M-Theory, Topological Strings and Large N Gauge Theory

Rajesh Gokapumar (Harvard) [1]

目 次

1 序論 **1**

2 位相的弦理論 (Closed String) **1**

2.1 トポロジカルツイスト 2

2.2 位相的シグマ模型 4

2.3 位相的弦理論の分配関数 7

3 M 理論による All Genus Answer **10**

3.1 超弦理論のコンパクト化との関連 11

3.2 M 理論による計算 14

4 位相的弦理論 (Open String) **22**

4.1 Chern-Simons ゲージ理論との関連 22

5 位相的弦理論における双対性 **26**

5.1 双対性の主張 27

5.2 双対性の証拠 32

6 まとめ **36**

[1] 秦泉寺 雅夫 (東大数理) · 那珂 通博 (東大理) 記
Appendix は講義録作成者により付け加えられたものである.

1 序論

この講義では最近の双対性のアイデアを用いることにより位相的弦理論について得ることのできた Vafa との共同研究の成果について議論したい. 特に重要な結果は次の 2 つのことである.

• closed string の位相的弦理論の分配関数の厳密な回答を M 理論の立場から与える [1].

• 位相的弦理論の枠内で AdS/CFT 対応で見られたような open string と closed string の双対性を提案する [2].

この主張を議論するために, 位相的弦理論の紹介を closed string および open string について与え, さらに M 理論や 'tHooft 展開などを順に紹介していくことにしたい.

そもそも位相的弦理論を調べる動機はどこにあるのだろうか? 位相的弦理論は弦理論の力学的特徴の多くを捨て去っているのであるが, 弦理論の多くの構造的特徴をよく反映しているために一般に弦理論を考えるためのよい toy model であると考えられる. 特にこれから示していくように, 位相的弦理論は D ブレインのようなものやさらには open string の理論と closed string の理論の間の双対性といった多くの興味深い特徴を備えている. したがって, 位相的弦理論は弦理論の驚くべき特徴をより易しい可解な立場で理解するための非常に有用な toy model であるといえよう. このような位相的弦理論によるアプローチから我々は通常の弦理論の基礎付けを与える機構を理解していきたいと考える. またこの意味において, 位相的弦理論は質的な特徴をよく反映したとても易しい非常に有用な可解模型として知られているイジング模型のような働きをすることが期待される. さらに位相的弦理論が実は Type II 超弦理論の非摂動的な様々な量をとらえることができるということも, もう一つの重要な動機となっている.

2 位相的弦理論 (Closed String)

この講義ではいわゆる $N = 2$ 位相的弦理論に焦点を絞る. これは出発点となる worldsheet の理論として 2 次元 $N = 2$ 超共形場の理論をとることにあたっており, その具体例としては $N = 2$ 非線形シグマ模型やビラソロミニマル系列などが知られている. ここではまず 2 次元 $N = 2$ 超共形場の理論にツイストと呼ばれる操作を施すが, ツイストした理論は文脈に応じて位相的シグマ模型, 位相的場の理論などと呼ばれている. 通常では共形場理論から始めて 2 次元重力に結合させることにより target space を伝播する弦理論を得ることができるが, ここでは 2 次元 $N = 2$ 超対称共形場の理論から出発しツイストをして 2 次元重力に結合させることにより $N = 2$ 位相的弦理論が得られる.

2.1 トポロジカルツイスト

$N=2$ 超対称性をもった 2 次元超共形場の理論はストレステンソル $T(z)$, 2 つのスーパーカレント $G^{\pm}(z)$, 及び $U(1)_R$ カレント $J(z)$ をもち, 各々コンフォーマルウエイト $2, 3/2, 1$ をもつ. このカレントたちの演算子積展開として $N=2$ 超共形場の理論が定義される. もちろん反正則部分もありその貼り合わせ方が物理的には重要であるが, 正則部分にのみ注目することにする. ここで, $T(z), G^{\pm}, J(z)$ を展開して得られるオペレータから定義される $N=2$ 超共形代数

$$
\begin{aligned}
[L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} && (2.1)\\
[L_n, J_m] &= -mJ_{n+m}, \quad [L_n, G^{\pm}_r] = \left(\frac{n}{2}-r\right)G^{\pm}_{n+r} && (2.2)\\
[J_n, J_m] &= \frac{c}{3}n\delta_{n+m,0}, \quad [J_n, G^{\pm}_r] = \pm G^{\pm}_{n+r} && (2.3)\\
\left\{G^{\pm}_r, G^{\mp}_s\right\} &= 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}, && (2.4)
\end{aligned}
$$

を考えよう. 但し c はセントラルチャージであり, r, s は NS セクターでは半整数, Ramond セクターでは整数をとる. また理論の各状態は $U(1)$ チャージ (J_0 の固有値) q とコンフォーマルウエイト (L_0 の固有値) h で特徴づけられる.

NS セクターにおいてカイラルプライマリ状態 $|\phi\rangle$ を

$$
G^{+}_{-1/2}|\phi\rangle = 0, \quad G^{-}_{n+1/2}|\phi\rangle = G^{+}_{n+1/2}|\phi\rangle = 0, \text{ for } n \geq 0, \tag{2.5}
$$

により定義するとカイラルプライマリ状態は $h=q/2$ を満たし, 逆に $h=q/2$ の状態がカイラルプライマリであることも示される. また反カイラル状態は $G^{-}_{-1/2}|\phi\rangle = 0$ で定義され, 反カイラルプライマリ状態は $h=-q/2$ を満たす. 全ての状態のノルムが正となるユニタリーな理論では $G^{+}_{-1/2} = (G^{-}_{1/2})^{\dagger}$ から $h \geq |q|/2$ となっている. カイラルプライマリ場 $\phi(z)$ は真空 $|0\rangle$ を用いて $|\phi\rangle = \phi(0)|0\rangle$ から定義されるが, カイラルプライマリ場同士の積 $(\phi\chi)(z) = \lim_{z\to w}\phi(z)\chi(w)$ は再びカイラルプライマリ場となるため, カイラルプライマリ場の集合には環構造を導入でき, カイラルリングが構成される [3]. 次に, Ramond セクターを考えると $h \geq c/24$ が示され, 特に等号は

$$
G^{+}_{0}|\phi\rangle = G^{-}_{0}|\phi\rangle = 0, \tag{2.6}
$$

の場合に成立し, これを満たす状態は Ramond セクターの基底状態と呼ばれる. もう一つ重要なことは, spectral flow と呼ばれる NS セクターから Ramond セクターへの連続的な変換が存在することである. これは $U(1)$ カレントのパラメータ η によるひねりとみなせ, そのとき生成子はシフトするが再び $N=2$ 超共形代数を生成することがわかる. 特に $\eta \in \mathbf{Z}+1/2$ のとき, spectral flow は NS セクターと Ramond セクターの間の変換を与え, NS セクターのカイラルプライマリ状態は $\eta = 1/2$ の spectral flow により Ramond セクターの基底状態と対応している.

位相的場の理論を導入するにはいわゆるツイストの操作を行い, ストレステンソルを新たに

$$T'(z) = T(z) \pm \frac{1}{2}\partial_z J(z), \tag{2.7}$$

と見直して理論を再構成すればよいことが知られている [4, 5]. このときもとの理論の $N = 2$ 超共形代数が $c = 0$ の代数に変化し, $U(1)$ カレントはアノマラスな保存則を満たす. これは background charge $\mp c/3$ をもつためである. worldsheet の立場からするとツイストは background のスピン接続に $U(1)$ カレントを結合させることに対応する. この新しいストレステンソルはやはりウエイト 2 をもつため, このツイストの操作は well-defined であると考えられる. 実はツイストには符号の取り方に自由度があり, $-$ がカイラルツイスト (c), $+$ が反カイラルツイスト (a) と呼ばれている. このストレステンソル T' で新しく再構成した理論では, 様々な場のウエイトが

$$h' = h \pm \frac{1}{2}q, \tag{2.8}$$

とシフトしている. 但し h はもとの理論の場ないしオペレーターのウエイトで, q はその $U(1)$ チャージである. このとき新しいウエイトをみると, 通常の bosonic string の理論で良く知られた特徴が存在する. ここではカイラルツイストを考えることにすると G^+, G^- はそれぞれウエイト 1, 2 をもつが, このとき

$$Q = \int G^+(z)dz, \qquad b = \int G^-(z)dz, \tag{2.9}$$

を考えよう. Q はスカラーとなるが, これは反交換するフェルミオン的な統計性をもったスカラーであり, 実際 $Q^2 = 0$ となることがもとの G^+ オペレーターのゼロモードの代数から確かめることができ, これは bosonic string の理論において BRST オペレーターに対応するものになっている. 一方, b は bosonic string の理論においてゴースト場に対応するものにあたる. このとき BRST オペレーター Q とゴースト b は,

$$\{Q, b\} = H, \tag{2.10}$$

を満たしている. 但し H はハミルトニアンである. さらに J は bosonic string の理論でのゴーストカレントに対応するため, このアナロジーは有用で 2 次元重力に結合させたときに特に重要となる. さらにもう一つ注意しておきたいことは, 新しく取り直したストレステンソルが

$$T' = \{Q, \ldots\}, \tag{2.11}$$

と Q-exact な場になっているため, 理論の相関関数が 2 次元の計量に依存しないと期待されることである.

ツイストは拡張された超対称性をもった理論からこのような手続きで実行されるのだが, ツイストの目的は何だろうか? まず良いことは, この場の理論の Q 不変な状態に truncate すること

により無矛盾な場の理論を定義できることである. 通常のゲージ理論では BRST チャージ Q があって, ゲージ不変なオブザーバブルが Q コホモロジーにあたった. 今もとの理論には BRST オペレーターとして truncate されうるスカラー BRST オペレーターは存在しないため, ツイストにより Q コホモロジーを考えることにより, そのコホモロジー類としてオブザーバブルの空間を定義できるのである. このとき $N = 2$ 超共形場の理論のカイラルプライマリ場が $h' = 0$ に対応し, G^+ のゼロモードのコホモロジーすなわち Q コホモロジーの元となる. さらにこれは $N = 2$ 超共形場の理論の Ramond セクターの基底状態に対応する. つまり, Q コホモロジーをとることは理論を無矛盾に共形場理論のカイラルプライマリ状態へと truncate することにあたり, カイラルプライマリ場はそれ自身で閉じた OPE をつくるのであったから, truncation は無矛盾であるといえる. 繰り返すと, BRST オペレータを構成するには反交換するフェルミオン的な統計性をもったスカラー場が必要なため, もとの理論ではそれが出来ないのだが, ツイストをすることで BRST オペレータの定義が可能となるのである. また通常のゲージ理論において曲がった空間上で超対称性を実現するためにツイストが必要であったように, 任意のリーマン面上で理論を定義するためにスカラーの BRST オペレーターが必要となるという事情もある.

2.2 位相的シグマ模型

ここでは具体例として $N = 2$ 非線形シグマ模型を扱う. よく知られたように, target space として ケーラー多様体をもつ非線形シグマ模型は worldsheet 上で $N = 2$ 超対称性をもつため, ツイストを施すことができる [6].

$N = 2$ 非線形シグマ模型は worldsheet としてのリーマン面 Σ からケーラー多様体 M への写像 $X : \Sigma \to M$ により定義され, ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{2}{\alpha'} \int_\Sigma d^2z \left(\frac{1}{2} g_{IJ} \partial_z X^I \partial_{\bar{z}} X^J + i\psi_-^i D_+ \psi_-^{\bar{i}} g_{i\bar{i}} + i\psi_+^{\bar{i}} D_- \psi_+^i g_{\bar{i}i} + R_{i\bar{i}j\bar{j}} \psi_+^i \psi_+^{\bar{i}} \psi_-^j \psi_-^{\bar{j}} \right), \quad (2.12)$$

と与えられる. 但し,

$$D_{\bar{z}} \psi_+^i = \partial_{\bar{z}} \psi_+^i + \frac{\partial X^j}{\partial \bar{z}} \Gamma_{jk}^i \psi_+^k, \quad (2.13)$$

で, Γ_{JK}^I は M 上のアフィン接続である. また, R_{IJKL} は M のリーマン曲率テンソルである. まず, $X^I (I = 1, \ldots, \dim_{\mathbf{R}} M)$ は target space の座標で, その正則, 反正則部分は $X^i, X^{\bar{j}} (i, \bar{j} = 1, \ldots, \dim_{\mathbf{C}} M)$ である. フェルミオン $\psi^i, \psi^{\bar{i}}$ は接空間 $T^{(1,0)}M, T^{(0,1)}M$ に値を取る. また, $\pm$ は worldsheet から見た chirality を表し, $\psi_\pm$ は worldsheet 上のスピン $\pm 1/2$ をもつ. このシグマ模型の 1 ループのベータ関数は M のリッチテンソルに比例するため, 特に M が Calabi-Yau 多様体の場合にはこのシグマ模型は $N = 2$ 超共形場の理論と見なせる.

このシグマ模型にカイラルツイストを施そう. すると ψ_+^i は worldsheet 上のスカラーとなる

(target space 上ではベクトル場である). 一方 $\psi_+^{\bar{i}}$ は反正則な $U(1)_R$ チャージをもつため, ツイストにより worldsheet 上の $(1,0)$ 形式となる. $\psi_-^i, \psi_-^{\bar{i}}$ についても同様である. ここで非線形シグマ模型は z のみに依存する右巻成分と $\bar{z}$ のみに依存する左巻成分をもつため, ツイストとしては 4 つ存在するように見えるのだが単に再定義により実は独立なものは 2 つしか存在しない.

$$(c,c) \sim (a,a) \quad A \text{ model}, \qquad (c,a) \sim (a,c) \quad B \text{ model}. \tag{2.14}$$

この 2 つはそれぞれ Type IIA, Type IIB 超弦理論のコンパクト化で生ずることから, A モデル, B モデルの位相的弦理論と呼ばれるが, この講義では A モデルが中心となる. カイラルツイストの後にフェルミオン場が異なるスピンをもつことに注目して notation を

$$(\psi_+^i, \psi_-^{\bar{i}}) \to (\chi^i, \chi^{\bar{i}}) : \text{scalar}, \qquad (\psi_-^i, \psi_+^{\bar{i}}) \to (\psi_{\bar{z}}^i, \psi_z^{\bar{i}}) : 1 \text{ form}, \tag{2.15}$$

と変更すると, ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{2}{\alpha'} \int_\Sigma d^2z \left(\frac{1}{2} g_{IJ} \partial_z X^I \partial_{\bar{z}} X^J + i\psi_{\bar{z}}^i D_z \chi^{\bar{i}} g_{\bar{i}i} + i\psi_z^{\bar{i}} D_{\bar{z}} \chi^i g_{\bar{i}i} + R_{i\bar{i}j\bar{j}} \psi_{\bar{z}}^i \psi_z^{\bar{i}} \chi^j \chi^{\bar{j}} \right), \tag{2.16}$$

と書き換えられる. また各場 Λ の BRST 変換性は反交換するパラメータを α として $\delta\Lambda = -i\alpha\{Q, \Lambda\}$ と定義され, 具体的には次のようになっている.

$$\delta X^I = i\alpha\chi^I, \qquad \delta\chi^I = 0, \qquad \delta\psi_z^{\bar{i}} = -\alpha\partial_z X^{\bar{i}} - i\alpha\chi^{\bar{j}} \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{m}} \psi_z^{\bar{m}}, \qquad \delta\psi_{\bar{z}}^i = -\alpha\partial_{\bar{z}} X^i - i\alpha\chi^j \Gamma^i_{jm} \psi_{\bar{z}}^m. \tag{2.17}$$

このように書き換えて何がよいのかと言えば, スカラーの運動項は同じだが, フェルミオンの方は変更を受け, worldsheet 上の共変微分であった D オペレーターが通常の微分のように見なせることが明確になるためである.

実はこのツイストした理論のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\alpha'} \int_\Sigma d^2z \{Q, V\} + \frac{1}{\alpha'} \int_\Sigma \Phi^*(k), \tag{2.18}$$

$$V = g_{\bar{i}j} (\psi_z^{\bar{i}} \partial_{\bar{z}} X^j + \partial_z X^{\bar{i}} \psi_{\bar{z}}^j), \tag{2.19}$$

$$\int_\Sigma \Phi^*(k) = \int_\Sigma d^2z (\partial_z X^i \partial_{\bar{z}} X^{\bar{j}} g_{i\bar{j}} + \partial_{\bar{z}} X^i \partial_z X^{\bar{j}} g_{i\bar{j}}), \tag{2.20}$$

と 2 つの部分に分解することができる. まず第 1 項は V も簡単に書けるが, $\{Q, \ldots\}$ と Q-exact になっていることが重要である. 一方第 2 項は target space 上のケーラー形式 $k = -ig_{i\bar{j}} dz^i dz^{\bar{j}}$ の worldsheet への引き戻しであり,

$$\int_\Sigma \Phi^*(k) = 2\pi\alpha' \sum_i n_i t_i, \tag{2.21}$$

というように引き戻している target space 内のサイクルのコホモロジー類のみに依存するトポロジカルな項である. 但し $\sum_i n_i t_i$ は target space 内の $\Phi(\Sigma)$ に対応した 2 サイクル上でのケーラー形式の積分であり, n_i は写像の degree である.

ツイストしたシグマ模型において, BRST-closed なオブザーバブルの相関関数は何を意味するのだろうか? 一般にオブザーバブルは

$$\{Q, \mathcal{O}_\alpha\} = 0, \tag{2.22}$$

というように Q-closed でなければならないのであった. ここでは $n_i \in \mathbf{Z}$ でラベルされたセクターのオブザーバブルの相関関数

$$\langle \prod_\alpha \mathcal{O}_\alpha \rangle_{n_i} = e^{-2\pi \sum_i n_i t_i} \int [\mathcal{D}X][\mathcal{D}\chi][\mathcal{D}\psi] e^{-\frac{1}{\alpha'}\int \{Q,V\}} \prod_\alpha \mathcal{O}_\alpha, \tag{2.23}$$

考えたい. 但し, ラグランジアンのトポロジカルな項を指数関数の位相因子として取り出した. ここで上式を α' について微分すると $\{Q, \ldots\}$ という形の項が出るのだが, Q-exact なものは効かないため, 経路積分は α' に依存しない. したがって $\alpha' \to 0$ の極限を取ることが可能となり, そこでは鞍点近似が厳密になるのである. この鞍点は正則写像

$$\partial_{\bar{z}} X^i = 0, \quad \partial_z X^{\bar{j}} = 0, \tag{2.24}$$

からなっており, Φ が正則写像であることが要求される (このとき $V = 0$ となっている). このとき経路積分は worldsheet から target space への正則写像のみの寄与しか受けないため, 正則写像のモジュライ空間上の積分に還元される. このモジュライ空間とは一般に正則写像のパラメータ空間のことである.

