには考えるべき問題だがとても難しい.

$\mathbb{T}^2_\Theta$ 上の $D\bar{D}$ 系については [1] で議論されているが代数の理論と物理の間を正確には対応づけてない部分がある. さらに, $\mathbb{R}^2$ の時に [15] で構成されたような, 作用 S がその運動項とゲージ場を含む系の古典解については [12] で考えられている. 非常に参考になるが, その系でトーラス上の exact な解はまだできていない.

参考文献

[1] I. Bars, H. Kajiura, Y. Matsuo and T. Takayanagi, Phys. Rev. D63(2001)86001, hep-th/0010101.

[2] J.A. Harvey, P. Kraus, F. Larsen and E.J. Martinec, JHEP **0007:042** (2000), hep-th/0005031.

[3] A. Sen, JHEP **9808:012** (1998), hep-th/9805170, For a review, see A. Sen, "Non-BPS States and Branes in String Theory," hep-th/9904207.

[4] N. Seiberg and E. Witten, JHEP**9909:032** (1999), hep-th/9908142, and references therein.

[5] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0005:020** (2000), hep-th/0003160.

[6] Y. Matsuo, "Geometrical aspects of noncommutative soliton," (同研究会の talk と proceeding).

[7] T. Takayanagi, "Noncommutative geometry in SU(2) WZW-model via tachyon condensation," (同研究会の talk と proceeding).

[8] M.A. Rieffel, Pacific J. Math. **93** (1981) 415.

[9] M. Pimsner and D. Voiculescu, J. Oper. Theory **4** (1980) 93, J. Oper. Theory **4** (1980) 201.

[10] A. Konechny and A. Schwarz, "Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry," hep-th/0012145, and references therein.

[11] E. M. Sahraoui and E. H. Saidi, hep-th/0012259.

[12] E.J. Martinec and G. Moore, hep-th/0101199.

[13] F. P. Boca, Comm. Math. Phys. 202 (1999), no. 2, 325–357.

[14] T. Matsuo, "Dp-Dp' brane with B-field," (同研究会の talk と proceeding).

[15] J.A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, JHEP **0012:024**(2000) hep-th/0010060.

[14] PR-projection より対称性の高い形という意味で. 例えば [13] ではガウシアンをトーラスの被覆空間上で重ね合わせたテータ関数を出発点として構成することを試みているが, Θ が有理数の時にしかできていない.

Noncommutative geometry in SU(2) WZW-model via tachyon condensation

東大理学部　高柳　匡

E-mail: takayana@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

最近、群多様体 (特に SU(2)) において D-brane 上のゲージ理論が非可換な幾何学で記述されることが指摘され、曲がった空間における弦理論と非可換幾何との対応の研究が進展しつつある。そこで、この最近の研究の現状について簡潔にまとめてみたい。そしてさらに、その非可換幾何の性質を調べるために、非可換ソリトンを用いたタキオン凝縮の記述についても触れてみたい。

超弦理論において平坦な空間 ($\mathbf{R}^{2n}$ や $\mathbf{T}^{2n}$) にある D-brane の背景に B 場が存在する場合、その brane 上の低エネルギー理論は非可換幾何を用いて記述されることは既に詳しく調べられている [1]。一方、曲がった空間については、ほとんどの場合超弦理論と非可換幾何の対応は分かっていない。しかしながら群多様体など一部の例では理解が進んできている。そこでその例として、SU(2) Wess-Zumino-Witten model における D-brane について考えたいと思う。

SU(2) Wess-Zumino-Witten model(WZW-model) とは次の作用で定義される world-sheet Σ(座標を $z, \bar{z}$ とする) 上の場の理論である。

$$S = \frac{k}{8\pi}\int_{\Sigma}(dz)^2\mathrm{Tr}(\partial_\mu g\partial_\mu g^{-1}) + i\frac{k}{12\pi}\int_M \mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^3. \tag{1}$$

ここで、$k(=N-2)$ が level である。$g(z,\bar{z})$ は world-sheet から $SU(2)=S^3$ への写像で、最初の項が $\sigma-$model と見なした時の「運動項」に相当する。次の項は いわゆる Wess-Zumino-Witten 項で、Σ を境界とする 3 次元多様体 M 上に g に拡張して定義される。このとき、e^{iS} が一意に決まることを要請して level k が整数に限定される。この両者の項のおかげで共形不変な理論となり、さらに次のカレント

$$\begin{cases} J_L(z) = -k\partial_z g\cdot g^{-1}, \\ J_R(\bar{z}) = kg^{-1}\partial_{\bar{z}}g. \end{cases} \tag{2}$$

で生成される SU(2) カレント代数の対称性を有す。また、式 (1) の 2 つ目の項は物理的には、B 場の field strength $H=dB$ の flux が N 単位[1]入っていることを意味する。これは B が一定の背景場の場合と違い、H 場の源をなるものつまり NS5-brane を考えていることになる。

実際、超弦理論で NS5-brane を考えるときにこの CFT は自然に現われる。具体的は、$N(\geq 2)$ 枚の NS5-brane を考え、その near-horizon limit を考えると超弦理論全体が $\mathbf{R}^{1,5}\times\mathbf{R}^{\phi}\times\mathbf{S}^3$ の CFT で記述されることが知られている [2]。ここで $\mathbf{R}^{1,5}$ が NS5-brane の world-volume であり、$\mathbf{R}^{\phi}$ は、brane に垂直な方向で Linear dilaton 理論で表され、$\mathbf{S}^3$ が level が $(N-2)$ の SU(2) Wess-Zumino model で記述される。これらのボソン場以外に、平坦な空間の場合同様に自由なフェルミオン場が 1 0 個存在する。

さてそれでは、SU(2)WZW-model の D-brane について考える。弦理論において、D-brane は world-sheet の境界条件によって定義される。今は特に SU(2) のカレント対称性を保つ場合に注目

[1]ここで $k=N-2$ から 2 だけずれたのは fermion の寄与による。

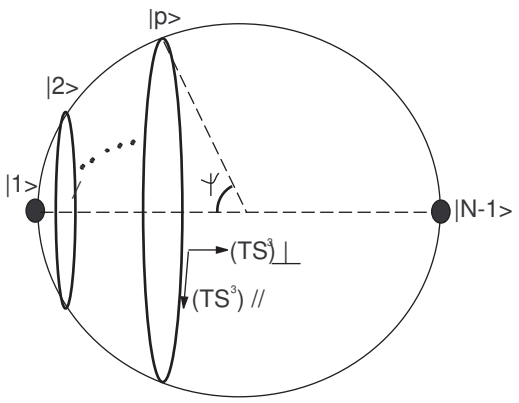


図 6: SU(2)WZW model の D-brane

したいので、境界条件は次のようになる[2]ことが分かる [3, 4]。

$$(J_L(z) - J_R(\bar{z}))|_{\partial\Sigma} = 0. \tag{3}$$

これに、式 (2) を代入して、$g \in SU(2)$ の conjugacy class $C(g)$ に平行な成分 $(T\mathbf{S}^3)^{\|}$ と垂直な成分 $(T\mathbf{S}^3)^{\perp}$ に分けて書き直すと

$$(T\mathbf{S}^3)^{\perp}: \ g^{-1}\partial_\tau g = 0, \tag{4}$$

$$(T\mathbf{S}^3)^{\|}: \ (1 + Ad(g))g^{-1}\partial_\tau g = -i(1 - Ad(g))g^{-1}\partial_\sigma g. \tag{5}$$

ここで $Ad(g)h \equiv ghg^{-1}$ とした。Conjugacy class は $C(g) = \{f | f = hgh^{-1} \ \ (\forall h \in SU(2)\}$ と表され、SU(2) の場合は二次元球面 $\mathbf{S}^2$ となり、天頂角 ψ でラベルされる (図 1 参照)。World-sheet の境界の座標を τ、それと垂直な座標を σ としたので、普通の平坦な時空の D-brane の場合と比較すると式 (4) は Dirichlet 条件を意味する。一方、式 (5) は gauge flux の入った Neumann 条件 (Mixed Neumann condition) となっている。つまり境界条件 (3) で定義される D-brane は、conjugacy class $\mathbf{S}^2$ に巻きついた D2-brane であることが分かった [4]。またこの結果は容易に一般の群 G に関する WZW-model に一般化されることを付け加えておく。さて、さらに境界条件 (5) から gauge flux の値も

$$F = -\frac{N\psi}{2\pi}\sin\theta d\theta \wedge d\phi, \tag{6}$$

と読み取ることができる [5]。以上は古典的な解析であったが、さらに world-sheet 上の量子化を考え、経路積分が正しく定義されることを要求すると、$\psi = \frac{\pi p}{N} \ \ (p \in \mathbf{Z})$ と $(N-1)$ 個の conjugacy class のみ許されることになる (図 1 参照)。これに対応する $(N-1)$ 種の D-brane を $|1\rangle, |2\rangle, \cdot\cdot, |p\rangle, \cdot\cdot|N-1\rangle$ と書くことにする。一見、これらは幾何学的に自明なサイクルに巻きついているので不安定になりそうだが、実際には $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{S}^2} F = p \in \mathrm{Z}$ と flux が量子化される[3]おかげで安定化することが知ら

[2]この他にも SU(2) の automorphism で twist したもの (twisted boundary condition) も許されるがここでは考えないことにする。

[3]ここで $(F + B)$ ではなく F が量子化されるのは一見奇妙に思えるが、bulk の運動項によって B が相殺されることが示されている [6, 7, 5]。

れている [8]。また、一般的に Dp-brane 上に flux があると D$(p-2)$-brane の電荷が生じることから次の主張がなされた [8, 9]。

$$\text{D2-brane } |p\rangle \ \cong p \text{ 個の D0-brane の束縛状態} \tag{7}$$

このとき、D0-brane の電荷は $Q_p = \int_{\mathbf{S}^2} \frac{F}{2\pi} = p$ で表され、$|1\rangle$ を、一つの D0-brane と解釈する。

この主張はいろいろな方法で確認されている [8, 9]。そこで、以下ではそれらについて説明したい。まず一番簡単なのは質量を比べることである。質量は closed string との結合から決まるので、D-brane を表す boundary state を構成することで求められる。SU(2)WZW-model のような Rational CFT の場合は Cardy の方法によって boundary state を構成できる [10]。重要なのは open string で計算した cylinder amplitude と closed string の立場で boundary state を用いて求めた amplitude が一致するという要請である。結果として

$$|p\rangle = \sum_{q=1}^{N-1} \frac{S_{pq}}{\sqrt{S_{1q}}} |q\rangle_I, \quad S_{pq} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{\pi pq}{N}\right), \tag{8}$$

と求まる。ここで $|q\rangle_I$ は、Ishibashi state と呼ばれ [11]、低エネルギー極限で closed string の vertex operator に比例するもの (spin $\frac{q-1}{2}$ primary state) である。S_{pq} は modular 変換の変換行列である。重力場 (s-wave) は $|1\rangle_I$ に属すので、その前の係数に質量は比例し、

$$M_p = 4\pi N \alpha' T_{(2)} \sin\left(\frac{\pi p}{N}\right), \tag{9}$$

と求まる [8]。ここで、$T_{(2)}$ は通常の D2-brane の tension である。興味深いことに、この質量は $T_{(2)}$ に D-brane の古典幾何的体積 ($\mathbf{S}^2$ の体積) を掛けたものに実際等しくなっていることに注意。さて、この式からすぐ分かるように、一般に $M_p < pM_1$ となり、束縛状態の解釈を示唆する。さらに $N >> p$ の極限では、両者が等しくなり marginal な束縛状態と思われる。

次に、この束縛状態の解釈を D-brane の world-volume 上の低エネルギー有効理論の立場で考えてみる。その記述を容易にするため、Seiberg-Witten limit [1] にほぼ対応する、$N >> p$ の極限で以下では議論することにする。もともと H-flux のある状況を考えているので、world-volume 上の理論が何らかの非可換な幾何学で記述されるのではないかと予想されるが、特にこの極限では、Fuzzy Sphere 上のゲージ理論と見なせることが示されている [12]。Fuzzy Sphere [13] とは、無限次元の空間をなす $\mathbf{S}^2$ 上の関数環 (球面調和関数 $Y_{jm}(x^1, x^2, x^3)$ で展開できる) を有限次元行列 $(p \times p)$ で　近似 ' (truncate) したもので、具体的は $\mathbf{S}^2$ の座標である (x^1, x^2, x^3) を次のように $p \times p$ 行列 (X_1, X_2, X_3) で置き換えたものである。以下では $p \times p$ 行列を $\mathrm{Mat}(p)$ と書く。

$$[X_1, X_2] = \frac{2i}{\sqrt{p^2-1}} X_3, \quad (X_1)^2 + (X_2)^2 + (X_3)^2 = 1. \tag{10}$$

つまり SU(2) 代数の p 次元表現である。Fuzzy Sphere の '球面調和関数' T_{jm} は $3j$ 記号を用いて次のように与えられる [14]。

$$(T_{jm})_{m_1,m_2} = (-1)^{\frac{p-1}{2}-m_1} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \frac{p-1}{2} & j & \frac{p-1}{2} \\ -m_1 & m & m_2 \end{pmatrix}, \quad \left(-\frac{p-1}{2} \le m_1, m_2 \le \frac{p-1}{2}\right). \tag{11}$$

ここで角運動量 j は $0 \le j \le p-1$ を満たし、カットオフが与えられていることに注意。さてこの時、open string の vertex operator の zero-mode(SU(2) 代数の表現なので spin j と z 軸投影 m で

分類される) に着目し、その演算積展開 (OPE) の代数を調べると、$N >> p$ の極限で Fuzzy Sphere の代数つまり行列 T_{jm} の積の代数と一致するという結果が得られる [12]:

$$V_{jm}V_{j'm'} \sim \sum_{j",m"} \alpha^{j"m"}_{jm,j'm'} V_{j"m"}, \qquad T_{jm}\cdot T_{j'm'} = \sum_{j",m"} \beta^{j"m"}_{jm,j'm'} T_{j"m"}, \tag{12}$$

$$\lim_{N\to\infty} \alpha^{j"m"}_{jm,j'm'} = \beta^{j"m"}_{jm,j'm'} = \begin{pmatrix} j & j' & j" \\ m & m' & m" \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j & j' & j" \\ \frac{p-1}{2} & \frac{p-1}{2} & \frac{p-1}{2} \end{Bmatrix}. \tag{13}$$

但し、最後の式では係数の詳細を無視した。また $\{:::\}$ は $6j$ 記号を意味する。さて、この代数の一致から world-sheet 上の zero mode に相当する massless 状態 $\psi^a_{-\frac{1}{2}}|j,m\rangle$ $(a=1,2,3)$ は D-brane 上のゲージ場 $A^a = T_{j,m} \in \mathrm{Mat}(p)$ とみなすことができる。もっと一般に Chan-Paton 因子も考慮すると、M 枚の D2-brane $|p\rangle$ 上のゲージ場は $\mathrm{Mat}(M)\otimes\mathrm{Mat}(p)$ の元として表される。

この読み替えを用いて弦理論の S 行列の計算をすることによって、摂動的に低エネルギー有効作用を求めると[4]次のようになる [9]:

$$\begin{aligned} S_{D2} &= \int d\tau [M_p + (2\pi\alpha')^2 M_1 \cdot \Delta\mathcal{L} + (\text{higher derivative})], \\ \Delta\mathcal{L} &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(F_{ab}F^{ab}) - \frac{i}{2}\mathrm{Tr}(f^{abc}(\mathsf{CS})_{abc}). \end{aligned} \tag{14}$$

ここで、M_p, M_1 は D2-brane $|p\rangle$ と D0-brane $|1\rangle$ の質量 (式 (9)) である。また field strength F_{ab} と Chern-Simons form $(\mathsf{CS})_{abc}$ は、

$$\begin{cases} F_{ab} = i(L_bA_a - L_aA_b) + i[A_a, A_b] + f_{abc}A^c, \\ (\mathsf{CS})_{abc} = L_aA_b\cdot A_c + \frac{1}{3}A_a[A_b, A_c] - \frac{i}{2}f_{abd}A^d\cdot A_c. \end{cases} \tag{15}$$

で定義され、作用全体はゲージ変換 $\delta_\Lambda A^a = iL_a\Lambda + i[A^a,\Lambda]$ で不変になっている。ここで $L_a\mathcal{O} \equiv [T^1_a, \mathcal{O}] \propto [X_a, \mathcal{O}]$ と定義され、座標の $a=1,2,3$ 方向の微分に相当する。以上の結果で重要なのは作用 (14) が Yang-Mills 理論の作用と Chern-Simons 理論の和になっていることである。後者の存在が平坦な時空の D-brane と決定的に違う点で、次に見るように D2-brane を有限個の D0-brane の束縛状態とみなせる原因となる。

さて、特に簡単のため M 個の D0-brane の系を考える。作用は (14) を書き直して、

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{i}{3}\mathrm{Tr}(f^{abc}A_a[A_b, A_c]) - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}([A_a, A_b][A^a, A^b]) \tag{16}$$

となる。運動方程式は $[A^a, F_{ab}] = 0$ で与えられ、$F_{ab} = i[A_a, A_b] + f_{abc}A^c = 0$ となる解を考える。これは SU(2) の代数を表すので非自明な解として $A_a = Y^1_a$ がとれる。したがって、これは M 個の D0-brane のゲージ場が '凝縮' して束縛状態作っているように思える。実際さらに次の顕著な性質が示せる。

$$S_{D2|M\rangle}(A_a) = S_{D0|1\rangle}(Y^1_a + A_a). \tag{17}$$

つまり、M 個の D0-brane のゲージ場を $A_a = Y^1_a$ だけ凝縮したものは、D2-brane $|M\rangle$ と見なせる。また実際にこの過程で $O(\frac{p^2}{N^2})$ 程度エネルギーが下がることも分かる。このようにして、前述

[4]Fuzzy Sphere 上のゲージ理論の非可換幾何学的構成については [15] を参照。

の束縛状態の解釈が理解できる [9]。この一般化として、D2-brane の集合からゲージ場を凝縮して、別の D2-brane の集合を作ることも出来る。これは、式 (17) を利用して前の D0-brane の議論に帰着できるので詳しくは述べない。

束縛状態の解釈についての説明として最後にＫ理論の適用を考えてみる。D-brane の電荷はＫ理論で分類できることが知られている [16] が、非可換幾何を考えるときは代数的Ｋ理論を特に用いればよい [17]。まず、前と同様 $N >> p$ とすると D2-brane 上の理論は Fuzzy Sphere の代数で記述される。このとき対応する代数的Ｋ理論は、$K(\mathrm{Mat}(p)) = \mathbf{Z}$ となる。これは例えば非可換トーラスの場合 $K(\mathbf{T}^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ と対照的である。つまりトーラスの場合は D0,D2 の独立な 2 種の電荷があるが、Fuzzy Sphere の場合は電荷が D0 の一種類しかなく、D2-brane は D0-brane の集合と見なされてしまうのである。さらに最近 [18] で議論されたように、一般の N の場合に電荷は H-flux による「Twisted Ｋ理論」$K_H^*(SU(2)) = \mathbf{Z}_N$ で分類することができる。つまり、D-brane は torsion の電荷を持ち N 個の D0-brane が集まると真空に崩壊できるという興味深い結論が得られる。この物理的考察については [7] 参照.

