物理数学 III

2005 年度 担当　松尾　泰[1]

Jan 30th, 2006 更新

- 第 I 部: 群論 · · · 対称性の果たす役割
- 第 II 部: 微分形式 · · · ベクトル解析の一般化，曲がった空間の取り扱い

参考書

- 第 I 部:
  - 吉川圭二「群と表現」（岩波）[第 I 部の多くはこの本に従っている]
  - ランダウ・リフシッツ「量子力学」第 12 章，第 13 章，9 章：(Landau and Lifshitz, “Quantum Mechanics” chapter 12, 13, 9: Pergamon Pr.) [群論の物理的な応用が豊富]
  - ジョージアイ「物理学におけるリー代数」(吉岡) (H. Georgi, “Lie algebra in particle physics”, Perseus Books)
  - 犬井鉄郎他「応用群論」（裳華房）[離散群についての丁寧な取り扱い]
- 第 II 部:
  - H. フランダース「微分形式の理論」（岩波）(H. Flanders, “Differential Forms With Applications to the Physical Sciences”, Dover)
  - 中原幹夫「理論物理学のための幾何学とトポロジー I」第５章, 第６章（ピアソン・エデュケーション）(M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics”, Inst of Physics Pub Inc, chap 5,6)
  - M. Spivak, “Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus” (Perseus Books)

[1]E-mail: matsuo(@マーク)phys.s.u-tokyo.ac.jp

第 I 部

群論

1　物理学における対称性

- **離散的な対称性**
  - 座標反転に対して対称なポテンシャル $V(-x) = V(x)$
    分子運動（水の分子，アンモニア分子）
  - 同一粒子の入れ換え対称性
    区別できない粒子を入れ換えても系は不変
  - 格子の対称性
    点群，結晶群，空間群
  - パリティー，荷電共役, 時間反転

- **連続的な対称性**
  - 中心力ポテンシャル $V(\vec{x}) = V(|\vec{x}|)$
    回転対称性 $SO(3)$
  - 素粒子の対称性
    フレーバー対称性 $\cdots$ 素粒子の分類に用いられる
    ゲージ対称性

- **時空の対称性**
  - 回転対称性 $\vec{x}' = R\vec{x}$: $R \in SO(3)$
  - Lorentz 対称性 $R^t J R = J$: $J = diag(1, -1, -1, -1)$
  - 並進対称性 $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$
  - Poincarré 対称性
  - 一般座標対称性
  - 超対称性 (フェルミオン $\leftrightarrow$ ボソン)

対称性の果たす役割

- 波動関数，スペクトルに対する制限 $\longleftrightarrow$ 群の表現論

    - 分子運動
    - 固体物理
    - 素粒子の分類

- 理論構築における指導原理
    - Maxwell 方程式と Lorentz 対称性
    - 一般相対論と一般座標変換不変性
    - Yang-Mills 理論とゲージ対称性

2 対称性と群

対称性を特徴づけるものは何か

- 対称性の変換を続けて行っても，対称性である
- 逆変換が存在する

抽象化 $\longrightarrow$ 「群」

群の定義 集合 G が群である

1. 積が定義できる
$$a, b \in G \quad \to \quad a \cdot b \in G$$
2. 結合則： $a, b, c \in G$ に対して
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
3. 単位元の存在： $e \in G$ が存在して任意の $a \in G$ に対して
$$a \cdot e = e \cdot a = a$$
4. 逆元の存在： 任意の $a \in G$ に対して $a^{-1} \in G$ が存在して
$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

群の分類

- 有限群：$|G|$ (G の元の数＝**位数**) が有限な群 ($\leftrightarrow$ 無限群)
- 可換群　(アーベル群)：群の積が可換．任意の $a, b \in G$ に対して
$$a \cdot b = b \cdot a$$
($\leftrightarrow$ 非可換群 (Nonabelian group))
- 離散群：群が集合として離散的 (例：有限群，空間群)
$\leftrightarrow$ 連続群 (リー群) 連続位相を持ち微分可能 (例： $SO(3)$, 並進群 $(\mathbf{R})$)

群の例

- パリティ対称性 ($\mathbf{Z}_2$) $x \leftrightarrow -x$：
$G = \{e, \sigma\}$
$$e \ : \quad x \ \rightarrow x \qquad \sigma \ : \quad x \ \rightarrow -x$$
$$e \cdot e = \sigma \cdot \sigma = e\,, \quad e \cdot \sigma = \sigma \cdot e = \sigma$$
- 巡回群 ($\mathbf{Z}_n$)：$z = x + iy$ を複素数として $\sigma \ : \ z \rightarrow \omega z$ ($\omega = e^{2\pi i/n}$)
$\longleftrightarrow$ $360/n$ 度回転
$G = \{e, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}\}$
$$\sigma^r \cdot \sigma^s = \sigma^{r+s}$$
ただし $r + s$ は mod n で考える．有限，可換，離散群
$|\mathbf{Z}_n| = n$
- 置換群 (S_n)：同種粒子 (n 個) の入れ換え
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
粒子 i を粒子 a_i に置き換える．有限，**非**可換，離散群
$|S_n| = n!$
- 行列のなす群．群の積＝行列の積

$GL(n, \mathbf{R})$ ($GL(n, \mathbf{C})$): 成分が実数 (複素数) の n 行 n 列の行列のなす全体集合 (ただし行列式はゼロでないもの $\leftrightarrow$ 逆元を持つため)

$O(n)$: $\{a \in GL(n, \mathbf{R}), a^t a = E\}$ (E：単位行列)　 n 次の直交行列
$U(n)$: $\left\{a \in GL(n, \mathbf{C}), a^\dagger a = E\right\}$ ($a^\dagger = (a^*)^t$) n 次のユニタリー行列

$SO(n)$ ($SU(n)$)：　$O(n)$ ($U(n)$) の元で行列式が 1 のもの

$O(n,m)$ ($U(n,m)$)：$GL(n+m, \mathbf{R})$ ($GL(n+m, \mathbf{C})$) の下で $a^t Ja = J$ ($a^\dagger Ja = J$) を満たすもの．ただし $J = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1)$ (1 が n 個，-1 が m 個)

例：

- 中心対称な系の対称性：$O(3)$
- ローレンツ対称性：$O(3,1)$
- フレーバー対称性：(典型的なものとして $SU(n)$)

群表　群の積を表にしてまとめたもの

	$\cdots$	b	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
a	$\cdots$	$a \cdot b$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	

例えば Z_2 に対しては次のようになる

	e	σ
e	e	σ
σ	σ	e

3　群論の基礎

この章の議論は主に有限群に対するものであり，無限群に拡張するときは適宜定義の変更が必要である．

準同型写像　(group homomorphism)

1. 写像 $f : G_1 \to G_2$

2. G_1 の 2 個の元 a_1, a_2 に対して

$$f(a_1)\cdot f(a_2) = f(a_1 \cdot a_2)$$

注意：$\mathrm{Ker}\ f = \{g \in G_1 | f(g) = e\} \subset G_1$, $\mathrm{Im}\ f = \{f(g) | g \in G_1\} \subset G_2$ はともに群構造を持つ．

群の同型　(isomorphism) 群 G_1 と G_2 が同型$\Longleftrightarrow$ 準同型写像 f が全単写 (bijection)

部分群　(subgroup) H が G の部分群

1. H が G の部分集合 $H \subset G$
2. H が G の積 $\cdot$ について閉じている

$$a, b \in H \to a \cdot b \in H$$

剰余類　(coset) 群の割り算．$H \subset G$ を部分群（ただし $H \neq Q$）とする．このとき群 G の元 g の H への作用を

$$H \cdot g = \{h \cdot g |\, h \in H\} \subset G$$
$$g \cdot H = \{g \cdot h |\, h \in H\} \subset G$$

と定義する．G を H を単位にした「細胞」に分割していく．最初の細胞としては H 自身．2 番目の細胞を H に含まれない G の元 g_1 を用いて $H \cdot g_1$ とする．このとき $H \cap H \cdot g_1 = \phi$ となる．なぜならもし $h_1 \in H \cap H \cdot g_1$ とすると，それは $h_2 \in H$ が存在して $h_1 = h_2 \cdot g_1$ となることを意味するがそれは $g_1 = h_2^{-1} h_1 \in H$ を意味するので仮定に反するからである．以下同様にして第 3 の細胞，第 4 の細胞を定義していくと，G の全ての元がどれかの細胞に属することになる，つまり

$$G = H \cup (H \cdot g_1) \cup \cdots \cup (H \cdot g_{n-1})$$

という分割が定義できる．ここで**右剰余類** (right coset) $H \backslash G$ を集合の集合,

$$H \backslash G \equiv \{H, H \cdot g_1, \cdots, H \cdot g_{n-1}\}$$

と定義する．同様に**左剰余類** (left coset) を

$$G/H \equiv \{H, g_1 \cdot H, \cdots, g_{n-1} \cdot H\}$$

のように構成する．これらの集合の元の数 $n = |G|/|H|$ （整数の割り算）を，指数 (index) と呼び $(G : H)$ と記す．注意：一般には右剰余類と左剰余類は異なる．

不変部分群 (正規部分群) (invariant subgroup, normal subgroup) G の部分群 H が任意の G の元 g に対して

$$g \cdot H = H \cdot g$$

（等号は集合として同じであることを意味する）を満たすとき H を G の**不変部分群**であるという.

明らかに不変部分群 H に対しては $G/H = H\backslash G$ となる．さらにこのとき剰余類 G/H は次のような群構造を持つ．これを**剰余類群** (coset group), あるいは因子群 (factor group) と呼ぶ.

- 群の積 ： $(g_1 \cdot H) \cdot (g_2 \cdot H) = (g_1 \cdot g_2) \cdot H$
- 単位元：H [$H \cdot H = H$ は H が部分群であることと同値]
- $(g{\cdot}H)$ の逆元は $(g^{-1}{\cdot}H)$ [証明] $(g{\cdot}H){\cdot}(g^{-1}{\cdot}H) = g{\cdot}g^{-1}{\cdot}H{\cdot}H = H$

共役 群の 2 個の元 a, b が**共役** (conjugate) である $\Leftrightarrow$ G の元 g が存在して $b = g \cdot a \cdot g^{-1}$ となること．a と b が共役であるとき $a \sim b$ と書く.

- 可換群では $a \sim b$ ならば $a = b$ となる
- 推移則 (transitive law) が成立：$a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば $a \sim c$ である.
  [証明] $a = g_1 \cdot b \cdot g_1^{-1}$, $b = g_2 \cdot c \cdot g_2^{-1}$ とすると,
  $$a = (g_1) \cdot (g_2 \cdot c \cdot g_2^{-1}) \cdot g_1^{-1} = (g_1 \cdot g_2) \cdot c \cdot (g_1 \cdot g_2)^{-1}$$

類 (conjugacy class) 共役を用いて群 G を部分集合に分解

$$G = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$$

ただし C_i は G の部分集合で $a, b \in C_i$ とすると $a \sim b$ であるものとする．$\sim$ の推移則により $i \neq j$ のとき $C_i \cap C_j = \phi$ となる.
[注意] 単位元 e が属する類は単位元のみからなる.（任意の元 $g \in G$ に対して $g \cdot e \cdot g^{-1} = e$ となるので e と共役な元は e 以外にはない）

群環 (group ring) $|G|$ 次元のベクトル空間を考え，その基底を群の各元 g のラベルを持つもの $\mathbf{e}_g$ とする．つまりこのベクトル空間の元は,

$$\mathbf{R}^G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \mathbf{e}_g \mid a_g \in \mathbf{R} \right\}$$

となる．この空間の基底に対し積 $\star : \mathbf{R}^G \otimes \mathbf{R}^G \to \mathbf{R}^G$ を基底を用いて

$$\mathbf{e}_{g_1} \star \mathbf{e}_{g_2} = \mathbf{e}_{g_1 \cdot g_2}$$

と定義する．一般の元に対する積は

$$\left(\sum_{g \in G} a_g \mathbf{e}_g \right) \star \left(\sum_{g' \in G} b_{g'} \mathbf{e}_{g'} \right) = \sum_{g, g' \in G} a_g b_{g'} \mathbf{e}_{g \cdot g'}$$

積 $\star$ が定義されたベクトル空間 $\mathbf{R}^G$ を**群環**と呼ぶ.

類演算子　群 G の類 C_i に対し群環 $\mathbf{R}^G$ に属する類演算子 $\hat{C}_i$ を

$$\hat{C}_i = \sum_{a \in C_i} \mathbf{e}_a$$

と定義する．その性質は

- 可換性：任意の $g \in G$ に対し $\mathbf{e}_g \star \hat{C}_i = \hat{C}_i \star \mathbf{e}_g$
  [証明] $h \in C_i$ に対し同値類の定義により常に $g \cdot h \cdot g^{-1} \in C_i$ となる．これから $g \cdot C_i = C_i \cdot g$ (集合として同じ)．このことを群環の積の形で書くと上のようになる.
- 類演算子の積も可換：$\hat{C}_i \star \hat{C}_j = \hat{C}_j \star \hat{C}_i$
- 類演算子の積は類演算子の和として書ける.
  $$\hat{C}_i \star \hat{C}_j = \sum_k {N_{ij}}^k \ \hat{C}_k$$
  ここで ${N_{ij}}^k$ はゼロまたは正の整数である.（証明は後で）

例　以上現れた概念を S_3（3 次の置換群）を例にとって説明する．$3! = 6$ 個の元に以下のような名前を付ける.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \omega^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

積は次のように計算される：

$$\begin{aligned} \sigma_1 \cdot \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \omega \end{aligned}$$

同様に計算すると群表は次のようになる.

	e	ω	ω^2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	ω	ω^2	σ_1	σ_2	σ_3
ω	ω	ω^2	e	σ_3	σ_1	σ_2
ω^2	ω^2	e	ω	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	ω	ω^2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ω^2	e	ω
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ω	ω^2	e

- S_3 の部分群は

$$\{e\}\ ,\quad \{e,\sigma_1\}\ ,\quad \{e,\sigma_2\}\ ,\quad \{e,\sigma_3\}\ ,\quad \left\{e,\omega,\omega^2\right\}\ ,\quad S_3$$

- S_3 の正規部分群は

$$\{e\}\ ,\quad \left\{e,\omega,\omega^2\right\}\ ,\quad S_3$$

- S_3 の因子群は

$$S_3/\{e\}=S_3\,,\quad S_3/S_3=\{e\}\ ,\quad S_3/\left\{e,\omega,\omega^2\right\}=\left\{\left\{e,\omega,\omega^2\right\},\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\right\}=\mathbf{Z}_2$$

- S_3 の類は

$$C_1=\{e\}\ ,\quad C_2=\left\{\omega,\omega^2\right\}\ ,\quad C_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$$

- 類演算子のなす代数は

$$\begin{aligned}
&\hat{C}_1\star\hat{C}_1=\hat{C}_1\,,\quad \hat{C}_1\star\hat{C}_2=\hat{C}_2\,,\quad \hat{C}_1\star\hat{C}_3=\hat{C}_3\,,\\
&\hat{C}_2\star\hat{C}_2=2\hat{C}_1+\hat{C}_2\,,\quad \hat{C}_2\star\hat{C}_3=2\hat{C}_3\,,\quad \hat{C}_3\star\hat{C}_3=3\hat{C}_1+3\hat{C}_2
\end{aligned}$$

4 群の表現論

群の表現 (representation) とは群 G の各元に対して $GL(n,\mathbf{C})$ の元を対応させる

$$\rho: G\to GL(n,\mathbf{C})$$

ことであり，写像 ρ を G の n **次元表現**であるという．ただし ρ は次の性質を満たさなくてはいけない．

$$g_1\cdot g_2=g_3\quad\to\quad \rho(g_1)\cdot\rho(g_2)=\rho(g_3)$$

つまり ρ は G から $GL(n, \mathbf{C})$ への準同型写像である．特に

$$\rho(e) = E\,(\text{単位行列}), \quad \rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}$$

また ρ が作用する n 次元ベクトル空間を**表現空間** (representation space) と呼ぶ.

以下ではいくつかの用語を導入する.

- **自明な表現**: (trivial —) 全ての $g \in G$ に対して $\rho(g) = 1 \in GL(1, \mathbf{C})$ とする (1 次元) 表現
- **忠実な表現**: $g_1 \neq g_2$ の場合に $\rho(g_1) \neq \rho(g_2)$ となる表現
- **ユニタリー表現**: (unitary —) 全ての $g \in G$ に対し $\rho(g) \in U(n)$ となる表現．$\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1} = \rho(g)^\dagger$ となる.
- **直和表現**: (direct sum —) ρ_1, ρ_2 をそれぞれ n_1, n_2 次元表現としたとき ρ_1 と ρ_2 の行列の直和で得られる表現．$\rho_1 \oplus \rho_2$ と書き $n_1 + n_2$ 次元表現となる.

$$\rho_1 \oplus \rho_2 :\ g \ \to \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

- **直積表現**: (direct product —) ρ_1, ρ_2 をそれぞれ n_1, n_2 次元表現としたとき ρ_1 と ρ_2 の行列の直積で得られる表現．$\rho_1 \otimes \rho_2$ と書き $n_1 n_2$ 次元表現となる.

$$\rho_1 \otimes \rho_2 :\ g \ \to \ \rho(g)_{ik,jl} = \rho_1(g)_{ij} \rho_2(g)_{kl}$$

ここで $\rho(g)_{ik,jl}$ では ik と jl をそれぞれ一つの添字として考える.