ここでいくつかコメントしておきたい.

- 相関関数はオペレータの位置によらない.

一般にオペレータを挿入するには worldsheet 上の位置 z_i を特定しなければならない. T' は修正したストレステンソルで並進の生成子なのだが, Q-exact なオペレーターの挿入された相関関数は経路積分に効かないため, 相関関数は worldsheet 上の点に依存しない. このために, オブザーバブルを $\mathcal{O}_\alpha(z)$ とは書かなかったのである. したがって, このシグマ模型は worldsheet の位置によらないトポロジカルな理論である.

- 相関関数は t_i の値にしかよらない.

正則写像のモジュライ空間上の積分をする時に各正則写像について 1 つの寄与が正則写像の積分に入るのだが, その唯一の依存性は $2\pi \sum_i n_i t_i$ にありそれが t_i の正則性となるのである ($\bar{t}_i$ への依存性はない). 但し 2 次元重力に結合させると修正が必要となる.

- 相関関数は target space の複素構造によらない.

$\int_\Sigma \Phi^*(k)$ は target space のケーラー構造のみに依存するが, target space の複素構造のモジュライは worldsheet の方とともに V に入っている. しかし V は $\{Q, V\}$ の形でラグランジアン

に含まれていることにより経路積分に効かないため, 相関関数は target space の複素構造によらないのである.

最後にオブザーバブルに戻って, 条件 $\{Q, \mathcal{O}_\alpha\} = 0$ の意味を考えたい. 非線形シグマ模型について Q は右巻きと左巻きの SUSY の線形結合となるが, Q を陽に構成し,

$$\mathcal{O}_\omega(X) = \omega_{I_1 \dots I_N}(X)\chi^{I_1} \dots \chi^{I_N}, \tag{2.25}$$

という形の一般のオペレータを考えると,

$$\{Q, \mathcal{O}_\omega\} = -\mathcal{O}_{d\omega}, \tag{2.26}$$

が示される. 但し, d は target space の外微分作用素である. これは何を意味するのだろうか? Q を 1 個作用させると d に対応するオペレータを得るため, ω は M 上の微分形式と同一視できて Q は外微分作用素と同一視できる. すなわち Q-exact (closed) なオペレータは厳密に d-exact (closed) な微分形式に対応するため, Q コホモロジーは M の de Rham コホモロジーと同じになるのである.

ケーラー変形を担う target space M 上の $(1,1)$ 形式は t_i と $1:1$ に対応しているが, $(1,1)$ 形式は marginal オペレータに対応するためにモジュライと考えられ, 相関関数はこのモジュライに依存する. ここで精力的に研究された重要な事実は, このオブザーバブルが古典的なコホモロジー環の変形環を与えていることである. すなわちコホモロジー形式の要素の積を定義したときに, それ自身で閉じた積がつくられるが, 位相的場の理論はこの古典的概念を α' に依存した一種の量子的な概念への変形を与える. この変形のもとになっているのはインスタントン補正であり, これは worldsheet から target space のサイクルへの自明でない写像に対応している. これは指数的に小さい作用を与えるため, worldsheet instanton と呼ばれる.

最後に B モデルについて少しコメントしておきたい. B モデルの相関関数はケーラーモジュライへの依存性をもたず複素構造のモジュライにのみ依存し, オブザーバブルは Dolbeault コホモロジーにある. B モデルについても同様の分析ができるが, その違いがいわゆるミラー対称性に反映される.

2.3 位相的弦理論の分配関数

ここまでは 2 次元 $N = 2$ 超共形場の理論をツイストして得られる位相的場の理論を扱い, 特に例として位相的シグマ模型を考えた. 通常のシグマ模型のときのようにこの位相的シグマ模型を 2 次元重力に結合させると位相的弦理論が得られるが, 重力との結合に関してはツイストした理論と bosonic string の理論の間のアナロジーに注意しておくと見通しよく議論すること

ができる. 位相的弦理論は例えば分配関数のようなものを定義するのだが, 種数が 0, 1, および 2 以上の場合で状況が異なっている (Appendix A も参照). これまでは, A モデルのツイストした位相的シグマ模型を任意のケーラー多様体で定義したが, これからは第 1 チャーン類の消える Calabi-Yau 多様体が target space の場合に話を限ることにしたい.

まず種数 0 の場合の位相的弦理論の分配関数 $\mathcal{F}_0$ は湯川カップリングを与えるプレポテンシャルに関係しており, special geometry の構造から

$$C_{ijk} = \partial_i \partial_j \partial_k \mathcal{F}_0(t), \tag{2.27}$$

を満たす. 次に種数 1 の位相的弦理論の分配関数は,

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}_1} \frac{d^2\tau}{\mathrm{Im}\tau} \mathrm{Tr}\left[(-1)^{F_L+F_R} F_L F_R q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0}\right], \qquad q = e^{2\pi i \tau}, \tag{2.28}$$

と書ける [7]. 但しトレースは M 上のシグマ模型の Ramond セクターのヒルベルト空間について取り, $\mathcal{M}_1$ は worldsheet トーラスのモジュライ空間を表し, F_L, F_R は左巻き, 右巻きのフェルミオン数を表す.

さらに種数 2 以上の場合を考えよう. 通常の弦理論のように種数 g の分配関数は種数 g のリーマン面のモジュライ空間上の積分として,

$$\mathcal{F}_g(\{t_i\}) = \int_{\mathcal{M}_g} d^{3g-3}m d^{3g-3}\bar{m} \langle \prod_{k=1}^{3g-3} \int_{\Sigma_g} \mu_k G^- \int_{\Sigma_g} \bar{\mu}_k \bar{G}^- \rangle, \qquad \mu_k \sim g^{-1}\frac{\partial g}{\partial \tau_k}, \tag{2.29}$$

と定義される. $\mathcal{M}_g$ は種数 g のリーマン面 Σ_g のモジュライ空間であり, また μ_k はモジュライ m_k に関するベルトラミ微分と呼ばれ, 本質的に worldsheet 上の計量の微分であって, およそリーマン面の複素構造のモジュライ τ_k で worldsheet の計量を微分した形に書ける. またツイストによりスーパーカレント G^- はウエイト 2 のオペレータとなるため, $\int_{\Sigma_g} \mu_k G^-$ は Σ_g 上で well-defined である. 特に種数 g が 1 よりも大きいとき, $3g-3$ 個のパラメータが存在している. ここで大事な事はこの位相的弦理論の分配関数が実は臨界次元のようなものをもつことであり, それが $\hat{c}=3$ であることを示したい. よく知られたように, セントラルチャージが $\hat{c} = c/3 \in \mathbf{Z}$ の $N=2$ 超共形場の理論に charge integrality condition を課すと, target space として複素 $d=\hat{c}$ 次元の Calabi-Yau 多様体をもつ $N=2$ シグマ模型となるため, $\hat{c}=3$ とは $\hat{c}=c/3=d=3$, すなわちこの target space の臨界次元が複素 3 次元, つまり実 6 次元であることになる. この理由は通常の臨界次元の場合とは少し異なっており, その意味するところはこの次元以外ではチャージがつりあわない限り一般のオブザーバブルの一般の分配関数の多くは消えてしまうのだが, $\hat{c}=3$ ではこの分配関数は全ての種数 g について消えないということになっているのである. これは $U(1)$ チャージが $\hat{c}=3$ のときにのみつりあうためであり, 大雑把にはここで G^- と b のアナロジーを思い出し, G^- は b のように振る舞うが b を $3g-3$ 個挿入

したときに対応する $3g-3$ 個のフェルミオンのゼロモードを吸収させる必要があるためと考えることができる. すなわち, G^- の挿入が $3g-3$ 個あるが, 各々 $U(1)$ チャージ -1 をもつために合計 $3-3g$ の寄与を与え, 一方複素次元 d の target space 上で定義されたもとのシグマ模型は worldsheet 上のフェルミオンからくるフェルミオンのゼロモードを $d(g-1)$ 個もつ. この 2 つは $\hat{c}=d=3$ のときにのみつりあうため, 複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体の場合にのみ, 自明でない分配関数が得られるのである.

分配関数 $\mathcal{F}_g$ $(g \geq 1)$ は原則的には正則なケーラーモジュライ t_i のみに依存するが, 実は反正則パラメータ $\bar{t}_i$ にも微妙に依存する. A モデルの湯川カップリングはケーラーモジュライ t^i に正則に依存するが M の複素構造のモジュライには依存しなかった. この性質の一部は高次のループの振幅 $\mathcal{F}_g$ に引き継がれ, 実際 $N=2$ 超共形対称性の Ward 恒等式を用いての $\mathcal{F}_g$ が複素構造のモジュライに依存しないことを示せる [7, 8]. しかしその正則性はモジュライ空間の境界からの寄与により微妙に破れてしまうのである. これは正則アノマリー方程式としてうまくとらえることができる [7, 8]. この点はこの講義では重要ではなく, A モデルの分配関数は大雑把に t_i にのみ依存すると考えておいてよい.

種数 g の分配関数の一般形は Bershadsky, Cecotti, Ooguri and Vafa [8] により,

$$\mathcal{F}_g(\{t_i\}) = \frac{\chi(M)}{2}\int_{\mathcal{M}_g} c_{g-1}^3 + \sum_{n_i;i} \alpha_{n_i}^{(i)} e^{-n_i t_i}, \tag{2.30}$$

と書き下された (但し string coupling g_s は省略されている). まず第 1 項を見てみよう. $\chi(M)$ は target space の Calabi-Yau 多様体のオイラー数で, c_{g-1} は $\mathcal{M}_g$ 上の Hodge 束の第 $g-1$ チャーン類である. Hodge 束は局所的にはリーマン面上の g 個の正則 1 形式により張られる $\mathcal{M}_g$ 上の g 次元正則ベクトル束である. また, $\int_{\mathcal{M}_g}\ldots$ は種数 g のリーマン面のモジュライ空間上の積分である. その詳細はここでは必要ないが, 重要なことはこれが constant map (図 1) と呼ばれるものからの寄与となっていることである. constant map とはリーマン面全体が Calabi-Yau

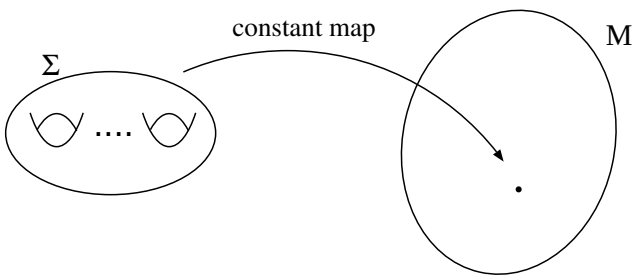

図 1: constant map

多様体上の一点に写される写像で, ケーラー構造などには全く依存しない. したがって第 1 項

はオイラー数 $\chi(M)$ を通してのみ Calabi-Yau 多様体に依存している. 一方第 2 項は非常に一般的な形に過ぎず, $\alpha_{n_i}^{(i)}$ はまだ決まらない数である. 重要なことはケーラーモジュライに依存することで, この寄与はリーマン面 Σ が Calabi-Yau 多様体 M 内の自明でない代数曲線に写される状況からきており, これは worldsheet instanton (図 2) と呼ばれるものにあたる. $\alpha_{n_i}^{(i)}$ とい

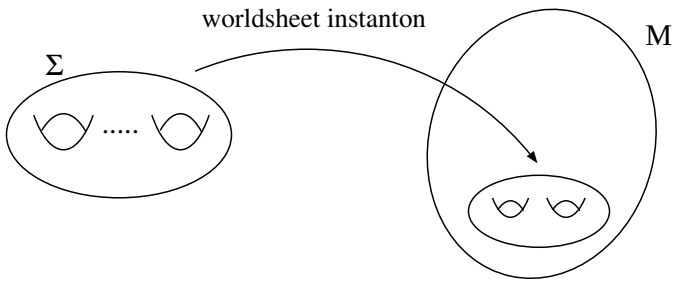

図 2: worldsheet instanton

うのは一般に種数が $0, 1$ のとき以外は計算は非常に困難である. ともかくこのような考察から一般形は書き下せて分配関数は constant map と worldsheet instanton の寄与からなるということは示すことができる. これが摂動論の立場で第一原理からできる主張であるといえる. 位相的弦理論は通常の弦理論よりもずっと易しいとはいえ種数 g のリーマン面のモジュライ空間上の積分を通常の弦理論のように含んでいるためにかなり込み入った議論が必要であり, 高い種数の位相的弦理論の分配関数を数学的に扱う方法は未だ知られていない. 問題はまだかなり難しいのである.

3 M 理論による All Genus Answer

この章では Vafa との仕事 [1] の内容について議論したい. 2 章では一般の種数 g の位相的弦理論の分配関数の計算は困難であることを議論したのだが, 通常の超弦理論とのつながりを用いることでその困難を回避することができる. $\mathcal{F}_g$ が BPS 状態のみの寄与からきているため, 摂動的にも非摂動的にも寄与を受けないという事実を用いると, 摂動的な立場からするとこれは種数 g のリーマン面からの寄与であったものをここでは異なった見方で問題を考えることができ, D0, D2 ブレインからの寄与とみなすことができるのである.

3.1 超弦理論のコンパクト化との関連

2 章でやったことは位相的場の理論と位相的弦理論の定義に過ぎないため, 位相的弦理論と通常の超弦理論との関係を知りたいのだが, 実は位相的弦理論の分配関数 $\mathcal{F}_g$ は通常の超弦理論のコンパクト化で生ずる物理量の中に現れることが知られている. この要点をまとめてしまうと, ツイストした理論の相関関数がツイストしていない理論の相関関数に関係しているという事情になっており, それどころか種数 0 では両者は実は同じであり, ツイストしていない理論の湯川カップリングがツイストした理論の 3 点関数に関係することが知られている. 以下では種数が 1 以上の場合を扱うが, そのとき実はツイストしていない理論の相関関数を考えた場合に, これをツイストした理論の相関関数に関連させる対応規則が存在することがわかっている. 一般の種数 g のリーマン面では理論をツイストするためにツイストしていないもとの worldsheet 上の理論にさらにオペレータを挿入しなければならず, 種数 g の相関関数については

$$\langle \ldots\ldots \rangle^g_{\text{twisted ; A model on M}} = \langle R^2 F^{2g-2} \ldots\ldots \rangle^g_{\text{untwisted ; IIA on M}}, \tag{3.31}$$

が成立するのである. この規則において, ツイストしていない右側の理論は 10 次元の Type IIA 弦理論を複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体 M を用いて 4 次元にコンパクト化した理論の g ループの振幅である. この理論は低エネルギーで 4 次元 $N = 2$ 超重力理論に物質場が結合した理論になっており, そこでは graviton と同じ multiplet に graviphoton と呼ばれる $U(1)$ ゲージ場が存在する. F はこの graviphoton の field strength の反 self-dual 部分である. また R はリーマン曲率テンソルの反 self-dual 部分である. すなわちツイストしていない Type IIA 弦理論においては 2 つの graviton の vertex operator と $2g-2$ 個の graviphoton の vertex operator を相関関数に挿入しなければならず, この挿入により worldsheet 上でツイストの操作が実行されることになるのである. なお 2 つの $\ldots$ は同じ勝手な Q-closed な他のオペレータの挿入を表す. ここで特に $\ldots$ に何も入れないときを考えると

$$\mathcal{F}_g(\{t_i\}) = \langle 1 \rangle^g_{\text{twisted A model on M}} = \langle R^2 F^{2g-2} \rangle^g_{\text{IIA on M}}, \qquad g > 0, \tag{3.32}$$

のように 2 個の graviton と $2g-2$ 個の graviphoton の散乱振幅をツイストした理論の分配関数 $\mathcal{F}_g$ が与えることになる. この立場では, 2 個の graviton と $2g-2$ 個の graviphoton の挿入されたループをまわる様々な粒子ももてるということを用いて, 位相的弦理論の分配関数を計算できるためこの関係は非常に有用である.

さらに位相的弦理論の種数 g の分配関数が複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体 M 上の Type IIA 弦理論の 4 次元有効作用内の F term に

$$S^{\text{IIA on } M}_{\text{eff}} = \ldots + \mathcal{F}_g(\{t_i\}) R^2 F^{2g-2}, \tag{3.33}$$

という形で現れることが Bershadsky, Cecotti, Ooguri and Vafa [8] および Antoniadis, Gava, Narain and Taylor [9] により示されている. したがって, R^2F^{2g-2} の係数のケーラーモジュライへの依存性が, 位相的弦理論の分配関数により与えられることがわかる. 但し, これは種数が 1 以上の場合の話しであって, 種数 $g = 0$ のときはツイストは実はあまり違いを与えず, その場合の相関関数はツイストした理論及びツイストしていない理論のプレポテンシャルを与えることが知られている. ここで注意しておきたいことは, 曲率と field strength にはある縮約がある一方で実はそれぞれの反 self-dual 部分しか現われないことである. スーパースペースの notation では,

$$\int d^4\theta d^4x W^{2g}, \qquad W_{\mu\nu} = F^-_{\mu\nu} + R^-_{\mu\nu\lambda\rho}\theta\sigma^{\lambda\rho}\theta, \tag{3.34}$$

という項が現われることに相当している. つまり, R^2F^{2g-2} の項は F から始まり, R をもつ Weyl スーパーフィールドで見るとスーパーポテンシャル項として見えているという事情になっており, θ 積分を実行することにより R^2F^{2g-2} が現われるのである. これは half superspace の積分であるため, 通常の議論から量子補正から守られていると期待される. この項は種数 g からのみ寄与を受ける種数 g の位相的弦理論の分配関数であったが, 一方もとの超弦理論で見ても dilaton は Type IIA の hypermultiplet に存在して vector multiplet とは混ざらないため, この項は種数 g からのみ生じ摂動的にも非摂動的にも補正を受けないことがわかる. したがってこれは厳密な項であり以下で重要な役割を演ずる.