以上のように SU(2)WZW-model の D-brane 上の理論は $N >> p$ の極限で Fuzzy Sphere 上のゲージ理論と見なせ、その非可換幾何と密接に関わる興味深い現象として D2-brane が有限個の D0-brane の束縛状態で記述されることが分かった。

さて最後に、不安定な D-brane の系を考え、その brane の上に現れるタキオン場 T が Fuzzy Sphere の非可換幾何とどのように関係するのか考えてみる [19]。特に SU(2)WZW-model の Non-BPS D2-brane を考える。同様の議論は bosonic string にも適用できる。タキオンポテンシャルを $V(T)$ とし、それが極大、最小になる点をそれぞれ $T = t^*$、$T = 0$ ととる。つまり $T = 0$ が closed string vacuum で $T = t^*$ のとき open string vacuum とする。また、前と同様 $N >> p$ の極限をとる。このとき world-volume 上の有効作用は、次のようになる。

$$S = M_1 \int d\tau \mathrm{Tr}\left[-(L_a T)(L^a T) + V(T) + (\text{higher derivative})\right]. \tag{18}$$

最初の項は、タキオン場の運動項でスピンが j のとき $\frac{j(j+1)}{N\alpha'}$ で与えられる。したがって、$N >> p$ の極限ではカットオフ $j \leq p-1$ のおかげで無視できる。また同様に higher derivative 項もその極限で無視できると考えられるので、つまりポテンシャル $V(T)$ のみ考えればよい。この状況は最近盛んに研究されている、$B \to \infty$ の極限での GMS ソリトン (非可換ソリトン)[20] を用いたタキオン凝縮の記述 [21, 22] に非常に似ている。実際、large volume での解析を信用すると $N >> p$ の極限は、ちょうどいわゆる $B \to \infty$ の極限に対応する。これから、world-volume が Fuzzy Sphere で記述される状況では、タキオン凝縮は非可換ソリトンを用いて記述できることが予想される。

では、Fuzzy Sphere の非可換ソリトンとはどのようなものか調べてみる。運動方程式は [20] と同様、T が projection $T^2 = t^* T$ となるときのみ満たされる。対角化して $T = \mathrm{diag}(0^{\frac{p-1}{2}-a}, 1, 0^{\frac{p-1}{2}+a})$ に対応する配位を考えると、質量は M_1 に等しいことが分かる。つまり、non-BPS D0-brane 1 個に相当するタキオン場の励起と思われる。さてこのタキオン場の $\mathbf{S}^2$ 上の具体的関数形を求めてみよう。$Y_{jm}(\theta, \phi)$ と T_{jm} の対応から次のように決まる [19]。

$$T_a(\theta, \phi) = \frac{(-1)^{\frac{p-2}{2}-a}}{\sqrt{p}} t^* \cdot \sum_{l=0}^{p-1} (2l+1) \begin{pmatrix} \frac{p-1}{2} & l & \frac{p-1}{2} \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} P_l(\cos\theta). \tag{19}$$

具体的に図示すると分かるように (図 2 参照)、$a = \pm\frac{p-1}{2}$ のときは十分 p が大きいと Gaussian に近づくこと (例えば、$T_{a=\frac{p-1}{2}}(\theta) \sim 2t^* e^{-\frac{p}{2}\theta^2}$) ことを示せる。このことは、Fuzzy Spere 上の非

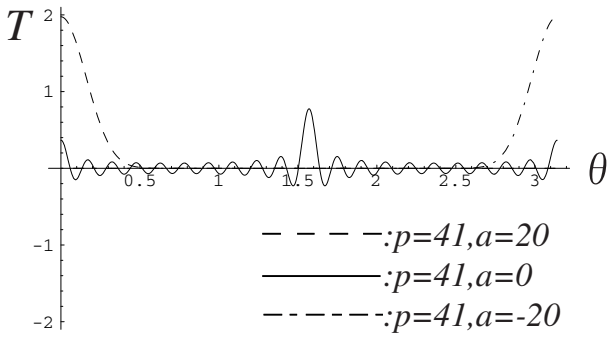


図 7: タキオン場の関数形 (特に p=41 とした)

可換ソリトンが $|a|$ が十分大きければ GMS ソリトン [20] に近づくことを意味する。一方、$a \sim 0$ では赤道に 1 次元的に広がったソリトンになっていることが分かり Fuzzy Spere に特有なものと考えられる。しかしながら、物理的解釈はどちらも一個の D0-brane と当然考えるべきことを注意しておく。このように D-brane 上の理論が非可換になるとき、その代数の projection が重要な物理的意義を持つが、一方、数学でも非可換な代数を分類するとき projection が重要である。例えば、代数的Ｋ理論 K_0 は、'projection の差' の同値類として定義される。これは丁度、projection で記述されるタキオン場 (非可換ソリトン) の凝縮で D-brane 電荷が生成し、また D-brane 電荷はＫ理論で分類されるという物理的事実とうまく対応していて大変興味深い[5]。

参考文献

[1] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, JHEP**9802** (1998) 003 [hep-th/9711162]；
N. Seiberg and E. Witten, JHEP**9909** (1999) 032 [hep-th/9908142].

[2] C. G. Callan, J. A. Harvey and A. Strominger, Nucl. Phys. B **359** (1991) 611.

[3] M. Kato and T. Okada, Nucl. Phys. B **499** (1997) 583 [hep-th/9612148].

[4] A. Y. Alekseev and V. Schomerus, Phys. Rev. D **60** (1999) 061901 [hep-th/9812193].

[5] S. Stanciu, JHEP**0010** (2000) 015 [hep-th/0006145].

[6] W. Taylor, JHEP**0007** (2000) 039 [hep-th/0004141].

[7] A. Alekseev, A. Mironov and A. Morozov, hep-th/0005244.

[8] C. Bachas, M. Douglas and C. Schweigert, JHEP**0005** (2000) 048 [hep-th/0003037].

[9] A. Y. Alekseev, A. Recknagel and V. Schomerus, JHEP**0005** (2000) 010 [hep-th/0003187].

[5]BPS な D-brane を得るために、正しくは brane-antibrane 系のタキオン凝縮を考えなければならない。これについては [22, 17, 19] を参照。また非可換トーラス上のタキオン凝縮とＫ理論との関係については同誌の松尾氏、梶浦氏の記事もしくは [23] を参照。

[10] J. L. Cardy, Nucl. Phys. B **324** (1989) 581.

[11] N. Ishibashi, Mod. Phys. Lett. A **4** (1989) 251.

[12] A. Y. Alekseev, A. Recknagel and V. Schomerus, JHEP**9909** (1999) 023 [hep-th/9908040].

[13] J. Madore, Class. Quant. Grav. **9** (1992) 69.

[14] J. Hoppe, Int. J. Mod. Phys. A **4** (1989) 5235.

[15] U. Carow-Watamura and S. Watamura, Commun. Math. Phys. **212** (2000) 395 [hep-th/9801195].

[16] E. Witten, JHEP**9812** (1998) 019 [hep-th/9810188].

[17] Y. Matsuo, Phys. Lett. B **499** (2001) 223 [hep-th/0009002];

J. A. Harvey and G. Moore, hep-th/0009030.

[18] S. Fredenhagen and V. Schomerus, hep-th/0012164.

[19] Y. Hikida, M. Nozaki and T. Takayanagi, Nucl. Phys. B **595** (2001) 319 [hep-th/0008023].

[20] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP**0005** (2000) 020 [hep-th/0003160].

[21] K. Dasgupta, S. Mukhi and G. Rajesh, JHEP**0006** (2000) 022 [hep-th/0005006];

[22] J. A. Harvey, P. Kraus, F. Larsen and E. J. Martinec, JHEP**0007** (2000) 042 [hep-th/0005031]; J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, JHEP**0012** (2000) 024 [hep-th/0010060];

E. Witten, hep-th/0006071;

T. Takayanagi, S. Terashima and T. Uesugi, hep-th/0012210.

[23] I. Bars, H. Kajiura, Y. Matsuo and T. Takayanagi, Phys. Rev. D **63** (2001) 086001 [hep-th/0010101].

Noncommutative Monopoles and Nonlinear Monopoles

京都大学理学研究科　森山 翔文
E-mail: moriyama@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

弦理論の理解に対して非可換 monopole 解がいかに役立ちうるかを概観した後、具体的に非可換 monopole 解を構成した。しかし、brane 解釈をするためには、必ず可換側に Seiberg-Witten 変換をする必要があるので、直接可換側の対応物である非線形 monopole 解も解析した。この場合には厳密解が可能であり、その性質を詳しく調べた。

1　はじめに

弦理論は定義より明らかなように非局所的な理論であるが、その非局所性は非可換幾何によってよく表わされている。したがって、非可換幾何の非局所性を調べれば、弦理論の非局所性に関する知見が得られると思われる。実際、一様 B 場が背景にあるときの D-brane の有効理論は、Pauli-Villars 正則化を行えば可換 Born-Infeld 理論

$$S_{\rm C} = \int \sqrt{\det(g+F+B)} \tag{1.1}$$

になるし、point-splitting 正則化を行えば弦の非局所性が効いてきて非可換 Born-Infeld 理論 [1]

$$S_{\rm NC} = \int \sqrt{\det(\hat{G}+\hat{F})}_* \tag{1.2}$$

になることが近年知られるようになった。ここで、計量は induced 計量であり、非可換理論における場の強さは $\hat{F}_{ij} = \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i - i[\hat{A}_i, \hat{A}_j]_*$ で与えられる。もちろん、この場合二つの記述は正則化の違いによるものなので、場の再定義 (Seiberg-Witten 変換)

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= A_i - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, \partial_l A_i + F_{li}\}_* + O(\theta^2) \\ \hat{\Phi} &= \Phi - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, \partial_l \Phi + D_l \Phi\}_* + O(\theta^2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

によって関連づいている。

さらに、非可換 monopole 解ではもっとあらわに弦理論の非局所性が現れる [2]。実際、次の議論で予想をつけることができる。可換な記述からわかるように、Λ 対称性によって B 場は磁場として寄与する。また、brane 解釈によれば、monopole 解は端点に磁荷を持つ D-string として見なせる。したがって、非可換 monopole 解を表わす D-string は、D-string の張力と一様 B 場中で受けている磁力がつり合うように傾いて、場の理論の古典解にもかかわらず、非局所的な構造が見えることになる。ここでは、実際に非可換 monopole 解を構成して、その性質を調べることによって、弦理論の非局所性に対する理解を深めたい。

2　非可換 monopole 解

非可換 monopole 解を構成するためには、まず非可換 BPS 方程式が必要になる [3]。しかし、非可換代数も非 abelian 代数も形式的には同じものなので、Bogomolnyi bound の議論を完全に非可

換理論に適用することができる。したがって、非可換 BPS 方程式は

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{F}_{jk} = \hat{D}_i\hat{\Phi} \tag{2.1}$$

である。$*$ 積には無限個の微分が入っているため、この非可換 BPS 方程式を厳密に解くことは難しい。そこで、球対称 ansatz の下で、非可換パラメータ θ に関する摂動展開 (θ 展開) で解くことにしよう。最低次に対して Prasad-Sommerfield による解を採用して、次の次数まで求めると、

$$\begin{aligned}\hat{A}_i &= -\frac{\epsilon_{ijk}\hat{x}_j\sigma_k}{2r}(K-1) + \frac{\theta_{ij}\hat{x}_j}{8r^3}(1-K)(1-K+2H) + O(\theta^2)\\ \hat{\Phi} &= -\frac{\hat{x}_i\sigma_i}{2r}H + O(\theta^2)\end{aligned} \tag{2.2}$$

となる。このとき、磁場の U(1) 部分は

$$\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\hat{F}_{jk} \sim \frac{C\epsilon_{jkl}\theta_{kl}}{4}\frac{\delta_{ij}-3\hat{x}_i\hat{x}_j}{r^3} \tag{2.3}$$

となり、dipole の構造を持つので、非局所性の一端が見えたことになる。

ところが、brane 解釈によれば、Higgs 場を対角化したものは brane の位置に対応するので、D-string が傾くことに対応して、Higgs 場は非可換パラメータ θ の一次で補正を受けることを期待していたにもかかわらず、そのようになっていない。それを説明するためには、Seiberg-Witten 変換 (1.3) によって可換な空間に移らなければならない [4, 5]。実際に変換すると、Higgs 場は

$$\Phi = -\frac{\hat{x}_i\sigma_i}{2r}H + \frac{\theta_i\hat{x}_i}{r^3}(1-K)(1+K)H \tag{2.4}$$

となり、固有値

$$\lambda = \mp\frac{1}{2r}H + \frac{\theta_i\hat{x}_i}{r^3}(1-K)(1+K)H \tag{2.5}$$

がちょうど D-string の傾きを表わしている。

ここでやったことをもう一度まとめると、θ 展開によって非可換 BPS 方程式の解をあらわに構成し、その brane 解釈を論じた。このような θ 展開による解の構成を非可換 string junction 解の構成に適用したり [6]、非可換パラメータ θ の高次項に拡張したり [7] することができる。このように無限小の θ 展開によって解を順次無矛盾に構成できることは、有限な非可換パラメータ θ においても、非可換 monopole 解や非可換 string junction 解が存在することを示唆している。

しかしながら、非可換 BPS 方程式は厳密にはなかなか解けない。さらに、brane 解釈をするためには必ず最終的に可換側に Seiberg-Witten 変換をしなければならない。そこで、可換側から直接 monopole 解を構成することを考えよう。こちらの方が視覚的で、しかも、後で見るように厳密解が可能である。

3 非線形 BPS 方程式

可換側から monopole 解を調べるためには、どういう BPS 方程式を持ってくればいいのか、まずはそれを考えてみよう。先ほど説明したように、非可換 BPS 方程式は zero slope 極限をとった非可換 Yang-Mills 理論の Bogomolnyi bound から導かれる。ところが、実は非可換 BPS 方程式

は zero slope 極限をとらない非可換 Born-Infeld 理論の運動方程式をも満たすことが知られている [8]。そこで、可換側の解析では、とりあえず zero slope 極限をとらないで、Born-Infeld 理論の BPS 方程式を考えることにしよう。Born-Infeld 理論を使うので、BPS 方程式は非線形になる。このため、この BPS 方程式のことを非線形 BPS 方程式と呼ぶことにする。

具体的には、弦理論では D-brane の存在によって超対称性が半分破れる。それに対応して、その D-brane 上の有効理論である超対称化した Born-Infeld 理論は二種類の超対称性を持つ。破れていない超対称性は

$$\delta_{\rm L}\lambda \sim \Big[\vec{F} + \vec{B} - \vec{\partial}\Phi\Big]\xi \tag{3.1}$$

で線形に実現され、破れた超対称性は

$$\delta_{\rm NL}\lambda \sim \Big[1 + (\vec{F} + \vec{B})\cdot\vec{\partial}\Phi\Big]\eta \tag{3.2}$$

で非線形に実現される。ここで、場の強さや B 場は Hodge 双対をとってベクトル量にしている。無限遠で場の強さ $\vec{F}$ も Higgs 場の微分 $\vec{\partial}\Phi$ も消えていることを要請すると、無限遠で残っている超対称性の組み合わせは

$$(\delta_{\rm L} + \delta_{\rm NL})\lambda \sim \Big[\vec{B}\Big]\xi + \Big[1\Big]\eta = 0 \tag{3.3}$$