- **同値な表現**:(equivalent —) 同じ次元の 2 つの表現 $\rho_1, \rho_2 \in GL(n, \mathbf{C})$ が全ての $g \in G$ に対して一つの行列 $T \in GL(n, \mathbf{C})$ が存在して $\rho_1(g) = T\rho_2(g)T^{-1}$ と書けるとき，ρ_1 と ρ_2 を同値な表現と呼ぶ.
- **不変部分空間** (invariant subspace): ρ の表現空間の部分線形空間 V で全ての $\rho(g)$ に対し $\rho(g)V \subset V$ となるもの.
- **既約表現** (irreducible —): 直和表現に分解できない表現．特に既約表現の不変部分空間はそれ自身となる.
- **既約分解**: (decomposition into irreducible representations) 既約表現の直和に分解すること.

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_n$$

(ρ_i は既約表現). より一般に表現 $\rho^{(\alpha)}$ が $n^{(\alpha)}$ 個含まれているときに

$$\rho = \sum_{\alpha} n^{(\alpha)} \rho^{(\alpha)}$$

などと書くことにする.

- **正則表現**: (regular —) 群環による表現

$$\mathbf{e}_g \star \mathbf{e}_a = \sum_{g' \in G} \rho^{(reg)}(a)_{gg'}\, \mathbf{e}_{g'}$$

$\rho^{(reg)}$ の行列要素は 0 または 1 で, 対角要素を持つのは $\rho^{(reg)}(e)$ のみ. これが表現であることは以下のように確認できる.

$$(\mathbf{e}_g \star \mathbf{e}_a) \star \mathbf{e}_b = \sum_{g' \in G} \rho^{(reg)}(a)_{gg'} \mathbf{e}_{g'} \star \mathbf{e}_b = \sum_{g', g'' \in G} \rho^{(reg)}(a)_{gg'} \rho^{(reg)}(b)_{g'g''} \mathbf{e}_{g''}$$
$$= \mathbf{e}_g \star (\mathbf{e}_a \star \mathbf{e}_b) = \sum_{g'' \in G} \rho^{(reg)}(a \cdot b)_{gg''} \mathbf{e}_{g''} .$$

これから

$$\sum_{g' \in G} \rho^{(reg)}(a)_{gg'} \rho^{(reg)}(b)_{g'g''} = \rho^{(reg)}(a \cdot b)_{gg''}$$

Shur の補題　(Schur's Lemma)

1. ρ_i $(i = 1, 2)$ をそれぞれ G の n_i 次元**既約**表現とし, 表現空間を V_i とする. M を V_1 から V_2 への線形写像とし, 全ての $g \in G$ に対し

$$M \rho_1(g) = \rho_2(g) M$$

が成立するものとする. このとき M は同型写像 (つまり $n_1 = n_2$ で逆写像 M^{-1} をもつ) であるか, または $M = 0$ である.

2. ρ を既約表現, V をその表現空間とする. M を V から V への線形写像で, 任意の $g \in G$ に対し

$$\rho(g) M = M \rho(g)$$

を満たすものとする. このとき M は単位行列に比例する.

補題の証明

1. $\mathrm{Ker}M = \{v \in V_1 | Mv = 0\}$, $\mathrm{Im}M = \{Mv \in V_2 | v \in V_1\}$ と置くとこれらはそれぞれ V_1, V_2 の不変部分空間である．

   例えば v を $\mathrm{Ker}\, M$ の任意の元とすると定義により $Mv = 0$ であるが，M に関する仮定により $M\rho_1(g)v = \rho_2(g)Mv = 0$ となる．これは $\rho_1(g)v$ も $\mathrm{Ker}\, M$ の元であることを意味するから，$\mathrm{Ker}\, M$ は ρ_1 の不変部分空間である．

   既約表現では不変部分空間はそれ自身あるいは0しかないので $\mathrm{Ker}\, M = 0$ または $\mathrm{Ker}\, M = V_1$ である．

   後者の場合は $M = 0$ であることがわかる．一方 $\mathrm{Im}\, M$ も 0 か V_2 となるが残る可能性は $\mathrm{Ker}\, M = 0$ でかつ $\mathrm{Im}\, M = V_2$ つまり M は同型写像である．

2. M の固有ベクトル $v \in V$ を1つとる．つまり $Mv = \lambda v$ ($\lambda \in \mathbf{C}$ は固有値)．このとき任意の $g \in G$ に対し $(M-\lambda E)\rho(g) = \rho(g)(M-\lambda E)$ となる．

   これは最初の補題により $M - \lambda E$ が同型写像であるかゼロ写像であることを意味するが，$M - \lambda E$ は少なくとも一つのゼロ固有ベクトル v を持つので同型写像ではあり得ない．つまり $M - \lambda E = 0$ である．

既約表現の直交性　既約表現全体の集合 $\left\{\rho^{(\alpha)}\right\}$ ($\alpha = 1, \cdots, \#$(既約表現)) に対し

$$\sum_{g \in G} \rho^{(\alpha)}_{ji}(g^{-1})\rho^{(\beta)}_{kl}(g) = \frac{|G|}{d_\alpha}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\alpha\beta}$$

<u>証明</u>：$\rho^{(\alpha)}$, $\rho^{(\beta)}$ の表現空間をそれぞれ $V^{(\alpha)}$, $V^{(\beta)}$ とする．B を $V^{(\beta)}$ から $V^{(\alpha)}$ への任意の線形写像とし $M = \sum_{g \in G} \rho^{(\alpha)}(g^{-1})B\rho^{(\beta)}(g)$ と定義する．M は $V^{(\beta)}$ から $V^{(\alpha)}$ への線形写像である．

<u>このとき全ての $g \in G$ に対し $\rho^{(\alpha)}(g)M = M\rho^{(\beta)}(g)$ となる.</u> それは

$$\begin{aligned}
\rho^{(\alpha)}(g)M &= \rho^{(\alpha)}(g)\sum_{g' \in G}\rho^{(\alpha)}(g'^{-1})B\rho^{(\beta)}(g') \\
&= \sum_{g' \in G}\rho^{(\alpha)}(gg'^{-1})B\rho^{(\beta)}(g') = \sum_{g''}\rho^{(\alpha)}(g''^{-1})B\rho^{(\beta)}(g''g) \\
&= \left(\sum_{g'' \in G}\rho^{(\alpha)}(g''^{-1})B\rho^{(\beta)}(g'')\right)\rho^{(\beta)}(g) = M\rho^{(\beta)}(g)
\end{aligned}$$

となるからである．これと Schur の補題の1を組み合わせると，$\alpha \neq \beta$ で

あるときには[2]$M=0$，つまり特に $B_{rs}=\delta_{ri}\delta_{sk}$ ととると

$$M_{jl}=\sum_g\sum_{r,s}\rho^{(\alpha)}_{jr}(g^{-1})\delta_{ri}\delta_{sk}\rho^{(\beta)}_{sl}(g)=\sum_g\rho^{(\alpha)}_{ji}(g^{-1})\rho^{(\beta)}_{kl}(g)=0$$

を意味する．また $\alpha=\beta$ の時には Shur の補題 2 により $M=cE$ となるが，特に $B_{rs}=\delta_{ri}\delta_{sk}$ ととると

$$\sum_g\rho^{(\alpha)}_{ji}(g^{-1})\rho^{(\alpha)}_{kl}(g)=c_{ik}\delta_{jl}$$

となる．ここで現れた係数 c_{ik} は j,l についてトレースを取ると

$$d_\alpha c_{ik}=\sum_g\sum_j\rho^{(\alpha)}_{ji}(g^{-1})\rho^{(\alpha)}_{kj}(g)=\sum_g\sum_j\rho^{(\alpha)}_{kj}(g)\rho^{(\alpha)}_{ji}(g^{-1})=\sum_g\rho^{(\alpha)}_{ki}(g\cdot g^{-1})=|G|\delta_{ki}$$

(d_α は $\rho^{(\alpha)}$ の次元，$|G|$ は G の位数，$\rho^{(\alpha)}(e)_{ki}=\delta_{ki}$ に注意) となるので

$$c_{ik}=\frac{|G|}{d_\alpha}\delta_{ik}$$

となる．これらをまとめると定理が得られる．

この定理は ρ がユニタリー表現の場合には

$$\sum_{g\in G}\rho^{(\alpha)*}_{ij}(g)\rho^{(\beta)}_{kl}(g)=\frac{|G|}{d_\alpha}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{\alpha\beta}$$

となる．

指標　(character) ：表現 ρ に対しその表現行列のトレース

$$\chi(g)=\mathrm{Tr}(\rho(g))$$

で定義される．その性質としては

- 同値な表現 ρ,ρ' つまり $\rho'(g)=T\rho(g)T^{-1}$ とすると $\chi'(g)=\chi(g)$ となる.（トレースの性質のため）
- 共役な元 g,g' に対して $\chi(g)=\chi(g')$ となる．
  [証明]：g と g' が共役であれば $g'=k^{-1}gk$ $(k\in G)$ となるが $\chi(g')=\mathrm{Tr}\rho(k^{-1}gk)=\mathrm{Tr}\rho(k^{-1})\rho(g)\rho(k)=\chi(g)$ である．
- 直和表現 $\rho^{(\alpha)}\oplus\rho^{(\beta)}$ に対しては $\chi(\rho^{(\alpha)}\oplus\rho^{(\beta)})=\chi^{(\alpha)}+\chi^{(\beta)}$ となる．
- 直積表現に対しては $\chi(\rho^{(\alpha)}\otimes\rho^{(\beta)})=\chi^{(\alpha)}\chi^{(\beta)}$ となる．

[2] $\alpha\neq\beta$ であるが $d_\alpha=d_\beta$ の時には $M\neq 0$ となりうるように思えるが，もしそうであったとすると $M\rho_1(g)=\rho_2(g)M$ という関係は $\rho_2(g)=M\rho_1(g)M^{-1}$ を意味する．これは ρ_1 と ρ_2 が同値であることを意味しているので仮定に反する．つまりこの場合でも $M=0$ でなくてはいけない．

指標の直交性 (I)　ユニタリー既約表現 $\rho^{(\alpha)}$, $\rho^{(\beta)}$ の指標をそれぞれ χ^{α}, $\chi^{(\beta)}$ とすると

$$\sum_{g\in G}\chi^{(\alpha)*}(g)\chi^{(\beta)}(g)=|G|\delta_{\alpha\beta}$$

[証明]：ユニタリー既約表現の直交性の式で $i=j$, $k=l$ とおきそれぞれ和をとれば示される．

指標 χ は類にのみ依存するので和は類の和にできることに注意する．つまり $\{C_i\}$ $(i\in I)$ を G の類の集合とし $\chi_i^{(\alpha)}=\chi^{(\alpha)}(g)|_{g\in C_i}$ とすると

$$\sum_{i\in I}|C_i|\chi_i^{(\alpha)*}\chi_i^{(\beta)}=|G|\delta_{\alpha\beta}$$

任意の群表現の既約表現を用いた直和分解　指標の直交性 (I) を用いると，任意の表現の既約表現の直和分解を計算できる．つまり表現行列 $\rho(g)$ に対し，それを

$$\rho(g)=\oplus_\alpha q_\alpha\rho^{(\alpha)}(g)$$

(ここで α は全ての既約表現を走る) という形に書いたときの係数 q_α を決定することができる．

このため上の式を指標を用いて書き換えると

$$\chi(g)=\sum_\alpha q_\alpha\chi_\alpha(g)$$

両辺に $\chi_\alpha^*(g)$ をかけ g について和をとると

$$\sum_g\chi_\alpha^*(g)\chi(g)=\sum_\beta q_\beta\sum_g\chi_\alpha^*(g)\chi_\beta(g)=\sum_\beta q_\beta|G|\delta_{\alpha\beta}=q_\alpha|G|$$

つまり

$$q_\alpha=\frac{1}{|G|}\sum_g\chi^{(\alpha*)}(g)\chi^{(\alpha)}(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{i\in I}|C_i|\chi_i^{(\alpha)*}\chi_i^{(\alpha)}$$

この公式は量子力学への応用の上では基本的な公式である．

正則表現の既約表現分解　上の公式を用いて正則表現を既約表現に分解してみる．正則表現では $\rho^{(reg)}(g)$ の対角元がゼロでないのは $g=e$ の場合のみであり，$\chi^{(reg)}(e)=E$ なので

$$\chi^{(reg)}(g)=\begin{cases}|G| & (\text{for } g=e)\\ 0 & (\text{otherwize})\end{cases}$$

となる．上の公式に代入すると

$$q_\alpha=\frac{1}{|G|}\sum_g\chi^{(reg)}(g)\chi^{(\alpha)*}(g)=\frac{1}{|G|}\chi^{(reg)}(e)\chi^{(\alpha)*}(e)=d_\alpha$$

ここで $\chi^{(reg)}(e) = |G|$, $\chi^{(\alpha)}(e) = d_\alpha$ を用いた．つまり

$$\rho^{(reg)}(g) = \sum_\alpha d_\alpha \rho^{(\alpha)}(g)$$

となる．特に $g = e$ と置くと

$$|G| = \sum_\alpha (d_\alpha)^2$$

となる．これは群の次元と既約表現の次元との間の重要な公式である．

指標の直交性 (II)　n を既約表現の数とすると

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \chi_i^{(\alpha)*} \chi_j^{(\alpha)} = \frac{|G|}{|C_i|} \delta_{ij}$$

[証明]:類演算子 $\hat{C}_i = \sum_{g \in C_i} \mathbf{e}_g$ に対しその表現行列を $\rho^{(\alpha)}(\hat{C}_i) = \sum_{g \in C_i} \rho^{(\alpha)}(g)$ (和は行列としての和) と定義すると，類演算子の性質 $\left[\mathbf{e}_g, \hat{C}_i\right] = 0$ により全ての $g \in G$ に対して

$$\left[\rho^{(\alpha)}(g), \rho^{(\alpha)}(\hat{C}_i)\right] = 0$$

が成立する．Schur の補題からこれは $\rho^{(\alpha)}(\hat{C}_i) = \lambda E$ を意味する．両辺の trace をとると，d_α を表現 $\rho^{(\alpha)}$ の次元として

$$|C_i| \chi_i^{(\alpha)} = \lambda d_\alpha \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{|C_i| \chi_i^{(\alpha)}}{d_\alpha}$$

となり，λ が決まる．

一方

$$\rho^{(\alpha)}(\hat{C}_i) \rho^{(\alpha)}(\hat{C}_j) = \sum_k N_{ij}{}^k \rho^{(\alpha)}(\hat{C}_k)$$

であるが $\rho^{(\alpha)}(\hat{C}_i)$ の表式を入れると

$$\begin{aligned}
&\frac{|C_i||C_j|}{d_\alpha^2} \chi_i^{(\alpha)} \chi_j^{(\alpha)} = \sum_k N_{ij}{}^k \frac{|C_k| \chi_k^{(\alpha)}}{d_\alpha} \\
&|C_i||C_j| \chi_i^{(\alpha)} \chi_j^{(\alpha)} = \sum_k N_{ij}{}^k d_\alpha |C_k| \chi_k^{(\alpha)} \\
&|C_i||C_j| \sum_\alpha \chi_i^{(\alpha)} \chi_j^{(\alpha)} = \sum_{\alpha,k} |C_k| N_{ij}{}^k d_\alpha \chi_k^{(\alpha)} = \sum_k |C_k| N_{ij}{}^k \chi_k^{(reg)} = N_{ij}{}^1 \chi_1^{(reg)}
\end{aligned}$$

と変形される．ここで 3 行目では既約表現についての和をとっており，$d_\alpha \chi_k^{(\alpha)}$ が正則表現の指標であることを用いている．また最後では正則表

現では単位元を含む類 C_1 だけがゼロでないトレースを持つことを使った．さらに ${N_{ij}}^1=\delta_{\hat{i}j}|C_j|$, $\chi_1^{(reg)}=|G|$ となることを用いると[3]

$$\sum_\alpha \chi_i^{(\alpha)*}\chi_j^{(\beta)}=\delta_{ij}\frac{|G|}{|C_j|}$$

が証明された．

類と既約表現の双対性　2つの直交性定理を組み合わせると類と既約表現がある意味で双対であることがわかる．つまり $U_i^{(\alpha)}=\sqrt{\frac{C_i}{|G|}}\chi_i^{(\alpha)}$ と置くと

$$\sum_i^{\#class} U_i^{(\alpha)*}U_i^{(\beta)}=\delta_{\alpha\beta}\,,\qquad \sum_\alpha^{\#irreps} U_i^{(\alpha)*}U_j^{(\alpha)}=\delta_{ij}\,.$$

つまり U はユニタリー行列となる．これから
既約表現の数と類の数は同じでなくてはいけないことがわかる．

直積表現の直和分解　直積表現の直和表現への分解は直積表現の指標が指標の積でかける，つまり

$$\mathrm{Tr}\rho^{(\alpha)}(g)\otimes\rho^{(\beta)}(g)=\mathrm{Tr}\rho^{(\alpha)}(g)\mathrm{Tr}\rho^{(\beta)}(g)$$

ことから容易に計算される．つまり

$$\rho^{(\alpha)}\otimes\rho^{(\beta)}=\sum_\gamma^{irreps} {C_{\alpha\beta}}^\gamma\rho^{(\gamma)}(g)$$

と書くと

$${C_{\alpha\beta}}^\gamma=\frac{1}{|G|}\sum_g\chi^{(\gamma)*}(g)\chi^{(\alpha)}(g)\chi^{(\beta)}(g)=\sum_i\frac{|C_i|}{|G|}\chi_i^{(\gamma)*}\chi_i^{(\alpha)}\chi_i^{(\beta)}$$

となる．

類の積の分解　指標の直交性定理 (II) の証明で用いた式

$$|C_i||C_j|\chi_i^{(\alpha)}\chi_j^{(\alpha)}=\sum_k {N_{ij}}^k d_\alpha|C_k|\chi_k^{(\alpha)}$$

の両辺を d_α で割り $\chi_l^{(\alpha)*}$をかけて, 既約表現 α について和をとると，右辺は

$$\sum_k\sum_\alpha {N_{ij}}^k|C_k|\chi_k^{(\alpha)}\chi_l^{(\alpha)*}={N_{ij}}^k|C_k|\frac{|G|}{|C_k|}\delta_{kl}={N_{ij}}^k|G|$$

---

[3] $\hat{i}$ は複素共役類 (complex conjugate class) を意味する．つまり C_i が g を含んでいるとすると g^{-1} を含む類である．ユニタリー表現では $\rho(g^{-1})=\rho(g)^\dagger$ となり指標は $\chi_{\hat{i}}=\chi_i^*$ となる．

となるので両辺を比べると,

$$N_{ij}{}^{k} = \sum_{\alpha} \frac{|C_i||C_j|\chi_i^{(\alpha)}\chi_j^{(\alpha)}\chi_l^{(\alpha)*}}{d_\alpha |G|}$$

直積表現の分解の公式との類似は明らかである.