ここまでの議論から, 位相的弦理論が通常の超弦理論の有効作用の重要な項を与えることがわかった. しかも位相的弦理論では経路積分が鞍点に局在化し, そこでは worldsheet から target space への全ての写像ではなく正則な worldsheet instanton のモジュライ空間に話しを限ることができるため, 通常の弦理論よりも易しい計算となることが期待される. しかし一般にそれもそれほど自明なことではないことは 2 章で見た通りである. これを克服するアイデアは heterotic 弦理論 と Type IIA 弦理論の双対性という文脈で Antoniadis, Gava, Narain and Taylor [10] によりなされた議論から見て取ることができる. 彼等の考えたことは上の field strength に期待値 $\langle F_- \rangle = F$ を与えたときに有効作用の R^2_- 項

$$S_{\text{eff}} = \int R^2_- \left(\sum_g F^{2g-2} \mathcal{F}_g(\{t_i\}) \right), \tag{3.35}$$

への寄与を求めるという問題で, 勿論回答は $\mathcal{F}_g$ で与えられる. 彼等は特殊な Calabi-Yau 多様体で計算しているのだが, 個々の多様体には依存しない議論として取り出すことができる. background に反 self-dual な場 F が存在するときに, BPS チャージ Z をもった half hypermultiplet に属する粒子を考える. これは 4 次元の $SO(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$ の量子数

$$\left[2\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus (0, 0) \right], \tag{3.36}$$

をもつものである. ちなみに, hypermultiplet は 量子数 $\left[4(0,0)\oplus(0,\frac{1}{2})\oplus(\frac{1}{2},0)\right]$ をもつ. そのとき graviphoton のもとで荷電したほぼ massless の軽い half hypermultiplet を積分しつくすと有効作用の R_-^2 項への effective な寄与が得られる. しかしここで驚くべきことは, この振幅が実はずっと易しい振幅に関係しているということである. すなわちこの粒子は graviphoton についてチャージをもつため, これを積分することを考えると (以下考える half hypermultiplet の一つが非常に軽い状況では) 得られる有効作用は実は graviton がなくて $2g-2$ 個の graviphoton の挿入だけがありそこでスカラー粒子を積分した場合の有効作用と同じになるのである (図 3). 右のループ内の粒子は 4 次元の量子数 $(0,0)$ で変換するスカラー粒子であり, BPS チャージ Z

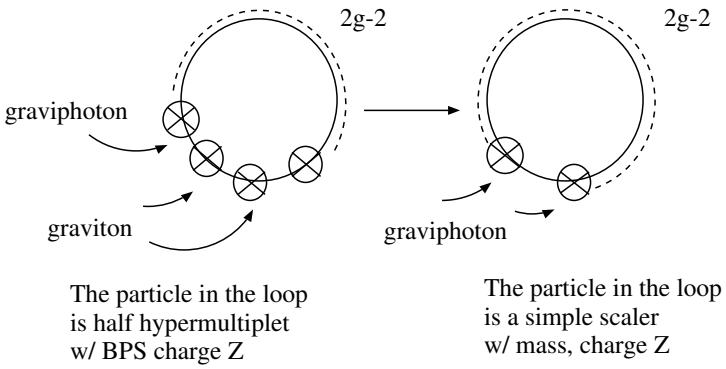

図 3: 振幅の等価性

の half hypermultiplet を考えるならば, このスカラー粒子は質量とチャージ Z をもつ粒子である.

これは非常に優れた結果で定常電磁場に minimal に couple した free boson を計算する問題に帰着するのであり, これは QED の立場でずっと昔に Schwinger によりなされた計算である. 彼は background の定常電磁場内で minimal に結合した電子の効果を考え, フェルミオンを積分することから Maxwell 作用への補正を導出することに成功した. この計算は 1 ループの determinant の評価になるが, この説明は Itzykson-Zuber の教科書 [11] に非常によい説明がなされており, よく知っている方も多いと思われる. これは非常によい結果で, この場の理論の計算がまさに half hypermultiplet を積分したときに有効作用の R_-^2 項への補正を得るのに必要なのである. つまり R_-^2 項が本質的に half hypermultiplet からのゼロモードへの寄与なっているが, それ以外では定常電磁場内を伝播するスカラーと同じであり, これは background の反 self-dual な場 F 内のスカラー粒子を積分することと同じでなのある. ここで必要な結果は厳密に

$$\mathcal{F}(Z)=\int_\epsilon^\infty \frac{ds}{s^3}\left(\frac{s/2}{\sinh s/2}\right)^2 e^{-sZ/F}, \tag{3.37}$$

という形に書ける. 但し, $\epsilon \to 0^+$ はカットオフである. これは 反 self-dual な電磁場内のスカラー粒子のものであり, 通常は電子の質量と電荷で書かれるが, BPS チャージは質量と background field F で関係づいているために特に簡単な形になっている. この積分は F のべき級数に展開できて

$$\mathcal{F}(Z) = \sum_g \mathcal{F}_g F^{2g-2} + \mathcal{O}(e^{-Z/F}), \tag{3.38}$$

となり, F^{2g-2} の係数が $\mathcal{F}_g$ を与える. 具体的には

$$\mathcal{F}_g = -\chi_g Z^{2-2g}, \qquad \chi_g = \frac{(-1)^{g-1}B_g}{2g(2g-2)}, \tag{3.39}$$

と書くことができる. 但し, Bernoulli 数で書ける χ_g は種数 g のリーマン面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ のオイラー数である. これが charged scalar についての Schwinger の回答で, これが $U(1)$ graviphoton のもとで電荷をもつ half hypermultiplet からの寄与となる. 以上が種数 g の分配関数を軽い荷電粒子の寄与として, 場の理論の 1 ループで計算することを可能にする哲学の説明である. ここまでの議論で重要であったことは, $U(1)$ graviphoton のもとで電荷をもつ BPS 粒子が 2 個の graviton と $2g-2$ 個の graviphoton の挿入された 1 ループの内線をまわるとき, half hypermultiplet のスピンを落とすことにより, 2 個の graviton を忘れることができるということである. この計算結果の解釈を heterotic 弦理論との双対性を忘れて, Type IIA 弦理論の中で与えたのが私と Vafa の仕事 [1] である.

3.2 M 理論による計算

ここまでに用いた摂動的な見方は弱結合で妥当であるが, string coupling g_s を大きくして Type IIA 弦理論の強結合領域へ行くと, M 理論を複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体と S^1 の直積空間でコンパクト化した理論と思うことが有効になってくる [12]. よく知られたように, S^1 の半径 R は g_s と $R = g_s^{2/3}$ と関係している. このとき最も軽い状態は円周上の Kaluza-Klein モードであり, これは D0 ブレインに対応して, $1/g_s$ のように振る舞う質量を持つ. また Calabi-Yau 多様体内の 2 次元サイクルに巻いた D2 ブレインも存在し, これも低エネルギーでのノンコンパクト方向の理論において粒子となるのだが, この質量は巻き付く 2 サイクルの面積 A を用いて A/g_s に比例する.

$$\text{D0 branes} \sim \frac{1}{g_s}, \qquad \text{wrapped D2 branes} \sim \frac{A}{g_s}, \tag{3.40}$$

string coupling g_s を大きくとった場合にはこれらが最も軽い状態であり, ともに $U(1)$ graviphoton のチャージをもっている. したがって, 少なくとも D0 ブレインと D2 ブレインが half

hypermultiplet を与えるという特殊な状況では厳密に Schwinger の表式 (3.37) で与えられることが期待でき, $\mathcal{F}_g$ へのその寄与を読み取ることができる.

まず D0 ブレインの寄与を考えよう. D0 ブレインは実はいつも half hypermultiplet を与え, 特にそれは

$$Z = \frac{2\pi i n}{g_s}, \tag{3.41}$$

という BPS 公式をもち, n 個の D0 ブレインの束縛状態は n に比例する質量をもつ (但し, $\alpha' = 1/4\pi^2$). D0 ブレインからの $\mathcal{F}_g$ への寄与は, この Z の値を Schwinger の公式に代入し全ての D0 ブレインのチャージについて和をとることで得られる. S^1 の Kaluza-Klein momentum を固定したとき, 全ての multiplet を考慮すると, 全体の寄与は 1 個の half hypermultiplet の寄与に $h^{2,1} - h^{1,1} = -\chi(M)/2$ を掛けなければならない. したがって, 足し上げると

$$\mathcal{F}_g^{(0)} = \chi_g \frac{\chi(M)}{2} \sum_{n \neq 0 \in \mathbf{Z}} \left(\frac{2\pi i n}{g_s} \right)^{2-2g}, \tag{3.42}$$

となる. ここで n について Poisson resummation をとってやると,

$$\mathcal{F}_g^{(0)} = \frac{\chi(M)}{2} \left[(-1)^{g-1} \chi_g \frac{2\zeta(2g-2)}{(2\pi)^{2g-2}} \right] g_s^{2g-2}, \tag{3.43}$$

となる. 但し, $\zeta(z)$ は Riemann のゼータ関数を表す. この結果は g_s^{2g-2} に比例しているが, それは F_g が $R^2 F^{2g-2}$ 項への種数 g の寄与を与えるためである. $\mathcal{F}_g^{(0)}$ の括弧内の量は Hodge 束のチャーン類を用いて

$$\int_{\mathcal{M}_g} c_{g-1}^3 = (-1)^{g-1} \chi_g \frac{2\zeta(2g-2)}{(2\pi)^{2g-2}}, \tag{3.44}$$

と書けるため, constant map からの寄与と同定できる. 以上で位相的弦理論の constant map からの寄与を D0 ブレインを積分することの寄与として再解釈することができた. $\mathcal{F}_g^{(0)}$ のこの形の回答は数学的に厳密に Faber and Pandharipande [13] により証明された数学的予想である (Appendix B 参照). また Marino and Moore [14] により少し異なる推論で議論され, 彼らは少なくとも constant map からくる寄与については種数 g の分配関数を計算した.

しかし位相的弦理論の分配関数には, 自明でない写像に対応した worldsheet instanton もありうるのであった. これはどのように説明されるのだろうか? 答えは, Calabi-Yau 多様体内の自明でない 2 サイクルに巻き付いた D2 ブレインから来るということである. 但し, ここでの議論は D2 ブレインが half hypermultiplet を与える状況に対応していなければならない. これは 2 サイクルが球面の変形族の一部とならない S^2 という最も易しい場合の議論であり, この球面に巻き付いた D2 ブレインが実際に half hypermultiplet を与える. 高いスピンの粒子が存在するとき D2 ブレインは何回も巻き付けるため, 余分のモジュライが出現し, また 2 サイクルの変形族があるときにも, この変形に対応するモジュライ空間が得られるため, スカラーに関

する Schwinger の公式 (3.37) を適用できない. これについてはこの章の最後で考える. さらに D2 ブレインは任意の数の D0 ブレインと束縛状態をつくることができ, half hypermultiplet しか存在しない場合には D0 ブレインに束縛された D2 ブレインの寄与は再び Schwinger の計算により与えられた一般の公式 (3.37) から読み取れる. この場合の BPS チャージの値は

$$Z = \frac{2\pi(A+in)}{g_s}, \tag{3.45}$$

となる. ここでは D2 ブレインが 1 枚しか存在していないと仮定していることに注意しておきたい. すなわち S^2 に何回も巻き付いた D2 ブレインの束縛状態は存在しないのである. A/g_s が D2 ブレインの質量に対応し, n は D0 ブレインの数である. 再び $n=0$ を含めて全ての D0 ブレインのチャージについて和をとらなければならない. よって $\mathcal{F}_g^{(2)}$ は $U(1)$ ゲージ場のもとで荷電した massive スカラー粒子を積分しつくすことに対応し, F の全てのべきをもった F の低エネルギー有効作用を誘導する Schwinger の公式 (3.37) を適用すると,

$$\mathcal{F}_g^{(2)} = -\frac{\chi_g g_s^{2g-2}}{(2\pi)^{2g-2}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} (A+im)^{2g-2}, \tag{3.46}$$

が得られる. さらに Poisson resummation をとることができて,

$$\mathcal{F}_g^{(2)} = -\frac{\chi_g g_s^{2g-2}}{(2g-3)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2g-3} e^{-2\pi n A}, \tag{3.47}$$

を得ることができる. n^{2g-3} は multiple cover からくる寄与である. 上式は $e^{-2\pi nA}$ という異なるウエイトをもつ worldsheet instanton sum のように見え, また A は面積の実部として, ケーラーパラメータ t_i のように思える. したがって, D2 ブレインの寄与は確かに worldsheet instanton sum のように見え, worldsheet instanton を D2 ブレインからくるものと再解釈したことになる. この結果が摂動計算と一致することについては多くの証拠が得られている.

本質的には closed string をやる限りは, 以上が示したい描像であった. 強結合領域へ行けて物事をそこでの軽い状態で解釈し直すことができるという事実を用いただけであるが, これは確かに正しい答えを与える. ここまでは D0 ブレインと D2 ブレインが half hypermultiplet を与える場合を考え, その寄与を書き下した. 位相的弦理論の 2 種類の項に対応するこれらの constant map と worldsheet instanton sum は一般にこのように解釈できる. さらに摂動的な手法では評価するのが非常に難しかった厳密な係数をも予言することができた.

ここまでに生じている一般のアイデアは, 摂動的には正則写像で理解される位相的弦理論の分配関数が, 等価なもう一つの描像で理解できるということである (図 4). まず上の描像は種数 g のリーマン面から target space への constant map 及び 自明でない写像 (worldsheet instanton) からなる. これは摂動的な描像で, ツイストした非線形シグマ模型などで記述され通常は正則写像を典型的に含みモジュライ空間などをもち直接計算できる量を含む. しかし, この対象は下の

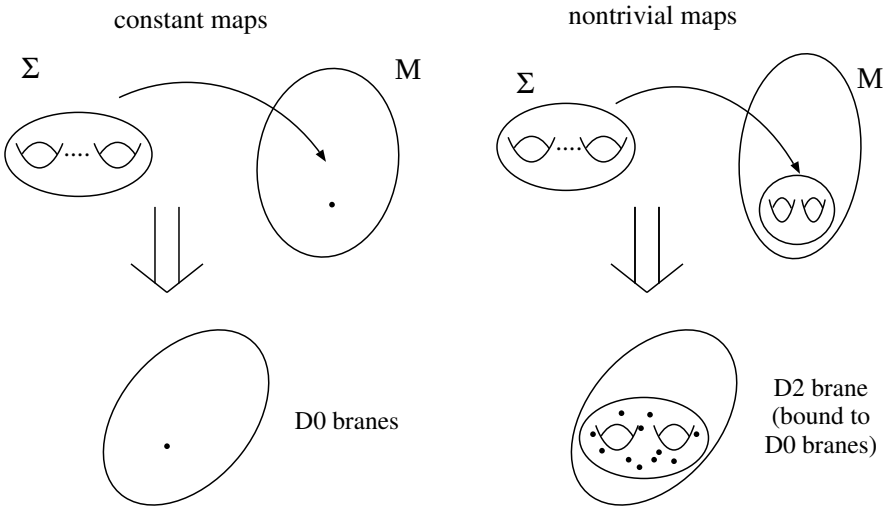

図 4: 位相的弦理論の 2 つの描像

描像へ移ってもう一つの方法で解釈し直すことができる. このとき, まだ同じ Calabi-Yau 多様体を考えるが constant map のかわりに D0 ブレイン, リーマン面からの自明でない写像のかわりに target space の 2 次元面に巻き付いた D2 ブレインを考える. この描像では Schwinger の手法を用いてずっと易しく計算できる. まとめると位相的弦理論の分配関数を 2 通りに解釈でき, 一方は従来の摂動的な方法で, もう一方がブレインと M 理論による方法であって, 両者の比較は A モデルについて有用な観点を与えるということである.

例 : **resolved conifold**

例として最も易しいと同時に closed string と open string の関係をつけようとするときに現われる状況, すなわち S^2 resolved conifold geometry の場合を考えたい. これは図 5 のような geometry をもつ. これは高次元の cone であり, 2 次元の cone が無限遠で $S^2 \times S^0$ となるよう

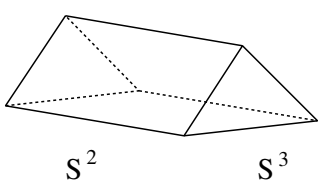

図 5: S^2 resolved conifold

に, 無限遠で S^2 と S^3 の積空間となっており, 動径方向に内側へ行くと S^2 は有限サイズにとどまるが, S^3 は 2 次元の cone の S^1 が縮んで消えるようにサイズが 0 になるというもので, この状況を図示したのが図 5 になる. ここで重要なことはいたるところで有限サイズにとどまる S^2 があることで, またさらにこれがトポロジカルに自明でなく, 球面の変形族の一部ともならないことである. つまり resolved conifold は自明でないホモロジー類に 1 つの球面だけをもつのである. このとき種数 $g(>1)$ の分配関数は M 理論との双対性を用いた先程の議論から得られた (3.43),(3.47) より,

$$\mathcal{F}_g = g_s^{2g-2}\left[(-1)^{g-1}\chi_g\frac{2\zeta(2g-2)}{(2\pi)^{2g-2}} - \frac{\chi_g}{(2g-3)!}\sum_{n=1}^{\infty} n^{2g-3}e^{-2\pi nA}\right], \tag{3.48}$$

と書き下せる. 第 1 項は D0 ブレインから得る half hypermultiplet の寄与で, 摂動的には constant map の寄与になる. 第 2 項は S^2 に巻いた D2 ブレインが与える half hypermultiplet からの寄与で, 指数つきの和になり, 自明でない worldsheet instanton の寄与である. ここで, $\chi(M)=2$ を用いたが, これは resolved conifold は S^2 にあたる自明でないサイクルしか持たないためである. この例で, D2 ブレインが half hypermultiplet という非常に扱い易い寄与を与える理由は, S^2 上では D2 ブレインを一回しか巻き付けることができず, 何回も巻き付いた D2 ブレインの束縛状態がないこと, および S^2 の変形族がないことによる. このことは Strominger [15] による conifold のもともとの解消で非常に重要であったことである. したがって, 1 つの D2 ブレインの寄与を得るだけであるが, もちろん任意の数の D0 ブレインとの束縛状態が可能なことは考慮されている.