となる。この無限遠で残っている超対称性を有限なところでも保つ条件 [1, 9, 10]

$$\frac{\delta_{\rm L}\lambda}{\delta_{\rm NL}\lambda} = \frac{\delta_{\rm L}\lambda}{\delta_{\rm NL}\lambda}\bigg|_{\infty} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vec{F} + \vec{B} - \vec{\partial}\Phi}{1 + (\vec{F} + \vec{B})\cdot\vec{\partial}\Phi} = \frac{\vec{B}}{1} \tag{3.4}$$

が非線形 BPS 方程式である。

この非線形 BPS 方程式を解くのがこれからのテーマであるが、その前に少し注意を与える。非可換 monopole 解の可換側における対応物を考えるときに、とりあえず zero slope 極限をとらないで話を進めてきた。しかし、非可換側では非可換 BPS 方程式は、zero slope 極限をとらない非可換 Born-Infeld 理論の運動方程式を満たすのと同時に、zero slope 極限をとった非可換 Yang-Mills 理論の Bogomolnyi bound をも満たしていた。それを思い出すと、可換側の非線形 BPS 方程式も、とりあえず zero slope 極限をとらないで話を進めてきたが、この非線形 BPS 方程式は zero slope 極限によらないことが予想される。実際、閉弦 moduli $(g_{ij} = \eta_{ij}, B_{ij})$ の代わりに、開弦 moduli (G_{ij}, θ^{ij}) を用いて、非線形 BPS 方程式を書き直すと、α' によらないことが示せる [11]。

4 非線形 monopole 解

非線形 BPS 方程式をそのまま解くことは難しい。そこで練習問題として、線形な超対称性を保つ条件

$$\vec{F} + \vec{B} - \vec{\bar{\partial}}\bar{\Phi} = 0 \tag{4.1}$$

を考えてみよう。もちろん無限遠で場の強さも Higgs 場の微分も消えているようにはできないので、無限遠で場の強さのみが消えている状況で解こう。まずは Bianchi の恒等式 $\vec{\partial}\cdot\vec{F} = 0$ を用いて、gauge 場 $\vec{A}$ を消去すると、3 次元 Laplace 方程式

$$\vec{\bar{\partial}}^2\bar{\Phi} = 0 \tag{4.2}$$

に帰着する。3 次元 Laplace 方程式の解は Coulomb 項と線形項の線形結合なので、無限遠の境界条件から、解は

$$\bar{\Phi} = 1/\bar{r} + \vec{B} \cdot \vec{\bar{x}} \tag{4.3}$$

となる。

次に本番の非線形 BPS 方程式 (3.4) を解くことを考えよう [12]。練習問題と同様にして、Bianchi の恒等式を用いて gauge 場 $\vec{A}$ を消去すると、

$$\vec{\partial}^2\Phi(1 - \vec{B}\cdot\vec{\partial}\Phi)^2 + 2\vec{B}\cdot\vec{\partial}\vec{\partial}\Phi\cdot\vec{\partial}\Phi(1 - \vec{B}\cdot\vec{\partial}\Phi) + \vec{B}\cdot\vec{\partial}\vec{B}\cdot\vec{\partial}\Phi(1 + (\vec{\partial}\Phi)^2) = 0 \tag{4.4}$$

という絶望的に非線型な微分方程式になる。そこで、予想をつけてうまく解くことを考えよう。非線形 BPS 方程式 (3.4) も線形な超対称性を保つ条件 (4.1) も、target 空間から見れば超対称性を一部保つ状態なので、解は同じようなものになるはずである。境界条件から、非線形 BPS 方程式の解は、線形な超対称性を保つ解 (4.3) を単純に target 空間で回転させたものだと予想できる。実際、B 場が z 方向を向いていて、$\tan\phi = B$ とすれば、変数変換

$$\begin{pmatrix} \bar{\Phi} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ z \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

によって、非線型な微分方程式 (4.4) を 3 次元 Laplace 方程式 (4.2) に移すことができる。

ここで、非線形 BPS 方程式 (3.4) の Higgs 場部分に対して、θ 展開を超えた厳密解を求めた。そうすることによって、monopole 解に対応する D-string が原点から無限遠に伸びている描像が得られ、非局所性の解析ができるようになった。さらに、D-string が伸びているところには、Higgs 場が多価的な関数になっていることがわかる。多価性を持つ古典解は、今までの場の理論の古典解から見ても、珍しい例である。もし単に θ 展開で無限次まで求めただけならば、原点近くに収束半径が現れ、その外側でのみ有効な解が得られたはずである。ところが、今の方法では、回転によって線形な方程式に変換し、その方程式を厳密に解いたので、収束半径に関係のない議論である。

さらに、この厳密解を Seiberg-Witten 変換によって非可換側に移したものが、非可換 BPS 方程式 (2.1) を満たすことは非可換パラメータ θ の低次で確かめることができる。そういう意味で、ここで構成した解は非可換 monopole 解の可換側の対応物であると言える。

ここまでの議論では、gauge 場を完全に消去して、Higgs 場の部分に対してのみ monopole 解を構成したが、gauge 場に対する古典解を求めることもできる [13]。そのために、Higgs 場に対して考えたことを少し思い出そう。Higgs 場に対する解析では、漸近的な振舞いからヒントを得て、回転変換 (4.5) が非線型な微分方程式 (4.4) を線形化できることを見つけた。その議論を gauge 場に拡張するためには、非線形 BPS 方程式 (3.4) を線形化する変換を見つけるための原理が必要である。Higgs 場の場合に用いた回転変換が理論の対称性であったことを思い出すと、非線形 BPS 方程式を線形化する変換もやはり理論の対称性であってほしい。また、Higgs 場に対しては回転変換を用いることを既に知っているので、これと無矛盾な変換を使わなければならない。

Minkowski 空間上の Born-Infeld 理論の対称性には、Minkowski 空間の isometery である Poincaré 対称性の他に、gauge 対称性である reparametrization 対称性がある。Higgs 場には単に回転行列がかかるだけではあるが、gauge 場の場合には reparametrization 変換による変換行列がかかる。回転変換を行うときに static gauge を取り直す

$$X^\mu(x) = x^\mu \quad \Rightarrow \quad \bar{X}^\mu(\bar{x}) = \bar{x}^\mu \tag{4.6}$$

ので、gauge 場に対する変換行列が非自明になる。この寄与をちゃんと考慮にいれると、非線形 BPS 方程式 (3.4) を gauge 場も含めて線形化することができる。

5 まとめと展望

ここで調べたことをもう一度まとめると、非可換 BPS 方程式を θ 展開で解いて、非可換 monopole 解を構成した。しかし、brane 解釈をするためには、必ず可換側に Seiberg-Witten 変換して調べなければならない。そこで、直接可換側から調べるために、Born-Infeld 理論を用いて非線形 BPS 方程式をつくり、その BPS 方程式が α' に依らないことを示した。この非線形 BPS 方程式はある回転変換によって、線形化をして解くことができる。その結果、非線形 monopole 解は非局所性と多価性を持つ興味深いものであることがわかった。

非可換側から非可換 monopole 解を構成する方法は次第に確立され、演算子形式を用いると比較的簡単に構成できることがわかってきた。しかしながら、演算子形式という代数的な手法を使っているため、θ 展開ほど幾何的なイメージが得られにくい。ここで構成した非線形 monopole 解は幾何的なので、相補的に重要な役割を果たすのであろう。

これらの話に基づいて、気になるいくつかの問題点をまとめてみることにする。

まずは zero slope 極限に関する問題点である。Seiberg-Witten 変換によって結び付いているのは、可換側と非可換側の Born-Infeld 理論どうしではない。両側の Born-Infeld 理論に弦理論による補正を加えたものどうしである。したがって、非線形 BPS 方程式を構成する際に、Born-Infeld 理論を使ったが、弦理論による補正がどう効いているかは明らかではない。しかし、上の議論によれば非線形 BPS 方程式は α' に依らないし、また、電磁共役な理論に対しては弦理論による補正を受けないことが示されている [14] ので、非線形 BPS 方程式が弦理論による補正を受けないと期待される。これを明らかにすることは重要であろう。

次の問題は非可換 soliton の分類に関するものである。ここで解析した非可換 soliton は可換側にも対応物があるものだが、可換側に対応物がない非可換 soliton も知られている。果たして非可換空間上にはどれだけの soliton があるのか。これを明らかにしたい。

もともと非可換 monopole 解を調べたのは、それの非局所性が弦理論の非局所性に対して新しい知見を与える可能性があったからだ。ここで構成した非可換 monopole 解は確かに非局所性を持った興味深いものではあるが、弦理論の非局所性に対する新しい知見はまだ見出せない。また、本文では触れなかったが、この議論を M 理論に拡張して、一様 C 場が背景にあるときの M5-brane にくっついている M2-brane を解析することもできる [15, 16] ので、M 理論に対しても何か新しい知見を得たい。

参考文献

[1] N. Seiberg and E. Witten, "String Theory and Noncommutative Geometry", *JHEP* **9909** (1999) 032, hep-th/9908142.

[2] A. Hashimoto and K. Hashimoto, "Monopoles and Dyons in Noncommutative Geometry", *JHEP* **9911** (1999) 005, hep-th/9909202.

[3] K. Hashimoto, H. Hata and S. Moriyama, "Brane Configuration from Monopole Solution in Noncommutative Super Yang-Mills Theory", *JHEP* **9912** (1999) 021, hep-th/9910196.

[4] D. Mateos, "Noncommutative vs. Commutative Descriptions of D-brane BIons", *Nucl. Phys.* **B577** (2000) 139, hep-th/0002020.

[5] K. Hashimoto and T. Hirayama, "Brane and BPS Configurations of Noncommutative /Commutative Gauge Theories", *Nucl. Phys.* **B587** (2000) 207, hep-th/0002090.

[6] H. Hata and S. Moriyama, "String Junction from Noncommutative Super Yang-Mills Theory", *JHEP* **0002** (2000) 011, hep-th/0001135.

[7] S. Goto and H. Hata, "Noncommutative Monopole at the Second Order in Theta", *Phys. Rev.* **D62** (2000) 085022, hep-th/0005101.

[8] A. Hashimoto, "The Shape of Branes Pulled by Strings", *Phys. Rev.* **D57** (1998) 6441, hep-th/9711097.

[9] M. Marino, R. Minasian, G. Moore and A. Strominger, "Nonlinear Instantons from Supersymmetric p-Branes", *JHEP* **0001** (2000) 005, hep-th/9911206.

[10] S. Terashima, "Instantons in the U(1) Born-Infeld Theory and Noncommutative Gauge Theory", *Phys. Lett.* **B477** (2000) 292, hep-th/9911245.

[11] S. Moriyama, "Noncommutative/Nonlinear BPS Equations without Zero Slope Limit", *JHEP* **0008** (2000) 014, hep-th/0006056.

[12] S. Moriyama, "Noncommutative Monopole from Nonlinear Monopole", *Phys. Lett.* **B485** (2000) 278, hep-th/0003231.

[13] K. Hashimoto, T. Hirayama and S. Moriyama, "Symmetry Origin of Nonlinear Monopole", *JHEP* **0011** (2000) 014, hep-th/0010026.

[14] L. Thorlacius, "Born-Infeld String as a Boundary Conformal Field Theory", *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 1588, hep-th/9710181.

[15] Y. Michishita, "The M2-brane Soliton on the M5-brane with Constant 3-Form", *JHEP* **0009** (2000) 036, hep-th/0008247.

[16] D. Youm, "BPS Solitons in M5-Brane Worldvolume Theory with Constant Three-Form Field", *Phys. Rev.* **D63** (2001) 045004, hep-th/0009082.

Exact BPS Solitons in Noncommutative Gauge Theories

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 素粒子論研究室　浜中 真志

E-mail: hamanaka@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

非可換空間上の場の理論においても BPS 方程式を定義することができ, その解を非可換 BPS ソリトンという. 私達は, その BPS 方程式を不変に保つ, 非可換空間特有の変換を見出し, 既知のソリトン解から新しいソリトン解を構成した[1]. 扱ったソリトンは, インスタントン, モノポール, 渦である. この記事では, 主にモノポールを題材に, オペレーター形式の記述での厳密解の構成法や性質について, レヴューも含めて紹介する.

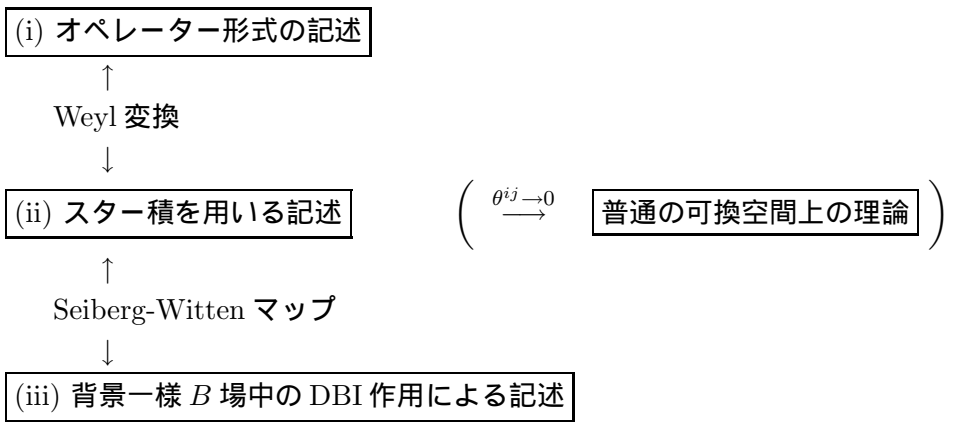
1 Introduction

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij} \tag{1.1}$$

ここで, θ^{ij} は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる.

非可換空間上の (=Non-Commutative, 以後 NC と書く) ゲージ理論には次の 3 つの等価な記述 (i), (ii), (iii) があり, Weyl 変換および Seiberg-Witten マップによって 1 対 1 に対応づけられる：



(i) のオペレーター形式の記述は空間座標の非可換性を前面に出した定式化であり, 場はオペレーター (無限サイズの行列) で表される. この記述が「非可換空間上の」ゲージ理論と呼ぶのに最もふさわしく, 行列模型による解釈が直接可能である. (ii) のスター積を用いる記述は, 場同士の積をスター積と呼ばれる積に置き換えることで空間座標の非可換性を表現する定式化であり, 場は普通の関数である. 非可換パラメータ $\theta^{ij} \to 0$ の極限で可換空間上の理論に戻る. (iii) は背景一様 B 場 (磁場) 中の D ブレーンの有効理論であり, 座標関数同士の積の非可換性はない. (ii) と (iii) との等価性は [37] で示された. この記事では (iii) については触れない[2].

それぞれの記述における既知の非可換 BPS ソリトンを付録 A にまとめた. 代表的なソリトン解は 20 世紀中に一通り出揃ったと言えるが, 厳密解を求めるには (i) のオペレーター形式の記述が非常に強力であり[3] , 具体的手法としては,

[1] この記事は同じ研究室の寺嶋靖治さんとの共同研究 [16] に基づく. なお関連論文として [20] がある.

[2] 非可換モノポールの, (ii) と (iii) での記述については, この研究会報告の森山翔文さんの記事を御覧ください. なお森山さんの講演でもそうでしたが, 普通 (i) と (ii) は「非可換側」, (iii) は「可換側」と表現されます.

[3] (iii) でもゲージ群が $U(1)$ の場合には厳密解が求められている (付録 A 参照).

- ADHM/Nahm 構成法[4]
- Solution Generating Technique [5]

が代表的である. 私達の構成法は後者に属する.

この記事では (i) のオペレーター形式の記述での非可換 BPS ソリトンの厳密解について議論する. まずセクション 2 で, NC ゲージ理論を簡単に定義したあと, Gross と Nekrasov によって構成された非可換モノポール解についてレヴューする. ADHM/Nahm 構成法の背景についても少し紹介する. 次にセクション 3 で私達の見出した BPS ソリトン生成変換を用いて新しい解を構成し, その物理的解釈を与える.

2 Gross-Nekrasov Monopoles

Gross と Nekrasov によって構成された非可換モノポールは 3 種類あるが (付録 A 参照), このセクションでは簡単のため非可換 1-Dirac モノポール解を紹介する. Dirac モノポールは $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の BPS ソリトンである.

2.1 Non-Commutative Gauge Theory

まず可換空間上の理論から出発して, その非可換版を定義することを考える. $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の作用 $I_{\rm YMH}$ は次の通り :

$$I_{\rm YMH} = -\frac{1}{4g_{\rm YM}^2}\int d^4x\ {\rm Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2D_\mu\Phi D^\mu\Phi\right). \tag{2.1}$$

Φ はゲージ群 G の随伴表現に属する Higgs 場である $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$. 運動方程式, BPS 方程式はそれぞれ,

$$\text{運動方程式} \quad : \quad [D^\nu, F_{\nu\mu}] + [\Phi,[\Phi,D_\mu]] = 0, \quad [D^\mu,[D_\mu,\Phi]] = 0, \tag{2.2}$$

$$\text{BPS 方程式} \quad : \quad B_i = \pm[D_i,\Phi], \tag{2.3}$$

となる. ただし $B_i := -(i/2)\epsilon_{ijk}F^{jk}$ $(i,j,k = 1,2,3)$ は磁場である. 複号は上段が自己双対, 下段が反自己双対の場合を表す (以後同様). BPS 方程式はエネルギー E の下限を満たすものとして次のように導かれた :

$$E = \frac{1}{2g_{\rm YM}^2}\int d^3x\ {\rm Tr}\left[\frac{1}{2}F_{ij}F^{ij} + D_i\Phi D^i\Phi\right] = \frac{1}{2g_{\rm YM}^2}\int d^3x\ {\rm Tr}[(\underbrace{B_i \mp D_i\Phi}_{=0\ \Leftrightarrow\ \text{BPS}})^2 \pm \partial_i(\epsilon_{ijk}F^{jk}\Phi)]. \tag{2.4}$$

次にこの理論の非可換版を考えよう. 非可換座標は x^1, x^2 であるものとする. すなわち

$$[x^1,x^2] = i\theta, \quad (\theta > 0), \quad \text{それ以外の座標同士} : \quad [x^\mu,x^\nu] = 0. \tag{2.5}$$

[4]総合報告として例えば [6], [13], [33] がある. この研究会の古内一之さんの講演はこの関連のお話である.