5 点群とその表現 (point group and its representation)

5.1 点群 (point group)

分子の対称性として重要なものとして**点群**がある.点群とはある空間の**一点を固定する**変換群である.

点群の対称変換 (symmetry transformation of point group) 点群を構成する変換は次のようものである.

- 回転 (rotation).$2\pi/n$ 回転の生成子を C_n と書く.$(C_n)^n = e$ である.
- 鏡映 (reflection) ある平面に対する鏡映.σ と書く.$\sigma^2 = e$ である.特に鏡映面が回転軸に垂直な場合 σ_h と書き,回転軸を含む場合に σ_v と書く.
- 回転鏡映(回映, rotation-reflection).上記の二つを組み合わせたもの.S_n と書く.上記の 2 つを用いて $S_n = C_n\sigma_h$ と書ける.
- 反転 (inversion) 変換 $\vec{x} \to -\vec{x}$:I と書く.$I = S_2 = \sigma_h C_2$

点群の分類 (classification of point group) まず空間の回転のみから構成される点群は以下の 5 種類である.

- 巡回群 $\mathbf{C}_n$: ある回転軸についての回転により生成されるもの.$e, C_n, (C_n)^2, \cdots, (C_n)^{n-1}$ の n 個の元よりなる可換群.巡回群 $\mathbf{Z}_n$ と同じ.
- 2 面体群 $\mathbf{D}_n$: n 回回転と 2 回回転の組み合わせ.n 回回転軸と 2 回回転軸は垂直であり,n 回回転により 2 回回転軸は n 個生成される.$2n$ 個の元 (C_n の n 個と C_2 が n 種類) よりなる非可換群.$\mathbf{D}_3 = \mathbf{V}$ と書く.

- 正 4 面体群 $\mathbf{T}$: 正 4 面体の変換群．対面する辺の中点を結ぶ 2 回回転軸が 3 個．頂点と対面する面の中点を結ぶ 3 回回転軸が 4 個．$|\mathbf{T}| = 12$.

- 正 8 面体群 $\mathbf{O}$: 立方体の変換群．対面する面の中点を結ぶ 4 回回転軸が 3 個．頂点を結ぶ 3 回回転軸が 4 個．辺の中点を結ぶ 2 回回転軸が 6 個．$|\mathbf{O}| = 24$.

- 正 20 面体群 $\mathbf{I}$: 正 20 面体あるいは正 12 面体の変換群．C_5 が 6 種類，C_3 が 10 種類，C_2 が 15 種類で $|\mathbf{I}| = 60$.

これらと鏡映 (回映) を組み合わせて次のような点群が派生する．

- $\mathbf{S}_{2n}$: (注意：対称群 S_n とは異なる) $2n$ 回回転鏡映変換 S_{2n} により生成される可換群．$n = 2p+1$ の場合 $(S_{4p+2})^{2p+1} = I$ なので $\mathbf{S}_{4p+2} = \mathbf{C}_{2p+1} \times \mathbf{C}_i$．ここで $\mathbf{C}_i$ は $\{e, I\}$ よりなる群．

- $\mathbf{C}_{nh}$: n 回回転軸とそれに垂直な鏡映面. $(C_n)^p$, $(C_n)^p\sigma_h$ $(p = 0, \cdots, n-1)$ の $2n$ 個の元よりなる可換群.

- $\mathbf{C}_{nv}$: n 回回転と回転軸を含む対称面．対称面は回転対称性のため n 枚ある．$|\mathbf{C}_{nv}| = 2n$.

- $\mathbf{D}_{nh}$: $\mathbf{D}_n$ の n 回回転軸に垂直で 2 回回転軸を含む対称面がある場合.

- $\mathbf{D}_{nd}$: n 回軸を含み隣り合う 2 回軸 の 2 等分線を通る対称面を含む.

- $\mathbf{T}_d$: $\mathbf{T}$ に対称面を加わえたもの.

- $\mathbf{T}_h$: $\mathbf{T}$ に対称中心を加えたもの．$\mathbf{T}_h = \mathbf{T} \times \mathbf{C}_i$ となる．

- $\mathbf{O}_h$: $\mathbf{O}$ に対称中心を加えたもの．$\mathbf{O}_h = \mathbf{O} \times \mathbf{C}_i$ となる．

- $\mathbf{I}_h$: $\mathbf{I}$ に対称中心を加えたもの．$\mathbf{I}_h = \mathbf{I} \times \mathbf{C}_i$ となる．

いくつかの分子における対称性　以下ランダウ・リフシッツの本にある分子の対称性の例をあげる．

- H_2O 分子: $\mathbf{C}_{2v}$

- NH_3 分子: $\mathbf{C}_{3v}$

- CH_3Cl 分子: $\mathbf{C}_{3v}$

- CH_4 分子: $\mathbf{T}_d$

- OsF_8 分子: $\mathbf{O}_h$
- UF_6 分子: $\mathbf{O}_h$
- C_2H_6 分子: $\mathbf{D}_{3d}$
- C_2H_4 分子: $\mathbf{D}_{2h}$

5.2 点群の表現 (Representation of point group)

以下いくつかの点群の表現の具体的な構成を見る．

5.2.1 巡回群 $\mathbf{C_n}$ (=$\mathbf{Z}_n$)

可換群の場合，既約表現は全て**一次元表現**である．これは次のような簡単な証明が可能である．$g_1, g_2 \in G$ とすると可換性のため $[g_1, g_2] = 0$ となるので，全ての表現で $[\rho(g_1), \rho(g_2)] = 0$ とならなければいけない．これから $\rho(g)$ $(g \in G)$ は同時固有ベクトル $\vec{v}$ を持ち，

$$\rho(g)\vec{v} = \lambda(g)\vec{v}\,, \qquad \lambda(g) \in \mathbf{C}$$

となる．このとき $\vec{v}$ で作られる 1 次元空間は不変部分空間であり $\lambda(g)$ が 1 次元表現を与える．

特に $\mathbf{C}_n = \mathbf{Z}_n$ の場合には群の要素は $\{e, C_n, (C_n)^2, \cdots, (C_n)^{n-1}\}$ で $(C_n)^n = e$ となる．$\rho(C_n) = \lambda \in \mathbf{C}$ を上で考えた 1 次元表現とすると $(C_n)^n = e$ より $\lambda^n = 1$ でなくてはいけない．これから n 種類の 1 次元既約表現が得られる．つまり

$$\rho^{(\alpha)}((C_n)^p) = e^{2\pi i \alpha p/n}$$

ただし $p = 0, 1, \cdots, n-1$, $\alpha = 0, 1, \cdots, n-1$ である．可換群の場合類の数は群の元の数と等しかったのに対し，この場合既約表現も n 個あるので既約表現の数が類の数に等しいことがわかる．一次元表現の場合指標は表現行列に等しい．つまり

$$\chi^{(\alpha)}((C_n)^p) = e^{2\pi i \alpha p/n}$$

である (このうち恒等表現は $\rho^{(0)}$)．この場合指標の直交性は discrete Fourier 変換

$$\sum_{p=0}^{n-1} (\chi^{(\alpha)}((C_n)^p))^* \chi^{(\beta)}((C_n)^p) \;=\; \sum_{p=0}^{n-1} e^{-2\pi i p\alpha/n} e^{2\pi i p\beta/n} = n\delta_{\alpha,\beta}$$

$$\sum_{\alpha\in irrep.}(\chi^{(\alpha)}((C_n)^p)^*\chi^{(\alpha)}((C_n)^q) \;=\; \sum_{\alpha=0}^{n-1}e^{-2\pi ip\alpha/n}e^{2\pi iq\alpha/n}=n\delta_{p,q}$$

大ざっぱに言うと，類と既約表現の関係は座標と運動量の関係によく似ており，固有ベクトルの内積 $\langle x|p\rangle$ が指標 $\chi^{(\alpha)}(g)$ に対応する．

問題： $\mathbf{C}_{nh}$ は可換群である．これに対して表現を求め，指標の直交性を確認せよ．

5.2.2 $\mathbf{C}_{3v}(=S_3$ 3 次の対称群)

類の数は $\{e\}$, $\{\omega,\omega^2\}$, $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ の 3 個．従って既約表現の数も 3 個となる．既約表現のうち 2 個は 1 次元表現で，恒等表現 $\rho^{(1)}$

$$\rho^{(1)}(g)=1 \qquad g\in\mathbf{C}_{3v}$$

および $\rho^{(2)}$,

$$\rho^{(2)}(e)=\rho^{(2)}(\omega)=\rho^{(2)}(\omega^2)=1\,,\quad \rho^{(2)}(\sigma_1)=\rho^{(2)}(\sigma_2)=\rho^{(2)}(\sigma_3)=-1$$

となる．残る 3 番目の表現の次元を d とすると，公式により $1^2+1^2+d^2=6$, すなわち $d=2$ であり，具体的に以下のように構成される：

$$\rho^{(3)}(e)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \rho^{(3)}(\omega)=\begin{pmatrix}c&-s\\s&c\end{pmatrix},\quad \rho^{(3)}(\omega^2)=\begin{pmatrix}c&s\\-s&c\end{pmatrix}$$

$$\rho^{(3)}(\sigma_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \rho^{(3)}(\sigma_2)=\begin{pmatrix}c&s\\s&-c\end{pmatrix},\quad \rho^{(3)}(\sigma_3)=\begin{pmatrix}c&-s\\-s&-c\end{pmatrix}.$$

ここで $c=\cos(2\pi/3)=-1/2$, $s=\sin(2\pi/3)=\sqrt{3}/2$ である．表現の指標は最初の 2 つについては表現と同じ $\rho^{(\alpha)}(g)=\chi^{(\alpha)}(g)$ である．$\rho^{(3)}$ に対しては

$$\chi^{(3)}(e)=2\,,\quad \chi^{(3)}(\omega)=\chi^{(3)}(\omega^2)=-1\,,\quad \chi^{(3)}(\sigma_1)=\chi^{(3)}(\sigma_2)=\chi^{(3)}(\sigma_3)=0$$

となる．

問題：指標の直交性を確認せよ．

問題：次の 3 次元表現

$$\rho(e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \rho(\omega)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \rho(\omega^2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\rho(\sigma_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \rho(\sigma_2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \rho(\sigma_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

を既約表現に直和分解せよ．

5.2.3 2 面体群 $\mathbf{D}_{2n}$

生成子を a ($2\pi/n$ 回転を表す元)，b ($2\pi/2$ 回転の一つ) と書くと関係式,

$$a^n = b^2 = e\,, \qquad b^{-1}\cdot a\cdot b = a^{-1}$$

が成立する．$\mathbf{D}_{2n} = \{e, a, \cdots, a^{n-1}, b, ba, \cdots, ba^{n-1}\}$ となる．共役類を計算するために以下のような計算をする．

$$\begin{aligned} &a^p\cdot a^\ell a^{-p} = a^\ell\,, \quad (a^p b)a^\ell (a^p b)^{-1} = a^{n-\ell} \\ &a^r(a^\ell b)a^{-r} = a^{\ell+2r}b\,, \quad (a^r b)(a^\ell b)(a^r b)^{-1} = a^{2r-\ell}b \end{aligned}$$

これから

$$a^\ell \sim a^{n-\ell}, \quad a^\ell b \sim a^{\ell+2}b \sim a^{n-\ell}b$$

であることがわかる．これから類は

n:偶数 ： $\{e\}\,, \left\{a^i, a^{n-i}\right\}$ $(1\le i\le n/2)$, $\left\{ba^{2i}\right\}$, $\left\{ba^{2i-1}\right\}$ $(1\le i\le n/2)$

n:奇数 ： $\{e\}\,, \left\{a^i, a^{n-i}\right\}$ $(1\le i\le (n-1)/2)$, $\left\{ba^{i}\right\}$ $(1\le i\le n)$

で類の数は，n が偶数の時 $n/2+3$, 奇数の時 $(n-1)/2+2$ 個である．

既約表現のうち 1 次元表現については以下の定理を用いる．

群 G の 1 次元表現の数は $(G:G')$ に等しい． ここで G' は G の交換子群[4]

$\mathbf{D}_{2n}$ の場合交換子群は a^2 で生成される巡回群．これから n が偶数の場合には 1 次元表現は 4 個，n が奇数の場合には 2 個となる．具体的には n が偶数の場合には

$$\begin{aligned} &\rho^{(1)}(a) = \rho^{(1)}(b) = 1 \\ &\rho^{(2)}(a) = -1, \quad \rho^{(2)}(b) = 1 \\ &\rho^{(3)}(a) = 1, \quad \rho^{(2)}(b) = -1 \\ &\rho^{(2)}(a) = -1, \quad \rho^{(2)}(b) = -1 \end{aligned}$$

奇数の場合には

$$\begin{aligned} &\rho^{(1)}(a) = \rho^{(1)}(b) = 1 \\ &\rho^{(2)}(a) = 1, \quad \rho^{(2)}(b) = -1 \end{aligned}$$

2 次元表現は $\left[\frac{n}{2}\right]$ 個あり，

$$\rho_2^{(k)}(a) = \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{pmatrix}, \quad \rho_2^{(k)}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[4] G の任意の 2 元 g_1, g_2 に対し $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ で生成される群.