ここで触れたいことは, worldsheet instanton の和の解釈である. (3.48) では各種数 g の worldsheet についてインスタントンの和, つまり種数 g のリーマン面から S^2 への写像が存在しているが, 種数が 1 以上の多くのものがいわゆる small instanton の寄与と呼ばれるものになっている. small instanton というのは図 6 のように正の種数をもつ component が退化することに

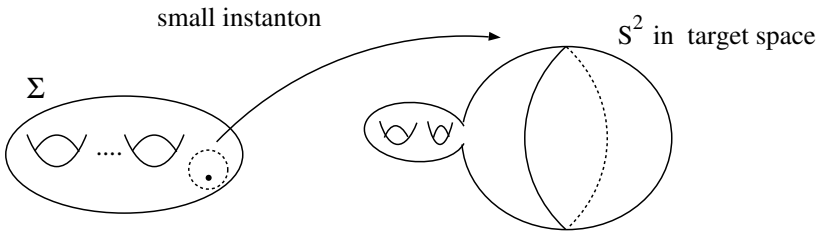

図 6: small instanton

より, worldsheet 全体が target space の球面に写される写像のことである. すなわち worldsheet Σ から target space への写像は本質的にいたるところ constant で, 1 点の微小近傍のみが S^2

の残りに巻き付き, 自明でない support をもつために small instanton と呼ばれる. これは全ての n について寄与を与えるため, 一般に small instanton 項を考えに入れなければならない. さらに分岐被覆と呼ばれる寄与も存在する.

種数 $g = 0, 1$ の場合に移っても分配関数を与える Schwinger の計算は破綻せず, 他のテクニックを用いて以前に導かれた対応する表現と比較できる. まず種数 0 の場合を考えよう. 特に Calabi-Yau 多様体 M がケーラーモジュライを 1 個だけもつ場合の位相的弦理論の振幅は一般に,

$$\mathcal{F}_0 = \frac{1}{g_s^2}\left[-\frac{\chi}{2}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{6}c_2 t + i\pi a t^2 - \frac{C}{3!}t^3 + \sum_{m,n} d_m \frac{1}{n^3} e^{-nmt}\right], \tag{3.49}$$

と書ける [16]. $\partial^3\mathcal{F}_0/\partial t^3$ が湯川カップリングを与える. 但し, χ は M のオイラー数, c_2 は M の第 2 チャーン類 (正確には $c_2 t = \int k \wedge c_2$), C はケーラー類に関する古典自己交差数 ($Ct^3 = \int_M k \wedge k \wedge k$) である. さらに d_m は 1 回巻きの primitive な degree m の正則な球面の数を表し, n は基本的な球面の多重被覆をラベルしており, インスタントンの寄与に相当する. ここで a はトポロジカルな解釈を持たないが, ケーラーモジュライが 1 個の Calabi-Yau 多様体の場合には $a = C/2 \bmod \mathbf{Z}$ と予言されている. ここでの例では 1 個の primitive な 正則球面だけがあり, それは degree 1 なので, $d_0 = 1, d_i = 0 (i > 0)$ である. さらに, S^2 resolved conifold geometry に適切なトポロジカルな不変量は

$$\chi = 2, \quad c_2 = -1, \quad C = \frac{1}{2}, \tag{3.50}$$

であることが知られている. この S^2 resolved conifold の幾何的情報のうち $c_2 = 1$ と $C = 1/2$ は, この配位を flop したときの c_2 及び C の変化が決まっている事実と flop が 分配関数のレベルで t を $-t$ に変えることで実現される事との無矛盾性から決まる. したがって, 振幅は

$$\mathcal{F}_0 = \frac{1}{g_s^2}\left[-\zeta(3) + \frac{\pi^2}{6}A + \frac{i}{4}\pi A^2 - \frac{1}{12}A^3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi n A}}{n^3}\right], \tag{3.51}$$

となる. また種数 1 の場合を考えると, 特に種数が 1 以上の正則曲線がない場合には

$$\mathcal{F}_1(t) = -\frac{c_2}{24}t + \frac{1}{12}\sum_m d_m \ln(1 - e^{-mt}), \tag{3.52}$$

となる [7]. ここで特に $d_i = \delta_{i1}, c_2 = -1$ を代入すると

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{24}A + \frac{1}{12}\ln(1 - e^{-2\pi A}), \tag{3.53}$$

を得る. これらは再び Schwinger の計算と一致することが確かめられる.

したがって以上により Schwinger の表式 (3.37) が S^2 resolved conifold という非常に易しい background 上の位相的弦理論の分配関数を与えたことになる. これは通常の弦理論では期待できない全ての種数にわたる回答であることをもう一度強調しておきたい.

さらに議論したいことは, Schwinger の計算自体は非摂動的なものなので, e^{-1/g_s} のような string coupling について非摂動的な項をも与えることができることである. これは荷電粒子を積分した計算から厳密にでてくるものであり, 実際に定常電磁場内の対生成に関する Schwinger の計算では e^{-1/α^2} (α は微細構造定数) という形が登場していたのである. ここで積分する対象は D0 ブレインと D2 ブレインであり, これは background field のもとでチャージをもった粒子である. background field があるとき, そのもとで荷電した粒子を対生成できて, 指数の振幅はまさにその非摂動的な寄与で, 今の場合これは 2 サイクルに巻き付いた D2 ブレインと, D0 ブレインを対生成 (brane と anti-brane) できることを意味する. この振幅の計算は摂動的な位相的弦理論の取り扱いでは不可能であるが, ここでは摂動的および非摂動的な部分をともにもった位相的弦理論の完全な分配関数が得られるのである. その結果を種数ごとに止めた展開とみる代わりに全体の分配関数を足し上げたものとみなすことができる. そこでまず, Schwinger の回答の積分形 (3.37) を F のべきで展開してやると分配関数

$$\mathcal{F}(A,\lambda)=\frac{1}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{1}{(\sinh\frac{m\lambda}{2})^2}\left[1+e^{-2\pi mA}\right],\qquad \lambda=g_sF, \tag{3.54}$$

を得る. D0 ブレインと D2 ブレインの BPS チャージを用いて積分公式を計算すると完全に寄与を全て足し上げた回答を書き下せ, その結果は

$$\mathcal{F}(A,\lambda)=-\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1-q^n\right)-\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1-zq^n\right),\qquad q=e^{-\lambda},\ z=e^{-2\pi A}, \tag{3.55}$$

というかなりまとまった形に書ける. 但し, q,z は λ (本質的に string coupling) 及び A (ケーラーパラメータ) で書ける. あるいは, これを

$$e^{-\mathcal{F}(A,\lambda)}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^n(1-zq^n)^n, \tag{3.56}$$

と書くとよく見掛ける形でおそらく示唆的であろう. 但し, 再び D2 ブレインは 1 枚しか存在しないと仮定している. この積公式から種数ごとの分配関数では見えない対称性を示唆していることが期待できる. 弦理論には摂動的に見えるよりも高い S-duality などの対称性があると信じられていることから考えてもこのような位相的弦理論というものは興味深いアプローチだとわかる. もし仮に理論をうまくコントロールできてある種の厳密な回答が得られたとすると, その対称性を見て取ることができるに違いない (もちろんそんなものが存在するのかどうかはよくわからないが). 今考えているのは位相的弦理論であり, 我々はその完全な対称性のようなものは未だ全く理解していない. しかしこの関数の性質を調べると, 本当はモジュラー形式ではないことが判明し, n に関して余分な部分を持つことは generalized Kac-Moody 代数の character に関係していることを意味しているのかもしれない (確かなことはわからないが). とにかく, こういうものが簡単な位相的弦理論にさえ登場することは興味深いことである.

一般化

ここまでは, D0, D2 ブレインは half hypermultiplet の寄与を与えると仮定して議論した. すなわち, 孤立した S^2 上の D2 ブレインが $SO(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$ の (3.36) という 4 次元の on-shell content をもった粒子を与える場合を考えた. しかし一般の Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の場合には, 高い種数のリーマン面に何回も巻き付いた D2 ブレインや, 変形族の一部となっている 2 サイクルに巻き付いた D2 ブレインが存在するためにさらにモジュライが生じ, 4 次元の高いスピンをもった massive な BPS 粒子が登場する. その粒子の spin content は一般にローレンツ群 $SO(4)$ のもとで,

$$\left[2\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus(0,0)\right]\otimes\sum_{j_1,j_2}N_{j_1j_2}(j_1,j_2),\qquad N_{j_1j_2}\in\mathbf{Z},\tag{3.57}$$

となる. 但し整数 $N_{j_1j_2}$ は状況に応じて考えるべきもので, Calabi-Yau 多様体の geometry や (multi-wrapping を考える場合には) サイクル上のゲージ束に依存している. このような状態の寄与を考えるため, スピン

$$\left[2\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus(0,0)\right]\otimes(j_1,j_2),\tag{3.58}$$

をもった粒子の寄与を考えたい. ここで F_-, R_- は $SU(2)_L$ の量子数にしか結合しないため, j_2 依存性は自明で縮退度 $(-1)^{2j_2}(2j_2+1)$ を与え, 有効作用内の R_-^2 項への $\left[(\frac{1}{2})\oplus 2(0)\right]\otimes j_1$ の寄与を求める問題に帰着する. ここで驚くべきことは, 再び回答がスピン (j_1, j_2) の粒子に関して通常の Schwinger の計算により与えられることがわかることである [10]. すなわち, この場合にも 2 個の graviton と $2g-2$ 個の graviphoton の存在下での有効作用が単に half hypermultiplet を落とした graviphoton の存在下の有効作用と同じであるというのは正しいと考えられるのである. もちろんこのとき, 量子数は $(0,0)$ ではなくスピン (j_1, j_2) をもつ粒子で書ける. したがって, ある意味で余分な half hypermultiplet の存在が graviton の存在を利用していると考えられるのである.

ここで表現 $\left[(\frac{1}{2})\oplus 2(0)\right]\otimes j_1$ の代わりに

$$\sum_{j_1}N_{j_1}[j_1]=\sum_r\alpha_r I_r,\qquad \alpha_r\in\mathbf{Z},\quad I_r=\left[\left(\frac{1}{2}\right)\oplus 2(0)\right]^r,\tag{3.59}$$

となる基底 I_r で考えよう. このとき, 表現 $I_{r+1} = I_1 \otimes I_r$ にある BPS 粒子が与える位相的弦理論の分配関数への寄与は

$$\mathcal{F}^{(r)}(Z)=\int_\epsilon^\infty\frac{ds}{s}\left(2\sinh\frac{s}{2}\right)^{2r-2}e^{-sZ/F},\tag{3.60}$$

と与えられる. したがって, サイクル $A = \sum_i n_i t_i$ に巻き付き, D0 ブレインと束縛状態をつくる D2 ブレインがスピン

$$\left(\sum_{r \geq 0} \alpha_r^{(n_i)} I_r \right) \otimes I_1, \tag{3.61}$$

の粒子を与えるならば, 最終的な分配関数の回答は

$$\mathcal{F}(\lambda, \{t_i\}) = \sum_{\{n_i\}, r \geq 0, k > 0} \alpha_r^{(n_i)} \frac{1}{k} \left(2 \sinh \frac{k\lambda}{2} \right)^{2r-2} e^{-2\pi k \sum n_i t_i}, \quad \alpha_r^{(n_i)} \in \mathbf{Z}, \quad \lambda = g_s F, \tag{3.62}$$

となる. 一般に, D2 ブレインが巻き付ける 2 サイクル $\{n_i\}$ をもつ Calabi-Yau 多様体では, $\alpha_r^{(n_i)}$ は multi-wrapping などを考慮に入れて 2 サイクル $\{n_i\}$ のモジュライ空間を量子化することにより決定される (つまり, スピンが決定される). ここでは, $\mathcal{F}(\lambda)$ を展開して λ^{2g-2} の係数を取り出すと種数 g の分配関数 $\mathcal{F}_g$ が得られるが, ここで重要なことは $\mathcal{F}(\lambda)$ の上の形が Calabi-Yau 多様体やその 2 サイクルなどの詳細に依存しない $\mathcal{F}_g$ への強い制限を課していることである. すなわち, $\alpha_r^{(n_i)}$ が整数であることはミラー対称性からの計算では決定できなかった ambiguity をきちんと与えてしまい, さらに $\left(2 \sinh \frac{s}{2}\right)^{2r-2}$ が λ^{2r-2} のべきで始まっていることは I_{r+1} が $g \geq r$ の $\mathcal{F}_g$ に寄与することを意味し, その寄与は

$$\mathcal{F}_g^{(r)} = \alpha_r^{(n_i)} C_{r,g} \sum_{k>0} k^{2g-3} e^{-2\pi k A}, \tag{3.63}$$

と与えられる. 但し, $C_{r,g}$ はある固定された有理数である. ここで, g よりも小さいすべての r について $\mathcal{F}_r$ を決定できれば, $\alpha_r^{(n_i)} (r < g)$ を引き出すことができるのである.

4 位相的弦理論 (Open String)

ここまでは closed string の位相的弦理論を見てきたが, この章では open string の位相的弦理論を導入する. open string の位相的弦理論は Chern-Simons ゲージ理論を定義し, さらに open string の位相的弦理論では D ブレインの類似物がある. その D ブレインの worldvolume 上で Chern-Simons ゲージ理論を発見することができる.

4.1 Chern-Simons ゲージ理論との関連

open string の位相的弦理論にも A モデルと B モデルが知られているのだが, ここでは A モデルを考えることにする [17]. まず非線形シグマ模型を考えることは 2 章で見た closed string の場合と同じであるのだが, open string を考える場合にはリーマン面が境界をもつため, 境界

条件について考えなければならない．さらに通常の弦理論でのように open string の端点に Chan-Paton 因子の自由度を持たせることもできて, その場合にはこの余分な自由度のおかげでゲージ場や他の open string のモードを導入することが可能となる．90 年代の始めに認識されたことの一つは open string の端点のある方向に Dirichlet 境界条件を持たせることができるということである．ここで特に target space が実 6 次元の Calabi-Yau 多様体である場合を考えると, open string の端点が端をもてるのは SUSY サイクルの条件を満たす special Lagrangian submanifold [18] と呼ばれる 3 次元部分多様体であることを示すことができる [17, 19]．複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体 M 内の実 3 次元部分多様体 K が special Lagrangian submanifold (SUSY サイクル) であるとは, $i : K \hookrightarrow M$ としたときに, M の正則 3 形式 Ω とケーラー形式 ω を用いて,

$$i^*(\Omega) = \Omega|_K \simeq \mathrm{Vol}(K) \ \text{ and } \ i^*(\omega) = 0, \tag{4.64}$$

が成立する場合をいう．special Lagrangian submanifold は Lagrangian submanifold に含まれる．ここで SUSY 3 サイクル K に open string の端点があるため, この 3 サイクルに巻き付いたブレインを通常の弦理論の D ブレインと混同するかもしれない．ここで注意しておきたいことは, 3 章で closed string の位相的弦理論を取り扱ったときに位相的弦理論と通常の超弦理論の間のつながりで登場したのは位相的弦理論とは関係のない一種補助的と考えられる通常の超弦理論の D0, D2 ブレインであったが, ここでの状況は少し異なり open string の位相的弦理論のトポロジカルなブレインというものを考えているということである．このとき open string の端点は 3 次元空間 K に存在し, さらに $U(N)$ Chan-Paton 因子を持たせた状況を考えているため, 3 次元の worldvolume をもった N 枚のトポロジカルなブレインが K に巻き付いているものと解釈できるのである．ここで, K の近くの geometry は本質的には, Calabi-Yau 条件から K の cotangent space であると思うことができる．第 1 チャーン類が消えることは, TS^3 と T^*S^3 が双対なバンドルであることから従っている．つまり K が Lagrangian submanifold ならば, 全体の空間は Calabi-Yau 多様体 T^*K と見なすことができるのである．別の言い方をすると, 位置を意味する K に運動量を加えて T^*K がつくられる考えることもできよう.

以下では K が 3 次元球面 S^3 の場合を考え, Calabi-Yau 多様体としては $M = T^*S^3$ を選ぶことにする (図 8)．このとき S^3 に Dirichlet 境界条件を課すため, S^3 上の 3 ブレインを扱うことになる．この状況で Witten [17] により示されたことは, この open string の位相的弦理論の dynamics が 3 次元空間 S^3 上の $U(N)$ Chern-Simons ゲージ理論により与えられるということである．さらにもう一つ予想された興味深いことは, open string と closed string の on-shell カップリングが全て消えてしまうため, 位相的弦理論では open string と closed string は初めから decouple していると考えられるということである．通常の超弦理論ではいわゆる Maldacena limit [20] と呼ばれる, 様々な物理量を有限にキープしながら $\alpha' \to 0$ limit をとる操作を実行す

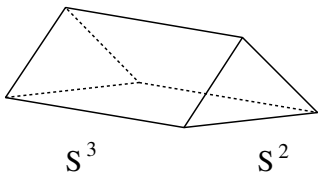

図 7: T^*S^3

ることにより open string と closed string を decouple させて自明でない予想 (AdS/CFT 対応 [20, 21, 22]) が立てることができたが, 位相的弦理論では初めからそのようなことはなされてしまっていると考えられるのである. これは話を簡単にするという意味で非常によいことで, 以下での一連の設定でそう仮定することにする. またより高い string のモードはどうなっているのかというと, より高い open string の状態は位相的弦理論ではやはり自明なのである. これは始めにみた位相的理論は非常に沢山ある massive な open string の状態を全て取り除いたものであり, 既に $\alpha' \to 0$ limit が取られて decouple したものになっていると考えられるためである. したがって今述べた状況は, open string と closed string は既に decouple しており, open string の dynamics は $U(N)$ Chern-Simons ゲージ理論により与えられるということである.