[5]Non-BPS の場合のレヴューとして例えば [18] が, BPS の場合の解説記事としてこの記事の他に例えば [14] がある. [14] では場の理論的考察がより詳しく議論されている. この研究会報告の松尾泰さんの記事にも少し解説があります.

まず, (ii) のスター積を用いる記述での NC ゲージ理論を定義し, それから, Weyl 変換によって (i) のオペレーター形式の記述に移る.

(ii) スター積を用いる記述

スター積は普通の可換な関数 (場) に対して定義される積の一つである：

$$\begin{aligned} f*g(x) &:= \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i^{(x')}\partial_j^{(x'')}\right) f(x')g(x'')\Big|_{x'=x''=x} \\ &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x) + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned} \tag{2.6}$$

スター積は次の重要な性質を持つ：

- 結合則が成り立つ：$f*(g*h) = (f*g)*h$.
- 座標関数同士の非可換性を再現：$[x^i, x^j]_* := x^i * x^j - x^j * x^i = i\theta^{ij}$.
- $\theta^{ij} \to 0$ で普通の積に戻る.

NC ゲージ理論は, 普通の可換空間上のゲージ理論に現れる場同士の積を全てスター積に置き換えることで得られる. したがって, NC $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の作用, 運動方程式, および BPS 方程式はそれぞれ, 式 (2.1), (2.2), (2.3) において場同士の積が全てスター積に置き換わったものに等しい. 作用に無限個の微分が入っているが, 場は普通の関数なので, 運動方程式, BPS 方程式を導出するには, 可換な場合と同じ手順を踏めばよいのである.

(i) オペレーター形式の記述

今度は, 座標の非可換性 (2.5) から出発して NC ゲージ理論を定義する. 新しい変数を $\hat{a} := (1/\sqrt{2\theta})\hat{z}$, $\hat{a}^\dagger := (1/\sqrt{2\theta})\hat{\bar{z}}$ (ただし $\hat{z} := \hat{x}^1 + i\hat{x}^2$) として定義すると, $[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta$ より,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{2.7}$$

が分かる. これより, $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ はそれぞれ調和振動子の生成, 消滅演算子と解釈できる. これらが作用する Fock 空間を $\mathcal{H}$ と書くと, $\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathbf{C}|n\rangle$ である. ここで, $|n\rangle := \left((\hat{a}^\dagger)^n/\sqrt{n!}\right)|0\rangle$, $(n = 0, 1, \ldots)$ は占有数表示の基底であり, $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす.

場 $\hat{f}$ は $\hat{x}$ の (汎) 関数であるから, Fock 空間 $\mathcal{H}$ に作用する演算子となり, 占有数表示で以下のように表される：

$$\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, x^3) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}(x^3)|m\rangle\langle n| \overset{\text{場が } x^3 \text{軸対称な場合}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^3)|n\rangle\langle n|. \tag{2.8}$$

最後の等号は, 場が $(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 \sim \hat{a}^\dagger\hat{a}$ と交換するという条件から決まる. 以後, 場は x^3 軸対称であるとする.

(i) と (ii) の等価性[6]

(i) と (ii) は等価な記述であり, Weyl 変換という変換によって対応づけられる. (ii) における普通の場 $f(x^1, x^2)$ は, Weyl 変換によって (i) における無限次元正方行列の場 $\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ にうつされる.

[6] 詳しくは [18] などを参照.

掛け算, 微分, 積分も 1 対 1 に対応し, BPS 方程式 (2.3) もその解も 1 対 1 に対応する. 対応関係は以下の通り：

	(ii) スター積を用いる記述	(i) オペレーター形式の記述
場	普通の関数 $f(x^1, x^2)$	無限次元正方行列 $\hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn}\|m\rangle\langle n\|$
積	スター積 結合則：$f*(g*h) = (f*g)*h$	行列の積 結合則：$\hat{f}(\hat{g}\hat{h}) = (\hat{f}\hat{g})\hat{h}$ (自明)
非可換性	$[x^i, x^j]_* = i\theta^{ij}$	$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}$
微分	$\partial_i f$ 特に $\partial_i x^j = \delta_i{}^j$	$\partial_i \hat{f} := [\underbrace{-i(\theta^{-1})_{ij}\hat{x}^j}_{=:\hat{\partial}_i}, \hat{f}]$ 特に $\partial_i \hat{x}^j = -i(\theta^{-1})_{ik}[\hat{x}^k, \hat{x}^j] = \delta_i{}^j$
積分	$\int dx^1 dx^2 \ f(x^1, x^2)$	$2\pi\theta \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}} \hat{f}(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$
曲率	$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]_*$	$\hat{F}_{ij} = \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i + [\hat{A}_i, \hat{A}_j]$ $= [\hat{D}_i, \hat{D}_j] - i(\theta^{-1})_{ij}$
ある射影	$2(-1)^n L_n(2r^2/\theta)e^{-\frac{r^2}{\theta}}$	$\|n\rangle\langle n\|$

ここで, $\hat{D}_i := \hat{\partial}_i + \hat{A}_i,\ r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ であり, L_n は n 次の Laguerre 多項式である. 注意すべきことは, オペレーター形式の記述の曲率の式で, $[\hat{D}_i, \hat{D}_j]$ とくくると, $[\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j](= i(\theta^{-1})_{ij})$ を相殺するために必要な定数項 $-i(\theta^{-1})_{ij}$ が現れることである.

したがってオペレーター形式の記述での BPS 方程式 (2.3) は

$$\begin{aligned} (\hat{B}_3 =)\ \ 2[\hat{D}_z, \hat{D}_z^\dagger] + \frac{1}{\theta} &= \pm[\hat{D}_3, \hat{\Phi}], \\ (\hat{B}_z =)\qquad [\hat{D}_3, \hat{D}_z] &= \pm[\hat{D}_z, \hat{\Phi}] \end{aligned} \tag{2.9}$$

と表される. ただし, $\hat{D}_z := (1/2)(\hat{D}_1 - i\hat{D}_2),\ \hat{B}_z := (1/2)(\hat{B}_1 - i\hat{B}_2)$ のように 1,2 成分を複素に組んだ. $\hat{B}_3$ に定数項が含まれているのは, 上述の通りである.

以後, 解の構成の議論は全てオペレーター形式の記述で行う. このサブ・セクションでは Fock 空間に作用する演算子にはハットを付けたが, 以後省略する.

2.2 ADHM/Nahm Construction

ADHM/Nahm 構成法とは, 任意のインスタントン解/モノポール解の構成法の一つであり, Nahm 変換と呼ばれる双対変換のある種の極限として解釈できる. 非可換インスタントン, モノポール解もこの方法で構成することができ, 既知の厳密解は主にこの方法で求められた (付録 A 参照). ここでは可換空間上の ADHM/Nahm 構成法の背景を簡単に紹介する.

背景となる Nahm 変換の話から始める. Nahm 変換とは, 4 次元トーラス T^4 上の $G = U(N),\ k$ インスタントン解と, その双対 (4 次元) トーラス $\widetilde{T}^4$ 上の $G = U(k),\ N$ インスタントン解とを 1

対 1 に対応させる変換のことである. 双対トーラスはトーラスの半径を全て逆数にしたトーラスである. ゲージ群のランクとインスタントン数が入れ替わるのが興味深く, k 本の D0 ブレーンと N 枚の D4 ブレーンの束縛状態の T 双対変換として解釈できる.

双対トーラス $\widetilde{T}^4$ 上のインスタントン解からトーラス T^4 上のインスタントン解を構成する手順は以下の通り：

- 手順 1：双対トーラス上の自己双対方程式を解く. (その解を T_μ ($k \times k$ 行列) と書く.)
- 手順 2：双対インスタントン T_μ を背景とする零質量 Dirac 方程式 (Weyl 方程式) を解く. 指数定理より, カイラリティが正または負の規格化可能解が独立に N 個存在することが言える. これを列に並べた, $2k \times N$ 行列を v と書く.)
- 手順 3：v からトーラス上のゲージ場を $A_\mu = \int_{\widetilde{T}^4} v^\dagger \partial_\mu v$ として構成すると, インスタントンが出来上がる. 実際にこれが自己双対方程式を満たすことはすぐに言える. v が N 列の行列であったことから, ゲージ場のサイズが $N \times N$ となった.

トーラス上のインスタントン解から双対トーラス上のインスタントン解を構成する手順は全く同様であり, トーラス T^4 上の $G = U(N),\ k$ インスタントン解と, その双対トーラス $\widetilde{T}^4$ 上の $G = U(k),\ N$ インスタントン解との 1 対 1 対応を厳密に証明することができる. Dirac 方程式のゼロモードを経由して解くあたりにとても深いものを感じる.

次にこの系の特殊な場合を考え, ADHM/Nahm 構成法を導く[7]：

- トーラスの半径を 4 つとも全て無限大にする $\Rightarrow$ ADHM 構成法[8]

  このとき双対トーラスの半径は 4 つとも全てゼロになる. したがって双対トーラスは 1 点につぶれてしまい, 無限に近い 2 点上の差を読み取る操作である微分は意味を持たなくなる. その結果, 双対トーラス上の自己双対方程式および零質量 Dirac 方程式の中の微分は全て落ち, それらは行列の方程式になる. これにより, 行列の方程式を解くことで $\mathbf{R}^4$(= 半径無限大のトーラス) 上のインスタントンが得られる. これが ADHM 構成法である.

- トーラスの半径を 3 つだけ無限大, 残り 1 つをゼロにする $\Rightarrow$ Nahm 構成法

  このとき双対トーラスの半径は, 3 つはゼロ, 1 つは無限大になる. したがって双対トーラスは直線になり, 双対トーラス上の自己双対方程式および零質量 Dirac 方程式の中の 3 つの方向の微分は落ち, 1 つの方向の微分だけが残る. その結果, 常微分方程式を解くことで $\mathbf{R}^3$ 上のインスタントン (= BPS モノポール) が得られる. これが Nahm 構成法である.

もともとの状況は全く双対的であったが, 半径というパラメータのある特別な極限で双対性が非自明となり, 片側の記述が易しくなったのである. その結果, 偏微分方程式を解くという難しい問題が行列方程式を解くといった易しい問題に置き換わったというわけである. $k = 1$ の場合は, 手順 1 の双対トーラス上の自己双対方程式の解としては基本的に自明解を持ってくればよい. 本質的に計算が必要なのは, 手順 $2, 3$ である. しかし可換な場合はこれも易しい計算で済むことが多い.

紙数の都合のためこれ以上は説明しないが, ADHM/Nahm 構成法は非可換空間上にも拡張でき, さまざまな厳密解が手順通りに構成できる. D ブレーン解釈も非常に興味深く, 今後の D ブレーンの発展にも役立つものと期待している[9].

[7] 少しずれる部分もあるが, それはここでの議論が非常にナイーブなものだからである .

[8] T_μ, v はそれぞれ古内さんの講演の $B_{0,1}, \Psi$ に対応する. (B_0, B_1 は T_μ を複素に組んだもの.)

[9] 興味のある方は, 是非 [13] を御覧ください. 参考文献もそこにあります.

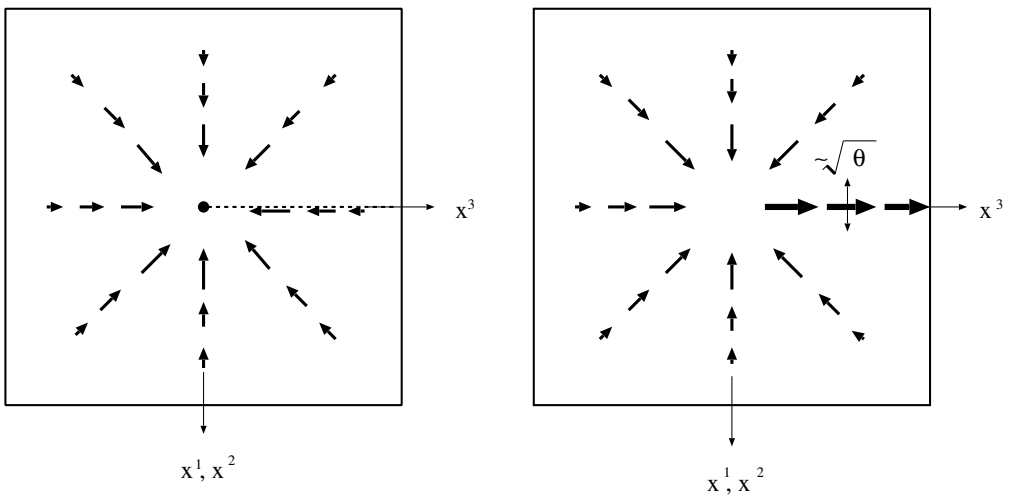


図 8: Dirac モノポールの磁場分布 (可換空間上 (左) V.S. 非可換空間上 (右))

2.3 Gross-Nekrasov Monopole

Gross と Nekrasov によって構成された非可換 1-Dirac モノポールの厳密解 [10] のレヴューを行う. Dirac モノポール解は Nahm 構成で ξ の積分区間を $(0,\infty)$ と定めることで得られる[10].

比較のため, まず可換空間上の 1-Dirac モノポール解を紹介する：

$$\Phi = \frac{1}{2r},\ A_r = A_\theta = 0,\ A_\phi = \frac{1}{2r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{2.10}$$

ただし (r,θ,ϕ) は普通の極座標である. ゲージ場および, それから計算される磁場は $\theta = 0$, すなわち x^3 軸の正の部分にデルタ関数型の特異性を持つことが分かる. この x^3 軸の正の部分に沿ったストリング状の特異点の集まりを Dirac ストリングと呼ぶ. Dirac ストリングは無限小の幅を持ったソレノイドと解釈でき, ゲージ変換でその方向が変わる非物理的対象である[11]. x^3 軸の正の部分以外では磁場は

$$B_i = \partial_i \Phi = -\frac{x^i}{2r^3} \tag{2.11}$$

と計算され, 磁場分布は図 8 の左のようになる[12].

[10]なお, $G = U(2)$ モノポール解は ξ の積分区間を有限の一区間に定めることで得られる. 特に積分区間を $(-u/2, u/2)$ に定めると $G = SU(2)$ 't Hooft-Polyakov モノポール解が得られる. (u は Higgs 場の真空期待値.) したがって, Nahm 構成で導かれる Dirac モノポール解は $G = U(2)$ モノポール解のある種の極限 (積分区間の極限) として解釈され, そのため以下に紹介するように, Dirac モノポールでは普通考えない Higgs 場が BPS 方程式を満たすものとして解に入ってくる. さらに補足すると $G = U(2)$ モノポールに対応するブレーン配置は, D ストリング (=D1 ブレーン) が, 有限の距離だけ離れた平行な 2 枚の D3 ブレーンに両端を持ち安定化した状況であり, ξ は D3 ブレーンに垂直な 1 つの方向の座標, 積分区間は D ストリングが延びている区間に対応する. したがって Dirac モノポールに対応するブレーン配置は, $G = U(2)$ モノポールの配置において 1 枚の D3 ブレーンを無限遠に追いやった状況に相当する.

[11]モノポールに関する詳しいレヴューとして例えば [9], [17] がある.

[12]普通は Dirac ストリングを「手でもぎ取る」が, 非可換な場合との比較のため, Dirac ストリングの存在も点線で図示している. (実際はどの方向に伸びていても構わない.)

一方, 非可換 1-Dirac モノポールの厳密解は次の通り [10]：

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n|n\rangle\langle n| = \pm\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n^2-\xi_{n-1}^2\right)|n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2+\frac{x^3}{\theta}\right)|0\rangle\langle 0|\right\},\\ A_z &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}\right)a^\dagger|n\rangle\langle n|, \quad A_3=0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

ここで
$$\zeta_n := \int_0^\infty dp\ p^n e^{-\theta p^2+2px^3}, \quad \xi_n := \sqrt{\frac{n\zeta_{n-1}}{2\theta\zeta_n}}. \tag{2.13}$$

(ただし, $\xi_0 := 1/\sqrt{2\theta\zeta_0}$ とする.) この解は至るところ非特異である.