$(k=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right])$，$\omega=e^{2\pi i/n}$ である．

問題: 他の点群についても表現を各自調べること．

5.3 分子振動への応用

5.3.1 一般論

分子系のハミルトニアンは一般に座標 x_i $(i=1,\cdots,N)$ を用いて

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i,j}M_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j+\frac{1}{2}\sum_{i,j}K_{ij}x_ix_j$$

となるが x_i の線形変換 $(x\to q=Rx,\ R^tR=M)$ により

$$H=\frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{dq_i}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j}L_{ij}q_iq_j$$

の形に持って行くことが可能である．この一般座標 $\tilde{q}$ をさらに回転し $(q\to Q=Sq,\ S^tLS=\mathrm{diag}(\Omega_i^2))$ (運動項を不変にする必要があるので $S\in O(N)$ となる)，ポテンシャル項も対角化する

$$H=\frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{dQ_i}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_i\Omega_i^2Q_i^2$$

ことが常に可能である．

群論の問題は系が点群 G で不変であるときに固有振動数 Ω にどのような縮退があらわれるかというものである．

系が G の下で不変であると言うことは，座標 q が群 G の下で

$$q_i'=\rho_{ij}(g)q_i$$

と変換したとき，ハミルトニアン H が不変である，

$$H(\rho(g)q)=H(q)$$

であることを意味している．この表現 ρ を**全体表現**と呼ぶ．一般に全体表現 ρ は可約であり既約表現に

$$\rho=\sum_\alpha n_\alpha\rho^{(\alpha)}$$

のように分解できる．つまり

$$\rho(g) = S \begin{pmatrix} \rho_1(g) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \rho_2(g) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} S^t \equiv S\rho^{(diag)}(g)S^t$$

となる．ここで現れた S で座標を $q \to Q = Sq$ と線形変換すると，$L \to \Omega = S^tLS$ と変化するが，Hamiltonian が $q \to \rho(g)q$ の下で不変であることにより

$$\rho^t(g)L\rho(g) = L$$

とならなくてはいけない．上の表式を代入し変形するとこの式は，

$$S^tLS\rho^{(diag)}(g) = \rho^{(diag)}S^tLS$$

となる．つまり行列 S^tLS は全ての $g \in G$ に対し $\rho^{(diag)}(g)$ と可換となり Schur の補題の形になる．すなわち

- Schur の補題 I により異なる表現の座標の間の Ω はゼロになる
- Schur の補題 II により同じ表現ブロックの座標に対する Ω は単位行列に比例する．

これから全体表現を既約表現に分解したときに各既約表現のブロックに属する座標については振動数が縮退するということが示せた．つまり Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{i=1}^{n_\alpha}\sum_{s=1}^{d_\alpha}\left((\dot{Q}_s^{(\alpha,i)})^2 + (\Omega_i^{(\alpha)})^2(Q_s^{(\alpha,i)})^2\right)$$

ここで $\Omega_i^{(\alpha)}$ が既約表現のラベル s に依存しないということが表現論の帰結となる．

結局全体表現の既約表現への分解により問題が解けることになるが，これは指標を用いて解くことができる．

5.3.2 例：アンモニア分子

例としてアンモニア分子 (NH_3) を取り上げる．対称性は $\mathbf{C}_{3v} = S_3$ である．座標は N の座標を $\vec{x}_1$, H の座標を $\vec{x}_{2,3,4}$ とすると全部で 12 個である．ただし注意しなくてはいけないのは，全体としての並進の自由度が 3 個,

回転の自由度が3個あるため振動の自由度としては全部で12-3-3=6個しかないことである．この6個の座標の自由度に対する$\mathbf{C}_{3v}$の表現行列の指標を求める．類は3個$\{e\}$, $\{\omega,\omega^2\}$, $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$であるから各類の代表元$e,\omega,\sigma_3$の全体表現の表現行列を求める．

まずeについては次元がでるだけなので$\chi(e)=6$である．

次にωについては

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \\ \vec{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \\ 0 & R & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \\ \vec{x}_4 \end{pmatrix}$$

ただし

$$R = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (c=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ s=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2})$$

であり$\chi(\omega)=0$となる.（ただしいずれにせよこの自由度は回転に含まれるので実質的にこの自由度は効かない）

最後にσ_3については

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \\ \vec{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \\ \vec{x}_4 \end{pmatrix}$$

ただし

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

であり$\chi(\sigma_3)=2\mathrm{tr}\Sigma=2$となる．

一方$\mathbf{C}_{3v}$の指標は類を$\mathcal{C}_1=\{e\}$, $\mathcal{C}_2=\{\omega,\omega^2\}$, $\mathcal{C}_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$

	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$
$\rho^{(1)}$	1	1	1
$\rho^{(2)}$	1	1	-1
$\rho^{(3)}$	2	-1	0

これから$n_\alpha=\frac{1}{6}\sum_{g\in G}\chi^{(\alpha)}(g)^*\chi(g)$を計算すると$n_1=2$, $n_2=0$, $n_3=2$となる．これから$\rho^{(1)}$が2個, $\rho^{(2)}$が0個, $\rho^{(3)}$が2個含まれていることがわかる．これは振動モードの自由度の個数6個と同じ$1\times2+1\times0+2\times2=6$である．

6 対称 (置換) 群 (Symmetry (Permutation) group)

対称群は同一粒子の系を取り扱う上で基本的な対称性である．また表現論で登場する Young 図はリー群の表現においても基本的な役割を果たす．この意味で対称群の表現の理解は現代物理学においても数多くの応用を持つ．

6.1 一般的性質

記法 S_n の元を $1, \cdots, n$ の置換写像 σ を用いて

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と書く．この S_n の元を単に σ と書くことにする．このとき群の演算は

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \tau &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau(1) & \cdots & \tau(n) \\ \sigma\cdot\tau(1) & \cdots & \sigma\cdot\tau(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma\cdot\tau(1) & \cdots & \sigma\cdot\tau(n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．つまり群の積は写像 σ, τ の合成となる．また逆元は

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \cdots & \sigma^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

つまり置換写像の逆写像となる．

互換 (Transposition) 置換

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

を (ij) と書くことにする．任意の置換は互換の合成として書くことができるが，一意的ではない．

問題: 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ を 2 種類以上の互換の積として書け．

以下いくつかの互換の性質を述べる．

- 互換の 2 乗は単位元である：$(ij)\cdot(ij)=e$

- p_i を互換として置換 σ が $p_n\cdots p_1$ と書けたとすると $\sigma^{-1}=p_1\cdots p_n$ となる．

- 置換 σ の互換の積の分解は一意ではないが，そこに現れる互換の数の偶奇性は常に一定である．(証明) Van der Monde 行列式

$$\Delta(x_1,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ x_1 & \cdots & x_n\\ \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$$

に S_n を次のように作用させる：

$$\sigma\cdot\Delta(x_1,\cdots,x_n)=\Delta(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})$$

とすると常に

$$\sigma\Delta=\pm\Delta$$

となる．一方 σ が互換の場合には $\sigma\Delta=-\Delta$ である．これから $\sigma\Delta=\pm\Delta$ に現れる符号は互換の積の数の偶奇性と等しい (つまり偶であれば $+$, 奇であれば $-$ である)．これから置換の互換の積への偶奇性は常に一定であることがわかる．

巡回 (cycle)　置換 $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{\ell-1} & a_\ell\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_\ell & a_1\end{pmatrix}$ を $(a_1,\cdots,a_\ell)$ と記し，これを長さ ℓ の**巡回** (cycle) と呼ぶ．S_n の任意の元は巡回の積に分解できる．

例：$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6\end{pmatrix}=(134)(25)(6)$．巡回の長さは $3,2,1$ である．

一般に S_n の元を巡回に分解し，各巡回の長さを $n=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$，ただし $\lambda_i\geq 0$, $\lambda_i\geq\lambda_{i+1}$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=n$ と書くことができる．この整数の組 $[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]$ を n の分解 (partition) と呼び，n の可能な分解の数を $p(n)$ と書き分割数と呼ぶ．

n	$p(n)$	分割
1	1	$[1]$
2	2	$[2]$, $[1,1]$
3	3	$[3]$, $[2,1]$, $[1,1,1]$
4	5	$[4]$, $[3,1]$, $[2,2]$, $[2,1,1]$, $[1,1,1,1]$

一般に ($p(0) = 1$ と定義すると)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

となる.

問題:これを証明せよ.

<u>一般に $\sigma_1 \sim \sigma_2$ ($\in S_n$) とすると σ_1 と σ_2 は同じ分割を持つ.</u>

証明：分割 $[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ に対し

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma(1)\cdots\sigma(\lambda_1))\cdot(\sigma(\lambda_1+1)\cdots\sigma(\lambda_1+\lambda_2))\cdots \\ &\quad \cdots(\sigma(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}+1),\cdots,\sigma(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)) \\ \tau &= (\tau(1)\cdots\tau(\lambda_1))\cdot(\tau(\lambda_1+1)\cdots\tau(\lambda_1+\lambda_2))\cdots \\ &\quad \cdots(\tau(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}+1),\cdots,\tau(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)) \end{aligned}$$

とすると，μ を

$$\mu = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n) \end{pmatrix}$$

とすると

$$\sigma = \mu^{-1}\cdot\tau\mu$$

となる．つまり分割が同じであれば常に共役である.

Young diagram (Young 図)　分割 $[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ に対し図

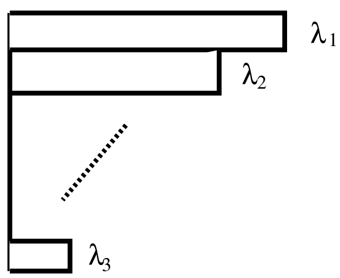

図 1: Young diagram

を対応させせる.

上で見たように類は分割でラベルされるので，Young 図でラベルされる事になる．また既約表現も類と対応しているので同様に Young 図でラベルされることになる.

(例)：以前調べた S_3 の表現においては

$$\rho_1 \leftrightarrow [3]\,, \quad \rho_2 \leftrightarrow [1,1,1]\,, \quad \rho_3 \leftrightarrow [2,1]$$

のように対応している．

6.2 S_n の既約表現とその性質

文献：岩堀長慶著「対称群と一般線形群の表現論」岩波講座・基礎数学
S_n の既約表現は箱の数が n の Young 図と関連づけられる．

表現の次元　Young 図 $\lambda = [\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ に対応する既約表現の次元は

$$d_\lambda = \frac{f!}{s_1 s_2 \cdots s_f}$$

ただし $f = \sum_i \lambda_i$ (箱の数)，s_i は i 番目の箱の鉤の長さ (hook length)= 箱の右側にある箱の数+下にある箱の数+1.

[**問題**]：S_5 の既約表現の次元を全て求め，$5! = \sum_\lambda d_\lambda^2$ であることを確認せよ.（答え：1,4,5,6,5,4,1 次元表現が現れる）

[**問題**]：常に $d_{[n]} = d_{[1,1,\cdots,1]} = 1$ であることを確認せよ．これらはそれぞれ自明な表現 $\rho(\sigma) = 1$，反対称表現 $\rho(\sigma) = (-1)^\sigma$ に対応する．

群環と射影演算子による既約表現の構成　Young 図 (箱の数を n とする) の各箱に $1, \cdots, n$ の数字を重複無しに書き込んだものを**「盤」(board)** と呼ぶ．下の図は S_5 の Young 図 $[2,2,1]$ の盤の例である．

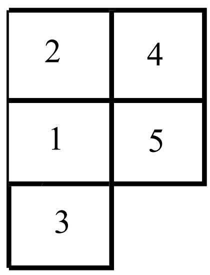

図 2: 盤 (board)

盤 B が与えられたとき**水平置換群** H_B を各行の数字を集合として変えない置換 (上の例では例えば $(2,4)$, $(1,5)$ など) 全体とする．これらは S_n の

部分群となる．また同様に**垂直置換群** R_B を各列の文字を集合として変えない置換全体 (上の例では $(2,1,3)$, $(4,5)$ など) とする．

　このとき群環の元を

$$\begin{aligned} a_B &= \frac{1}{|H_B|}\sum_{\sigma\in H_B} e_\sigma \\ b_B &= \frac{1}{|R_B|}\sum_{\sigma\in R_B} (-1)^\sigma e_\sigma\,, \end{aligned}$$

とするとこれらは水平方向の対称化，垂直方向の反対称化を表しており，射影演算子

$$a_B\star a_B = a_B\,,\quad b_B\star b_B = b_B$$

となる．また

$$e_B = \frac{r}{n!}a_B\star b_B$$

$(r=d_\lambda,\, n=|\lambda|)$ とおくと，これも射影演算子

$$e_B\star e_B = e_B$$

となり，$tre_B = r$ である．これから e_B を左からかけた空間

$$V_B = e_B\star \mathbf{C}^{S_n}$$

は群環 $\mathbf{C}^{S_n}$ の r 次元の不変部分空間となり，S_n の λ に対応する既約表現を与える．

同一粒子の量子力学への応用　同一粒子 (粒子 $1,2,\cdots,n$) の量子力学系の波動関数を $\psi(1,2,\cdots,n)$ ($1,\cdots,n$ は粒子の座標，内部自由度などを同時に表すことにする) とし，置換群 S_n の作用を

$$\sigma\cdot\psi(1,2,\cdots,n) = \psi(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$$

と書くことにする．このとき S_n の元の作用により $n!$ 個の波動関数が生成される．これから S_n の既約表現を取り出すためには上で述べた Young の対称子 e_B をかければよい．例えば自明な表現 $[n]$ に対しては盤は一種類しかなく波動関数の完全対称化

$$\psi_{[n]}(1,2,\cdots,n) = \sum_{\sigma\in S_n}\psi(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$$

が 1 次元表現として現れる．また $[1,1,\cdots,1]$ に対しては完全反対称化

$$\psi_{[1,1,\cdots,1]}(1,2,\cdots,n) = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma\psi(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$$

が 1 次元表現として現れる．

他の Young 図 λ に対する表現は，ある盤 B を固定し，$n!$ 個の波動関数 $\sigma \cdot \psi$ に Young の対称子 e_B を作用させると独立な波動関数が d_λ 個 (=既約表現の数) 現れるので，それらが表現の基底となる．

注意すべき点は全ての盤が同じ表現を与えてはいない点である．つまり正則表現の直和分解は

$$\rho^{(reg)}(g) = \sum_i d_\alpha \rho^{(\alpha)}(g)$$

であったので d_λ 個の独立な基底の集合が存在することになる．

射影演算子の方法の一般論　上で述べた射影演算子の方法は，一般の表現 ρ から既約表現 $\rho^{(\alpha)}$ を取り出す射影演算子に一般化される．以下の演算子

$$\pi_\alpha = \frac{d_\alpha}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha^*(g) \rho(g)$$

を考えると，これは既約表現 $\rho^{(\alpha)}$ への射影演算子となる．つまり

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha \cdot \pi_\beta &= \frac{d_\alpha d_\beta}{|G|^2} \sum_{g, g' \in G} \chi_\alpha^*(g) \chi_\alpha^*(g') \rho(g \cdot g') \\
&= \frac{d_\alpha d_\beta}{|G|^2} \sum_g \left(\sum_{g'' \in G} \chi^{(\alpha)*}(g \cdot g''^{-1}) \chi^{(\beta)*}(g'') \right) \rho(g) \\
&= \delta_{\alpha\beta} \frac{d_\alpha}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha^*(g) \rho(g) = \delta_{\alpha\beta} \pi_\beta
\end{aligned}$$

ここで 2 行目から 3 行目に行くときに公式

$$\sum_{g' \in G} \chi^{(\alpha)}(g'^{-1}) \chi^{(\beta)}(g' g) = \frac{\delta_{\alpha\beta} |G|}{d_\alpha} \chi^{(\alpha)}(g)$$

を用いた．この公式自体は既約表現の直交性の定理から指標の直交性を導いた議論を応用すれば示される．

ここで $\rho(g) = \sum_\alpha n^{(\alpha)} \rho^{(\alpha)}(g)$ と既約表現分解されるとすると

$$\mathrm{Tr}\,(\pi_\alpha) = \frac{d_\alpha}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha^*(g) \mathrm{Tr} \rho(g) = n_\alpha d_\alpha$$

つまり π_α は $n_\alpha d_\alpha$ 次元の部分空間への射影になる．既約表現 $\rho^{(\alpha)}$ は d_α 次元なのでこの部分空間の中に n_α 個含まれていることがわかる．

6.3　一般線形群と $SU(n)$ の表現

以下では一般線形群 $GL(n,\mathbf{C})$ の既約表現を置換群を用いて構成する．行列それ自体が表現となる n 次元のベクトル表現 (表現空間 $V = \mathbf{C}^n$) を基本表現と呼び，その組み合わせで一般の表現を作っていく．ここで $M \in GL(n,\mathbf{C})$ とし，その成分を M_i^j $(i,j = 1,\cdots,n)$ と書く．

このとき表現空間の m 回の直積

$$V \otimes \cdots \otimes V$$

を考えると，その元 $\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_m$ に M は $M\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes M\vec{v}_m$ と作用し，直積空間は $GL(n,\mathbf{C})$ の表現空間を与える．しかしこの表現は可約である．

この空間に置換群 S_m を

$$\sigma \cdot (\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_m) = \vec{v}_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes \vec{v}_{\sigma_m}$$

のように作用させると，S_m の作用と $GL(n,\mathbf{C})$ の作用は交換可能である．

$$\sigma \cdot (M(\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_m)) = M(\sigma(\vec{v}_1 \otimes \cdots \otimes \vec{v}_m)) = M\vec{v}_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes M\vec{v}_{\sigma_m}$$

従って S_m の既約表現への射影演算子 (Young の対称子) e_B をかけた $e_B(V \otimes \cdots \otimes V)$ は $GL(n,\mathbf{C})$ の不変部分空間となる．実際にはこれが $GL(n,\mathbf{C})$ の既約表現を与える．つまり $GL(n,\mathbf{C})$ の既約表現も Young 図により分類されることがわかる．

例：V の基底を $\vec{e}_i$ $(i = 1,\cdots,n)$ と書く．

- $m = 2$ の場合：$\lambda = [2]$ は 2 階対称表現に対応する．基底 $\frac{1}{2}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i)$．表現の次元は $n(n+1)/2$.
- $\lambda = [1,1]$ は 2 階反対称表現で基底は $\frac{1}{2}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i)$．表現の次元は $n(n-1)/2$.
- $m = 3$ の場合: $[3]$ は 3 階完全対称表現表現で次元は $n(n+1)(n+2)/6$. $[1,1,1]$ は 3 階完全反対称表現表現で次元は $n(n-1)(n-2)/6$.
- $\lambda = [2,1]$ の場合は盤を作り Young 対称子を構成する．$n(n^2-1)/3$ 次元表現が 2 種類構成される．

注意：n 次元のベクトルは $n+1$ 回以上反対称化するとゼロになるので Young 図の列の数は n が最大となる．

$SU(n)$ の表現　$SU(n)$ の表現も n 次元の複素ベクトル空間を基礎にして，その直積を置換群で分解していくことにより得られるので $GL(n,\mathbf{C})$ の表現と実はほとんど同じである．唯一の違いは $M \in SU(n)$ に対しては $\det(M)=1$ となることであり，n 階の反対称テンソルは自明な変換をすることになる．

$$\vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n \;\rightarrow\; \det(M)\vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n = \vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