では, なぜ S^3 ないし 3 次元多様体上にあるゲージ場の自由度の力学が $U(N)$ Chern-Simons ゲージ理論により定義されるのだろうか? これを理解する一つの方法を議論したい.

位相的弦理論に戻ってみると, ここでは非線形シグマ模型は境界をもち, その BRST 対称性を壊さない境界条件は special Lagrangian submanifold となるのであった. このシグマ模型を, 通常の弦理論で Chan-Paton 因子を導入する場合のように, target space のゲージ場 A を worldsheet の端 $\partial\Sigma = C$ 上を伝播する "チャージ" に結合させることができる. そのとき target space 内のゲージ場 A との通常の coupling を表す境界項 e^{iW} が存在することに注目する. ここで W は

$$W = \mathrm{Tr} P \exp\left[i \oint_C A_\mu(X) dX^\mu \right], \tag{4.65}$$

であり, この Wilson loop オペレータを worldsheet 上に引き戻すことを考慮にいれると, 各 C について $\Phi : \Sigma \to M$ を与えたときに, C のまわりの $\Phi^*(A)$ のホロノミーのトレースを

$$\mathrm{Tr} P \exp \oint_C \Phi^*(A), \tag{4.66}$$

のようにとればよい. 2 章で見たようにツイストした非線形シグマ模型では Q オペレータの BRST コホモロジーを定義することができ, Q が W を消すという条件が W がオブザーバブルとなるための条件であった. これは非常に強い条件であり, 経路積分にこのオペレータを挿入した場合に BRST 対称性を壊さないようにしなければならないため, 実際に BRST 変換を施

すことにより

$$\{Q,W\}=0 \;\rightarrow\; \mathrm{Tr}\oint_C \delta X^I \frac{dX^J}{d\tau}F_{IJ}(\tau)d\tau\cdot P\exp\oint_{C;\tau}\Phi^*(A)=0, \tag{4.67}$$

$$\rightarrow\; F_{IJ}=0, \tag{4.68}$$

を得る. つまり, $\{Q,W\}$ は C のまわりのホロノミーのトレースの変化で書ける. ここで, τ は C 上の座標であり, $\exp\oint_{C;\tau}\Phi^*(A)$ は τ で始まり終わる C のまわりの $\Phi^*(A)$ のホロノミーである. さらに, F_{IJ} (正確には $\Phi^*(F_{IJ})$) は target space の曲率 F の Φ による引き戻しの成分をあらわす. ここで, A モデルの BRST 変換則 (2.17) を思い出すと, F が消えるときにのみ ホロノミーが BRST 不変となることがわかる. したがって, A モデルでは K 上の平坦接続 (M 上ではない) にのみ結合できる. このように W を Q で変分すると A の微分をとることになり, field strength がゼロになる条件を与えるのである. したがって background にゲージ場を加えたいのならば, F_{IJ} は平坦接続でなければならない. これは BRST 対称性により課される非常に強い制限である. これは通常の bosonic string の理論において, Einstein の運動方程式を満たす background metric のみを付け加えることができるという状況によく似ている. したがって今の場合の低エネルギーでのラグランジアンは, bosonic string の理論で β 関数への α' 補正が古典的な Einstein 作用への補正などを与えたのと同様の意味で, $\alpha'\to 0$ のときに運動方程式として $F_{IJ}=0$ を与えるものでなければならない. 素朴には 3 次元のゲージ場に関する Maxwell の作用を考えるわけだが, 運動方程式としての $F=0$ は出て来ず, 平坦接続の条件は Chern-Simons ゲージ理論のラグランジアン

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{k}{4\pi}\mathrm{Tr}\left[A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right], \tag{4.69}$$

$$\;=\; \frac{k}{4\pi}\mathrm{Tr}\left[\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda+\frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\lambda\right], \tag{4.70}$$

の運動方程式から出て来るのである. このラグランジアンは 3 次元多様体上でのみ定義され, 一見ゲージ不変にみえないかもしれないが, ゲージ不変であることが示される (Appendix C 参照). また, Yang-Mills 理論と弦理論の対応では closed string の理論の Einstein-Hilbert limit を考えなければいけなかったけれども, ここでの議論は厳密な結果で, ラグランジアンは位相的弦理論での通常の議論により再び α' 補正を持たないことがわかる. また, Chern-Simons ゲージ理論はゲージ拘束条件を課して正準量子化すると有限次元のヒルベルト空間が得られるために可解である [23].

この章での議論をまとめると, T^*S^3 上の open string の位相的弦理論 (A-model) を考えると, open string と closed string は decouple しており, その dynamics はちょうど S^3 上の $SU(N)$ Chern-Simons ゲージ理論で与えられるということである. ここで, ゲージ群を $U(N)$ を $SU(N)$ に制限したが, これは後で再び触れる AdS/CFT 対応における $\mathcal{N}=4$ Yang-Mills での状況と

同じである. また AdS/CFT 対応とのアナロジーにも注意しておくとよく, D3 ブレイン上の $\mathcal{N}=4$ SYM というのは, 10 次元空間内の open string がこの D3 ブレイン上にのみ Dirichlet 境界条件をもつものと考えられる.

(質問) どのように $U(N)$ Chan-Paton 因子が現れるのですか?

(回答) ある意味で通常のように, 理論で任意の Chan-Paton 因子を手で導入することができます. 言い替えると N 枚の D ブレインを手にしているともみなせます. 例えば通常の弦理論を考えるならば, 何回も巻き付いたブレインを考えていることになります.

(質問) 本当に何回も巻いたブレインを考えているのですか?

(回答) この S^3 上には望むならば N 枚の D ブレインが存在させることができるため, ある意味でこれは何回も巻き付いたブレインです. しかし通常の Yang-Mills の場合にはこのような束縛状態をもたないため, これは通常の Yang-Mills の場合と同じではありません. 通常はこれらのブレインの束縛状態があるかどうか, あるいは超対称性を保つかどうかというのは dynamical な問題でしたが, ここで登場するトポロジカルなブレインは重力に結合しておらず, テンションを持たないため, 超対称性を保つことに関する障害がないのです. 通常の弦理論でも超対称な基底状態をつくる N 枚の D ブレインをもてますが, ここでは何の障害もなく $U(N)$ Chan-Paton 因子をもった球面上に Dirichlet 境界条件をもてるのです.

(質問) ここでのラージ N はリーマン面の境界成分の数に対応しているのですか?

(回答) いいえ. ここでは通常の弦理論で考えているように, 任意の N に対して唯一つの境界をもっているだけです. これは, string の端点に存在する自由度なのです.

5 位相的弦理論における双対性

ここでは AdS/CFT 対応でのように, ブレインの worldvolume 上にある Chern-Simons ゲージ理論が 2,3 章で調べた closed string の理論に双対な理論となることを議論しその証拠を幾つか取り上げてみたい [2]. closed string の位相的弦理論がラージ N ゲージ理論の双対な記述を与えることが 2,3 章での話しの動機となっていたのである. ラージ N ゲージ理論が弦理論に関係する事実はかなり一般的なことなため, 一般のラージ N 展開について少し考えてから位相的弦理論について見ていきたい.

5.1 双対性の主張

't Hooft 展開 [24] を思い出そう (図 9). planar diagram は以下のようにして実は open string

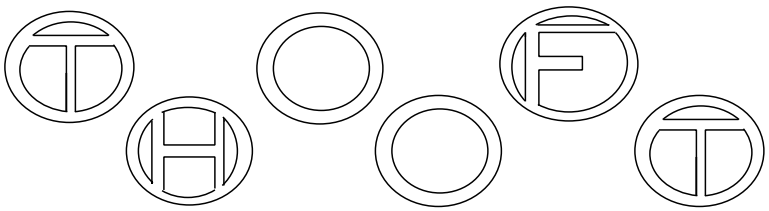

図 8: 'tHooft

の diagram と思うことができる. ファインマン図を計算して自由エネルギーを求めているとすると,

$$F = \sum_{\text{DIAGR.}} N^h \kappa^{E-V}(\quad), \qquad S \sim \frac{1}{2\kappa}\int \mathcal{L}, \tag{5.71}$$

のように N と coupling κ のべきによる重みのついた様々な寄与についての和となる. 各ループをまわると N が出るので, N のべきは穴の数 h である. また κ は運動エネルギー項が規格化されたものであるため, グラフの辺の数のべきを持つ. さらにグラフの各頂点は $1/\kappa$ の因子を与えるため, グラフの頂点から κ^{-V} を与える. したがって N と κ に関する重みは $N^h\kappa^{E-V}$ となる. もちろん通常の積分や組み合わせの因子も全て考えるべきである. ここでオイラーの公式 $V - E + h = 2 - 2g$ を用いてやると種数と穴の数で書き直せて

$$F = \sum_{g=0,h=1} N^h \kappa^{2g-2+h} C_{g,h}, \tag{5.72}$$

となる. 但し $C_{g,h}$ は残りの因子を全て取り込んでいる. 'tHooft の扱いでは, $\lambda = \kappa N$ を固定したまま考えるため, 'tHooft coupling $\lambda = \kappa N$ を導入して

$$F = \sum_{g=0,h=1} N^{2-2g} \kappa^{2g-2+h} C_{g,h}, \tag{5.73}$$

と書き直すと, N のべきは $2-2g$ で, λ のべきは $2g-2+h$ となり, あとは理論に応じて組み合わせの因子などから $C_{g,h}$ が決まる. これは一般的なラージ N 展開に現れる構造であるが, ここで重要なことはこれが種数と穴の数両方についての 2 重展開であることであり, その意味でこれは open string に関する展開と見なすことができるのである. したがってラージ N ゲージ理論の摂動展開に現れるファインマン図は open string の展開と見立てることができる. これは open string の理論が本当にゲージ理論に落ちる, ないし (時々) 等しくなるということを意味するため, 驚くべきことである (しかし N 枚の $D3$ ブレインがある時の $N = 4$ SYM の場合に

もこの状況が生ずることを知っているとそれほど驚きではないかもしれないが). 実際に open string の図が低エネルギーでファインマン図に落ちる様子を考えると, open string が崩壊して縮む時に open string の図とファインマン図の間には $1:1$ 対応が存在するということになっている (図 10). これを見るとこの種の関係があることは自然に思われるであろう.

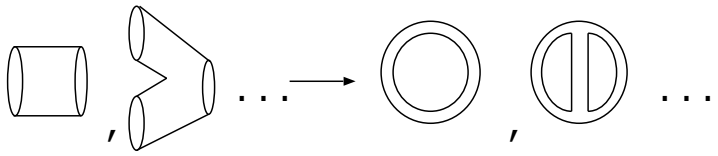

図 9: open string と planar 図の対応

以上でゲージ理論を open string の理論として考える手法を述べたわけだが, 4 章で見たことは 3 次元多様体上の $U(N)$ Chern-Simons ゲージ理論が open string の位相的弦理論から現れるということである. この状況ではより特殊で, $C_{g,h}$ は種数 g で穴を h 個もつリーマン面上の open string の理論の分配関数 $Z_{g,h}$ に等しいと主張される [22]. すなわち, 実際に open string の展開で各項が与えた数のハンドルと穴をもったリーマン面の分配関数に対応しているのである.

これから自明でない予想を立てるために理解したいことは, closed string がどのように出現するのかということである. そこでラージ N ゲージ理論の議論に現れる planar diagram と closed string との関係を探したいのだが, これはゲージ理論の摂動展開において穴の数について和をとることから生ずると考えることができる. まず 級数 (5.73) は 'tHooft coupling の小さい所で妥当な摂動級数であったことに注意しよう. ここで 'tHooft coupling を大きくしていくと穴の数について和をとらなければならず, 一般にそのときに任意の種数に対して

$$F = \sum_{g=0} N^{2-2g} F_g(\lambda), \tag{5.74}$$

のような λ の自明でない級数が得られると考えられるのである. もちろん λ の変化にともなう収束性や相転移の問題は重要であるがここでは無視する. 各 g について λ の関数を得るため, これは closed string の展開と見なすことができよう. N^{2-2g} は closed string の coupling からくるもので, $1/N$ の genus expansion から生ずるものであり, λ は $1/\alpha'$ 展開からくるものと見なせる.

$\mathcal{N}=4$ SYM では本当にこれが生ずることが知られている [20]. まず D ブレインとファインマン図による摂動的描像が存在するわけだが, 通常の $\mathcal{N}=4$ SYM を描くファインマン図に open string を対応させることができる. しかし穴の数について和をとって得られる双対な描像が存在し, これは強結合でより有効な描像であると考えられる. この特殊な closed string の理

論は $AdS_5 \times S^5$ background をもつ closed string の理論である. すなわちこの過程で生じたことは穴の数について和をとる過程で open string の理論が closed string の理論に転化し, さらにその closed string の理論は始めと異なる target space をもつということ (condensation) であり, これは非常に驚くべきことである. 平坦な $\mathbf{R}^{10}$ 内の N 枚の D3 ブレインの初期配位が存在し, ブレインは $\mathbf{R}^4$ を占め, 6 つの transverse な方向をもつ. しかし穴の数について和をとりきるまでに双対な描像に移行し, 異なる target space $AdS_5 \times S^5$ を伝播する closed string の理論を得るのである.

これは少し驚くべきことに見えるかも知れないが, 実はよく生ずることであるということを理解するために, 同様なレベルで生ずることを知っている例を引き合いに出してみよう. まずある vertex operator の挿入でできた puncture をもった通常の弦理論を考えてみよう. そのとき例えば graviton の vertex operator を正しいウエイトで挿入してその graviton の挿入を exponentiate しておくと, 始めは平坦な background で考えていても全ての puncture について和を取った場合にもう一つの等価なシグマ模型に到達する. しかし今度は全く puncture がなく, 異なる target space を持っていることが重要である. この描像を絵で書くと図 11 のようになる.

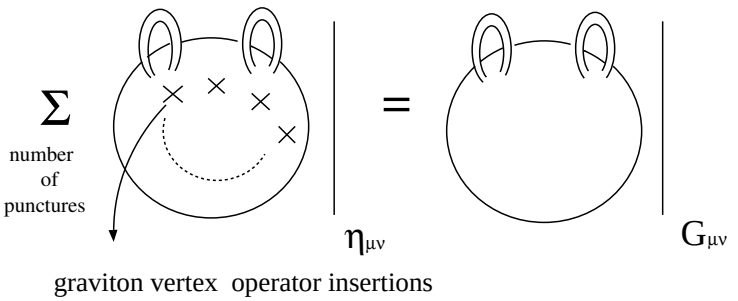

図 10: target space の変化

一方現在の位相的弦理論の話しで生ずることは, 全ての穴がある状況から始めてそれらの穴全てについて和を取りきってやると, その耳のみが残りもう笑い猫ではなくなってバックグラウンドが変わるということである (図 12). 左がもとのゲージ理論が定義された open string の background で, 右が一般に異なる closed string の background である. したがって S^3 上の $SU(N)$ Chern-Simons ゲージ理論, すなわち S^3 上で Dirichlet 境界条件をもつ cotangent space T^*S^3 上の open string の位相的弦理論の A モデルが, 3 章で調べた S^2 resolved conifold 上の closed string の位相的弦理論に双対な理論であるということを主張したい (図 13). open string の background は T^*S^3 で, これは大雑把には左端のように思うことができる. T^*S^3 には Lagrangian submanifold である有限サイズの S^3 とその 3 つの法線方向が存在し, S^3 を位置

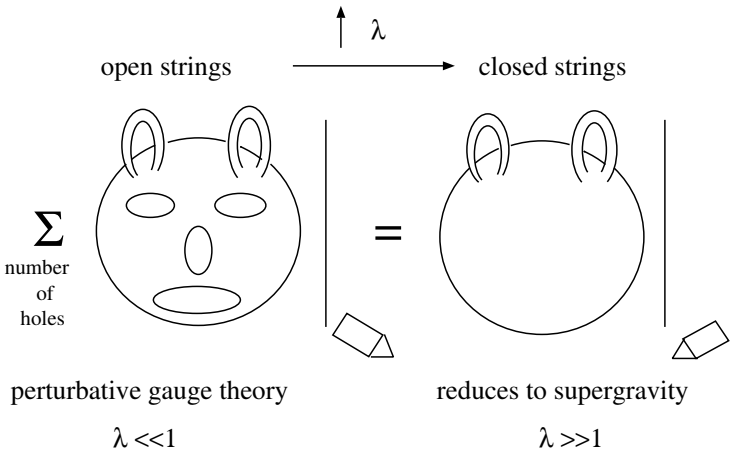

図 11: 位相的弦理論における target space の変化

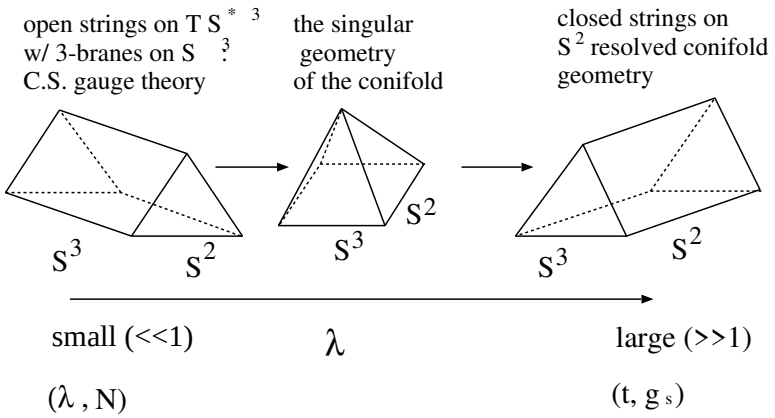

図 12: conifold transition を介した open string と closed string の双対性

と思うと位置方向に垂直と思える 3 つの運動量が存在するが, 3 つの法線方向は局所的に $\mathbf{R}^3$ で, この $\mathbf{R}^3$ は動径方向に無限遠から原点に向かってサイズ 0 に縮む S^2 が存在する. したがって, S^2 は無限遠では S^2 であるが, 原点でサイズ 0 に縮み, S^3 はいたるところ有限サイズのままである. 一方 closed string の background は S^2 resolved conifold であり右端のように見える. この場合有限サイズの S^2 があり, transverse な 4 次元は動径方向に縮む S^3 と思える. したがって, S^3 のサイズが 0 に行き, 代わりに有限サイズの S^2 を得るという遷移 (conifold transition) を通してこの 2 つの target space が関係していると考えられる.