物理的な意味を見るため, まず無限遠の振る舞いを調べる. 無限遠の振る舞い ($r_n+x^3\to\infty$, $r_n := \sqrt{(x^3)^2+2\theta n}$) は次のようになる[13]：

$$\Phi_n \sim \begin{cases} \pm\dfrac{x^3}{\theta} & : \ n=0,\ x^3\to+\infty \\ \pm\dfrac{1}{2r_n} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{(x^3)^2+2\theta n}} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{2.14}$$

$$(B_3)_n \sim \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} & : n=0,\ x^3\to+\infty \\ -\dfrac{x^3}{2(r_n)^3} & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{2.15}$$

これから分かるように, Higgs 場および磁場はともに $n=0,\ x^3\to\infty$, すなわち x^3 軸の正の部分で特別な振る舞いをする[14]. 磁場の他の成分も同様の振る舞いをし, 磁場分布はおおよそ図 8 の右のようになる[15]. x^3 軸の正の部分の一様な磁場 $(B_3(x^3\to+\infty))_0|0\rangle\langle 0|$ は, Weyl 変換でスター積を用いる記述に戻ると, ちょうど Gauss 型の分布 $(2/\theta)\exp\left\{-((x^1)^2+(x^2)^2)/\theta\right\}$ になり, その幅は大体 $\sqrt{\theta}$ である. したがって可換空間上への極限 $\theta\to 0$ で, これはちょうどデルタ関数型の分布になり, もとの特異な Dirac ストリングに一致する. 以上のことから, x^3 軸の正の部分の磁束は Dirac ストリングが非可換性のために膨らんだため, その内部の磁場が現れたものであり, 解 (2.12) は Dirac ストリング付きの Dirac モノポールの非可換版である[16] と解釈するのが妥当であるように思えるが, これについては後でさらに詳しく考察する (92 ページ脚注参照).

次にブレーン解釈を考える. $G=U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論は D3 ブレーンの有効理論で記述できる. このとき Higgs 場 Φ の値は D3 ブレーンの広がった方向に垂直なある 1 方向の D3 ブレーンの座標に対応する. Dirac モノポール解の配位は, まっすぐ無限にのびた D ストリングが D3 ブレーンに端を持ち, 安定化した状況に相当する. (90 ページの脚注参照.) このとき D ストリングは D3 ブレーンと一体化し, D3 ブレーンの突起と解釈される. D ストリングの端は磁荷を帯びてお

[13] 鞍点法で ζ_n の積分を処理した.

[14] 今 n を大体 1-2 平面上の原点からの距離の 2 乗と思っている ($(x^1)^2+(x^2)^2\sim 2\theta n$).

[15] ここでは n を $(x^1)^2+(x^2)^2$ と思い, かつ場 $\mathcal{O}=\sum_{n=0}^\infty \mathcal{O}_n|n\rangle\langle n|$ の $|n\rangle\langle n|$ の部分をちゃんと扱っていないので, 実は非常に荒っぽい議論をしている. 本当は場 $\mathcal{O}$ 全体を Weyl 変換して (ii) のスター積を用いる記述で解釈するのが妥当であるが, 鞍点法で解 (2.12) に含まれる積分を評価した後でさえ, Laguerre 多項式などに $1/\sqrt{*+n}$ の重みを掛けた無限和をとることになり (88 ページにある表の $|n\rangle\langle n|$ の Weyl 変換式参照), 非常に難しい. 仮に Weyl 変換できたとしても, 非可換空間上には局所的な観測可能量は存在しないため, 磁場の分布図というものは本当は意味をなさない.

[16] x^3 軸の正の部分の磁束は原点に流入する磁束の総量に等しく, 十分大きい 2 次元球面で囲って磁場を表面積分するとゼロになる. すなわち磁荷がゼロとなりモノポールとは言えないわけであるが, 可換な場合と同様にこの膨らんだ Dirac ストリングを除いて表面積分すると -1 という望ましい値が得られる [10].

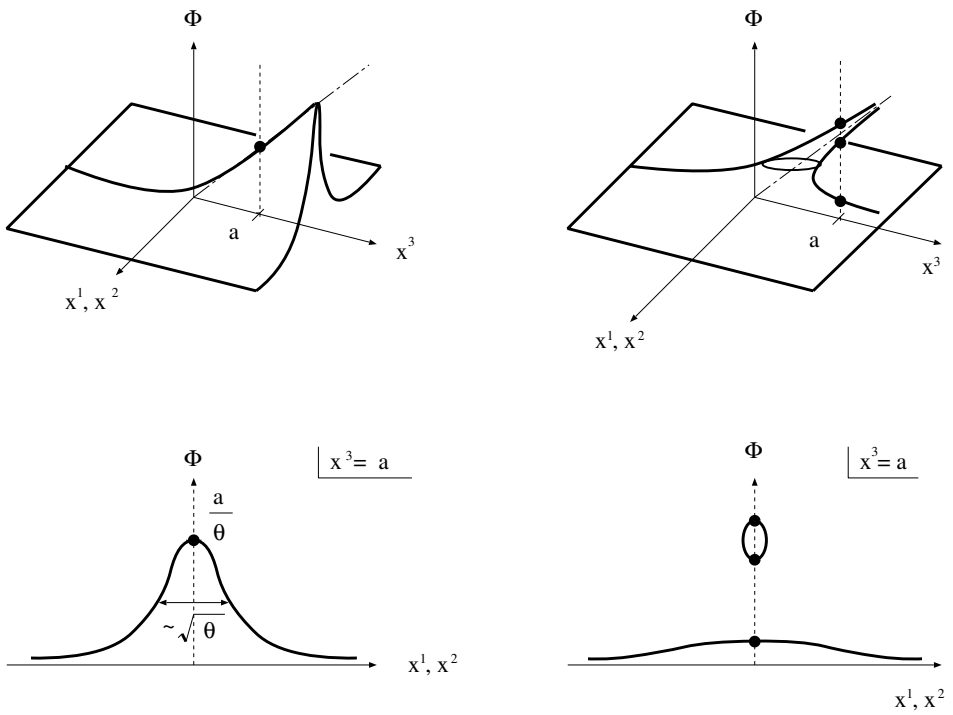


図 9: Higgs 場の配位 (記述 (i) (左) V.S. 記述 (iii) (右))

り, D3 ブレーンからみるとモノポールに見える. 今考えている非可換の場合に相当するのは, D3 ブレーン上に背景一様 B 場 (磁場と等価) が x^3 方向に入っている状況であり (1 ページの記述 (iii) のこと), D ストリングの端は一様 B 場に引っ張られ, ある傾きを持った状態で D ストリングの張力と釣り合って安定となる [21], [22], [23]. この記述での非可換 1-Dirac モノポール解は [30], [24] で厳密に求められた. (詳しくは森山さんの記事を御参照ください.)

Higgs 場の配位 (2.14) を図示すると, 図 9 の左のようになる. DBI 作用での記述 (iii) の解 [30](図 9 の右) と比較すると, Higgs 場の x^3 軸の正の部分での特異な振る舞いは D3 ブレーンが突起してできた D ストリングを表していると考えられる[17]. D ストリングの傾きは, $\pm 1/\theta$ であり, (iii) の記述での非可換モノポールのブレーン解釈とちょうど一致する[18]. ただ, (i) の記述での解 (2.12) は場の理論の立場で解いたものであるから 1 価であるのに対し, (iii) の記述での解 [30] は多価性を持つため, この部分が対応しない. この問題については現在未解決であり, 今後の研究が待たれる.

[17]背景に磁場を加えた影響により傾いた D ストリングを記述するため, Higgs 場がその方向に特別な振る舞いをし, それが x^3 軸の正の部分の磁束を表すことになったのである. D ストリングの傾き方は背景磁場を固定すれば一意に定まるため, 磁束の方向も一意に定まる. その磁束は D ストリングの反映であるから (非可換空間上で何が「物理的」かを判定する基準は今のところ確立していないが) 物理的対象であろう. 一方可換空間では, D ストリングが D3 ブレーンに対してちょうど垂直となるため, Higgs 場の特別な振る舞いがちょうどなくなり, D3 ブレーン上の理論で (磁場の供給元であるところの) D ストリングを記述するのがこのときに限りできなくなり, Dirac ストリングという非物理的対象が必要となったのである. したがって, 傾いた D ストリングの反映であるところの磁束と架空の存在である Dirac ストリングとは区別されるべきものであると思われる.

[18][10] の (6.4) 式から分かるように, (iii) の記述での D ストリングの傾きは, オープン・ストリング・メトリックを $G_{ij} = \delta_{ij}$ と固定したとき, $\pm\left\{(2\pi\alpha')^2 B(1+(\theta/2\pi\alpha')^2)\right\}^{-1}$ である. したがって, Seiberg-Witten リミットを取る前かつ $\theta \ll \alpha'$ の状況 ($B = \theta/(2\pi\alpha')^2$) でも, Seiberg-Witten リミットを取った後の状況 ($\alpha' \to 0, B = \theta^{-1}$) でも D ストリングの傾きは $\pm 1/\theta$ となる.

3 BPS-Soliton Generating Transformation

このセクションでは, 非可換 BPS 方程式を不変に保つ変換を見出し, 既知のソリトン解から新しいソリトン解を構成する.

まず次の変換を考える：

$$\Phi \to S\Phi S^\dagger, \quad D_i \to SD_iS^\dagger. \tag{3.1}$$

ただし, S は $S^\dagger S = 1$ を満たす演算子である. S が有限サイズの行列であれば, 自動的に $SS^\dagger = 1$ も満たされ, S はユニタリ演算子, 変換 (3.1) はゲージ変換となる. ところが今, S は無限サイズの行列であるため, $SS^\dagger$ は射影演算子になることしか言えない ($(SS^\dagger)(SS^\dagger) = SS^\dagger$).

変換 (3.1) は一般に運動方程式を不変に保つ [19]：

$$\frac{\delta I}{\delta \mathcal{O}} \to S\frac{\delta I}{\delta \mathcal{O}}S^\dagger. \tag{3.2}$$

実際, 例えば NC $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論の運動方程式 (2.2) の 2 番目の方の左辺は

$$\begin{aligned}[D^\mu, [D_\mu, \Phi]] \quad &\to \quad [SD^\mu S^\dagger, [SD_\mu S^\dagger, S\Phi S^\dagger]] \\ &= \quad S[D^\mu, [D_\mu, \Phi]]S^\dagger\end{aligned}$$

と共変的に変換する. ($S^\dagger S = 1$ だけが必要であることに注意.)

S の典型例は次のシフト演算子 S_N である：

$$S_N := \sum_{n=0}^{\infty} |n+N\rangle\langle n|, \quad S_N^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+N|. \tag{3.3}$$

これらは $S_N^\dagger S_N = 1, \quad S_N S_N^\dagger = 1 - P_N$ を満たす. ここで,

$$P_N := \sum_{m=0}^{N-1} |m\rangle\langle m| \tag{3.4}$$

は, Fock 空間 $\mathcal{H}$ の N 次元部分空間 $\mathcal{H}_N = \oplus_{m=0}^{N-1}\mathbf{C}|m\rangle$ への射影演算子であり, $S_N S_N^\dagger$ は, $\mathcal{H}$ に対する $\mathcal{H}_N$ の補空間への射影演算子となる. 以後 S として S_N を用いる.

変換 (3.1) は BPS 方程式を不変に保たない. 実際, 例えば BPS 方程式 (2.9) の一番目の方の左辺は

$$\begin{aligned}2[D_z, D_z^\dagger] + \frac{1}{\theta} \quad &\to \quad 2[S_N D_z S_N^\dagger, S_N D_z^\dagger S_N^\dagger] + \frac{1}{\theta} \\ &= \quad S_N(2[D_z, D_z^\dagger])S_N^\dagger + \frac{1}{\theta} \\ &= \quad S_N\left\{2[D_z, D_z^\dagger] + \frac{1}{\theta}\right\}S_N^\dagger + \frac{1}{\theta}P_N\end{aligned}$$

と共変的に変換しない. これは, BPS 方程式が運動方程式と違って, 定数項 (例えば曲率の式に現れた $-i(\theta^{-1})_{ij}$ など) を含んでいるためである. ($S_N S_N^\dagger$ が射影演算子であることにも注意.)

そこで私達は, 変換 (3.1) を修正することで, BPS 方程式を不変に保つ変換を見出した. NC $G = U(1)$ Yang-Mills-Higgs 理論に対する結果は次の通り：

$$\begin{aligned}
\Phi &\to S_N \Phi S_N^\dagger \pm \frac{x^3}{\theta} P_N + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(4)} |m\rangle\langle m|, \\
D_3 &\to \partial_3 + S_N A_3 S_N^\dagger + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(3)} |m\rangle\langle m|, \\
D_z &\to S_N D_z S_N^\dagger + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで, $\lambda_m^{(z)} := (1/2)(\lambda_m^{(1)} - i\lambda_m^{(2)})$ であり, $\lambda_m^{(1)},\ \lambda_m^{(2)},\ \lambda_m^{(3)},\ \lambda_m^{(4)}$ は任意の実 (モジュライ・) パラメータである.

例えば, 非可換 1-Dirac モノポール解 (2.12) を (3.5) で変換すると, 次の新しいソリトン解が得られる：

$$\begin{aligned}
\Phi^{\rm new} &= \pm \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} (\xi_{n-N}^2 - \xi_{n-N-1}^2) |n\rangle\langle n| + \left(\xi_0^2 + \frac{x^3}{\theta} \right) |N\rangle\langle N| + \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{x^3}{\theta} - \lambda_m^{(4)} \right) |m\rangle\langle m| \right\}, \\
D_z^{\rm new} &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \sum_{n=N}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1-N}{n+1}} \frac{\xi_{n-N}}{\xi_{n+1-N}} a^\dagger |n\rangle\langle n| + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|, \\
A_3^{\rm new} &= \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(3)} |m\rangle\langle m|.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

これは, Dirac モノポール 1 個とフラクソン N 個の複合系を表す. N フラクソン解は真空解 $\Phi = 0,\ A = 0$ を (3.5) で変換することで得られ,

$$\begin{aligned}
\Phi^{\rm fluxon} &= \pm \frac{x^3}{\theta} P_N, \\
D_z^{\rm fluxon} &= S_N \hat{\partial}_z S_N^\dagger, \quad A_3^{\rm fluxon} = 0, \\
B_3^{\rm fluxon} &= \frac{1}{\theta} P_N, \quad B_1^{\rm fluxon} = B_2^{\rm fluxon} = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

で与えられる[19] [36], [11]. (λ は全てゼロとした.) 磁場分布は図 10 のようになる.

フラクソンは, 非可換空間特有のソリトンであり, 非可換 Dirac モノポールに現れた x^3 軸の正の部分の磁束が無限にのびているものと解釈できる. 単位長さあたりの質量は $2\pi/g_{\rm YM}^2\theta$ である. したがって変換 (3.5) は, BPS 方程式を (よって運動方程式も) 不変に保ちながら, エネルギーを変えてしまっているように見える. これは変換 (3.5) が実は作用も変えてしまっているためであり, その原因は作用の中の曲率の式に定数項が含まれていることである. 変換 (3.5) は見掛け上はほとんどゲージ変換であるが, 実際は, あるソリトン (フラクソン) 数のセクターの真空を, N 個ソリトン数の多いセクターの真空に移すという変換になっている.

[19] なお, 橋本幸士さんが [20] の中で議論している解："(ii) the smeard D-string with no D3-brane surface" は真空解 $\Phi = 0,\ A = 0$ を, $N = \infty,\ \lambda_m^{(4)} = \Phi_0$ (定数) の場合の (3.5) で変換することによって得られる.

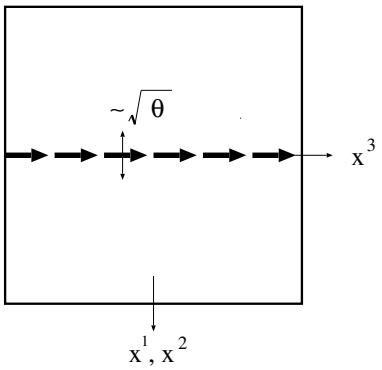


図 10: 1 フラクソンの磁場分布

最後に行列模型による解釈を与える [1] [20]. 変換 (3.5) によって得られた新しい解は, 行列表示すると次のようになる：

$$
\begin{aligned}
D_z^{\rm new} &= S_N \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} (D_z^{\rm original})_{m,n} |m\rangle\langle n| \right) S_N^\dagger + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|, \\
&= \sum_{m,n=N}^{\infty} (D_z^{\rm original})_{m-N,n-N} |m\rangle\langle n| + \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m^{(z)} |m\rangle\langle m|, \\
&= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0^{(z)} & & O & \\ & \ddots & & O \\ O & & \lambda_{N-1}^{(z)} & \\ \hline & O & & D_z^{\rm original} \end{array} \right).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

したがって, 変換 (3.5) は行列表示してみたとき, もとの解を右下方向に N だけずらして, 空いた左上の $N \times N$ 行列の対角成分に適当な項を加えたものとなっている. この変換は行列模型によると, (変換前は) 無限個の D ストリングの束縛状態として記述されていた BPS 状態の D3 ブレーンから N 個の束縛されていない D ストリングが解放されたものと解釈できる (図 11 参照). この N 個の D ストリングが x^3 方向にうまく傾くことで, BPS 状態の配位が実現されたものと考えられる[21]. これがフラクソンである. この N 個の D ストリング (フラクソン) からみると, 式 (3.8) の左上の任意パラメータ $\lambda_m^{(*)}$ は, Higgs 場の真空期待値であり, D ストリングに垂直な方向の座標を表す. したがって, 新しい解に含まれていた任意パラメータ $\lambda_m^{(*)}$ は, N 個のフラクソンの位置を表す.

[20] 詳しくは (参照論文についても) この研究会報告の石橋延幸さんの記事を御覧ください. なおレヴューとして [27] があります.