ここで $\wedge$ はベクトル空間の基底の反対称化，

$$\vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \vec{e}_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\sigma_n}$$

を意味している[5]．これから $SU(n)$ の既約表現を表す Young 図については

1. 行の数（縦の幅）は最大 n までである
2. 縦の長さが n の部分は自明な表現を表しているので Young 図から取り去っても同じ表現を表している．

ということがいえる．つまり高さ n の Young 図 $[\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n]$ と高さ $n-1$ の Young 図 $[\lambda_1-\lambda_n, \cdots, \lambda_{n-1}-\lambda_n]$ は同じ既約表現を表している．以下では後の形 (高さを $n-1$ にしたもの) を既約表現を表す記号として用いる事にする．

例：$SU(2)$　まず最も自明な例として $SU(2)$ をとる．この場合 Young 図の高さは $2-1=1$ までなので既約表現は一つの正の整数 λ を用いて Young 図 $[\lambda]$ で表される．この場合の表現の基底は元々のスピン変数を用いて

$$\sum_{\sigma \in S_\lambda} \vec{s}_{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes \vec{s}_{\sigma_\lambda}$$

と書かれ，各 $\vec{s}$ は 2 次元空間（スピン Up と Down) の基底となるので，$\lambda+1$ 次元表現となる．これは λ 個のスピンの合成で得られる全スピン $\lambda/2$ の表現の基底に他ならない．この表現が完全対称化された波動関数から得られることはよく知られている．

例：$SU(3)$　この場合 Young 図すなわち既約表現は 2 つの自然数 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ で特徴づけられる．$SU(3)$ は例えばクォークのフレーバー自由度として現れることが知られているが，最初のいくつかの簡単な表現として現れるものを取り上げると，Young 図，次元の順番で [1], 3; [1, 1], 3; [2], 6;

[5] この反対称積 $\wedge$ は後で見る微分形式のところで外積代数として現れる．

$[2,2]$, 6; $[2,1]$, 8; $[3]$, 10 となる．最初の $[1]$ (3 次元表現) がクォーク u, d, s に対応し，表現 $[3]$, $[2,1]$ などがバリオン (baryon)，表現 $[2,1]$ がメソン (meson) として現れる．

またクォークの自由度としてはもう一つ色 (color) の $SU(3)$ 自由度があり，クォークは $[1]$ (3 次元表現)，反クォークが $[1^2]$ (3 次元表現)，グルーオンが $[2,1]$ (8 次元表現) として現れる．クォークの対称性については後でより詳しく取り上げる．

次元公式　一般に $SU(m)$ の表現で Young 図 λ (ただし箱の数は n とする) に対応する表現の次元は,

$$F/H\,, \quad F = f_1 \cdots f_n, \quad H = s_1 \cdots s_n$$

となる．ここで s_i は i 番目の箱に対する hook length (S_n の既約表現で出てきたもの)．因子 (factor)f_i は同様に i 番目の箱に対して定義される数で次の規則で決める．まず左上角の箱に対して $f = m$ とする．あと右に移動するたびに $+1$, 下に動くたびに -1 だけ f を変化させる．例として図 3 に $\lambda = [2,2,1]$ の場合の hook length と因子を与えた．

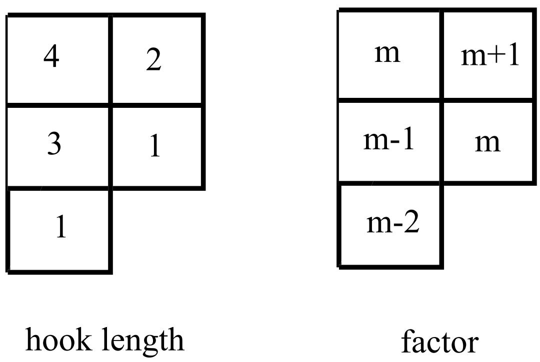

図 3: hook length と因子

この場合の既約表現の次元は

$$\frac{m^2(m+1)(m-1)(m-2)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{m^2(m^2-1)(m-2)}{24}$$

となる．

問題：上でいくつか次元をあげた $SU(2)$ と $SU(3)$ の場合に次元公式を確認せよ．

7 連続群とリー代数の表現論 (Representation theory of Lie group and Lie algebra)

以下では $SU(n)$ だけでなく一般の連続群に対する表現論を考察する．

7.1 リー群とリー環

連続群の例

- $GL(n, \mathbf{C})$, $GL(n, \mathbf{R})$: 一般線形群 (general linear group) ($\det g \neq 0$).
- $SL(n, \mathbf{C})$, $SL(n, \mathbf{R})$: 特殊線形群 (special linear group) ($\det g = 1$).
- $U(n)$: ユニタリー群 (unitary group) $g \in GL(n, \mathbf{C})$, $g^\dagger \cdot g = E$.
- $O(n)$: 直交群 (orthogonal group) $g \in GL(n, \mathbf{R})$, $g^t \cdot g = E$.
- $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbf{C})$
- $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbf{R})$
- $Sp(n, K)$: シンプレクティック群 (symplectic group) ($K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$). シンプレクティック構造 $\omega = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i \eta_{i+n} - \eta_i \xi_{i+n})$ を不変にする変換.

$$
\begin{aligned}
& g \in GL(2n, K) \\
& g^t J g = J \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- $Sp(n, \mathbf{C}) \cap U(2n)$ を $Sp(n)$ と書き，これもシンプレクティック群と呼ぶ.

以上の連続群は全て行列で定義されたものであり**古典リー群** (classical Lie group) と呼ばれる．この中で $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ は位相的にコンパクトな群である．

これ以外に行列で基本表現が書くことができないリー群として，G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 が有り，**例外型リー群** (exceptional Lie group) と呼ばれる．

リー代数 (—環)　(Lie algebra, — ring) リー群の局所的な構造を表すものとしてリー代数がある．g がリー代数であるとは

1. 線形性 (linearity)

$$X, Y \in g \quad \rightarrow \quad aX + bY \in g \quad (a, b \in \mathbf{C})$$

2. 交換子 (commutator) が定義できる：

$$X, Y \in g \quad \rightarrow \quad [X, Y] \in g$$

(古典リー群に対しては $[X, Y] = XY - YX$)

交換子が満たすべき性質

1. 双線形性

$$\begin{aligned} [X, aY + bZ] &= a\,[X, Y] + b\,[X, Z] \\ [aX + bY, Z] &= a\,[X, Y] + b\,[Y, Z] \end{aligned}$$

2. 反対称性

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

3. Jacobi 則

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

基底を用いた表示　ベクトル空間としてのリー代数 g の基底を $T_1, \cdots, T_d$ とする．つまり任意の $X \in g$ が $X = \sum_{i=1}^{d} a_i T_i$ と展開できるものする．基底の間の交換子を

$$[T_A, T_B] = i \sum_{C=1}^{d} f_{AB}{}^{C} T_C$$

と書くと，$f_{AB}{}^{C}$ に拘束条件が付き

$$\begin{aligned} &f_{AB}{}^{C} = -f_{BA}{}^{C} && \text{(反対称性と同値)} \\ &f_{AB}{}^{D} f_{CD}{}^{E} + f_{BC}{}^{D} f_{AD}{}^{E} + f_{CA}{}^{D} f_{BD}{}^{E} = 0 && \text{(Jacobi 則と同値)} \end{aligned}$$

リー群とリー代数の関係　リー環はリー代数の単位元付近の局所的な構造を表すものである．つまり ϵ を小さな数としてリー群の元は次のように展開される．

$$g = e + i\epsilon X - \frac{\epsilon^2}{2} X^2 + O(\epsilon^3) = \exp(i\epsilon X)\,, \quad X \in g.$$

この表式を各リー群の定義式に代入すると無限数変分に対する条件が現れて，リー環（代数）が次のように定まる．

1. $U(n)$ のリー環 $u(n)$

$$E = g^\dagger g = E + i\epsilon(X - X^\dagger) + O(\epsilon^2) \quad \to \quad T = T^\dagger$$

つまりリー環は Hermite 行列のなす線形空間.

2. $SU(n)$ のリー環 $su(n)$: 上の条件にさらに次の条件が加わる.

$$\det(g) = 1 + i\epsilon \mathrm{tr}(X) + O(\epsilon^2) = 1 \quad \to \mathrm{tr}X = 0\,.$$

つまりトレースがゼロの Hermite 行列.

3. $O(n)$ のリー環 $o(n)$: 同様にして $X^t = -X$ でなくてはいけない. つまり反対称実行列.

4. $SO(n)$ のリー環 $so(n)$: $X^t = -X$ かつ $\mathrm{tr}(X) = 0$. しかし X の反対称性より $\mathrm{tr}(X) = 0$ は自動的に言えてしまうので $O(n)$ と $SO(n)$ のリー環は同じ $o(n) = so(n)$ である.

5. $Sp(n, \mathbf{C})$ のリー環 $sp(n, \mathbf{C})$:

$$g = \begin{pmatrix} E + i\epsilon a & i\epsilon b \\ i\epsilon c & E + i\epsilon d \end{pmatrix} + O(\epsilon^2)$$

と書くと

$$d = -a^t,\ b^t = b,\ c^t = c$$

という条件が導かれる.

6. $Sp(n) = Sp(n, \mathbf{C}) \cap U(2n)$ のリー環 $sp(n)$: 上の条件に

$$a = a^\dagger, \quad b = c^\dagger$$

が加わる.

Campbell-Hausdorff の公式 $g_1 = e^{X_1}$, $g_2 = e^{X_2}$ と書かれたとして $g_1 \cdot g_2$ も同様に e^{X_3} という形でかけるであろうか. これに対する答えとして Campbell-Haussdorff の公式が知られている.

$$\begin{aligned}
X_3 &= X_1 + X_2 + \frac{1}{2}[X_1, X_2] + \frac{1}{12}[X_1 - X_2, [X_1, X_2]] + \cdots \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \{Z_m(X_1, X_2) + (-1)^m Z_m(X_2, X_1)\} \\
Z_m(X, Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{(p_i, q_i)} \frac{[ad\,X]^{p_1}[ad\,Y]^{q_1} \cdots [ad\,X]^{p_{n-1}}[ad\,Y]^{q_{n-1}}}{p_1! q_1! \cdots p_{n-1}! q_{n-1}!} X \\
& \sum_{i=1}^{n-1}(p_i + q_i) = m - 1\,, \quad p_i + q_i > 0
\end{aligned}$$

より簡単化された公式も最近議論されている．M. Reinsch: arXiv:math-phys/9905012.

この公式によりリー環による記述が単位元近傍のみでなく，リー群全体にある程度拡張できることがわかる．しかしより精密な議論のためには位相幾何 (Homotopy 群) の知識を援用する必要がある．

7.2 リー群の大局的な構造 (Global structure of Lie group)

連結性 ($\pi_0(G)$)　リー群 G が**連結**であるとは，G の任意の 2 元 $g_1,\ g_2$ を G 上の曲線で結ぶことができるということを意味する．この曲線は関数 $g(t)\in G,\ t=[0,1]$ で，$g(0)=g_1,\ g(1)=g_2$ となるもので表される．

連結でないものの例として $O(3)=\{g\in GL(3,\mathbf{R})|g\cdot g^t=E\}$．$g^t\cdot g=E$ より $\det(g)^2=1$．これから $\det(g)=\pm1$ となる．$\det(g_1)=1$ となる元 (例えば $g_1=E$) と $\det(g_2)=-1$ となる元 (例えば $g_2=-E$) とは $O(3)$ 上の曲線で結ぶことができない．曲線上で $\det(g)$ が $+1$ から -1 にジャンプすることはあり得ないため．

G_0 を G の元で単位元と曲線でつなぐことができる成分の集合とする．これを群 G の単位元の連結成分と呼ぶ．G_0 は G の不変部分群となることに注意する．つまり任意の $g\in G$ に対し $g\cdot G_0\cdot g^{-1}=G_0$ となることが示される．これから剰余類 G/G_0 は群の構造を持つ．例えば $G=O(3)$ に対しては $G/G_0=\mathbf{Z}_2$ となる．この剰余類群を $\pi_0(G)$ と書き，ゼロ次のホモトピー群 (homotopy group) と呼ぶ.

単連結性 ($\pi_1(G)$)　単位元 e から e にいたる任意の G_0 上の曲線が自明な道に収縮可能であるとき，G は**単連結**であるという．ここで e から e への道は上と同様に写像 $g(t)\in G\ (t\in[0,1])$ で $g(0)=g(1)=e$ となるものを指す．また自明な道とは $g_0(t)=e\ (t\in[0,1])$ を指す.

曲線 g_1 が曲線 $g_2(t)$ に収縮可能であるとは写像 $g_{12}(t,s),\ t,s\in[0,1]$ が存在して $g_{12}(t,0)=g_1(t),\ g_{12}(t,1)=g_2(t)$ とできることを指す．この様な写像が存在するとき 2 つの道はホモトープであるといい $g_1\sim g_2$ などと書く．

e から e にいたる道全体は，互いにホモトープとなる道を同一視すると，群構造を持つ．例えば道 g_1 と道 g_2 の積を

$$g_1\cdot g_2(t)=\begin{cases} g_2(2t) & t\in[0,\frac{1}{2}] \\ g_1(2t-1) & t\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$$

と定義し，道 g の逆元を

$$g^{-1}(t) = g(1-t) \qquad t \in [0,1]$$

と定義する．単位元は e から e への自明な道である．この群を群 G の**基本群** ($\pi_1(G_0)$) と呼ぶ.

群 G が単連結であるというのは基本群 $\pi_1(G_0)$ が単位元のみで構成されることを意味する.

単連結でない群の例：

1. $U(1) = \{a \in \mathbf{C} |\ |a|^2 = 1\}$: n を任意のゼロでない整数として道

   $$g_n(t) = e^{2\pi int} \qquad (t \in [0,1])$$

   を考えると，これらは全て自明な道に収縮可能でない．また

   $$g_n \cdot g_m \sim g_{n+m}$$

   となるので，基本群は $\pi_1(U(1)) = \mathbf{Z}$ となる.

2. $SO(3)$: 局所的に $SU(2)$ と $SO(3)$ が同型であることはよく知られている．これらの間の写像として $g \in SU(2)$ に対し $\tilde{g} \in SO(3))$ を次のように対応づける:

   $$g^\dagger \sigma_i g = \sum_{j=1}^{3} \sigma_j \tilde{g}_{ji}$$

   ここで σ_i は Pauli 行列である.

   この対応を使って $SU(2)$ の中の次のような道を考える.

   $$g(t) = \left(\begin{array}{cc} e^{\pi it} & 0 \\ 0 & e^{-\pi it} \end{array} \right), \qquad t \in [0,1]$$

   この道は $SU(2)$ の中では E と $-E$ を結ぶ閉じていない道であるが, $SO(3)$ の対応する道 $\tilde{g}(t)$ の方は E から E への閉じた道となる．この道は自明な道に連続的に収縮可能でない．一方 $SU(2)$ の中でこの道を 2 回合成したもの $g \cdot g$ は $SU(2)$ の中で閉じた道となり自明な道に収縮可能である．それに対応して $SO(3)$ の中で $\tilde{g} \cdot \tilde{g}$ の自明な道に収縮可能となる．これから

   $$\pi_1(SO(3)) = \mathbf{Z}_2$$

   となることがわかる.

   位相的には $SU(2)$ は S^3 (3 次元球面) と同相であり単連結である．また $SO(3)$ は $SU(2)/\{E, -E\} = \mathbf{RP}^3$ (3 次元実射影空間) と同相である.

Lie の定理　Lie 代数 g を持つ単連結な Lie 群 G が一意的に存在する．これを Lie の定理と呼ぶ．またここで現れた単連結な Lie 群を**不変被覆群** (universal covering group) と呼び UG と書くことにする．

一般に同じ Lie 代数を持つ Lie 群はいくつか存在している．それらは次のような一般形を持つ．

$$UG/D$$

ここで D は G の離散的な不変部分群である．(つまり任意の $g \in UG$, 任意の $d \in D$ に対し $g^{-1}dg \in D$ となる.)