ではこの予想において, 様々なパラメータの間の対応はどうなっているのだろうか? まず S^3 上の Chern-Simons ゲージ理論のパラメータは 'tHooft coupling λ とゲージ群のランク N であ

る. 一方 closed string の理論のパラメータは string coupling g_s と S^2 のサイズに対応するケーラーパラメータ t である. このときこの両者の対応は

$$t = A + iB = i\lambda, \quad g_s = i\frac{\lambda}{N}, \tag{5.75}$$

で与えられると予想される. S^2 のサイズは 'tHooft coupling に対応し, closed string の coupling はよく見られる形で期待通りである.

ここで S^3 を S^4 に, S^2 を S^5 に置き換えるとトポロジカルなレベルで見たことが AdS/CFT 対応で見たことに非常に良く似ていることに注意しよう (図 14). 左の状況では, もともと $\mathbf{R}^4$

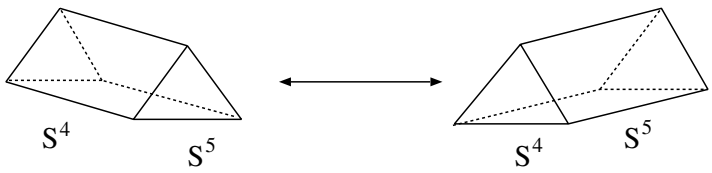

図 13: AdS/CFT 対応

上にある D3 ブレインが存在するのだが, $\mathcal{N} = 4$ SYM は Euclidean の場合には実は S^4 上で最も性質のよいものとして定義されるため [22] ゲージ理論の住む空間は有限サイズの S^4 として考えられ, また動径方向に向かってサイズ 0 に縮む S^5 と考えられる 6 次元の法線方向 $\mathbf{R}^6$ が存在する. しかしもう一方の $AdS_5 \times S^5$ 上の closed string の理論を与える右の描像では, S^4 と S^5 が入れ替わった格好になっており, S^5 は有限サイズであるが, S^4 は AdS_5 の境界と思えるため, AdS 空間の中心へ行く時にサイズが 0 に縮むことになる. すなわち S^4 は可縮であるが, S^5 は縮まない. さらに AdS/CFT 対応におけるパラメータの対応は,

$$g_s = \frac{\lambda}{N}, \qquad \int_{S^5} F = \lambda^{1/4}, \tag{5.76}$$

であったことから見ても, 我々の予想はコンシステントな描像に見える. 但し, 位相的弦理論の場合にはゲージ理論の closed string による描像は 1 次元高いものにはなっていない.

(質問) open string と closed string のパラメータの間の対応に虚数 i が現れていますよね? パラメータが変な領域にあるように思えますが, どのように考えるのですか?

(回答) はい, 2 つのことを言わなければなりません. まず, ケーラーパラメータ t が 't Hooft coupling に虚数 i を掛けたものになっているのは奇妙に思えます. 本質的には, 実数の λ に対する Chern-Sions ゲージ理論は面積ゼロであることをいっているのだと思いますが, S^2 には non-zero の B field が存在するために問題がないと考えます.

(質問) しかし S^2 のサイズは消えているはずですよね?

(回答) 確かにそうですが, B field が存在しているために BPS チャージが存在すると考えられます.

(質問) 他のパラメータはどうなのですか?

(回答) string coupling についてはうまく理解するアイデアをもっていません. しかし, 私はたいして重要ではないことであると考えています. というのも, Chern-Simons ゲージ理論のラグランジアン自体が $\exp\left(\frac{ik}{4\pi}\dots\right)$ のように現れるからです. ある Euclidean continuation をするときの convension であるというのが最良の回答です. ともかく, まだはっきりとした理解はないです. しかし, この講義に現れる表現は全て g_s, λ について解析的です. 講義の後でもう少し議論しましょう.

5.2 双対性の証拠

位相的弦理論に関する双対性の証拠を AdS/CFT 対応の場合と同様に調べよう.

分配関数

最も詳細な予想のチェックは分配関数に関するものである. closed string の A モデルの位相的弦理論は worldsheet instanton についての和をもち, S^2 resolved conifold background 上での位相的弦理論の分配関数の厳密な回答が得られることは 3 章で見た通りで, Schwinger の回答を用いて D0 ブレインと D2 ブレインの寄与から得られるのであった. 一方, Chern-Simons ゲージ理論の厳密な答えも知られている [23] (Appendix C 参照). S^3 上のレベル k の $SU(N)$ Chern-Simons ゲージ理論の分配関数は $SU(N)_k$ WZW 理論の character の S 変換に関する $SL(2,\mathbf{Z})$ 行列の成分から得られ,

$$S_{00}^{N,K} = Z^{N,k}(S^3) \equiv e^{-F(S^3,N,k)} = \frac{1}{(N+k)^{N/2}} \prod_{j=1}^{N-1} \left[2\sin\left(\frac{j\pi}{N+k}\right)\right]^{N-j}, \tag{5.77}$$

のように, N, k についての関数として厳密に与えられる. 自由エネルギーはその対数で与えられ, 'tHooft 展開 (5.74) を行うことができる. k は Chern-Simons ゲージ理論のレベルで規格化として現われる因子であるが, $e^{\frac{ik}{4\pi}\cdots}$ と分子に現われるため, 本質的に $1/k$ を coupling と思うことができる. Yang-Mills coupling が $1/g_{YM}^2$ と現われると思いたいならば, $1/k$ が g_{YM}^2 にあたっている. また非常に素朴には N/k を 'tHooft coupling と思うことができるが, 実は Chern-Simons ゲージ理論では k は量子補正により $k+N$ へ繰り込まれるため, 'tHooft 展開を行うのに適切な繰り込まれた coupling は $N/(k+N)$ に比例して,

$$\lambda_b = \frac{2\pi N}{k} \longrightarrow \lambda = \frac{2\pi N}{k+N}, \tag{5.78}$$

と与えられる [23]. これは予想を確認するのに非常に重要であり, これから実際に 2 つの回答が一致することを確認できる. Chern-Simons ゲージ理論の分配関数を展開して, 欲しい種数に対応する項を取り出せばよい.

種数 0 の場合, 展開して N^2 を含む部分を取り出すと,

$$N^2 F_0(\lambda) = -\left(\frac{N}{\lambda}\right)^2 \left[-\zeta(3) + \frac{i\pi^2}{6}\lambda - i\left(m+\frac{1}{4}\right)\pi\lambda^2 + \frac{i\lambda^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-in\lambda}}{n^3}\right], \tag{5.79}$$

となり, λ の 3 次までの多項式と $e^{-\lambda}$ の指数項の級数が存在する. ここで λ をケーラーパラメータで書く対応 (5.75) を用いると

$$\longrightarrow \frac{1}{g_s^2}\left[-\zeta(3) + \frac{\pi^6}{6}t + i\left(m+\frac{1}{4}\right)\pi t^2 - \frac{t^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nt}}{n^3}\right], \tag{5.80}$$

が得られる. これを以前見た closed string の位相的弦理論のプレポテンシャルと比較すると, S^2 resolved conifold background 上の closed string の種数 0 の回答 (3.51) と見事に一致する.

同様に種数 1 の場合を考えよう. 展開して N^0 の項を Chern-Simon ゲージ理論から取り出すと,

$$N^0 F_1(\lambda) = \frac{iB_1}{4}\lambda + \frac{B_1}{2}\ln(1-e^{-i\lambda}). \tag{5.81}$$

となるが, パラメータの変換 (5.75) を用いると

$$\longrightarrow \frac{1}{24}t + \frac{1}{12}\ln(1-e^{-t}), \tag{5.82}$$

が得られ, t に線形な項と e^{-t} という級数をもつことがわかる. これはやはり種数 1 の closed string の表式 (3.53) と厳密に一致している.

しかし, 最も驚くことは種数が 1 よりも大きい場合にも再び一致することである. ゲージ理論での 'tHooft 展開の一般項は非常に込み入った形になるが, resummation をとってパラメータの変換 (5.75) を用いて書き換えると,

$$N^{2-2g}F_g(\lambda) = \left(\frac{N}{\lambda}\right)^{2-2g}\left[(-1)^{g-1}\chi_g\frac{2\zeta(2g-2)}{(2\pi)^{2g-2}} - \chi_g\sum_{n\in\mathbf{Z}}\frac{1}{(\lambda+2\pi n)^{2g-2}}\right], \tag{5.83}$$

$$\longrightarrow g_s^{2g-2}\left[(-1)^{g-1}\chi_g\frac{2\zeta(2g-2)}{(2\pi)^{2g-2}} - \frac{\chi_g}{(2g-3)!}\sum_{n=1}^{\infty}n^{2g-3}e^{-nt}\right], \tag{5.84}$$

となり, S^2 resolved conifold 上の closed string の位相的弦理論の分配関数 (3.48) のように見える. $\mathcal{F}_g(t)$ は D0 ブレインと D2 ブレインからの 2 つの項をもつが, 全ての係数が見事に一致している.

アノマリー

もう一つ驚くべきことを議論したい. それはアノマリーに関することで, 実は geometry に反映されるゲージ理論のアノマリーが存在する. これは AdS/CFT 対応で注目された holographic principle に関連して議論された一種の紫外と赤外の逆転関係 (IR/UV 対応) [25] に対応するものと考えられ, ゲージ理論の紫外からくる効果が closed string の理論における赤外での現象に反映されるということを意味する.

Chern-Simons ゲージ理論の background は S^3 であったが, その計量は自由エネルギーのどこにも現われなかった. これは理論がトポロジカルであるためであるが, 実は通常の正則化で生ずる微妙な計量への依存性が存在する. すなわち Chern-Sions ゲージ理論の作用には計量テンソルがないため, background の計量への依存性をもたないが, 量子補正により residual な計量依存性が生ずるのである. これはゲージを固定してゴーストなどを導入すると, バックグラウンドの計量を取りあげて計算の最後に付け加えなければならないためである. その効果は自由エネルギーのトポロジカルな部分に background のスピン接続 ω に関係する部分が付け加わるという形で現れる. これは 3 次元多様体上のスピン接続の Chern-Simons 作用の形をとり, バルクの重力への結合からくる量子補正を考慮した自由エネルギーは

$$F = F_{\rm top} + \frac{i\pi c}{12} I(\omega), \tag{5.85}$$

$$I(\omega) \equiv \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3} L_{CS}(\omega) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3} {\rm Tr}\left(\omega d\omega + \frac{2}{3}\omega^3\right), \tag{5.86}$$

と与えられる [23]. $I(\omega)$ は Chern-Simons 作用そのもので, レベル k の $SU(N)$ WZW 理論のセントラルチャージ

$$c = \frac{k(N^2-1)}{k+N} = -\frac{1}{2\pi}(N^2-1)(\lambda - 2\pi), \tag{5.87}$$

に比例する項をもつ. 位相的弦理論の A モデルの closed string のセクターと Chern-Simons 理論を与える open string のセクターの間のカップリングはこれに限ると予想されている [22]. セントラルチャージ c について面白いことは N^2, N^0 の項のみを持つことであり, これは量子補正が種数 0, 1 の効果のみに起因することを意味する. これは AdS/CFT 対応の conformal anomaly に関する議論とよく似ている [26]. $\mathcal{N}=4$ SYM は平坦な空間上では共形不変性をもつが, 自明でない多様体上ではアノマリーが存在し, 種数 0, 1 からくる N^2-1 依存性を持っていた. ともかくゲージ理論のアノマリーは理論の紫外正則化から生ずるのが要点であって, これから見たいことはこれが closed string の理論の何らかの赤外の効果から生ずるということである. これが生ずる要因は考えている closed string の理論の target space が S^2 resolved conifold, つまり無限遠へ広がって行く cone というノンコンパクトな空間であるためということが判明する.

このアノマリーが closed string 側から種数 1 でどのように現われるのかを見てみよう. 種数が 1 よりも大きい位相的弦理論の分配関数は M 理論とのつながりなどを用いた新しい情報か

らわかったが, 種数 1 の場合にはより convensional な技術を用いて以前に研究された結果が存在していた [7]. Calabi-Yau 多様体の体積が非常に大きい極限での種数 1 の分配関数の leading term を書き出すと,

$$\mathcal{F}_1(t) = -\frac{1}{24}\left[\frac{1}{8\pi^2}\int k \wedge \mathrm{tr}(R \wedge R)\right] + \mathcal{O}(e^{-t}), \tag{5.88}$$

となり, 6 形式が Calabi-Yau 多様体全体で積分された項をもつ. これは空間がコンパクトな限りはトポロジカルな量で, $k \wedge c_2$ となるのだが, ノンコンパクトな空間ではこれは位相不変量にはならない. ずっと理解しやすいリーマン面の場合を考えよう. リーマン面上では曲率の積分 $\int R$ は, リーマン面が閉じている限りは位相不変量である. しかし境界がある場合には, extrinsic curvature に比例する境界項をつけ加えて,

$$\int_\Sigma R - (\quad)\int_{\partial\Sigma} K, \tag{5.89}$$

という組み合せを考えなければ位相不変量とならない. すなわち実 6 次元のこの空間を truncate して境界項を付け加えなければならないのである. S^2 resolved conifold では無限遠での境界はトポロジカルに $S^3 \times S^2$ であったから,

$$\frac{1}{8\pi^2}\int k \wedge \mathrm{Tr}(R \wedge R) - \int_{S^3} I(\omega)\int_{S^2} k, \tag{5.90}$$

のように境界項を付け加えてやれば位相不変となるが, この境界の寄与はまさに重力 Chern-Simons 項となるのである. この項の位相不変性は $\mathrm{Tr}(R \wedge R) = dL_{CS}(\omega)$ よりチェックできる. 結局位相的弦理論の求めるこの対象は位相的部分と重力 Chern-Simons 項に比例した項の和となる. 分配関数を書き下す場合には S^2 上のケーラー類の積分が存在するため, λ をかけることになり

$$\mathcal{F}_1(t) = \mathcal{F}_1^{\mathrm{Top}} + \frac{1}{24} I(\omega)\int_{S^2} k, \tag{5.91}$$

が得られる. したがって, これはまさにゲージ理論のアノマリーの形と一致している. 係数も正確にチェックできることをみよう. 種数 1 の N^0 項は, 対称性として λ のシフト $\lambda \to \lambda + 2\pi$ を許せば $N^0 I(\omega)$ の係数が $i\frac{\lambda}{24}$ となり一致する. またゲージ群は $U(N)$ ではなく, $SU(N)$ であることがアノマリーの一致に重要であったことにも注意したい. 同様に N^2 項を種数 0 から厳密にチェックすることもできる. これはパラメータの対応 (5.75) のさらなるチェックともみなせるであろう.

Wilson ループ

Wilson ループに関する議論もできるが, まだ確定的なことは言えないため少しだけ触れるにとどめたい. Chern-Simons ゲージ理論はトポロジカルなために局所的なオブザーバブルはもた

ないのだが, トポロジカルに自明でなループが存在し得るため Wilson ループにより与えられるオブザーバブルをもち, この Wilson ループの期待値は重要なトポロジカルな情報を与えることが知られており [23], これを担う knot の不変量は HOMFLY 多項式で与えられる. この情報は closed string の側からどのように見えるのだろうか? AdS/CFT 対応の場合と同じように [27], このループに bound した曲面により closed string の側でこの Wilson ループの双対な記述を与えると考えるべきである. しかし境界をもった曲面, つまり境界つきの worldsheet instanton を含んだ量を計算するのは通常の worldsheet instanton よりもはるかに困難である. 曲面全体に巻き付く正則写像については 2 章で議論したが, 何らかの境界に端をもつような正則写像についてはまだよくわかっていない部分が多いため, ゲージ理論の回答と比較するのは現状では困難である. 完全に計算した結果はないものの, Ooguri and Vafa [28] が unknotted link という最も簡単な場合に具体的な結果を得ている. 彼等はゲージ理論の回答との一致を得たので, さらに一般に機能するのかを追求するのは面白いと考えられる. またより一般の link に関してはスケイン関係式を用いて考えることができると期待される. このようなアプローチを進めることにより, knot の不変量に境界付きの正則曲面から完全に異なる再解釈を与えることが期待される.

(質問) Chern-Simons ゲージ理論のカップリングの有限の繰り込みを closed string の理論で理解できるのですか? この繰り込みは, その寄与が消えるように closed string の場を調節しているように見えます. すなわち, 通常の Chern-Simons ゲージ理論の摂動論ではゲージ理論の Wilson line は始点と終点がくっついてループをつくり可縮です. これは open string のプロパゲータへの 1 ループの補正ですが, closed string の描像では真空へと消える closed string の tree の効果に対応します.

(回答) わかりました. あなたは closed string の立場から open string の繰り込みを解釈したいのですね. あなたは worldsheet duality のようなものを想定しているのでしょうが, ここで現れている closed string はおそらくそういうこととは少し異なるものであると思うので, 私は closed string の立場からこの繰り込みを理解できません. 確かにあなたのおっしゃることはこの問題を考えるよい方法だと思いますが, closed string は open string と異なる target space を伝播しているため, worldsheet duality がどのように働いているのかがよくわかりません. 通常の worldsheet duality ではもとの target space と同じ弦理論を考えていますが, ここでは closed string channel で background を変更しなければならない方法を探す必要があります. しかし, あなたの提案はきっと意味があるのでしょう.

6 まとめ

closed string の位相的弦理論について得られた知見をもう一度振り返ってみたい.

- 位相的弦理論の全ての種数に関する回答が M 理論から単純な機構で与えられた.
- 弱結合での worldsheet instanton が強結合での wrapped D-brane に対応した.
- 位相的弦理論の非摂動的構造は弦理論の隠された対称性について示唆的であった.
- open string の理論 (ラージ N ゲージ理論) への関連をつけた.