[21] インスタントンで非可換パラメータ θ^{12} と θ^{34} がうまくつりあうことで BPS 状態の配位が実現される [1] のとちょうど同じである. したがってフラクソンはスモール・インスタントンのモノポール版であると考えられる [15]. なお背景 B 場中の種々の D ブレーン複合系の議論については松尾俊寛さんの記事を御覧下さい.

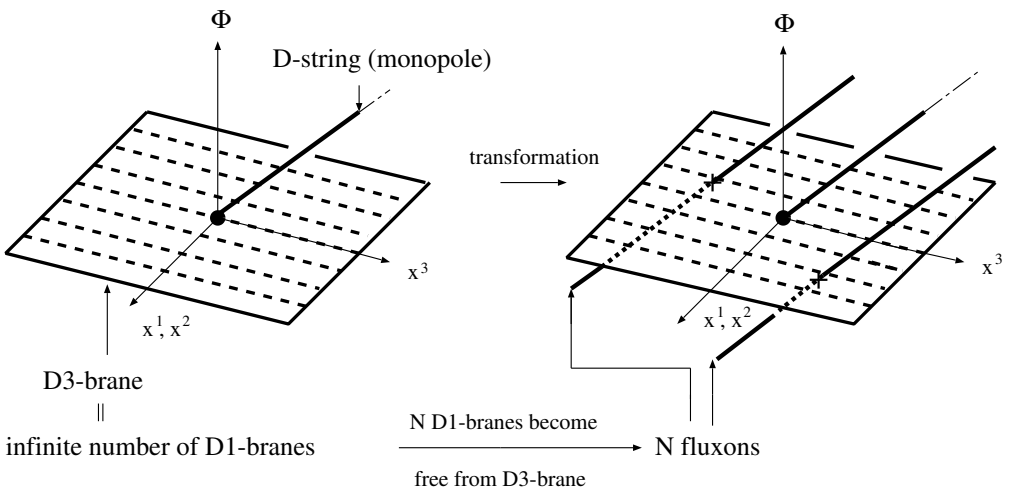


図 11: 行列模型による解釈

4 Conclusion and Discussion

インスタントン, 渦[22] についても同様の議論ができる. この場合, 変換式は (3.1) にモジュライの項 (λ を含む項) を加えたものでよいが[23], 非可換パラメータに制約をつけなければならない :

- インスタントンの場合 :

  非可換パラメータの自己双対性がゲージ場の自己双対性と一致するときに限り, BPS 解を生成することができる. このとき (完備化された) インスタントン・モジュライ空間は可換な場合と変わらず特異なままである.

  具体的既知解としては, 非可換パラメータの自己双対性がゲージ場の自己双対性とちょうど逆の場合の解 [34], [5] ではなく, 非可換パラメータの自己双対性がゲージ場の自己双対性と一致する場合の解 [7] を持ってくる必要がある. 変換後の解は, 変換前の非可換 BPS インスタントンとスモール・インスタントン (= サイズが最小のインスタントン) の (BPS) 複合系となる[24].

- 渦の場合 :

  非可換パラメータのスケールと渦の大きさのスケールが (向きも含めて) 一致するときに限り, BPS 解を生成することができる.

  具体的既知解としては今のところ真空解を持ってくるしかない[25]. 変換後の解は, N 個の「スモール渦」の BPS 解となる. これはモジュライ・パラメータが入っている分だけ, [2] の解の一般化になっている.

[22] Abelian-Higgs 模型の BPS ソリトンのことである.
[23] 渦の記述に必要な, ゲージ群の基本表現に属する Higgs 場 ϕ に対しては $\phi \to S\phi$ と変換する. (ϕ にはモジュライの項は加えてはならない.)
[24] 個々のインスタントン解の性質については古内さんの記事や論文 [1], [7] を御覧ください.
[25] 既知解として [26] や [28] の解を持ってくることは出来ない. (これは「向き」が逆の場合の解)

いずれの場合も, 私達の見出した変換によって, 変換前の非可換 BPS ソリトンと非可換空間特有のソリトンの (BPS) 複合系が得られる. これらの変換を用いることで, 任意の既知解からさまざまな新しい解が構成できる. そのための条件として非可換パラメータとゲージ場の自己双対性が密接に関わってくる. またモノポールのときと同じく, 変換によって, BPS 方程式, 運動方程式は不変に保たれるが, 作用は変わってしまい, あるソリトン数のセクターの真空が異なるソリトン数のセクターの真空へ移される. これはやはり作用の中の曲率の式に定数項が含まれていることによる.

Acknowledgements

この記事は 2001 年 2 月 19 ~ 21 日に行われた基研研究会「ストリング理論と場の理論における非可換幾何」における私の発表のプロシーディングです[26]. 貴重な発表の機会を与えて下さった世話人の方々, ならびに聴講, 議論して下さった方々全てに, この場をお借りして感謝申し上げます. また, [16] の共同研究者でもある寺嶋靖治さんからは非可換幾何学のアイデアや現状について非常に多くのことを学ぶことができ, 理解が深まりました. 他の研究会や各大学でのセミナー発表で得たものもたくさんあり, それらの一部はこの記事に反映されていることと思います.

この記事は日本育英会および日本証券奨学財団の経済援助のもと作成されました.

[26] この記事の作成にあたり, 研究会以後の発展について少し追加した部分があります.

付録A Known NC BPS Solitons

既知の非可換 BPS ソリトンを以下の表にまとめた.

例	(i) オペレーター形式の記述	(ii) スター積を用いる記述	(iii) 背景一様 B 場中の DBI 作用による記述
インスタントン	• $U(1), U(2)$ $k = 1, 2, \cdots$ ASD 解 (θ：SD)： Nekrasov-Schwarz [34]*, 古内 [5]*, $\cdots$ • $U(1)$ $k = 1$ ASD 解 (θ：任意)：Nekrasov [32] • $U(2)$ $k = 1$ SD 解 (θ：SD)：古内 [7]* ◉ SD Small Instanton 解 (θ：SD, k：任意)： Aganagic et al. [1], 古内 [7]*		• $U(1)$ $k = 1$ ASD 解 (B：SD)：寺嶋 S [38] • $U(1)$ $k = 1$ ASD 解 (B：任意)：森山 [31] • 〈 関連論文 〉： Mariño et al. [29], $\cdots$
モノポール	• $U(1)$ $k = 1$： Gross-Nekrasov [10]* • $U(2)$ $k = 1$： Gross-Nekrasov [12]* ◉ Fluxon 解 (k：任意)： Gross-Nekrasov [11], Polychronakos [36], 浜中 [15]*	• $U(1)$ $k = 1$ (θ 1 次)：橋本 K・平山 [23] • $U(2)$ $k = 1$ (θ 1 次)：Bak [2]*, 橋本 K・畑・森山 [22] (θ 2 次)：後藤・畑 [8]	• $U(1)$ $k = 1$ (Higgs 場)：森山 [30] (Gauge 場)： 橋本 K・平山・森山 [24] • 〈 関連論文 〉： 橋本 A・橋本 K [21], $\cdots$
渦	• U(1) ASD 解 ($\theta \to \infty$)： Jatkar-Mandal-Wadia [26] ◉ U(1) SD “Small Vortex” 解 ($\theta = 1/v^2, k$：任意)：Bak [3] • 〈 関連論文 〉： Lozano-Moreno-Schaposnik [28], Bak-Lee-Park [4], $\cdots$	?	? ?

引用論文[27] の肩に星印がついているものは, ADHM/Nahm 構成法を用いたものである. また, SD, ASD はそれぞれ自己双対 (Self-Dual), 反自己双対 (Anti-Self-Dual) の略である. “◉” の解は “Solution Generating Technique” で生成される非可換空間特有の BPS ソリトンである[28].

(ii) の解は可換空間上の解 ($\theta = 0$ の場合の解) の周りで θ 展開して求められている.

インスタントンに関しては, (ii) の解はすぐに求められると思われるが, (ii) と (iii) との対応はモノポールほど議論されていない.

[27] 敬称は省略させていただきました.

[28] “Small Vortex” 解を除いた “◉” の解と $U(2)$ $k = 1$ SD インスタントン解の一部については, 厳密な Seiberg-Witten マップ [35] を用いて (iii) の記述の解が求められている [25]. Solution Generating Technique で生成されるソリトンは Non-BPS の場合も含めて全て (iii) の記述では特異な解となる.

モノポールに関しては, (ii), (iii) の論文は (ii) と (iii) との対応についても詳しく議論しているので, (ii), (iii) の記述の間の境界線は明確ではない.

渦に関しては, (ii) の解は, 可換空間上の渦の解が知られていないため, 可換空間上の解の周りで θ 展開して求めることはできない. (iii) の解は, 渦の D ブレーンでの記述が知られていないため, 全く議論されていない. (Non-BPS の場合はこの限りでない.)

参考文献

[1] M. Aganagic, R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0104** (2001) 001, hep-th/0009142

[2] D. Bak, Phys. Lett. B **471** (1999) 149, hep-th/9910135

[3] D. Bak, Phys. Lett. B **495** (2000) 251, hep-th/0008204

[4] D. Bak, S. U., K. Lee and J. Park, "Noncommutative vortex solitons," hep-th/0011099

[5] K. Furuuchi, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043, hep-th/9912047

[6] K. Furuuchi, "Topological charge of U(1) instantons on noncommutative $\mathbf{R}^4$," hep-th/0010006

[7] K. Furuuchi, JHEP **0103** (2001) 033, hep-th/0010119

[8] S. Goto and H. Hata, Phys. Rev. D **62** (2000) 085022, hep-th/0005101

[9] P. Goddard and D. I. Olive, Rept. Prog. Phys. **41** (1978) 1357

[10] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0007** (2000) 034, hep-th/0005204

[11] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0010** (2000) 021, hep-th/0007204

[12] D. J. Gross and N. A. Nekrasov, JHEP **0103** (2001) 044, hep-th/0010090

[13] 浜中 真志, 『ADHM/Nahm 構成法とその双対性』, (雑誌「素粒子論研究」にまもなく投稿)

[14] 浜中 真志, 『非可換ソリトンの厳密解の構成法』[29], 素粒子論研究 **103-5** (2001-8) E16
※ 2000 年 12 月の基研研究会「場の量子論の基礎的諸問題と応用」のプロシーディング

[15] M. Hamanaka, "ADHM/Nahm construction of localized solitons in non-commutative gauge theories," (to appear)

[16] M. Hamanaka and S. Terashima, JHEP **0103** (2001) 034, hep-th/0010221

[17] J. A. Harvey, "Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry," hep-th/9603086

[29] この記事 [14] の増補版に相当する記事が http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/nis/iss2001/ にあります.

[18] J. A. Harvey, "Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes," hep-th/0102076

[19] J. A. Harvey, P. Kraus and F. Larsen, JHEP **0012** (2000) 024, hep-th/0010060

[20] K. Hashimoto, JHEP **0012** (2000) 023, hep-th/0010251

[21] A. Hashimoto and K. Hashimoto, JHEP **9911** (1999) 005, hep-th/9909202

[22] K. Hashimoto, H. Hata and S. Moriyama, JHEP **9912** (1999) 021, hep-th/9910196

[23] K. Hashimoto and T. Hirayama, Nucl. Phys. B **587** (2000) 207, hep-th/0002090

[24] K. Hashimoto, T. Hirayama and S. Moriyama, JHEP **0011** (2000) 014, hep-th/0010026

[25] K. Hashimoto and H. Ooguri, "Seiberg-Witten transforms of noncommutative solitons," hep-th/0105311

[26] D. P. Jatkar, G. Mandal and S. R. Wadia, JHEP **0009** (2000) 018, hep-th/0007078

[27] A. Konechny and A. Schwarz, "Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry," hep-th/0012145

[28] G. S. Lozano, E. F. Moreno and F. A. Schaposnik, Phys. Lett. B **504** (2001) 117, hep-th/0011205

[29] M. Marino, R. Minasian, G. Moore and A. Strominger, JHEP **0001** (2000) 005, hep-th/9911206

[30] S. Moriyama, Phys. Lett. B **485** (2000) 278, hep-th/0003231

[31] S. Moriyama, JHEP **0008** (2000) 014, hep-th/0006056

[32] N. A. Nekrasov, "Noncommutative instantons revisited," hep-th/0010017

[33] N. A. Nekrasov, "Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories," hep-th/0011095

[34] N. Nekrasov and A. Schwarz, Commun. Math. Phys. **198** (1998) 689-703, hep-th/9802068

[35] Y. Okawa and H. Ooguri, "An exact solution to Seiberg-Witten equation of noncommutative gauge theory," hep-th/0104036

[36] A. P. Polychronakos, Phys. Lett. B **495** (2000) 407, hep-th/0007043

[37] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032, hep-th/9908142

[38] S. Terashima, Phys. Lett. B **477** (2000) 292, hep-th/9911245

Dp-Dp' branes with B-field [1]

阪大理　松尾 俊寛

E-mail: matsuo@funpth.phys.sci.osaka-u.ac.jp

背景定数 B 場中の Dp-Dp' ($p < p'$) brane 系を弦の摂動論の手法で解析する。散乱振幅の解析から、Dp brane が非可換低エネルギー極限で非可換場の理論におけるソリトンと同定される形状因子をもつことが判明した。

1 Introduction

次元の異なる 2 種類の D-brane の bound state (Dp-Dp' brane) を考えた場合、小さい方の Dp-brane は大きい方の Dp'-brane 上の有効理論における topological defect として記述できる。また、D-brane 上の低エネルギー有効理論は背景定数 B 場の導入によって非可換場の理論として書けることが知られている。というわけで、Dp-Dp' brane 系に背景定数 B 場が導入されたときに Dp-brane が非可換場の理論においてどのように記述されるのかという疑問が自然に提起される。実際、非可換場の理論で射影演算子 [4] を用いたゲージ場の適当な flux soliton 解で低次元の D-brane を表す解が構成されている (例えば [5])。

一方で、低エネルギーの世界ではなく、弦の世界で Dp'-brane 上 の Dp-brane が背景定数 B 場がある場合にどのようにみえるかを考えてみたい。そこで p'-p' string を probe として Dp-brane を調べることにする。実際には、p-p' string と p'-p' string との散乱振幅から Dp-brane の形状因子を求めることになる。

$$\begin{array}{ccc} \text{D}p\text{-D}p'\text{ brane system} & \overset{\text{low energy}}{\longrightarrow} & \text{D}p\text{ as soliton on YM} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \text{turn on B}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \text{turn on B}} \\ \text{D}p\text{-D}p'\text{ brane w/ B} & \underset{\text{low energy}}{\longrightarrow} & \text{D}p\text{ as soliton on NCYM} \end{array}$$

2 worldsheet basics

p-p' string ($p < p'$) の worldsheet properties について簡単にまとめておく。以下では、この系に特徴的な方向 (Dp-brane には垂直で、Dp'-brane には平行な方向) に関する記述が主になる。

作用、背景場、境界条件 – NSR 超弦の世界面上の作用は

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z d\theta d\bar{\theta} \left(g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' B_{\mu\nu} \right) D\mathbf{X}^\mu(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \bar{D}\mathbf{X}^\nu(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}).$$

背景定数場は

$$g_{ij} = \epsilon\delta_{ij}, \quad B_{ij} = \frac{\epsilon}{2\pi\alpha'} \bigoplus_{I=1}^{p'/2} \begin{pmatrix} 0 & b_I \\ -b_I & 0 \end{pmatrix} \quad (i, j = 1, \ldots, p') \quad (\text{otherwise } B_{\mu\nu} = 0)$$

[1] B.Chen 氏、糸山浩氏、村上公一氏との共同研究 [1, 2, 3] に基づく。

Dp-Dp' brane 系を実現するには次のように境界条件を課せばよい。

$$g_{ij}(D-\bar{D})\mathbf{X}^j + 2\pi\alpha' B_{ij}(D+\bar{D})\mathbf{X}^j|_{\sigma=0,\pi\ \theta=\bar{\theta}} = 0, \quad (i,j=0,1,\ldots,p)$$

$$(D+\bar{D})\mathbf{X}^m|_{\sigma=0\ \theta=\bar{\theta}} = g_{mn}(D-\bar{D})\mathbf{X}^n + 2\pi\alpha' B_{mn}(D+\bar{D})\mathbf{X}^n|_{\sigma=\pi\ \theta=\bar{\theta}} = 0, \quad (m,n=p+1,\ldots,p')$$

モード展開と量子化 – **複素座標** $Z^I, \bar{Z}^{\bar{I}} = X^{2I-1} \pm iX^{2I}, (I=(p+2)/2,\ldots,p'/2)$ **でのモード展開は**

$$Z^I(z,\bar{z}) = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\in\mathbf{z}}\frac{\alpha^I_{n-\nu_I}}{n-\nu_I}\left(z^{\nu_I-n} - \bar{z}^{\nu_I-n}\right)\ ,\ \bar{Z}^{\bar{I}}(z,\bar{z}) = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\in\mathbf{z}}\frac{\bar{\alpha}^{\bar{I}}_{m+\nu_I}}{m+\nu_I}\left(z^{-\nu_I-m} - \bar{z}^{-\nu_I-m}\right)$$

$$\Psi(z,\bar{z}) = \sum_{r\in\mathbf{z}+1/2} b_{r-\nu}\left(z^{-(r-\nu)-1/2} - \bar{z}^{-(r-\nu)-1/2}\right),\ \bar{\Psi}(z,\bar{z}) = \sum_{s\in\mathbf{z}+1/2}\bar{b}_{s+\nu}\left(z^{-(s+\nu)-1/2} - \bar{z}^{-(s+\nu)-1/2}\right)$$