行列で定義されている Lie 群に対しては，Schur の補題により D は $\{\lambda E\}$ (ただし $\lambda \in \mathbf{C}$) の形に限定される．

例えば $SU(n)$ は単連結な Lie 群であるが，それに対する D として上の形を仮定すると $g^\dagger g = E$ より $|\lambda|^2 = 1$, $\det(g) = 1$ より $\lambda^n = 1$ となるので

$$D = \left\{\omega^\ell E\right\}, \quad \omega = e^{2\pi i/n}, \quad \ell = 0, 1, \cdots, n-1$$

というものが可能である．つまり $SU(n)$ と $SU(n)/\mathbf{Z}_n$ は同じリー代数を持つ Lie 群である．特に $n = 2$ の場合は上で見た例，すなわち $SU(2)/\mathbf{Z}_2 = SO(3)$ である．

Lie 群の表現論と Lie 代数の表現論　Lie 代数 g の表現とは，写像 $\rho : g \to GL(n, \mathbf{C})$ であって括弧積の構造を保つ，つまり $X_1, X_2 \in g$ に対し

$$[\rho(X_1), \rho(X_2)] = \rho([X_1, X_2])$$

となるものである．ここで左辺の括弧は行列の交換関係である．ρ の行列の次元を表現の次元と呼ぶ．

一般に不変被覆群の元は e^X の形にかけるので，対応する Lie 群の表現は Lie 代数の表現を用いて

$$\rho(e^X) = e^{\rho(X)}$$

とかける．これから不変被覆群の表現は Lie 代数の表現と同じであることがわかる．

一方上で述べた単連結でないが同じ Lie 代数を持つ群 UG/D に対しては，D に属する元 d に対し

$$\rho(d) = E$$

とならなくてはいけない．これから Lie 代数の表現から Lie 群の表現を上のように作ったとき，この制限を満たさない表現は UG/D の表現とはならないことに注意する．

例えば $SU(2)$ はスピン j ($j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$) の $2j+1$ 次元表現を持つことがよく知られている．一方 $SO(3)$ も同じ Lie 代数を持つが，j は整数である必要がある．つまり半奇数の j に対しては $\rho(-E)=-E$ となることから上の制限を満たさず，$SO(3)$ の表現にはなっていない．

7.3　$su(2)$ と $su(3)$ の表現

$su(2)$ の復習　Lie 代数の表現の基本となるのは $su(2)$ の代数

$$[J_i,J_j]=i\sum_k \epsilon_{ijk}J_k$$

の表現である．量子力学ではこの代数の表現を得るために**昇降演算子** $J_\pm=J_1\pm iJ_2$ を導入した．これらが満たす代数は，

$$[J_3,J_\pm]=\pm J_\pm\,,\quad [J_+,J_-]=2J_3$$

である．

この表現を構築する主要なステップは次のようなものであった．

1. 互いに交換する最大の生成子の集合を探す．今の場合は J_3 と全角運動量演算子 $J^2=\sum_i J_i^2$ である．これらは同時対角化可能である．

2. **最高重み状態**を決める．条件としては
$$J_+|j,j\rangle=0\,,\quad J_3|j,j\rangle=j|j,j\rangle$$
この 2 つの条件から状態 $|j,j\rangle$ の J^2 の固有値が $j(j+1)$ に定まる．

3. 最高重み状態 $|j,j\rangle$ に**下降演算子** J_- をかけていくと J_3 の固有値が一つずつ下がっていく．例えば
$$J_3(J_-)^p|j,j\rangle=(j-p)(J_-)^p|j,j\rangle$$
となる．一方 J^2 と J_- は交換するので J^2 の固有値は変化しない．つまり $(J_-)^p|j,j\rangle\propto|j,j-p\rangle$ である．

4. この比例係数は次のようにして順次決められる．まず $|j,j\rangle$ から出発し $|j,m\rangle$ まで比例係数まで含めて状態が決められたとする．つまり $\langle j,m|j,m\rangle=1$ とする．このとき $J_-|j,m\rangle=N_{j,m}|j,m-1\rangle$ とすると
$$\begin{aligned}{N_{j,m}}^2 &= \langle j,m|J_+J_-|j,m\rangle\\ &= \langle j,m|(J^2+J_3^2+J_3)|j,m\rangle\\ &= (j-m+1)(j+m)\end{aligned}$$

これから $j+m>0$ である限り $N_{j,m}=\sqrt{(j-m+1)(j+m)}$ とすると規格化が決まる．

5. もし j に何の制限もないとすると $(J_-)^p|j,j\rangle$ $(p=0,1,2,\cdots)$ が無限次元の表現空間の基底を与える．しかし上の議論で $j+m=j+(j-p)<0$ となると**状態の正値性**が要求できなくなる．これから $p>2j$ に対しては $J_-^p|j,j\rangle=0$ としなくてはいけない．これは j が $1/2$ の整数倍 $\ell/2$ であることを要求し，表現の量子化が起こる．このとき表現の次元は有限になって $2j+1$ 次元表現となる．表現の基底は

$$|j,j\rangle\,,\ |j,j-1\rangle\,,\cdots,|j,-j+1\rangle\,,\ |j,-j\rangle$$

となる．

$su(3)$　自明でない最も簡単な Lie 代数の表現論は $su(3)$ から始まるので，まずある程度具体的に表現を作っていく．構成法は実は $su(2)$ で行ったステップの繰り返しである．

$su(3)$ は 3 行 3 列の行列 X に次の条件を要求することにより得られる：

$$X^\dagger=X\,,\quad \mathrm{tr}(X)=0\,.$$

このような行列は 8 次元となりその基底は Pauli 行列を一般化した Gell-mann 行列

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$
$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&i&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

を用いて

$$T_a\equiv\frac{\lambda_a}{2}$$

で与えられる．このとき

$$\mathrm{tr}(T_aT_b)=\frac{1}{2}\delta_{ab}$$

と正規化されていることに注意する．

$su(2)$ の場合の J_3 に対応する可換な生成子を探すと，今度は T_3 と T_8 の 2 種類あることがわかる．いま

$$H_1 = T_3\,, \qquad H_2 = T_8$$

という記号を導入する．このように可換な生成子のことを **Cartan 部分代数** (Cartan subalgebra) と呼ぶ.

残りの生成子を $su(2)$ における $J_\pm$ の様な昇降演算子の形にしたい．このため次のような線形結合を考える：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2) = E_{\pm\vec{\alpha}_1},\ \frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 \pm iT_5) = E_{\pm\vec{\alpha}_2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 \mp iT_7) = E_{\pm\vec{\alpha}_3}$$

ここで現れたベクトル $\vec{\alpha}_i \in \mathbf{R}^2$ $(i = 1, 2, 3)$ は

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

で与えられ，H_i $(i = 1, 2)$ の「固有値」

$$\Big[H_i, E_{\vec{\alpha}_j}\Big] = (\vec{\alpha}_j)^i E_{\vec{\alpha}}$$

を表している．ここで $(\vec{\alpha}_j)^i$ はベクトル $\vec{\alpha}_j$ の第 i 成分である．Cartan 部分代数が 2 次元 (2 個の基底がある) 事に対応して，生成子の固有値も 2 次元空間となることに注意する．$su(3)$ の生成子のなす固有値をプロットすると図 4 のようになる.（原点の 2 重丸は $H_{1,2}$ が固有値ゼロを持つことに対応している）このような生成子の Cartan 部分代数に対する固有値の集合を**ルート系** (root system) と呼び，$\pm\vec{\alpha}_i$ などを**ルートベクトル** (root vector) と呼ぶ.

$SU(2)$ に場合には Cartan 部分代数は 1 次元であり，ルートベクトルは (± 1), (0) (それぞれ $J_\pm$, J_3 に対応) となる．$SU(3)$ はこの 2 次元への拡張である.

次に $su(3)$ の表現を考える．まず**基本表現** (Young 図は [1]) を考える．この表現は次元 3 であり基底は

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．これらのベクトルは Cartan 部分代数 $H_{1,2}$ の固有ベクトルになっている.

$$\begin{aligned} &H_1\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1\,, \quad H_1\vec{e}_2 = -\frac{1}{2}\vec{e}_2\,, \quad H_1\vec{e}_3 = 0\,, \\ &H_2\vec{e}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{e}_1\,, \quad H_2\vec{e}_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{e}_2\,, \quad H_2\vec{e}_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

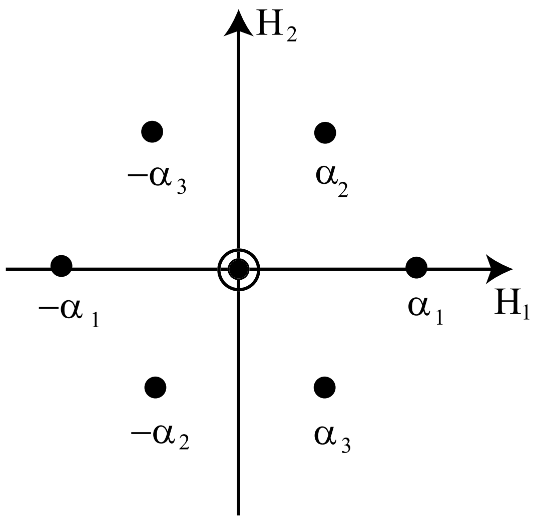

図 4: SU(3) ルート系

これらをルート系の時と同様にベクトル表示して $H_i\vec{e}_j = (\vec{\omega}_j)^i\vec{e}_j$ と書くことにする．ここで $(\vec{\omega}_j)^i$ は **2 次元**空間のベクトル $\vec{\omega}_j$ の第 i 成分である．この 3 個のベクトル $\vec{\omega}_j$ を基本表現に対するウェイトベクトル (weight vector) と呼ぶ．一般にウェイトベクトルは任意の表現に対する H_i の固有値を指す言葉であり，基本表現に対応するウェイトは**基本ウェイト** (fundamental weight) と呼び，他と区別する．

既に述べたように $SU(3)$ の表現はこれらの表現の直積をとり Young の対称子をかけることにより系統的に得られる．基底の直積 $\vec{e}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\vec{e}_{j_\ell}$ は Cartan 部分代数の元 H_i の固有ベクトルになっており

$$H_i\vec{e}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\vec{e}_{j_\ell} = (\vec{\omega}_{j_1}+\cdots+\vec{\omega}_{j_\ell})^i\vec{e}_{j_1}\otimes\cdots\otimes\vec{e}_{j_\ell}$$

となる．この固有値は Young の対称子で対称化しても変化しない．

例えば基本表現を 2 回直積をとると [2] (6 次元表現) と [1, 1](3 次元表現) が得られるが，前者が対称化，後者が反対称化であることを思い出すとそれらの基底が容易に得られる．まず [2] に対応する表現の基底は

$$\vec{e}_i\otimes\vec{e}_i,\ (i=1,2,3)\,,\quad \frac{1}{2}(\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j+\vec{e}_j\otimes\vec{e}_i),\ (i<j)$$

の 6 個，[1, 1] に対する基底は

$$\frac{1}{2}(\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j-\vec{e}_j\otimes\vec{e}_i),\ (i<j)$$

の 3 個である．これらの基底に対するウェイトを図示すると図 5 のようになる．

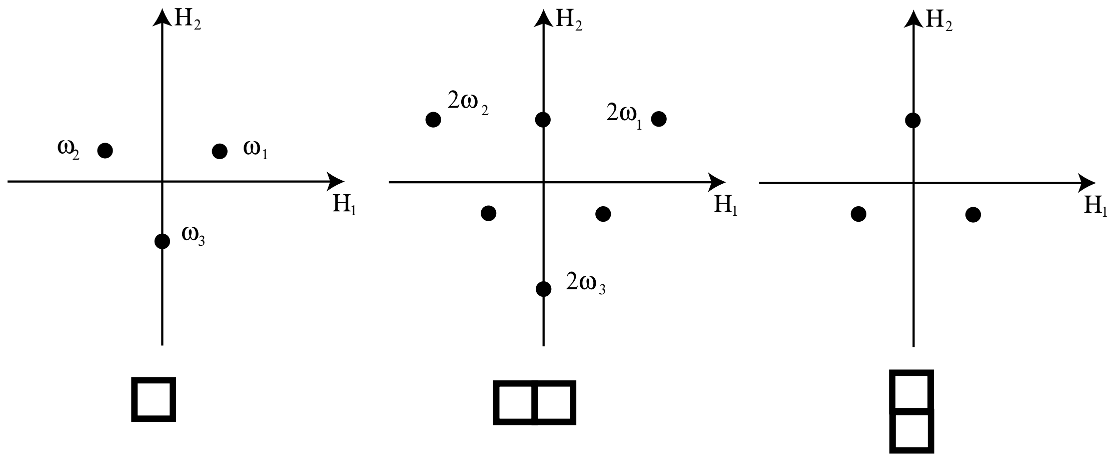

図 5: SU(3) ウェイト

[**問題**] 箱の数が 3 個の場合に可能な表現 [3], [2, 1], [1^3] についてウェイトを書き出せ．特に [2, 1] に対するウェイトはルート系 (図 4) と一致することを示せ．

一般にウェイト $\vec{\omega}$ に対応する状態を $|\omega\rangle$ と書くと，$E_{\vec{\alpha}}|\omega\rangle$ は重み $\omega+\alpha$ を持つ．これは次のように示される:

$$H_i E_{\vec{\alpha}}|\omega\rangle = [H_i, E_{\vec{\alpha}}]|\omega\rangle + E_{\vec{\alpha}} H_i|\omega\rangle = (\alpha^i + \omega^i)|\omega\rangle$$

$SU(3)$ の場合は

$$\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2 = \vec{\alpha}_1\,, \quad \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_3 = \vec{\alpha}_2\,, \quad \vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2 = \vec{\alpha}_3$$

であるので，上の構成により隣り合うウェイトの点は $\vec{\alpha}_i$ で関係づけられることがわかる．これは $SU(2)$ の表現において $|j,m\rangle$ と $|j,m\pm 1\rangle$ が昇降演算子 $J_\pm$ で関係づけられることの一般化である．

7.4 $SU(3)$ の応用：quark 模型

$SU(3)$ の表現の最も典型的な例として素粒子論における quark 模型があげられる．まず素粒子の中で quark の占める位置を簡単に触れる．

現在観測されている素粒子は 2 つに分類することができる．一つは物質を構成する場であり，quark, lepton, Higgs 粒子などがあげられる．その一方で，相互作用を媒介する粒子 (gauge 粒子) があり，電磁相互作用 (ゲージ群 $U(1)$) を媒介する photon γ, 弱い相互作用 ($SU(2)$) を媒介する weak boson Z, $W^\pm$, 強い相互作用 ($SU(3)$) を媒介する gluon があげられる．

quarkは6種類あることが知られておりそれぞれu (up), d(down), s(strange), c(charm), b(bottom), t(top) という名前が付けられている．quarkは電荷も持っており電磁相互作用にも影響されるが，それよりはるかに強い $SU(3)$ 相互作用に主に支配されている．ここでは質量が比較的近い u, d, s の 3 種類に議論を限定する．この 3 種類の quark は 2 種類の $SU(3)$ 対称性を持っている．一つは強い相互作用の $SU(3)$ であり，この自由度を書き表すため 3 種類の quark に添字を付け u_i, d_i, s_i $(i=1,2,3)$ と書くことにする．一方もう一つの $SU(3)$ 対称性は u と d と s を互いに入れ換える対称性であり，こちらはフレーバー (flavor) $SU(3)$ と呼ぶ．この 2 種類の $SU(3)$ に対して quark は基本表現であることに注意する．

quark の複合粒子である baryon と meson の事を調べるためには，まず color の自由度から来る制約に注意しなくてはいけない．強い相互作用の動力学的な性質として，遠距離に行くほど束縛エネルギーが強くなると言う点がある．このため少なくとも観測のレベルでは color の自由度は表に出てこない．言い換えると color $SU(3)$ に対する singlet のみが観測にかかる．この現象は**閉じこめ** (confinement) と呼ばれ量子色理論 (QCD) の特徴的な性質である．

既に学んだように $SU(3)$ の基本表現から singlet を作るためには，少なくとも 3 個の基本表現を反対称に組み合わせる必要がある．つまり q_i を一般の quark を表す記号として，

$$\epsilon_{ijk}q_iq_jq_k$$

という波動関数をとる必要がある．このように quark を組み合わせることにより作られる複合粒子をバリオン (baryon) と呼ぶ．

もう一つの可能性としては $[1,1]$ 表現 (3 次元) と基本表現を組み合わせる

$$3\,([1])\otimes\bar{3}\,([1,1])=8\,([2,1])\oplus 1\,([1,1,1])$$

というものである．実際反 quark $(\bar{q})$ は $[1,1]$ 表現に属しているので，この組み合わせ $q\bar{q}$ が可能である．このようにして作られる複合粒子を中間子 (meson) と呼ぶ．

ここで quark の量子数と H_i $(i=1,2)$ の固有値の関係をみる．quark の持つ量子数には電荷 (Q), バリオン数 (B), strangeness (S), ハイパーチャージ (Y), アイソスピン (T_3) があげられる．これらは独立ではなく，次のような関係がある．

$$Y=B+S\,,\qquad Q=T_3+\frac{Y}{2}$$

u,d,s に対する量子数は次の表にまとめられる．

	Q	B	S	Y	T_3
u	$2/3$	$1/3$	0	$1/3$	$1/2$
d	$-1/3$	$1/3$	0	$1/3$	$-1/2$
s	$-1/3$	$1/3$	-1	$-2/3$	0

これを T_3 を横軸，Y を縦軸にしてプロットすると

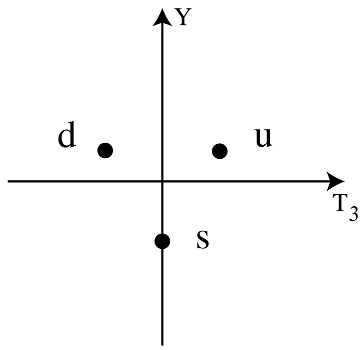

図 6: quark の量子数

となる．これは T_3 を H_1 とし $\sqrt{3}Y/2$ を H_2 とすると基本表現のウェイトそのもの (u$\leftrightarrow \omega_1$, d$\leftrightarrow \omega_2$, s$\leftrightarrow \omega_3$) である．