AdS/CFT 対応にも見られるように, open string と closed string の理論はより大きな理論の異なるセクターとして埋め込まれていると考えられる. AdS/CFT 対応ではラージ N ゲージ理論と closed string の理論が関係するが, ここではラージ N 位相的場の理論が closed string の位相的弦理論に関係した. 位相的弦理論でこの様に考えてやる利点は, 両者がともに Ramond-Ramond 場のようなものは存在しない well-defined なシグマ模型で書け, さらに両側で解けるために第一原理から導出される可能性があるからである. 5 章で見たように, ゲージ理論と closed string の両方で任意の種数の量を厳密に計算できるが, このような計算上のチェックではなく, 第一原理, すなわち何か基礎となる dynamical な原理から我々の予想を導くことが出来るべきであると思いたい. このようなことを考えるにあたっては, $\lambda = g_s N \to 0$ となる場合に D ブレインの描像をどのように再現するのかが問題となる. すなわち, closed string の理論から $\lambda \to 0$ となる場合に closed string に穴が生成させるようなダイナミカルな原理が必要であると考えられる. 我々は線形シグマ模型 [29] を用いることを提案したが, これは時間がないために話せない. この以外にも色々な手法を探すことが望ましいと思われる.

ラージ N ゲージ理論と弦理論の間の一般の対応について, この話からどのような教訓を引き出すべきなのかを考えることは有益であろう. ここで見た位相的弦理論は十分に簡単な理論であったため, なんらかの直観が得られると期待できるからである. さらに穴について和をとることで closed string の理論が得られるという概念は dynamical に実現されているものであるから, これは target space にどのように closed string が出現するべきかなどといった問題を理解するのに位相的弦理論は役立つことと思われる. もちろん不都合なこともあって, 位相的弦理論は自明な dynamics しかもたないために, 量子重力や holography のような問題への示唆は得られないのだが.

この講義で話した結果に沿って, 多くの興味深い研究が残っていると考えられる.

Appendix A: 位相的弦理論の分配関数に関する補足

Calabi-Yau 多様体の対 (M, M^*) がミラー対であるとは, M 上の A モデルが M^* 上の B モデルに場の理論として等価であることをいい, もちろん逆も正しい. この 2 つの位相的場の理論の間の等価性がミラー対称性と呼ばれる. A, B モデルにおける $(c,c),(c,a)$ プライマリ場の 3 点関数は湯川カップリングに対応することが知られている. A モデルでは $G^+, \bar{G}^+$ により生成される BRST 対称性により, インスタントン近似が厳密な回答を与えることが示せ, 湯川カップリングは S^2 から M への正則写像についての和となり,

$$C_{ijk} = \int_M k_i \wedge k_j \wedge k_k + \sum_s N_s^{(0)} s_i s_j s_k \frac{\exp\left(-\sum_i s_i t^i\right)}{1-\exp\left(-\sum_i s_i t^i\right)}, \tag{6.92}$$

と与えられる. ここで, $N_s^{(0)}$ は $s_i = \int_{S^2} k_i$ となるような M に正則に埋め込まれた S^2 の数であり, M のケーラー類の展開を $k = \sum_i t^i k_i$ と $H^{1,1}(M, \mathbf{Z})$ の基底 k_i で書くと, その展開係数 t^i がケーラーモジュライになっている. $N_s^{(0)}$ は M の複素構造によらないため, C_{ijk} も M の複素構造によらない. 一方 B モデルでは M のケーラー構造の変形は全て BRST-trivial となるため, 湯川カップリング $\bar{C}_{ijk}$ は M のケーラー構造によらない. したがって M の体積が非常に大きい極限で評価でき, これは古典的な代数幾何の問題となる. (c,a) プライマリ場は M の複素構造の無限小変形を生成する $H^{2,1}(M)$ の要素に対応し, 湯川カップリングは M の複素構造のモジュライ y^i を用いて

$$\bar{C}_{ijk} = \int_M \Omega \wedge \frac{\partial^3}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} \Omega, \tag{6.93}$$

と与えられ, Hodge 構造の変形のテクニックを用いて計算できる. 一方 A モデルの湯川カップリングを直接評価するのは易しくないが, M がミラー対 M^* を持つ場合には, C_{ijk} の計算は $\bar{C}_{ijk}$ の計算に還元され, M 内の有理曲線の数 $N_s^{(0)}$ を導出できる [16]. もちろんミラー対称性は場の理論としての等価性なため, worldsheet が S^2 の場合のみでなく高い種数の曲面についても成立すると考えられる.

湯川カップリングは M 上の有理曲線の和であったが, 種数 1 の分配関数 $\mathcal{F}_1$ のケーラーモジュライに依存する部分は M 上の正則な楕円曲線についての和になるのだろうか? これはほぼ正しいが, 若干の変更を加えなければならない. インスタントン近似が厳密ならば $\mathcal{F}_g$ は $\bar{t}^i$ に依存すべきではないのだが, 正則アノマリーの意味することは $\mathcal{F}_g$ が t^i のみでなく反正則ケーラーモジュライ $\bar{t}_i$ にも依存してしまうことであったから, 矛盾が生じてしまうためである. しかし $\mathcal{F}_g$ から正則写像の和を再現することは可能で, $\bar{t}^i \to \infty$ で経路積分を評価すると,

$$\frac{\partial}{\partial t^i}\mathcal{F}_1 \simeq -\frac{1}{24}\int_M k_i \wedge c_2 + \sum_s s_i N_s^{(1)} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-N\sum s_j t^j\right)}{1-\exp\left(-N\sum s_j t^j\right)} + \frac{1}{12}\sum_s s_i N_s^{(0)} \frac{\exp\left(-\sum s_j t^j\right)}{1-\exp\left(-\sum s_j t^j\right)}, \tag{6.94}$$

が得られる [7]. $\partial\mathcal{F}_1$ という 1 階微分を考える理由は, 定数項をおとすためである. 第 1 項は constant map からの寄与であり, $\frac{1}{24} = -\frac{1}{2}\chi(\bar{\mathcal{M}}_1)$ である. ここで $\chi(\bar{\mathcal{M}}_1)$ が現れる理由は, constant map は worldsheet トーラス Σ_1 の任意のモジュライ τ について存在するために, $\bar{\mathcal{M}}_1$ 上で積分をする必要があるためである. 次に第 2 項の $N_s^{(1)}$ は M 上の正則楕円曲線の数である. 但し, worldsheet トーラス Σ_1 による M 内の正則楕円曲線の多重被覆も数えるために N の和が入っている. さらに第 3 項の $N_s^{(0)}$ は $\mathcal{F}_1$ に寄与する有理曲線の数であるが, これが現れる理由は 2 つある. まず, M 内曲線のモジュライ空間をコンパクト化してインスタントンモジュライ空間をつくるためである. 一般に曲線は M 内で孤立しておらず変形族をなしているため, $N_s^{(1)}$ はインスタントンモジュライ空間上のあるベクトル束のオイラー数の計算に帰着する (Gromov-Witten 不変量). その計算ではインスタントンモジュライ空間をコンパクト化する必要があるのである. そのときにモジュライ空間の境界からの寄与 $N_s^{(0)} s_i \exp\left(-\sum s_j t^j\right)$ が入ってきて, これが右辺第 3 項のテーラー展開の初項を与える. もう一つには, worldsheet トーラス Σ_1 は M 内に正則に埋め込まれた S^2 の 多重被覆として書ける場合があるためである. また, 右辺第 3 項の係数 $\frac{1}{12}$ は $\chi(\bar{\mathcal{M}}_{1,2})$ から来ている.

これを種数 2 以上に一般化することも可能である. 再び $\bar{t}^i \to \infty$ で見ると,

$$\mathcal{F}_2 \simeq \frac{\chi}{5760} + \sum_s N_s^{(2)} \exp\left(-\sum s_j t^j\right) + \frac{1}{240}\sum_s N_s^{(0)} \frac{\exp\left(-\sum s_j t^j\right)}{\left[1-\exp\left(-\sum s_j t^j\right)\right]^2}, \tag{6.95}$$

を得る [8]. 第 1 項は constant map からの寄与で, 係数は $\frac{1}{5760} = \frac{1}{2}\int_{\bar{\mathcal{M}}_2}(c_1)^3$ から決まっている. 第 2 項は正則写像の和で, $N_s^{(2)}$ は M 内の種数 2 の曲線を数えている. 第 3 項は再びインスタントンモジュライ空間の境界, 及び S^2 上の Σ_2 の多重被覆からの寄与であり, 係数は $\frac{1}{240} = -\chi(\bar{\mathcal{M}}_2)$ からきている. ここでは, worldsheet Σ_2 が Σ_1 に写されるいわゆる toroidal bubbling が存在しない.

これを種数が 3 以上の場合に拡張するには, インスタントンモジュライ空間の境界, および多重被覆の寄与について正確に理解する必要があるために数学的には非常に困難である.

Appendix B : constant map の寄与の数学的計算

位相的弦理論の n 点付きの種数 g のリーマン面 Σ_g から target space M への正則写像 $\phi : \Sigma_g \mapsto M$ のモジュライ空間の仮想次元は, Riemann-Roch の定理により

$$\begin{aligned} &n + \mathrm{dim}H^0(\Sigma_g, \phi^*(TM)) + \mathrm{dim}H^0(\Sigma_g, \mathcal{O}(2K)) - \Big(\mathrm{dim}H^1(\Sigma_g, \phi^*(TM)) + \mathrm{dim}H^1(\Sigma_g, \mathcal{O}(2K))\Big) \\ &= \mathrm{dim}_{\mathbf{C}} M\ (1-g) + \phi^*(c_1(M)) + 3g - 3 + n, \end{aligned} \tag{6.96}$$

と与えられる. ここで特に位相的重力の自由度を表す次の式に注意する.

$$\mathrm{dim}H^0(\Sigma_g, \mathcal{O}(2K)) - \mathrm{dim}H^1(\Sigma_g, \mathcal{O}(2K)) = 3g - 3. \tag{6.97}$$

Serre duality により $H^1(\Sigma_g, \mathcal{O}(2K)) = H^0(\Sigma_g, \mathcal{O}(-K)) = H^0(\Sigma_g, T\Sigma_g)$ であるから, $\mathrm{dim}H^1(\Sigma_g, \mathcal{O}(2K))$ は Σ_g の接ベクトル束の 大域正則切断の個数に等しい. これに関しては次のことが知られている.

$$\begin{aligned} \mathrm{dim}H^0(\Sigma_g, T\Sigma_g) &= 3 \quad g = 0; \quad \left(\frac{d}{dz}, z\frac{d}{dz}, z^2\frac{d}{dz}\right), \\ &\quad 1 \quad g = 1; \quad \left(\frac{d}{dz}\right), \\ &\quad 0 \quad g \geq 2. \end{aligned} \tag{6.98}$$

一方, $\mathrm{dim}H^0(\Sigma_g, \mathcal{O}(2K))$ は, Σ_g の 位相的重力のモジュライ空間の実際の次元を与える. 従って (6.97) と (6.98) により, 以下を得る.

$$\begin{aligned} \mathrm{dim}H^0(\Sigma_g, \mathcal{O}(2K)) &= 0 \quad g = 0, \\ &\quad 1 \quad g = 1, \\ &\quad 3g-3 \quad g \geq 2. \end{aligned} \tag{6.99}$$

以上の状況で注意すべきことは, 接ベクトル束の大域正則切断は Σ_g の自明でない連続自己同型群の自由度となるため, 経路積分の際にこの自由度を固定しなければならないことである. 従って, $g = 0$ の時は 3 個以上, また $g = 1$ の時は 1 個以上の外線に対応する BRST-closed operator を挿入する必要がある.

さてここで, M が 複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体の場合に話しを限ることにする. このとき, (6.96) よりモジュライ空間の仮想次元は常に n になる. さらに 正則写像 ϕ が constant map の場合を考える. この場合 topological selection rule の考察により, 実際のモジュライ空間は以下のようになる.

$$\begin{aligned} &M \times \bar{\mathcal{M}}_{0,3} \quad g = 0, \\ &M \times \bar{\mathcal{M}}_{1,1} \quad g = 1, \\ &M \times \bar{\mathcal{M}}_{g,0} \quad g \geq 2. \end{aligned} \tag{6.100}$$

ここで, $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ は種数 g で n 点付きのリーマン面の位相的重力のモジュライ空間である. つまり constant map の場合, BRST-closed operator の挿入は $g = 0$ の時は 3 個, $g = 1$ の時は 1 個, そして $g \geq 2$ の時は 0 個に限定されるのである. (6.100) で与えられる空間の実際の次元は $3 + 3g - 3 + n = 3g + n$ であるから, (6.96) と合わせて, $3g$ 個の $\psi_{\bar{z}}^i$ のゼロモードが出現する.

従って経路積分をとると, 上の自己同型群の議論と合わせて, 以下の積分が自明でない寄与として残ることになる.

$$\begin{aligned}
&\int_{M\times\bar{\mathcal{M}}_{0,3}} \pi_1^*(\alpha)\wedge\pi_1^*(\beta)\wedge\pi_1^*(\gamma) && g=0,\\
&\int_{M\times\bar{\mathcal{M}}_{1,1}} \pi_1^*(\alpha)\wedge c_T(\mathcal{E}) && g=1,\\
&\int_{M\times\bar{\mathcal{M}}_{g,0}} c_T(\mathcal{E}) && g\geq 2, \qquad (6.101)\\
&\pi_1 : M\times\bar{\mathcal{M}}_{g,n}\to M, \quad \alpha,\beta,\gamma\in H^*(M,\mathbf{C}), && (6.102)
\end{aligned}$$

但し, $\mathcal{E}$ は $\psi_{\bar{z}}^i$ のゼロモードによって定義される (6.100) のモジュライ空間上のランク $3g$ のベクトル束で, 特に $g=0$ では自明になる. また $c_T(\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}$ の top チャーン類であり, $\pi_1^*(\alpha)$ 等は $\alpha\in H^*(M,\mathbf{C})$ から得られる BRST-closed operator である. ここで次のことを用いる ($g\geq 1$).

$$\mathcal{E}\simeq TM\otimes\mathcal{H}^* := TM\otimes(R^0\pi_*(\mathcal{O}(K)))^*, \qquad (6.103)$$

ここで, π は以下のファイブレーション系列で定義されるファイバー空間の射影である.

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1 \xrightarrow{i} \bar{\mathcal{M}}_{1,2} \xrightarrow{\pi} \bar{\mathcal{M}}_{1,1} && g=1,\\
&\Sigma_g \xrightarrow{i} \bar{\mathcal{M}}_{g,1} \xrightarrow{\pi} \bar{\mathcal{M}}_{g,0} && g\geq 2, \qquad (6.104)
\end{aligned}$$

$R^0\pi_*(\mathcal{O}(K))$ はπ による direct image sheaf で, ファイバー $\pi^{-1}(pt.)\simeq\Sigma_g$ 上では$H^0(\pi^{-1}(pt.),\mathcal{O}(K))$ に同型になる. このベクトル束 $\mathcal{H}$ は Hodge 束と呼ばれ, 以上の議論からランク g である. よってその全チャーン類を次のようにおく.

$$c(\mathcal{H}) := 1+tc_1+t^2c_2+\cdots+t^gc_g. \qquad (6.105)$$

(6.105) と TM の全チャーン類 $c(TM,t)$ を用いると, 形式的 line bundle 分解を用いて $c_T(\mathcal{E})$ を $\mathcal{H}$ とTM のチャーン類で書き表す表式を直接的に計算出来る. さらに Mumford の関係式

$$c(\mathcal{H})\cdot c(\mathcal{H}^*)=1, \qquad (6.106)$$

を用いると求める式

$$\begin{aligned}
&\int_{M\times\bar{\mathcal{M}}_{0,3}} \pi_1^*(\alpha)\wedge\pi_1^*(\beta)\wedge\pi_1^*(\gamma) = \int_M \alpha\wedge\beta\wedge\gamma && g=0,\\
&\int_{M\times\bar{\mathcal{M}}_{1,1}} \pi_1^*(\alpha)\wedge c_T(\mathcal{E}) = -\int_M \alpha\wedge c_2(M)\cdot\int_{\bar{\mathcal{M}}_{1,1}} c_1 = -\frac{1}{24}\int_M \alpha\wedge c_2(M) && g=1,\\
&\int_{M\times\bar{\mathcal{M}}_{g,0}} c_T(\mathcal{E}) = (-1)^g\frac{1}{2}\int_M c_T(M)\cdot\int_{\bar{\mathcal{M}}_g}(c_{g-1})^3 = (-1)^g\frac{1}{2}\chi(M)\int_{\bar{\mathcal{M}}_g}(c_{g-1})^3 && g\geq 2,
\end{aligned} \qquad (6.107)$$

を得る. 但し, ここで $\bar{\mathcal{M}}_{0,3} \simeq pt$. 及び Calabi-Yau 条件 $c_1(M) = 0$ を用いた.