モード展開が非整数べき展開になっているが、これは境界条件を変える演算子 (twist & spin **場) が原点 (と無限遠点) に存在しているからである。**

モード演算子に対する交換関係は

$$[\alpha^I_{n-\nu_I}, \bar{\alpha}^{\bar{J}}_{m+\nu_J}] = (n-\nu_I)g^{I\bar{J}}\delta_{n+m}\,, \quad \{b^I_{r-\nu_I}, \bar{b}^{\bar{J}}_{s+\nu_J}\} = g^{I\bar{J}}\delta_{r+s}$$

oscillator 真空 – twist & spin **場 が潜んでいる真空として** oscillator **真空** $|\sigma,s\rangle = |\sigma\rangle\otimes|s\rangle$ **を**

$$|\sigma\rangle = \bigotimes_I |\sigma_I\rangle \qquad \text{with} \qquad \begin{cases} \alpha^I_{n-\nu_I}|\sigma_I\rangle = 0 & n > \nu_I \\ \bar{\alpha}^{\bar{I}}_{m+\nu_I}|\sigma_I\rangle = 0 & m > -\nu_I \end{cases}$$

$$|s\rangle = \bigotimes_I |s_I\rangle \qquad \text{with} \qquad \begin{cases} b^I_{r-\nu_I}|s_I\rangle = 0 & r \geq 1/2 \\ \bar{b}^{\bar{I}}_{s+\nu_I}|s_I\rangle = 0 & s \geq 1/2 \end{cases}$$

で定義する。oscillator **真空** $|\sigma_I, s_I\rangle$ **は** $SL(2,R)$ **真空** $|0\rangle$ **から** twist & spin **場** σ^+_I, s^+_I **によって励起されたものである。つまり**

$$|\sigma_I, s_I\rangle = \lim_{\xi^1\to 0}\sigma^+_I(\xi^1)s^+_I(\xi^1)\,|0\rangle\ .$$

2 点関数 – 2 **点関数** $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{I\bar{J}}(\mathbf{z}_1,\bar{\mathbf{z}}_1;\mathbf{z}_2,\bar{\mathbf{z}}_2) \equiv \left\langle \sigma,s|\mathcal{R}\mathbf{Z}^I(\mathbf{z}_1,\bar{\mathbf{z}}_1)\bar{\mathbf{Z}}^{\bar{J}}(\mathbf{z}_2,\bar{\mathbf{z}}_2)|\sigma,s\right\rangle$ **を** Dp'-brane **側の境界において評価すると**

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{I\bar{J}}(-x_1,\theta_1;-x_2,\theta_2) = 2\alpha' G^{I\bar{J}}\mathcal{H}\left(\nu_I;\frac{x_1}{x_2+\theta_1\theta_2}\right) + \frac{i}{2}\theta^{I\bar{J}}\epsilon(x_1-x_2)$$

$\mathcal{H}(\nu;z)$ **は超幾何級数** $F(a,b;c;z)$ **で書ける関数で**

$$\mathcal{H}(\nu;z) = \begin{cases} \dfrac{z^{\nu-1}}{1-\nu}F(1,1-\nu;2-\nu;1/z) - \dfrac{\pi}{2}b = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n-1+\nu}}{n+1-\nu} - \frac{\pi}{2}b & \text{for } |z|>1 \\ \dfrac{z^{\nu}}{\nu}F(1,\nu;1+\nu;z) + \dfrac{\pi}{2}b = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+\nu}}{n+\nu} + \frac{\pi}{2}b & \text{for } |z|<1 \end{cases}$$

つまり p-p' string からもやはり Dp'-brane 上の非可換性をみることができる [1]。

renormal ordering – いま 2 種類の真空、SL(2,R) 真空と oscillator 真空があり、それぞれのうえで正規順序積が定義されている。SL(2,R) 真空上での正規順序積を :: で、oscillator 真空上での正規順序積を $\circledcirc$ で表すとすると、それらの間の取り替えは

$$:\mathcal{O}:=\exp\left(\int d^2\mathbf{z_1}d^2\mathbf{z}_2\,\mathcal{G}_{\rm sub}{}^{I\bar{J}}(\mathbf{z}_1,\bar{\mathbf{z}}_1|\mathbf{z}_2,\bar{\mathbf{z}}_2)\frac{\delta}{\delta\mathbf{Z}^I(\mathbf{z}_1,\bar{\mathbf{z}}_1)}\frac{\delta}{\delta\bar{\mathbf{Z}}^{\bar{J}}(\mathbf{z}_2,\bar{\mathbf{z}}_2)}\right)\circledcirc\mathcal{O}\circledcirc$$

でできる。ここで $\mathcal{G}_{\rm sub}{}^{I\bar{J}}(\mathbf{z}_1,\bar{\mathbf{z}}_1|\mathbf{z}_2,\bar{\mathbf{z}}_2)=\mathcal{G}^{I\bar{J}}(\mathbf{z}_1,\bar{\mathbf{z}}_1|\mathbf{z}_2,\bar{\mathbf{z}}_2)-\mathbf{G}^{I\bar{J}}(\mathbf{z}_1,\bar{\mathbf{z}}_1|\mathbf{z}_2,\bar{\mathbf{z}}_2)$ であり、$\mathbf{G}^{I\bar{J}}(\mathbf{z}_1,\bar{\mathbf{z}}_1|\mathbf{z}_2,\bar{\mathbf{z}}_2)$ は背景定数 B 場がある場合の $SL(2,R)$ 真空上で定義された 2 点関数である。

この renormal ordering は振幅の計算において重要な役割を果たす。つまり、これによって twist & spin 場と他の場との相関を評価することができ、またこれによって生じる因子が最終的に D-brane の形状因子に寄与することになる。

spectrum – p-p' string spectrum には非可換低エネルギー極限 (Seiberg-Witten limit [6]) のもとで生き残るものと、そうでないもの、つまり $m^2\sim O(1)/\alpha'$ で decouple するものがある。前者は例えば D0-D2 string の場合だと

$$\bar{b}_{-1/2+\nu}|\sigma,s\rangle_{NS},\quad b_{-1/2-\nu}|\sigma,s\rangle_{NS},\quad b^i_{-1/2}|\sigma,s\rangle_{NS},\quad |\sigma,S\rangle_R\quad\text{and}\quad d_{-\nu}|\sigma,S\rangle_R.$$

これらは非可換低エネルギー極限のもとでそれぞれ次の有限の質量をもつ。

$$m^2=-\frac{1}{\theta},\quad\frac{3}{\theta},\quad\frac{1}{\theta},\quad 0\quad\text{and}\quad\frac{1}{2\theta}$$

さらに、これらに任意個数 n の bosonic mode $(\alpha_{-\nu})^n$ で励起したものは $n/2\theta$ だけエネルギーを稼ぐがそれでも有限の質量にとどまる。結局、無限個の有限質量状態が存在することになる。これらの無限個の有限質量状態の起源は次のようにみることができる。

bosonic 座標のモード展開は非可換極限の下で

$$Z(z,\bar{z})=\frac{\hat{z}}{\pi}\sigma+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq0}\frac{\alpha_n}{n}\left(z^{-n}-\bar{z}^{-n}\right),\ \bar{Z}(z,\bar{z})=\frac{\hat{\bar{z}}}{\pi}\sigma+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq0}\frac{\bar{\alpha}_m}{m}\left(z^{-m}-\bar{z}^{-m}\right)$$

となる。ここでゼロモードが $(\hat{z},\hat{\bar{z}})=\sqrt{2\pi^2\alpha'}(\alpha_{-\nu},\bar{\alpha}_\nu)$ なる非可換演算子になっている。これは 2 つの D0-brane の間に張った弦のモード展開とみなすことができる。一方の D0-brane (もともとの D0-brane) は原点にあって、もう一方の (D2-brane 起源の) D0-brane の「座標」が非可換演算子 $(\hat{z},\hat{\bar{z}})$ によって与えられている。これらの間の交換関係は

$$[\hat{z},\hat{\bar{z}}]=-2\pi^2\alpha'\nu/\epsilon=-\theta.$$

上に見た無限個の有限質量状態はこのモードによって励起されたものである。

3 N-point 散乱振幅

今我々が関心のあるのは、N-2 個の p'-p' massless gauge 場と 2 個の p-p' tachyon (正確には p-p' tachyon と p'-p tachyon) の散乱過程に対する N-point disc amplitude である。

N 点振幅

$$A_N \sim \int \frac{\prod_{a=1}^{N} d\xi_a d\theta_a}{V_{sckv}} \langle 0|V_{\bar{T}}(2) \prod_{c=3}^{N} V_{vec}(c) V_T(1)|0\rangle$$

は次の処方箋で評価できる。

- p-p' tachyon の vertex operator には twist & spin 場が含まれる。そこで twist & spin 場を SL(2,R) 真空におしつけて oscillator 真空にする。

$$\langle 0|V_{\bar{T}} \cdots V_T|0\rangle \to \langle \sigma, s| \cdots |\sigma, s\rangle$$

- 各 vector vertex を renormal ordering する　　: : → ⋮ ⋮
- 2 点関数 $\mathcal{G}^{I\bar{J}}(\mathbf{z}_1, \bar{\mathbf{z}}_1; \mathbf{z}_2, \bar{\mathbf{z}}_2)$ でもって評価する。

これで N 点振幅の積分表示が得られることになるが、その具体的な表式と詳細は文献 [2] を参照してもらうとして、ここでは 3 点振幅を書くことにする。

$$A_3 = \frac{g_o(2\pi)^{p+1}}{\sqrt{2\alpha'}} \prod_{\mu=0}^{p} \delta\left(\sum_{a=1}^{3} k_a^\mu\right) \left\{ \sum_{\mu=0}^{p} (k_{2\mu} - k_{1\mu}) \zeta_3^\mu - i \sum_{m,n=p+1}^{p'} k_{3m} J^{mn} \zeta_{3n} \right\} e^{\mathcal{C}(k_{3m};\nu)} e^{\frac{i}{2}\theta^{ij} k_{1i} k_{2j}} .$$

ここで $J^{mn} = \bigoplus_{p+1}^{p'} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ であり、また

$$\exp \mathcal{C}(k;\nu) = \exp\left[\alpha' \kappa\bar{\kappa} \left\{ \gamma + \frac{1}{2}(\psi(\nu) + \psi(1-\nu)) \right\}\right]$$

は renormal ordering の結果現れる gaussian damping factor で、Dp-brane の形状因子と同定される量である。この因子は非可換低エネルギー極限のもとで

$$\exp \mathcal{C}(k;\nu) \to \exp(-\frac{\theta}{4}\mathbf{k}^2)$$

となる。これから、非可換低エネルギー極限では Dp-brane は大きさが $\sqrt{\theta}$ の gaussian profile をもつことが結論される。非可換場の理論で D-brane が同じく gaussian profile をもった非可換ソリトンとして表されることに対応している。

低エネルギー有効理論 –

次の低エネルギー有効理論が弦の散乱振幅を再現することを示せる [3]。

$$S = -\frac{1}{g_{YM}^2} \int d^{p'+1}x \left[D_\mu \Phi^\dagger * D^\mu \Phi + m^2 \Phi^\dagger * \Phi + \frac{1}{2} \Phi^\dagger * \Phi * F_{mn} J^{mn} + \frac{1}{4} F_{MN} * F^{MN} \right]$$

ここで、$\mu = 0, \ldots, p, \quad m, n = p+1, \ldots, p', \quad M, N = 0, \ldots, p'.$

4 GMS scalar soliton との関係

これまでは p-p' string としては最低エネルギー状態を外線に考えていたが、p-p' string の spectrum には非可換低エネルギー極限で生き残る無限個の有限質量状態があった。では一般に外線としてｎ番目の励起状態を考えればどうなるであろうか？　簡単のため D0-D2 brane 系を bosonic string で考えることにして、かつ probe string として D2-D2 tachyon を考えることにする [7]。３点振幅は

$$S(T;t;\bar{T}) = \frac{1}{\alpha' g_o^2}\langle cV_{02}(x_1)cV_{22}(x_2)cV_{20}(x_3)\rangle$$

であるが、Hilbert space formalism では

$$S = \frac{g_o}{\alpha'}2\pi i\delta(\sum_{i=1}^{3}k_i^0)\langle\langle n| : e^{i\kappa\hat{z}+i\bar{\kappa}\hat{\bar{z}}} : |n\rangle\rangle.$$

ここで $|n\rangle\rangle = \hat{z}^n|\sigma\rangle/\sqrt{n!}$ である。前と同じく renormal ordering によって

$$\langle\langle n| : e^{i\kappa\hat{z}+i\bar{\kappa}\hat{\bar{z}}} : |n\rangle\rangle = e^{-\mathbf{k}^2/4}\langle\langle n|\circ e^{i\kappa\hat{z}+i\bar{\kappa}\hat{\bar{z}}}\circ|n\rangle\rangle = e^{-\mathbf{k}^2/4}L_n(\frac{\mathbf{k}^2}{2})$$

と評価できる。L_n は n-th Laguerre polynomial である。

結局、散乱振幅は

$$S = \frac{g_o}{\alpha'}2\pi i\delta(\sum_{i=1}^{3}k_i^0)e^{-\mathbf{k}^2/4}L_n(\frac{\mathbf{k}^2}{2})$$

となって D0-brane の形状因子が得られた。これの Fourier 変換は

$$F.T[S] = 4\pi(-)^n e^{-r^2}L_n(2r^2).$$

これは GMS 非可換ソリトン解にほかならない。

参考文献

[1] B. Chen, H. Itoyama, T. Matsuo, and K. Murakami, Nucl. Phys. **B**576(2000)177.

[2] B. Chen, H. Itoyama, T. Matsuo, and K. Murakami, Nucl. Phys. **B**593(2001)505.

[3] B. Chen, H. Itoyama, T. Matsuo, and K. Murakami, Prog. Theor. Phys. **105**(2001) to appear.

[4] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP **0005** (2000) 020.

[5] M. Aganagic, R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, hep-th/0009142.

[6] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032.

[7] K. Murakami, work in progress.

Noncommutative Open String (NCOS) and OM Theory

東京大学理学部　寺嶋 靖治

E-mail: seiji@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

最近発見された重力を含まない弦理論である，Noncommutative Open String (NCOS) とその M 理論的な対応物である Open Membrane(OM) 理論について review します．さらに little string theory と関係している Open D-brane theory (OD) と OM 理論等との関係についても述べます．また，弦理論である NCOS と場の理論である非可換空間上のゲージ理論の間の S 双対性の，OM 理論のトーラス上へのコンパクト化を使った導出を紹介します．

1　導入

弦理論は，重力を必然的に理論に含むことが議論されて以来，多くの人たちによって研究されてきました．これは，重力と量子論を無矛盾に含む理論の有力な候補が，弦理論以外にないことが主な理由です．しかし，弦理論は，標準理論をも含む可能性を持った理論体系であり，重力以外にも，非可換 (non-Abelian) ゲージ理論などをその中に含んでいます．実際，最近の弦理論の発展によって，重力をゲージ理論から引き離す (decoupling) 極限を考える事によって，ゲージ理論や重力について，様々な事がわかるようになりました．ここで，重力を引き離すといったのは，ゲージ理論で記述される粒子との相互作用をなくすという意味です．重力を考えなくて良いと理論が非常に扱いやすくなるので，この極限は弦理論を解析する上で非常に重要で，AdS/CFT 対応や MQCD，Calabi-Yau 多様体への超弦理論のコンパクト化などの多くの応用例があります．

ここで，最も簡単な例である、IIB 型超弦理論における D3 ブレーンの場合を考えてみましょう．この場合に理論に存在する粒子は二種類あります．一種類目は，質量ゼロの重力子と，n を正の正数として n/l_s 程度の質量[1]を持つ無限個の粒子達であり，これらは閉弦の振動に由来していて 10 次元中を動けます．もう一種類は、開弦の振動に由来する D3 ブレーン中 (4 次元) に束縛された粒子達で，質量ゼロの $U(1)$ ゲージ粒子と n/l_s 程度の質量を持つ無限個の粒子達です．ここで，$l_s \to 0$ の極限を考えます．すると，質量を持った粒子達は，無限に重くなるので，質量ゼロの重力子とゲージ粒子達だけの理論が得られます．さらに，重力の作用が

$$S \sim \frac{1}{g_s^2\, l_s^8} \int \mathcal{R} + \cdots , \tag{1.1}$$

であることを思い出すと，重力子は相互作用が全くなくなって，実質的に，4 次元 $U(1)$ ゲージ理論が得られます．

次に、この D3 ブレーンの $U(1)$ ゲージ場に真空期待値を持たすことを考えます．まず，適当な Lorentz 変換で，磁場をいれた場合，つまり，$F_{ij} \neq 0$ $(i\ ,j \neq 0)$ の場合は，D3 ブレーン上の理論は非可換 (noncommutative) 空間上のゲージ理論となることが知られています [1]．この場合の重力を落とす極限は，g_{ij} をメトリックとして，

$$\alpha' \sim \epsilon, \quad g_{ij} \sim \epsilon^2, \quad F_{ij} = \text{finite} \tag{1.2}$$