実際にどのような $SU(3)$ 内部自由度とスピンとの組み合わせが可能であるかを見るためには quark の波動関数を調べる必要がある．quark は fermion でありその波動関数全体は反対称でなくてはいけない．動径方向の波動関数は基底状態のみを考えれば完全対称である．また色の自由度については既に見たように baryon に関しては完全反対称である必要がある．このとき残りの自由度は flavor $SU(3)$ とスピンとなり，これらに関する波動関数は組み合わせて対称にする必要がある．

flavor $SU(3)$ の波動関数は Young の対称子により 3 種類の表現が作れることはこれまで何度も見てきた．

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3} = \mathbf{10}\,([3]) \oplus 2\times\mathbf{8}\,([2,1]) \oplus \mathbf{1}\,([1,1,1])$$

一方スピンの $SU(2)$ も同様に既約表現が作られる．

$$\mathbf{2}\otimes\mathbf{2}\otimes\mathbf{2} = \mathbf{4}\,([3]) \oplus 2\times\mathbf{2}\,([2,1])$$

これらを組み合わせて対称にするためには**同じ Young 図**に対応する表現を組み合わせなくてはいけない (Young の対称子は対称化と反対称化の組み合わせである事を思い出すと同じ型の Young 図を組み合わせない限

り，どこかに反対称な部分が残ってしまう)．これから言えることはまず $SU(2)$ で対応する表現の無い $SU(3)$ の **1** 表現は現れないという点である．また $SU(2)$ の **4** 表現がスピン 3/2, **2** 表現がスピン 1/2 であることを思い出すと，フレーバーについての **10** 表現に属する粒子はスピン 3/2 であり，**8** 表現に属する粒子はスピン 1/2 となることがわかる．これは現実に観測されている baryon のスペクトルと合致している（下図参照）．

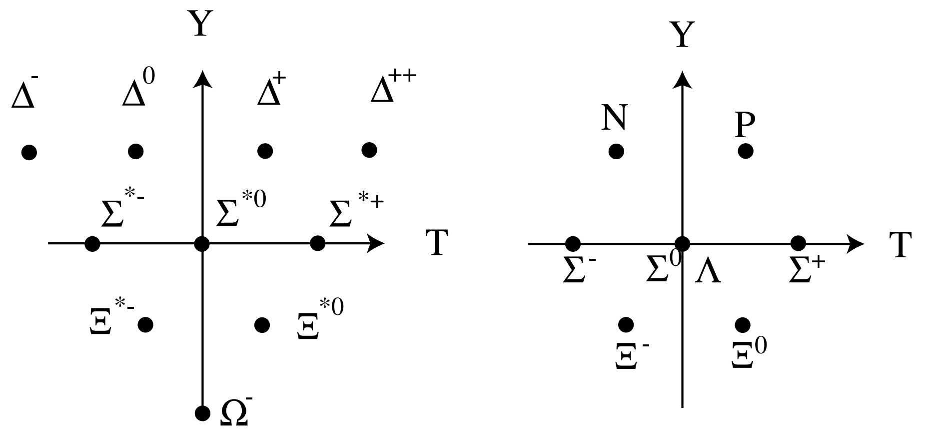

図 7: Baryon のスペクトル

[**問題**] それぞれのバリオンがどのようなクォークの組み合わせでできているかを考えよ．

7.5 Lie 代数の表現論：一般論

Cartan 部分代数と昇降演算子　リー環の生成子は Cartan 部分代数の元 H_i $(i = 1, \cdots, m)$ と $r - m$ 個の昇降演算子 $E_{\vec{\alpha}}$ に分類できる．ここで r はリー環の次元，m はその階数 (rank) である．$\vec{\alpha}$ は m 次元空間のベクトルで root ベクトルと呼ばれる．それらのなす代数は

$$[H_i, H_j] = 0\,, \quad [H_i, E_{\vec{\alpha}}] = \alpha_i E_{\vec{\alpha}}$$

となる．一方リー環の表現空間は weight ベクトルと呼ばれる m 次元空間のベクトル元 $\vec{\omega}$ を用いて $H_i|\vec{\omega}\rangle = \omega_i|\vec{\omega}\rangle$ を満たす．これらの元に対して昇降演算子を作用させると，$H_i E_{\vec{\alpha}}|\vec{\omega}\rangle = (\alpha_i + \omega_i)E_{\vec{\alpha}}|\vec{\omega}\rangle$ となり，昇降演算子が weight ベクトル $\vec{\omega}$ を root ベクトルの分だけずらすことがわかる．つまり

$$E_{\vec{\alpha}}|\vec{\omega}\rangle \propto |\vec{\omega} + \vec{\alpha}\rangle$$

である．今リー環の規格化因子を適当な定数 λ を用いて $\mathrm{Tr}\ (T_a T_b) = \lambda\delta_{ab}$，すなわち

$$\langle E_{\vec{\alpha}}|E_{\vec{\beta}}\rangle := \lambda^{-1}\mathrm{Tr}\ \left(E^\dagger_{\vec{\alpha}} E_{\vec{\beta}}\right) = \delta_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\,,\ \langle H_i|H_j\rangle := \lambda^{-1}\mathrm{Tr}\ (H_i H_j) = \delta_{i,j}$$

としておく．定数 λ は $su(3)$ の場合は $1/2$ である．この規格化の下で後で用いる公式

$$[E_{\vec{\alpha}}, E_{-\vec{\alpha}}] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i H_i\,,$$

が成立する．(証明) 状態 $E_{\vec{\alpha}}|E_{-\vec{\alpha}}\rangle$ は weight ベクトルがゼロなので，$E_{\vec{\alpha}}|E_{-\vec{\alpha}}\rangle = \sum_{i=1}^{m} \beta_i|H_i\rangle$ と展開可能なはずである．この β_i は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\beta_i &= \langle H_i|E_{\vec{\alpha}}|E_{-\vec{\alpha}}\rangle = \lambda^{-1}\mathrm{Tr}\ (H_i\,[E_{\vec{\alpha}}, E_{-\vec{\alpha}}]) = \lambda^{-1}\mathrm{Tr}\ (E_{-\vec{\alpha}}\,[H_i, E_{\vec{\alpha}}]) \\ &= \frac{\alpha_i}{\lambda}\mathrm{Tr}\ (E_{-\vec{\alpha}} E_{\vec{\alpha}}) = \alpha_i\end{aligned}$$

正（負）の root　$su(2)$ の場合を思い出すと表現の構成のためには，$J_+|j,j\rangle = 0$ を満たす**最高重み状態** $|j,j\rangle$ から出発して降下演算子 J_- をかけていくことにより表現空間 $|j,j\rangle, |j,j-1\rangle, \cdots, |j,-j\rangle$ を構築する．同様のことを一般のリー代数で行うためには昇降演算子 $E_{\vec{\alpha}}$ を，上昇演算子と下降演算子に分類する必要がある．ここでは root ベクトル $\vec{\alpha}$ を用いて次のように root の正負をを定義する．今 $\vec{\alpha}$ の成分 α_i を $i=1$ から m まで順番に取り出しゼロでない最初の α_i が正（負）の場合 $\vec{\alpha}$ は正（負）であるとする．正（負）の $\vec{\alpha}$ を正（負）根と呼び，それに対応する $E_{\vec{\alpha}}$ を上昇（下降）演算子と呼ぶ．$su(2)$ の場合と同じく，全ての上昇演算子でゼロになる状態 $E_{\vec{\alpha}}|\vec{\omega}\rangle = 0\ (\vec{\alpha} > 0)$ を最高重み状態と呼び，これを用いて既約表現を構成することになる．

$su(3)$ の場合は正根は $(1,0), (1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ の３つである．

単純根　２つの正根の和として書けない正根を**単純根**と呼ぶ．例えば $su(3)$ の場合は上の３つのうち $(1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ は単純根であるが，

$$(1,0) = (1/2, \sqrt{3}/2) + (1/2, -\sqrt{3}/2)$$

であるので $(1,0)$ は単純根ではない．

任意の正根は単純根の１つ以上の組み合わせの和として書ける．また単純根は階数 (Cartan 部分代数の次元) だけ存在している．

ノルム因子　具体的に weight ベクトルの集合を構成するためには，最高重み状態から降下演算子をかけていって，ゼロにならないものを拾って

いけばよいが，その際関係式 $E_{\vec{\alpha}}|\vec{\omega}\rangle = N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}}|\vec{\omega}+\vec{\alpha}\rangle$, に現れるノルム因子 $N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}}$ を決定することが本質的である．ここではそのいくつかの関係式を導く．

1. 隣り合う係数の関係

$$|N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}-\vec{\alpha}}|^2 - |N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}}|^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\omega} \qquad \cdots \qquad (*)$$

(証明)$[E_{\vec{\alpha}}, E_{-\vec{\alpha}}] = \sum_{i=1}^m \alpha_i H_i$ より $\langle\vec{\omega}|[E_{\vec{\alpha}}, E_{-\vec{\alpha}}]|\omega\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i\langle\vec{\omega}|H_i|\vec{\omega}\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i\omega_i$．一方左辺は $\langle\vec{\omega}|E_{\vec{\alpha}}E_{-\vec{\alpha}}|\vec{\omega}\rangle - \langle\vec{\omega}|E_{-\vec{\alpha}}E_{\vec{\alpha}}|\vec{\omega}\rangle = |N_{-\vec{\alpha},\vec{\omega}}|^2 - |N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}}|^2$, であるが $N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}} = \langle\vec{\omega}-\vec{\alpha}|E_{-\vec{\alpha}}|\vec{\omega}\rangle = \langle\vec{\omega}-\vec{\alpha}|E_{\vec{\alpha}}^{\dagger}|\vec{\omega}\rangle = (N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}-\vec{\alpha}})^*$ を代入すると与えられた結果が得られる．

2. 一般に状態 $|\vec{\omega}\rangle$ に対して非負整数 p, q が存在し，$E_{\vec{\alpha}}|\vec{\omega}+p\vec{\alpha}\rangle = E_{\vec{\alpha}}|\vec{\omega}-q\vec{\alpha}\rangle = 0$ であるとすると

$$\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\omega}}{|\vec{\alpha}|^2} = -\frac{1}{2}(p-q)\,. \qquad \cdots \qquad (**)$$

(証明) 公式 (*) を $|\vec{\omega}\rangle$ に昇降演算子をかけた状態に繰り返し適用すると，

$$\begin{aligned}
|N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}+(p-1)\vec{\alpha}}|^2 - 0 &= \vec{\alpha}\cdot(\vec{\omega}+p\vec{\alpha}) \\
|N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}+(p-2)\vec{\alpha}}|^2 - |N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}+(p-1)\vec{\alpha}}|^2 &= \vec{\alpha}\cdot(\vec{\omega}+(p-1)\vec{\alpha}) \\
&\vdots \\
0 - |N_{\vec{\alpha},\vec{\omega}-q\vec{\alpha}}|^2 &= \vec{\alpha}\cdot(\vec{\omega}-q\vec{\alpha})
\end{aligned}$$

この両辺をそれぞれたすと左辺はゼロ．右辺は

$$\begin{aligned}
&(p+q+1)\vec{\alpha}\cdot\vec{\omega} + |\vec{\alpha}|^2\left(\frac{p(p+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2}\right) \\
&= (p+q+1)\left\{\vec{\alpha}\cdot\vec{\omega} + \frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2(p-q)\right\}
\end{aligned}$$

$p+q+1 \geq 1$ だから括弧の中をゼロと置くと公式が証明される．

root ベクトルのなす角度　公式 (**) を随伴表現に適応すると $\vec{\omega}$ が root ベクトルになるので $\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} = \frac{q-p}{2} := \frac{m}{2}$ (m は適当な整数)．これと $\vec{\alpha} \leftrightarrow \vec{\beta}$ とした式 $\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|^2} = \frac{q'-p'}{2} := \frac{m'}{2}$ を辺辺かけ合わせると

$$\frac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2} = \frac{mm'}{4} = \cos^2\theta\,.$$

ここで θ は２つの root ベクトルのなす角度であるがそれは mm' が非負整数であるから４つの可能性しかないことがわかる．つまり $mm'=0$ $(\theta=\pi/2)$, $mm'=1$ $(\theta=\pi/3, 2\pi/3)$, $mm'=2$ $(\theta=\pi/4, 3\pi/4)$, $mm'=3$ $(\theta=\pi/6, 5\pi/6)$ である．

Dynkin 図　特に単純根に対しては上の公式はさらに簡単化される．これは２つの単純根 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ に対する性質[6]

$$E_{-\vec{\alpha}}|E_{\beta}\rangle = 0$$

によるもので，上の公式で $q=q'=0$，つまり $\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} = -p/2 \le 0$, $\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\beta}|^2} = -p'/2 \le 0$ が成立する．これから単純根の間の角度には次の制限が付く，

$$\pi/2 \le \theta < \pi \quad \to \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\,.$$

ここで $\theta=\pi$ は単純根は正の根であるからあり得ないことに注意する．２つの非負整数 (p, p') と単純根のなす角度と長さの比の関係は

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{pp'}\,, \quad |\vec{\beta}|^2/|\vec{\alpha}|^2 = p/p'$$

これから角度が $\theta = 2\pi/3$ の場合には $p=p'=1$ だから２つの単純根の長さは等しくなり，$\theta = 3\pi/4, 5\pi/6$ の場合は $(p,p') = (1,2), (1,3)$（あるいはその入れ替え）であるから単純根の長さの比は $\sqrt{2}$ または $\sqrt{3}$ となる．例えば $SU(3)$ の場合２つの単純根 $(1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ のなす角度は $2\pi/3$ であり単純根の長さは等しい．リー環の表現論は単純根とそれらがお互いになす角度により一意的に定まる．この状況を図示する際，便利であるのは図１で示すように単純根を〇，互いになす角度を〇の間の線分の数で表すものである．これを **Dynkin 図**と呼ぶ．

リー環の分類　単純リー環の分類は全てなされており，以前与えた４つの古典リー環 $su(n+1)$ (リー環の分類では A_n と書かれる．以下も同じ) $so(2n+1)$ (B_n), $sp(n)$ (C_n), $so(2n)$ (D_n), および例外型と呼ばれる５種類 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 である．それらの Dynkin 図は図２のようになる．これらの中には同じ図式が含まれている．それは $A_3 = D_3$, $B_2 = C_2$, $D_2 = A_1 \times A_1$ である．これは対応するリー環が同型であることを示して

[6] この等式は $[E_{-\vec{\alpha}}, E_{\vec{\beta}}] = 0$，あるいは $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ が root ベクトルにならないことと等価である．これを示すために $\vec{\beta} - \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ と書き，かりに $\vec{\gamma}$ を正の root ベクトルと仮定してみる．そうすると $\vec{\beta} = \vec{\alpha} + \vec{\gamma}$ であるから単純根 $\vec{\beta}$ が正根の和で書かれることとなり単純根の性質と矛盾する．同様に $\vec{\gamma}$ が負の root ベクトルと仮定しても矛盾が起こることが示される．従って $\vec{\gamma}$ は root ベクトルではない．

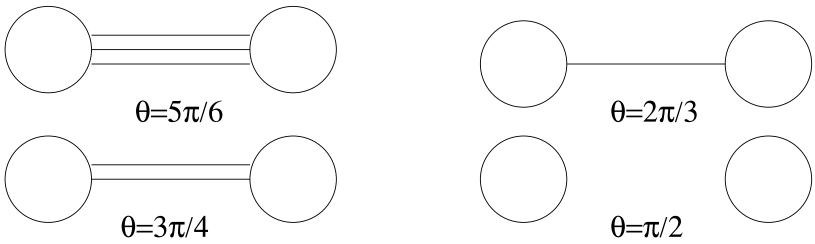

図 8: 単純根のなす角度を示す図式 (Dynkin 図)．○は単純根を示す．

いる．つまりそれぞれ $su(4) = so(6)$, $so(5) = sp(2)$, $so(4) = su(2) \times su(2)$ である．A 型，D 型，E 型は共通する性質，つまり全ての単純根が一本線で結ばれているという性質を持つ．このようなリー代数を総称して **simply laced Lie algebra** と呼ぶ．

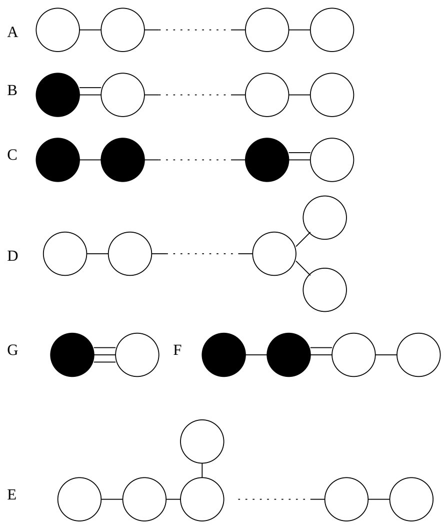

図 9: 単純リー環の Dynkin 図．○，●は単純根．●は○より長さが短いものを指している．

基本の重み (fundamental weight)　最高重み状態は全ての単純根に対して $E_{\vec{\alpha}}|\vec{\omega}\rangle = 0$ を満たす状態である．これは公式 (**) を用いると

$$\frac{2\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\alpha}|^2} = q_i \geq 0\,, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

を意味している．逆に言うと m 個の非負整数 q_i を与えることは最高重み状態を与えることと同等である．上の関係式を満たす $\vec{\omega}$ は常に

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{m} q_i \vec{\omega}_i$$

という形にかける．ここで $\vec{\omega}_i$ は**基本重み (fundamental weight)** と呼ばれるベクトルであり，関係式

$$\frac{2\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\omega}_j}{|\vec{\alpha}_i|^2} = \delta_{ij}$$

で決定される．q_i は $su(2)$ の表現における総角運動量 j に対応する量子数である．

第 II 部

微分形式

8　外積代数

wedge 積　V を n 次元ベクトル空間 $(\mathbf{R}^n)$ とするとき **wedge 積 (外積)** を直積を反対称化したものとして定義する：

$$\vec{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \vec{\alpha}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \vec{\alpha}_{\sigma(p)}\,, \qquad \vec{\alpha}_i \in V$$

このように p 個のベクトルの直積を反対称化した空間は線形空間となり，$\wedge^p V$ と書くことにする．p 個のベクトルの wedge 積は p-**ベクトル**とも呼ばれる．この空間の次元は

$$\dim(\wedge^p V) = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

である．wedge 積は次のような性質を持つ：

1. 反対称性

   $$\vec{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_i \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_j \wedge \cdots \vec{\alpha}_p = -\vec{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_j \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_i \wedge \cdots \vec{\alpha}_p$$

2. 線形性

   $$\begin{aligned} &\vec{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge (a_1 \vec{\alpha}_i + a_2 \vec{\alpha}'_i) \wedge \cdots \vec{\alpha}_p \\ &\qquad = a_1 \vec{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_i \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_p + a_2 \vec{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}'_i \wedge \cdots \wedge \vec{\alpha}_p \end{aligned}$$

   ただし $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, $\vec{\alpha}_i \in V$.