以下, 特に $g \geq 2$ の時に具体的な計算を行う [30]. $\mathcal{H} = \oplus_{i=1}^{g} H_i$, $TM = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ なる形式的 line bundle 分解を用いて, $c_T(\mathcal{E})$ を次のように書き下す.

$$\begin{aligned} c_T(\mathcal{E}) &= \prod_{j=1}^{g} (c_1(L_1) - c_1(H_j)) \cdot (c_1(L_2) - c_1(H_j)) \cdot (c_1(L_3) - c_1(H_j)) \\ &= (-1)^g (c_g - c_1(L_1)c_{g-1} + (c_1(L_1))^2 c_{g-2} - (c_1(L_1))^3 c_{g-3}) \times \\ &\qquad (c_g - c_1(L_2)c_{g-1} + (c_1(L_2))^2 c_{g-2} - (c_1(L_2))^3 c_{g-3}) \times \\ &\qquad (c_g - c_1(L_3)c_{g-1} + (c_1(L_3))^2 c_{g-2} - (c_1(L_3))^3 c_{g-3}). \end{aligned} \tag{6.108}$$

但し, ここで $\dim_{\mathbf{C}} M = 3$ であることを用いた. さらに $c_1(M) = 0$, および (6.106) から得られる関係式

$$(c_g)^2 = 0, \quad c_g c_{g-1} = 0, \quad (c_{g-1})^2 = 2 c_g c_{g-2}, \tag{6.109}$$

より, 以下の結論を得る.

$$c_T(\mathcal{E}) = (-1)^g \frac{1}{2} c_T(M) (c_{g-1})^3. \tag{6.110}$$

Appendix C : Chern-Simons ゲージ理論の分配関数

通常のゲージ理論は時空の計量に依存する作用をもつのに対し, 3 次元多様体 K 上の Chern-Simons 理論の作用は, Chern-Simons の 2 次特性類を用いて作用が

$$S[A] = \frac{k}{4\pi} \int_K \mathrm{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), \tag{6.111}$$

と定義される. k は物理的には相互作用の大きさを表す結合定数で, $k \to \infty$ が弱結合に対応し, 摂動計算の際には $1/k$ が展開のパラメータとなる. 大局的なゲージ不変性の要請により k は整数でなければならない. また, 行列のトレース Tr は Killing 形式に一致している. この作用は K 上で Hodge の $*$-作用素を用いることなく定義される 3 形式の積分であるために K の計量の取り方に全くよらないから, これは位相的場の量子論を与えると期待される. また, 無限小のゲージ変換について Chern-Simons の 2 次特性類の変化は完全微分であるため, K が境界をもたない場合には $S[A]$ は不変である. ゲージ変換関数のホモトピー類が自明でないような一般のゲージ変換に対して $S[A]$ は不変ではないが, k が整数ならばこの変化は 2π の整数倍となるのである. これは $\pi_3(G) = \mathbf{Z}$ であることによる. したがって, 分配関数

$$Z[K] = \int [\mathcal{D}A] e^{iS[A]}, \tag{6.112}$$

の経路積分はゲージ変換による同値類の空間, すなわち K 上のゲージ場のモジュライ空間上の積分となり, その結果は K の位相的な量を与えると考えられる. この理論の位相的なオブザーバブルは K 内の向きづけられた閉曲線 C 上でゲージ場を積分して得られる Wilson ループ

$$W_R(C) = \mathrm{Tr}_R g(C), \qquad g(C) = P\exp\left[\oint_C A\right], \tag{6.113}$$

である. 但し, $g(C)$ は C に関するホロノミー元であり, また Tr_R は C ごとに与えられている G の既約表現 R に関してとり, さらに記号 P は閉曲線 C に沿って順序付けを行うことを意味する. $W_R(C)$ は 1 形式を閉曲線に沿って積分したものであるため, K の計量には全く依存していない. したがって, 位相的な相関関数が

$$Z[K; C_i, R_i] = \langle W_{R_1}(C_1) W_{R_2}(C_2) \dots W_{R_n}(C_n)\rangle = \int [\mathcal{D}A] e^{iS[A]} \prod_{i=1}^{n} W_{R_i}(C_i), \tag{6.114}$$

により定義される.

Witten がこの理論に関して主張した事 [23] は, 境界をもった 3 次元多様体 M 上のゲージ群 G を持つ Chern-Simons ゲージ理論の経路積分において, M の境界として実現されるリーマン面 $\Sigma = \partial M$ 上の flat G bundle のモジュライから構成されるヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\Sigma$ が 重要であるという事実である. 特に, 閉 3 次元多様体 M をリーマン面 $\Sigma \subset M$ で切って 2 つの 3 次元多様体 M_1 と M_2 に分けた時, Σ を M_1 の境界として見て得られる Σ 上のヒルベルト空間 $\mathcal{H}^1_\Sigma$ の状態ベクトル ψ と M_2 の境界として見て得られるヒルベルト空間 $\mathcal{H}^2_\Sigma$ の状態ベクトル χ を用いて Chern-Simons ゲージ理論の分配関数 $Z(M)$ が

$$Z(M) = (\psi, \chi) \tag{6.115}$$

と書けることを指摘した. また, Wilson ループが存在する場合に, Σ 上の 1 点 P_i に G の既約表現 R_i を乗せたヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\Sigma,P_i,R_i}$ も導入する. 但し, P_i はリーマン面 Σ と Wilson ループが交わる点である.

以上の道具立てを元に, 本文中 (5.77) で使われる結果

$$Z^{N,k}(S^3) = S^{N,k}_{0,0}, \tag{6.116}$$

の導出をおおまかに解説しよう. ここで $Z^{N,k}(S^3)$ は S^3 上のレベル k の $SU(N)$ Chern-Simons ゲージ理論の分配関数で, $S^{N,k}_{0,0}$ はレベル k $SU(N)$ Kac-Moody Lie 代数の integrable highest weight 表現の character に作用する $SL(2,\mathbf{Z})$ の S 変換の表現行列 $S^{N,k}_{i,j}$ の $(0,0)$ 成分である.

Definition 1 $Z^{N,k}(S^2 \times S^1; R)$ を、$S^2 \times S^1$ 上のレベル k の $SU(N)$ Chern-Simons ゲージ理論において, $H_1(S^2 \times S^1, \mathbf{Z})$ の生成元にホモロガスな S^1 に $SU(N)$ の既約表現 R を乗せた Wilson ループがある場合の分配関数とする.

Lemma 1

$$Z^{N,k}(S^2 \times S^1; R) = \dim \mathcal{H}_{S^2,P,R}. \tag{6.117}$$

証明) $S^2 \times S^1$ は, $S^2 \times [0,1]$ において, $S^2 \times \{0\}$ と $S^2 \times \{1\}$ を同一視して得られる. 今の場合の Wilson ループは S^2 と 1 点で交わるため, $[0,1]$ を時間方向と見ることで, ヒルベルト空間は $\mathcal{H}_{S^2,P,R}$ となる. よって, 分配関数は今の状況で, 自明な operator 1 のトレースを取ることになるため,

$$Z^{N,k}(S^2 \times S^1; R) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{S^2,P,R}}(1) = \dim \mathcal{H}_{S^2,P,R}, \tag{6.118}$$

を得る. Q.E.D.

レベル k の $SU(N)$ Chern-Simons ゲージ理論とレベル k の $SU(N)$ Kac-Moody Lie 代数は密接に関係する. またこの代数の integrable highest weight 表現の highest weight space は $SU(N)$ の既約表現 R_a $(a = 0, 1, \cdots, t-1)$ になっている. 但し t は $SU(N)$ の既約表現の個数で, R_0 を自明な表現とする. ここで, 今 S^2 の 1 点 P 上に表現 R_a を乗せる. S^2 は閉曲面であるため, $\mathcal{H}_{S^2,P,R_a}$ は S^2 上の total charge が消えることを要求するから, $a \neq 0$ の時はヒルベルト空間は存在しない. 一方, 表現が自明であれば, ヒルベルト空間は 1 次元であることが知られている. したがって以下を得る.

$$Z^{N,k}(S^2 \times S^1; R_a) = \delta_{a,0}. \tag{6.119}$$

Lemma 2 2 つの solid torus BT_A^2 と BT_B^2 を用意する. $\partial BT_A^2 = T_A^2$ において, solid torus で自明化する S^1 サイクルを α_A^1 とし, solid torus の内部と平行な S^1 サイクルを β_A^1 とする. BT_B^2 についても同様の定義を行う. ここで,BT_A^2 と BT_B^2 を T_A^2 と T_B^2 を同一視して貼りあわせるとき, α_A^1 と α_B^1, β_A^1 と β_B^1 を同一視して貼りあわせて得られる閉 3 次元多様体を X_1 とおく. 一方, α_A^1 と β_B^1, β_A^1 と α_B^1 を同一視して貼りあわせて得られる閉 3 次元多様体を X_2 とおく. このとき次が成り立つ.

$$X_1 = S^2 \times S^1, \quad X_2 = S^3. \tag{6.120}$$

証明) ホモロジーレベルで納得してもらうことにする. まず, BT^2 の胞体的複体の 2 つのコピーを用意する.

$$\begin{aligned}
&BT_A^2 : \qquad < A^3,\ A^2, T_A^2,\ \alpha_A^1,\ \beta_A^1,\ p_A^0 >_{\mathbf{Z}}, \\
&\partial : \quad \partial A^3 = T_A^2,\ \partial A^2 = \alpha_A^1,\ \partial T_A^2 = 0,\ \partial \alpha_A^1 = 0,\ \partial \beta_A^1 = 0,\ \partial p_A^0 = 0, \\
&H_*(BT_A^2, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}\beta_A^1 \oplus \mathbf{Z}p_A^0,
\end{aligned} \tag{6.121}$$

BT_B^2 についても同様に定義する.

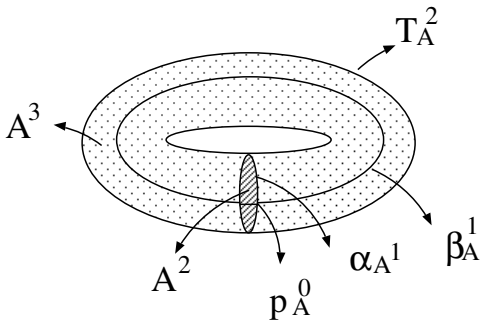

図 14: solid torus

ここで X_1 は次の同一視を行って得られる.

$$T^2 := T^2_A = -T^2_B,\ \alpha^1 := \alpha^1_A = -\alpha^1_B,\ \beta^1 := \beta^1_A = -\beta^1_B,\ p^0 := p^0_A = -p^0_B. \tag{6.122}$$

したがって, 次の複体を得る.

$$\begin{aligned} X_1 :&\quad < A^3,\ B^3,\ A^2,\ B^2, T^2,\ \alpha^1,\ \beta^1,\ p^0 >_{\mathbf{Z}}, \\ \partial :&\quad \partial A^3 = T^2,\ \partial B^3 = -T^2,\ \partial A^2 = \alpha^1,\ \partial B^2 = -\alpha^1, \\ &\quad \partial T^2 = 0,\ \partial \alpha^1 = 0,\ \partial \beta^1 = 0,\ \partial p^0 = 0, \\ &H_*(X_1, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}(A^3 + B^3) \oplus \mathbf{Z}(A^2 + B^2) \oplus \mathbf{Z}(\beta^1) \oplus \mathbf{Z}p^0. \end{aligned} \tag{6.123}$$

よって, $H_*(X_1, \mathbf{Z}) \simeq H_*(S^2 \times S^1, \mathbf{Z})$ である.

一方、X_2 は同一視

$$T^2 := T^2_A = -T^2_B,\ \alpha^1 := \alpha^1_A = -\beta^1_B,\ \beta^1 := \beta^1_A = -\alpha^1_B,\ p^0 := p^0_A = -p^0_B, \tag{6.124}$$

を行って得られる次の複体である.

$$\begin{aligned} X_2 :&\quad < A^3,\ B^3,\ A^2,\ B^2, T^2,\ \alpha^1,\ \beta^1,\ p^0 >_{\mathbf{Z}}, \\ \partial :&\quad \partial A^3 = T^2,\ \partial B^3 = -T^2,\ \partial A^2 = \alpha^1,\ \partial B^2 = -\beta^1, \\ &\quad \partial T^2 = 0,\ \partial \alpha^1 = 0,\ \partial \beta^1 = 0,\ \partial p^0 = 0, \\ &H_*(X_1, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}(A^3 + B^3) \oplus \mathbf{Z}p^0. \end{aligned} \tag{6.125}$$

よって, $H_*(X_2, \mathbf{Z}) \simeq H_*(S^3, \mathbf{Z})$ である. Q.E.D.

Theorem 1

$$Z^{N,k}(S^3) = S^{N,k}_{0,0} \tag{6.126}$$

証明) まず, 補題より S^3 は $S^2 \times S^1$ の S^1 の管状近傍である solid torus BT^2 を取り除き, ∂BT^2 の α^1 サイクルと β^1 サイクルを入れ替えて $S^2 \times S^1 \backslash BT^2$ に貼り付けて得られる. ここで, $\partial BT^2 = T^2$ 上のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{T^2}$ を考える. $\mathcal{H}_{T^2}$ は, R_a でラベルされる、レベル k の $SU(N)$ Kac-Moody Lie 代数の integrable highest weight 表現と $1:1$ に対応した状態ベクトル v_a $(a = 0, 1, \cdots, t-1)$ からなる. この v_a は, BT^2 内の S^1 に R^a 表現を持つ Wilson ループを置いて実現される.

一方, $S^2 \times S^1 \backslash BT^2$ の境界として見た場合の T^2 のヒルベルト空間は, Wilson ループがないため, v_0 のみからなり, 両者を自明に張り合わせると以下の結果を得る.

$$Z^{N,k}(S^2 \times S^1; R_a) = (v_0, v_a) = \delta_{0,a}. \tag{6.127}$$

また, 特に $Z^{N,k}(S^2 \times S^1; R_0) = Z^{N,k}(S^2 \times S^1) = (v_0, v_0) = 1$ である.

さて, $T^2 = \partial BT^2$ には $SL(2, \mathbf{Z})$ が作用するが, この作用により v_a は R_a でラベルされる、レベル k の $SU(N)$ Kac-Moody Lie 代数の integrable highest weight 表現の character に対する変換行列と同じ変換をすることが知られている [31]. 従って, $T^2 = \partial BT^2$ に $\sigma \in SL(2, \mathbf{Z})$ を作用させて $S^2 \times S^1 \backslash BT^2$ に貼り付けて得られる多様体を X とおくと, 次の等式を得る.

$$Z^{N,k}(X) = \left(v_0, \sum_{j=0}^{t-1} K_{0,j}^{N,k}(\sigma) v_j \right) = K_{0,0}^{N,k}(\sigma). \tag{6.128}$$

但し, $K_{i,j}^{N,k}(\sigma)$ は上の変換行列である. 特に $\sigma \in SL(2, \mathbf{Z})$ を S 変換に取ると $X = S^3$ であるため, 定理を得る. Q.E.D.

参考文献

[1] R. Gopakumar and C. Vafa, "M-Theory and Topological Strings I, II", hep-th/9809187, 9812127.

[2] R. Gopakumar and C. Vafa, "On the Gauge Theory/Geometry Correspondence", hep-th/9811131.

[3] W. Lerche, C. Vafa and N.P. Warner, "Chiral Rings in $N = 2$ Superconformal Theories", Nucl. Phys. **B324** (1989) 427.

[4] E. Witten, "Topological Sigma Models", Commun. Math. Phys. **118** (1988) 411.

[5] T. Eguchi and S.-K. Yang, "$N = 2$ Superconformal Models as Topological Field Theories", Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1693.

[6] E. Witten, "Mirror Manifolds and Topological Field Theory", in Mirror Symmetry I, S.-T. Yau (ed.), American Mathematical Society (1998); hep-th/9112056.

[7] M. Bershadsky, S. Ceccoti, H. Ooguri and C. Vafa, "Holomorphic Anomalies in Topological Field Theories", Nucl. Phys. **B405** (1993) 279.

[8] M. Bershadsky, S. Ceccoti, H. Ooguri and C. Vafa, "Kodaira-Spencer Theory of Gravity and Exact Results for Quantum String Amplitudes", Commun. Math. Phys. **165** (1994) 311.

[9] I. Antoniadis, E. Gava, K.S. Narain and T.R. Taylor, "Topological Amplitudes in String Theory", Nucl. Phys. **B413** (1994) 162.

[10] I. Antoniadis, E. Gava, K.S. Narain and T.R. Taylor, "N=2 Type II-Heterotic Duality and Higher Derivative F-terms", Nucl. Phys. **B455** (1995) 109.

[11] C. Itzykson and J. Zuber, "Quantum Field Theory", Addison Wesley Publishing, 1980, Section 4-3.

[12] P.K. Townsend, "The Eleven-dimensional Supermembrane Revisited", Phys. Lett. **B350** (1995) 184,

E. Witten, "String Theory Dynamics in Various Dimensions", Nucl. Phys. **B443** (1995) 85.

[13] C. Faber and R. Pandharipande, "Hodge Integrals and Gromov-Witten Theory", math.AG/ 9810173.

[14] M. Marino and G. Moore, "Counting Higher Genus Curves in a Calabi-Yau Manifold", Nucl. Phys. **B543** (1999) 592.

[15] A. Strominger, "Massless Black Holes and Conifolds in String Theory", Nucl. Phys. **B451** (1995) 96.

[16] P. Candelas, X.C. de la Ossa, P.S. Green and L. Parkes, "A Pair of Calabi-Yau Manifolds as an Exactly Soluble Superconformal Theory", Nucl. Phys. **B359** (1991) 21.

[17] E. Witten, "Chern-Simons Gauge Theory as a String Theory", in Floer Memorial Volume, H. Hofer et. al., eds., Birkhauser (1995), Boston; hep-th/9207094.

[18] K. Becker, M. Becker and A. Strominger, "Fivebranes, Membranes and Non-perturbative String Theory", Nucl. Phys. **B456** (1995) 130.

[19] P. Horava, "Equivariant Topological Sigma Models", Nucl. Phys. **B418** (1994) 571.

[20] J. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity", Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.

[21] S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, "Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory", Phys. Lett. **B428** (1998) 105.

[22] E. Witten, "Anti de Sitter Space and Holography", Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253.

[23] E. Witten, "Quantum Field Theory and the Jones Polynomial", Commun. Math. Phys. **121** (1989) 351.

[24] G. 'tHooft, "A Planar Diagram Theory for Strong Interactions", Nucl. Phys. **B72** (1974) 461.

[25] L. Susskind and E. Witten, "The Holographic Bound in Anti de Sitter Space", hep-th/9805114.

[26] M. Henningson and K. Skenderis, "The Holographic Weyl Anomaly", J. High Energy Phys. **9807** (1998) 023.

[27] J. Maldacena, "Wilson Loops in Large N Field Theories", Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 4859,

S.-J. Rey and J. Yee, "Macroscopic Strings as Heavy Quarkes of Large N Gauge Theory and Anti de Sitter Supergravity", hep-th/9803001.

[28] H. Ooguri and C. Vafa, "Knot Invariants and Topological Strings", hep-th/9912123.

[29] E. Witten, "Phases of $N = 2$ Theories in Two Dimensions", Nucl. Phys. **B403** (1993) 159.

[30] E. Getzler and R. Pandharipande, "Virasoro Constraints and the Chern Classes of the Hodge Bundle", math.AG/9805114.

[31] E. Verlinde, "Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory", Nucl. Phys. **B300** [FS22] (1988) 360.