として $\epsilon \to 0$ で与えられ，Seiberg-Witten 極限として知られています [1]．

[1]ここで，$\alpha' = l_s^2$ をスロープパラメータとしています．弦の張力は $1/l_s^2$ に比例します．

それでは，磁場でなく電場を外場としていれた場合，つまり，$F_{0i} \neq 0$ $(i \neq 0)$ の場合はどうなるのでしょうか? 実は, この時には，Seiberg-Witten 極限，つまり，場の理論への極限はとれないけれども，重力を含む閉弦を開弦と相互作用させなくすることができることが示されました [2] [3]．つまり，従来までの予想には反して，重力をふくまない (開) 弦の理論が存在することになります．これは，NCOS (NonCommutative Open String) と呼ばれます．さらに驚くべき事に，D3 ブレーン上の理論である 4 次元の NCOS 理論は，4 次元 noncommutative ゲージ理論と S 双対性の意味で等価なことが示されました [3]．また，D4 ブレーン上の 5 次元の NCOS_5[2]の強結合極限は，6 次元の OM 理論と呼ばれる開膜 (Open Membrane) の理論と等価な事が議論されました [4] [5]．この OM 理論は M 理論中の M5 ブレーンの特殊な極限で定義されています．この OM 理論をトーラスにコンパクト化する事を考えると、トーラスのモジュラ-変換 (今の場合は，11 次元の回転対称性) で，理論は不変になっています．この事を使って，上で述べた S 双対性を示すことができます [6]．

以下，第 2 節で Noncommuative Open String と OM 理論の review をした後、第 3 節で論文 [6] の紹介をします．

2 Noncommuative Open String と OM 理論

まず，導入で述べた非可換 (noncommutative) 空間上のゲージ理論への極限である，Seiberg-Witten 極限を考えます．これは D ブレーン上に磁場を入れましたが，メトリックを座標変換 $x^i \to x'^i/\epsilon$ で $g_{ij} = \epsilon^2 \to g'_{ij} = \delta_{ij}$ と標準の形にします．すると，この普通の座標系では，磁場は $2\pi\alpha' B_{ij} \to 2\pi\alpha' B'_{ij} \sim 1/\epsilon$ となり，Seiberg-Witten 極限 $\epsilon \to 0$ は無限に強磁場を考えることを意味しています．

それでは，磁場の代わりに，電場を入れることを考えましょう．この時は，開弦の両端はそれぞれプラスとマイナスの電荷を持っていますので，電場中では両端の距離を縮める方向に一定の力が働きます．ここで，真っ直ぐな開弦を考えれば，この静電力は張力とは反対向の力となります．つまり，電場 F_{0i} が入っているとして，

$$\frac{1}{2\alpha'_{eff}} \equiv \frac{1}{\alpha'}\left(1 - 2\pi\alpha'|F_{0i}|\right), \tag{2.1}$$

と定義すると、開弦の有効張力は $T_{eff} \sim 1/\alpha'_{eff}$ で与えれます．弦の張力が負になると，開弦が真空から生成される方がエネルギー的に得になるので，系が不安定になります．したがって、Seiberg-Witten 極限に当たる電場を無限大にすることができないことがわかります．

それではこの場合は重力を落とすことはできないのでしょうか? そこで，電場を無限大にする代わりに，臨界値に近づけることを考えてみましょう．つまり，

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha' F_{0i} &= 1 - \frac{\epsilon}{2} \\ \alpha' &= \epsilon\, \alpha'_{eff}, \\ g_{string} &= G_o^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

で $\epsilon \to 0$ という極限を考えます．ここで，先ほど定義した開弦のスロープパラメーター α'_{eff} と開弦の有効相互作用定数 G_o [1] を有限に止めておきます．すると，閉弦の張力 $1/\alpha'$ は無限大になり，

[2]以下、NCOS_p で p 次元の NCOS 理論を表す．

そこから来る粒子は重力も含めて開弦と相互作用をなくします．しかし，開弦の張力は $1/\alpha'_{eff}$ という有限量で与えられているので，開弦に付随する粒子は，質量ゼロのゲージ粒子に加えて，質量 n を正の正数として $n/\sqrt{\alpha'_{eff}}$ 程度の質量がある無限個の粒子も存在します．これにより，重力を含まない，開弦のみの弦理論を得ることができました．これを Noncommuative Open String (NCOS) と呼びます．この理論のパラメーターは α'_{eff}, G_o の 2 つです．NCOS 理論は背景にある電場の効果で非可換になっていますが、その非可換性 θ^{01} は $\theta^{01} = 2\pi\alpha'_{eff}$ と開弦のスロープパラメーターと関係がついてしまうので独立なパラメーターとはなりません．

次に，D4 ブレーンの場合，つまり，NCOS_5 を考えます．この時、IIA 型超弦理論中の D4 ブレーンと M 理論中の M5 ブレーンの等価性を思い出すと、NCOS_5 の相互作用定数無限大の極限 $(G_o \to \infty)$ で OM 理論 (Open Membrane) と呼ばれる 6 次元空間である M5 ブレーン上の理論を定義する事ができます．この OM 理論は，元の NCOS が重力を含む閉弦とは相互作用していなかったので，11 次元中の閉膜 (closed membrane) とは相互作用していないと予想されます．これは，以下のように直接 M5 ブレーン上の理論の極限を取ることでも得ることができます．まず，M 理論中の 012345 方向に広がった M5 ブレーンを考え，その上の反対称 2 階テンソルゲージ場の，場の強さ $H_{\mu\nu\rho}$ を外場として入れます．そして，NCOS の時と同じように臨界値に持っていく極限，

$$\begin{aligned} \frac{H_{012}}{M_p^3} &= \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right), \\ M_p^3 &= \frac{2}{\epsilon} M_{eff}^3, \end{aligned} \tag{2.3}$$

で $\epsilon \to 0$ を取ります．ここで，M_p は 11 次元の plank 質量であり，開膜の有効張力になる M_{eff}^3 は有限に止めておきます．ここで，注意したいのは、実は、場の強さ $H_{\mu\nu\rho}$ はすべてが独立ではなくて，だいたい 6 次元の Hodge dual の意味で self-dual という，非線型 self-duality と呼ばれる constraint が要求されます [7]．今の H_{012} が定数の場合には、

$$E \equiv \frac{H_{012}}{M_p^3},\ B \equiv \frac{H_{345}}{M_p^3}, \tag{2.4}$$

として，

$$1 - B = \left(1 - \frac{B}{2}\frac{1+E}{1-E}\right)^2 , \tag{2.5}$$

で与えられるので，極限 (2.3) は $B \sim \epsilon + \cdots$ も意味します．

この OM 理論を S^1 にコンパクト化するとどうなるかを考えます．つまり，M 理論を S^1 にコンパクト化したものは IIA 型超弦理論なので，超弦理論でどのように記述されるかを考えるという事です．ここでは，二つのコンパクト化の仕方を考えます．

一つめは，x^2 方向に半径 R_2 でコンパクト化するもので，"electric" S^1 へのコンパクト化と呼びます．この時は，M5 ブレーンでの記述から D4 ブレーンへの記述に移るときに，D4 ブレーン上のゲージ場の場の強さが

$$F_{01} = \frac{1}{2\pi} R_2 H_{012} = \frac{1}{2\pi\alpha'_2}\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \tag{2.6}$$

で与えられることを使ってやれば，これは NCOS_5 と等価になり，その二つのパラメーターは，

$$\alpha'_{eff} = \frac{1}{2R_2 M_{eff}^3}, \quad G_o^2 = \sqrt{2}(R_2 M_{eff})^{\frac{3}{2}} \tag{2.7}$$

で与えられます．この関係はコンパクト化されたM理論とIIA型超弦理論のパラメーターの関係，

$$\alpha' = \frac{1}{RM_p^3}, \quad g_{string} = (RM_p)^{\frac{3}{2}} \tag{2.8}$$

に非常に類似していることに注意してください．

もう一つは，x^3 方向に半径 R_3 でコンパクト化するもので，"magnetic" S^1 へのコンパクト化と呼びます．この時は，D4 ブレーン上での記述では，ゲージ場の，場の強さが

$$F_{45} = \frac{1}{2\pi} R_3 H_{345} \tag{2.9}$$

で与えられることを使ってやれば，これは 5 次元の非可換空間上のゲージ理論と等価になります．ただし，この時は

$$R_3 = L_2\sqrt{\epsilon}, \tag{2.10}$$

として，L_2 を有限に保つことが必要であることが，非可換空間上のゲージ理論のパラメーターである非可換性 θ と Yang-Mills 結合定数が

$$\theta = \frac{\pi}{L_3 M_{eff}^3}, \quad g_{YM}^2 = 4\pi^2 L_3 \tag{2.11}$$

と計算されることからわかります．

このように NCOS_p と OM 理論という双対性によってお互いに関係した重力を含まない理論が得られたわけですが，これらと双対性によってつながる違った種類の理論があります．これは，まず，NCOS_6 を考えます．この時ゲージ場の代わりに，それと等価な NSNS B 場の真空期待値を入れていると考えます．. これは IIB 型超弦理論中の D5 ブレーン上の理論ですが、これの IIB 型超弦理論の S 双対性を取ると，NS5 ブレーン上の理論で RR 2 形式 $C_{01} \neq 0$ であるようなものに移ります．この理論で有限の張力を持っているのは端のある D1 ブレーンなので，この理論を open D1-brane theory(OD_1) と呼びます [8] [4]．

さらに，IIB 型超弦理論中の NS5 ブレーン中には非摂動論的な状態として，閉弦が存在します．実際，この上の有効理論は 6 次元の超対称ゲージ理論になりますが，ゲージ理論にはインスタントンが存在します．これは 4 次元分だけ局所化した物体なので，6 次元中のインスタントンは 2 次元的，つまり，弦となります．このインスタントン的弦の張力を評価してみましょう．まず，4 次元ではインスタントンの作用は g_{YM} をゲージ理論の結合定数として，$\exp(-8\pi^2/g_{YM}^2)$ で与えられることを思い出すと，6 次元では $T_{inst} \sim 1/g_{YM}^2$ がインスタントン的弦の張力であることがわかります．さらに，IIB 型超弦理論の S 双対，$g_{string} \to \tilde{g}_{string} = 1/g_{string}$, $\alpha' \to \tilde{\alpha}' = \alpha' g_{string}$ によって，NS5 ブレーンは D5 ブレーンに移るので，その上の低エネルギー有効ゲージ理論の相互作用定数は $1/g_{YM}^2 \equiv 1/(\tilde{g}_{string}\tilde{\alpha}') = 1/\alpha'$ となることがわかります．つまり，6 次元の NS5 ブレーン中のインスタントン的弦は，張力として $1/\alpha'$ を持つことがわかります．背景として何も入れない時には，α' を止めて，相互作用をなくす極限 $g_{string} \to 0$ を取れば，元々ある閉弦と NS5 ブレーンは相互作用しなくなります．この理論は IIB little string theory と呼ばれます．

背景場が入っている OD_1 の場合でも，この非摂動論的な状態としてのインスタントン的弦は存在するはずです．この時，インスタントン的弦の張力 α'_{eff} を有限に止めながら，端のある D1 ブレーンの結合定数 G をゼロにする極限をとれば，little string theory を得ることができるはずです．

しかし，little string theory は 6 次元の Lorentz 対称性を持っていますが，OD_1 はそれを破っています．この破れの大きさは，等価な NCOS_6 で見ると，非可換パラメーター $\theta^{12} \sim \alpha'_{eff} G^2$ で与えられていると思えますが，実際，この極限では $\theta \to 0$ となっています．このようにして，little string theory は，OD 理論のモジュライ空間のある極限であることが議論されるので，OM,NCOS,OD 理論の仲間であることがわかりました．

さらに，この理論を NS5 ブレーンにそった方向をコンパクト化して T 双対をとり、T 双対を取った後の S^1 の半径を無限大に飛ばせば 6 次元の NS5 ブレーン上の理論で，端のある Dp ブレーンが自由度を担っている理論 (OD_p) が得られます[3]．また，NCOS_p の時はそれにそった方向の T 双対によって NCOS_{p-1} が得られます [6] [4]．この様々な NCOS，OD，OM 理論の間には様々な S 双対の関係があります [4]．また，S 双対によって背景場のない曲がったブレーンになる場合もありますが，ここでは紙面の都合上割愛することにします．

3　OM 理論のトーラスコンパクト化と NCOS と NCYM の間の S 双対性

この章では，OM 理論をトーラスにコンパクト化する事によって，NCOS_4 と 4 次元 noncommutative ゲージ理論との間の S 双対性を示します [6] [5]．まず，OM 理論は，012345 方向に広がった M5 ブレーン上の理論で，$H_{012} \neq 0$, $H_{345} \neq 0$ とします．これを，2 方向を半径 R の円に，3 方向を半径 $\sqrt{\epsilon}L$ の円にトーラスコンパクト化します．すると，この理論は，11 次元方向を 2 方向だと思うか 3 方向だと思うかによって二つの見方があります．

まず，2 方向 (”electric”) を 11 次元方向だと思いましょう．すると，先ほどの議論から，このトーラスコンパクト化された OM 理論は，NCOS_5 を半径 $\sqrt{\epsilon}L$ の円にコンパクト化したものと等価なことがわかります．ここで，この円は電場の入っていない方向になっています．さらに，この円にそった T 双対を取ることにより，NCOS_4 を得ることができます．ただし，この時，NCOS と垂直な一つの方向はコンパクト化されており，しかも，そこに巻き付いた D1 ブレーンは有限の質量 $1/R$ を持つことがわかるので、$R \to 0$ 極限を取ってやります．これによって，結合定数 $G_o^2 = R/L$ の NCOS_4 が得られます．(R/L を有限に保つように，$L \to 0$ 極限も取るとします．)

次に 3 方向 (”magnetic”) を 11 次元方向だと思い直してみましょう．こう思うと、今度は，この トーラスコンパクト化された OM 理論は，5 次元の非可換空間上のゲージ理論を半径 R の円にコンパクト化したものと等価なことがわかります．さらにこの円の方向に T 双対を取ると，4 次元の非可換空間上のゲージ理論が得られます．この時の Yang-Mills 結合定数は $g_{YM}^2 = L/R$ であることが簡単な計算によりわかります．

今，一つの理論の二つの見方があったわけですが、もちろん，この二つは等価なはずです．つまり，トーラスコンパクト化された OM 理論を考えることによって，4 次元の非可換空間上のゲージ理論と 4 次元の NCOS の間の等価性を示すことができたことになります．特に、結合定数の関係は $G_o = 1/g_{YM}$ であったので，この等価性は S 双対であることがわかります．この S 双対の導出は非常に直感的，かつ，簡明です．

ここで，R と L の入れ替えが S 双対に対応していることに注意してください．これは，元々の IIB 型超弦理論の S 双対を与える R と $\sqrt{\epsilon}L$ の入れ替えとは異なります．また，4 次元の理論では全く違ったものであった電場 F_{01} と磁場 F_{34} が，OM 理論では一つの非線型 self-dual 3 階反対称

[3] NCOS 理論の時と違って OD 理論は常に 6 次元であり，OD_p の添字 p は理論の次元でなくその上の軽い開膜の次元 $(p+1)$ を表すことに注意．

テンソル $H_{\mu\nu\rho}$ に統合されています．そして，この非線形性が 4 次元での電場と磁場の振る舞いの違い，つまり，NCOS 理論を得られるか，ゲージ理論を得られるかの違いを与えています．

4 まとめ

これまで議論してきたように，超弦理論，または M 理論中には，6 次元以下の重力を含まない理論の仲間が存在していることがわかりました．これらは，互いに S 双対，T 双対，コンパクト化などによって関係づいている，開弦理論，非可換ゲージ理論，開膜理論などです．このような理論の集合は OM web と呼ばれています．弦理論を理解する上で，そこに含まれる重力は，背景の幾何の揺らぎを考慮にいれなければならないなど，非常にやっかいなものです．この意味で，この重力を含まない弦理論は，弦理論特有の現象を，重力の難しさとは引き離して理解する上で重要になる可能性があると言えます．実際、Hagedorn 転移などが議論おり [9]，さらなる発展が期待されます．

謝辞

この文章の第 3 節の内容は，東京大学理学部の川野さんとの共同研究の結果に基づいています．また、発表の機会を与えてくださった僕以外の世話人の方々や，実り多い議論で研究会を有意義なものにしてくださった参加者の皆さんにもこの場を借りて心より感謝いたします．

参考文献

[1] N. Seiberg and E. Witten, JHEP**9909** (1999) 032 [hep-th/9908142].

[2] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, new noncritical string theory," JHEP**0006** (2000) 021 [hep-th/0005040].

[3] R. Gopakumar, J. Maldacena, S. Minwalla and A. Strominger, JHEP**0006** (2000) 036 [hep-th/0005048].

[4] R. Gopakumar, S. Minwalla, N. Seiberg and A. Strominger, JHEP**0008** (2000) 008 [hep-th/0006062].

[5] E. Bergshoeff, D. S. Berman, J. P. van der Schaar and P. Sundell, Phys. Lett. B **492** (2000) 193 [hep-th/0006112].

[6] T. Kawano and S. Terashima, Phys. Lett. B **495** (2000) 207 [hep-th/0006225].

[7] P. S. Howe, E. Sezgin and P. C. West, Phys. Lett. B **400** (1997) 255 [hep-th/9702111].

[8] T. Harmark, Nucl. Phys. B **593** (2001) 76 [hep-th/0007147].

[9] S. S. Gubser, S. Gukov, I. R. Klebanov, M. Rangamani and E. Witten, "The Hagedorn transition in non-commutative open string theory," hep-th/0009140.