例えば $V = \mathbf{R}^3$，$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i$ ，$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i$ とすると，

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \sum_{i<j} (v_i u_j - u_i v_j) \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = w_1 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + w_2 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 + w_3 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$$

となる．ここで w_i は $\vec{v}$ と $\vec{u}$ のベクトル積 $\vec{v} \times \vec{u}$ の第 i 成分である．これから外積はベクトル積の一般化であることがわかる．

$\wedge^p V$ の基底

1. V の基底を $\vec{e}_i$ $(i=1,\cdots,n)$ とすると，$\wedge^p V$ の基底は $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n$ に対して $\vec{e}_{i_1} \wedge \cdots \vec{e}_{i_p}$ となる．

2. $p=n$ の場合 $\dim(\wedge^n V)=1$ で基底は $\vec{e}_1 \wedge \cdots \vec{e}_n$ となる．また $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^n R_{ij}\vec{e}_j$ に対して

$$\vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_n = \det(R_{ij})\,\vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_n$$

となる．

3. $p>n$ の場合 $\dim(\wedge^p V)=0$：これは n 次元ベクトルを n 回より多い回数反対称化すると自動的にゼロになるからである．

$\wedge^p V$ の内積　$\wedge^p V$ の二元 λ,μ（ただし $\lambda = \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p$, $\mu = \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{u}_p$ とする）に対し内積は V の内積を用いて次のように定義される：

$$(\lambda,\mu) = \det{}_{i,j=1,\cdots,p}(\vec{v}_i,\vec{u}_j)$$

基底を用いた表示では $\wedge^p V$ の二元を

$$\lambda = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \lambda_{i_1\cdots i_p}\vec{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_p}\,, \quad \mu = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \mu_{i_1\cdots i_p}\vec{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_p}$$

と書き V の基底の間の内積を $(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=G_{ij}$ と書くと

$$(\lambda,\mu) = \sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j_1<\cdots<j_p} \lambda_{i_1\cdots i_p}\mu_{j_1\cdots j_p} \begin{vmatrix} G_{i_1j_1} & \cdots & G_{i_pj_1} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{i_1j_p} & \cdots & G_{i_pj_p} \end{vmatrix}$$

となる．

外積空間とフェルミオンの関係　外積空間はフェルミオンのフォック空間と深い関係があることを見よう．$\vec{e}_i$ を V の基底，$\vec{e}^i$ をその双対基底

$$(\vec{e}_i,\vec{e}^j) = \delta_i^j$$

とする．このとき外積空間 $\wedge^* V$ （このように書いたときは $\wedge^p V$ $(p=0,1,\cdots,n)$ を総称して指すものとする）に作用する 2 種類の演算を次のように定義する．

1. $\bar{\psi}_i$: $\lambda \in \wedge^p V \to \bar{\psi}_i(\lambda) = \vec{e}_i \wedge \lambda \in \wedge^{p+1} V$

2. ψ^i: $\lambda \in \wedge^p V \to \psi^i(\lambda) = i(\vec{e}^i)\lambda \in \wedge^{p-1} V$

ただし $i(\vec{v})$ は内積演算子であり $\lambda = \vec{v}_1 \wedge \cdots \vec{v}_p$ に対し

$$i(\vec{u})\lambda = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} (\vec{u}, \vec{v}_j) \vec{v}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{v}_{j-1} \wedge \vec{v}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \vec{v}_p$$

これらの演算子は次の反交換関係を満たす：

$$\left\{\psi^i, \bar{\psi}_j\right\} = \delta^i_j\,, \quad \left\{\psi^i, \psi^j\right\} = 0\,, \quad \left\{\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_j\right\} = 0.$$

これらは第二量子化されたフェルミオンの生成消滅演算子が満たす関係式に他ならない．量子論の場合には V は第一量子化された粒子のヒルベルト空間，$\vec{e}_i$ は規格直交化されたエネルギー固有状態を表す．また

$$\vec{e}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{e}_p = \bar{\psi}_1 \cdots \bar{\psi}_p(1)$$

であるが，これは真空 (1) に生成演算子をかけていくことにより p 粒子状態が作られることを表す．

Hodge 双対　$\dim(\wedge^p V) = \dim(\wedge^{n-p} V)$ であるのでこの二つの空間の間には対応関係が付くはずであるが，それが **Hodge 双対**と呼ばれるものである．簡単のため $\vec{e}_i$ を V の正規直交基底とする（つまり $\vec{e}^i = \vec{e}_i$）．上で述べたフェルミオンの言葉を使うと簡明に書くことができる．

$$\lambda = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \lambda_{i_1 \cdots i_p} \vec{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{i_p} = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \lambda_{i_1 \cdots i_p} \bar{\psi}_{i_1} \cdots \bar{\psi}_{i_p}(1) \in \wedge^p V$$

に対する Hodge 双対 $\star\lambda \in \wedge^{n-p} V$ は次のように定義される：

$$\star\lambda = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \lambda_{i_1 \cdots i_p} \psi_{i_p} \cdots \psi_{i_1} \sigma$$

ただしここで $\sigma = \vec{e}_1 \wedge \cdots \vec{e}_n$ である．フェルミオンの言葉では，Hodge 双対は生成演算子と消滅演算子との入れ換え，あるいは電子と空穴の入れ換えを行うことに他ならない．また次の性質に注意する．$\lambda \in \wedge^p V$ に対し

$$\star \star \lambda = (-1)^{p(n-p)} \lambda$$

問題: $V = \mathbf{R}^3$ の場合，

$$\vec{v} \times \vec{u} = \star(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

となることを示せ．

9　微分形式

定義　n 次元空間 M ($\mathbf{R}^n$ のような平坦な空間でも良いし後で考える多様体のような曲がった空間でも良い) に座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ が導入されているとして，微分 p-形式 (differential p-form) を

$$\omega = \sum_{0\le i_1<\cdots<i_p\le n} \omega_{i_1\cdots i_p}(x)\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

と定義する．微分 p-形式全体のなす空間を $\Omega^p(M)$ と書くことにする．また $|\omega| = p$ とする．

dx^i などは直感的には座標 x^i の形式的な無限小変分を想定するものであるが，ここでは単にある n 次元線形空間[7] の基底 (つまり $\vec{e}_i$) と考えておく方がわかりやすい．wedge 積 $\wedge$ は前の章と同様にベクトル空間の外積を表すものとする．つまり例えば

$$dx^i\wedge dx^j = -dx^j\wedge dx^i$$

が満たされる．$\omega_{i_1\cdots i_p}(x)$ は座標 x^i に依存する関数であり，添字の入れ換えに対して反対称

$$\omega_{i_1\cdots i_r\cdots i_s\cdots i_p}(x) = -\omega_{i_1\cdots i_s\cdots i_r\cdots i_p}(x)$$

となるものである．$\Omega^p(M)$ に属する微分形式を定義する係数関数 $\omega_{i_1\cdots i_p}$ の独立な成分の数は全部で $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ 個である．

積　外積代数の場合と同様に微分形式の間に p 形式

$$\omega = \sum_{0\le i_1<\cdots<i_p\le n} \omega_{i_1\cdots i_p}(x)\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

と q 形式

$$\eta = \sum_{0\le j_1<\cdots<j_q\le n} \eta_{j_1\cdots j_q}(x)\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}$$

の積は

$$\omega\wedge\eta = \sum_{0\le i_1<\cdots<i_p\le n}\ \sum_{0\le j_1<\cdots<j_q\le n} \omega_{i_1\cdots i_p}(x)\eta_{j_1\cdots j_q}(x)\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_q}$$

と定義される．この積に対して

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{pq}\eta\wedge\omega$$

が成立する．

[7]多様体では余接束 (cotangent bundle) のファイバー (fiber)

座標変換における振る舞い　M が持つ座標 x^i を別のもの y^i に取り替えたとき微分形式は不変な意味を持つ．二つの座標の間の関係を

$$x^i = \phi^i(y)$$

とすると，dx^i の部分は

$$dx^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi^i(y)}{\partial y^j} dy^j$$

と変換する．これから微分 p 形式全体は

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= \sum_{i_1<\cdots i_p} \omega_{i_1\cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= \sum_{i_1<\cdots i_p} \sum_{j_1,\cdots,j_p} \omega_{i_1\cdots i_p}(\phi(y)) \frac{\partial \phi^{i_1}}{dy^{j_1}} \cdots \frac{\partial \phi^{i_p}}{dy^{j_p}} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_p} \\
&\equiv (\phi^* \omega)(y)
\end{aligned}$$

のように変換される．この式の右辺は座標 y についての微分形式になっている．

この変換は二つの異なる空間の間の写像 $\phi{:}N \to M$ を用いて M 上の微分形式 ω を N 上の微分形式 $\phi^*\omega$ に写像したと見なすことも可能である．$\phi^*\omega(y)$ は M 上の微分形式 ω の**引き戻し (pullback)** と呼ばれる．

外微分演算子　外微分演算子 (exterior derivative) d は $\Omega^p(M)$ から $\Omega^{p+1}(M)$ の写像であり

$$\omega = \sum_{0\le i_1<\cdots<i_p\le n} \omega_{i_1\cdots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

に対して

$$d\omega = \sum_{0\le i_1<\cdots<i_p\le n} \sum_j \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

外微分演算子の基本的な性質としては

1. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge \eta$
3. $d^2 = 0$
4. $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$

このうち 3 番目の性質は外微分演算子の最も基本的な性質であり，

$$d^2\omega = \sum_{j,k} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \frac{\partial^2 \omega_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

と計算し，$dx^j \wedge dx^k$ の部分が j と k の入れ換えに対して反対称であるのに対して $\frac{\partial^2 \omega_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^j \partial x^k}$ の部分が対称であることに注意すると上の表式がゼロとなることがわかり，証明される．

また 4 番目の性質は微分形式の外微分が座標変換，あるいは多様体間の写像の下で不変な意味を持つことを意味している．計算を煩雑にしないため 1 形式 $\omega = \omega_i(x)dx^i$ に対して計算を行うと

$$\begin{aligned}
\phi^*\omega &= \omega_i(\phi(y)) \frac{\partial \phi^i}{\partial y^j} dy^j \\
d(\phi^*\omega) &= \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\omega_i(\phi(y)) \frac{\partial \phi^i}{\partial y^j}\right) dy^k \wedge dy^j \\
&= \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^l}\frac{\partial \phi^l}{\partial y^k}\frac{\partial \phi^i}{\partial y^j} + \omega_i(\phi(y))\frac{\partial^2 \phi^i}{\partial y^k \partial y^j}\right) dy^k \wedge dy^j \\
&= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^l}\frac{\partial \phi^l}{\partial y^k}\frac{\partial \phi^i}{\partial y^j} dy^k \wedge dy^j = \phi^*(d\omega)(y)
\end{aligned}$$

となる．

Hodge 双対　微分形式に対する Hodge 双対を定義するためには正規直交化された基底が必要である．今の場合それは dx^i を正規直交化することに対応する．

座標 x^i で測った空間 M の計量を

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

と書く．基底 dx^i について（局所的に）線形結合

$$e^a = \sum_{i=1}^n E_i^a dx^i$$

をとると計量テンソルを対角化して

$$ds^2 = \sum_{a=1}^n e^a e^a$$

という形に書くことができる．ここで現れる e^a を多脚場 (vierbein) と呼ぶ．これが dx^i に対する正規直交化された基底となる．

Hodge 双対は e^a を用いて外積空間の場合と同様に定義される．もともとの ω を

$$\omega = \sum_{0\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} \omega_{i_1\cdots i_p}(x)\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

に対して $e^a = \sum_{i=1}^n E^a_i dx^i$ を逆に解いた表式 $dx^i = \sum_{a=1}^n E^i_a e^a$ を代入して

$$\omega = \sum_{a_1<\cdots<a_p} \tilde{\omega}_{a_1\cdots a_p} e^{a_1}\wedge\cdots\wedge e^{a_p}$$

という形に書き直す．このとき ω の Hodge 双対は

$$\star\omega = \sum_{a_1<\cdots<a_p} \tilde{\omega}_{a_1\cdots a_p} \psi^{a_p}\cdots\psi^{a_1}\sigma$$

と定義される．ここで演算子 ψ と σ は外積代数の時と同様に定義されている．例えば $\sigma = e^1\wedge\cdots\wedge e^p$ である．Hodge 双対は $\Omega^p(M)$ から $\Omega^{n-p}(M)$ への写像であり $\Omega^p(M)$ に属する ω に対して

$$\star\star\,\omega = (-1)^{p(n-p)}\omega$$

を満たす.

δ 演算子　Hodge 双対と外微分 d を組み合わせると $\Omega^p(M)$ から $\Omega^{p-1}(M)$ への演算子 δ を

$$\delta = (-1)^{np-n+1}\star d\star$$

と定義できる[8]．d, ϕ^*, $\wedge$ などは空間の計量に依存しない概念であるが, $\star$ と δ は計量に依存するものであることは注意が必要である．δ は d と同様に重要な性質

$$\delta^2 = 0$$

を満たす．ゼロ形式 $f(x)\ \in\ \Omega^0(M)$ (つまり M 上の関数) に対しては $\delta f(x) = 0$ となる．(-1 形式は存在しないため).

Laplacian　微分形式に作用する Laplacian は $\Omega^p(M)$ を $\Omega^p(M)$ に写像する 2 階微分演算子であり

$$\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$$

と定義される．ゼロ形式 $f\in\Omega^0(M)$ に対しては

$$\Delta f(x) = \delta df(x) = \star d\star df(x)$$

となる.

[8] ここに現れる符号は n が偶数の時は -1，奇数の時は $(-1)^p$ となる.

10　微分形式とベクトル解析

平坦な座標におけるベクトル解析　通常のベクトル解析との関連を見るためには $M = R^3$ と置き，その直交座標を x^1, x^2, x^3 と書く．計量テンソルは

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

となるのでそれぞれの dx^i は正規直交している:

$$(dx^i, dx^j) = \delta_{ij}$$

各次数の微分形式は

0 形式　:　スカラー場 : $f(x)$

1 形式　:　ベクトル場 : $V_1(x)dx^1 + V_2(x)dx^2 + V_3(x)dx^3$

2 形式　:　擬ベクトル場 : $A_1(x)dx^2 \wedge dx^3 + A_2(x)dx^3 \wedge dx^1 + A_3(x)dx^1 \wedge dx^2$

3 形式　:　擬スカラー場 : $g(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

ここでスカラー場と擬ベクトル場はパリティー変換 $x^i \to -x^i$ に対して不変な場 $f \to f$, $A_i \to A_i$ であり，一方ベクトル場と擬スカラー場は符号を変えるものである．

電磁気学においてはスカラー場の例はスカラーポテンシャル $\phi(x)$, ベクトル場の例は電場 $E_i(x)$, 擬ベクトル場の例は磁場 $B_i(x)$ となる．また流体力学における速度ベクトルはベクトル場 (1 形式) の例である．

ベクトル解析には勾配 (grad), 発散 (div), 回転 (rot), Laplacian などの概念が現れるがそれらは微分形式の言葉で簡明に書くことができる．

1. 勾配 (gradient) : スカラー場 (0 形式) に作用してベクトル場 (1 形式) を得るものであり

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}dx^3$$

に注意すると 0 形式に作用する**外微分演算子** d そのものである．

2. 発散 (divergence) : ベクトル場 (1 形式) に作用しスカラー場 (0 形式) を得るものであるので，1 形式 $\omega = \sum_i V_i(x)dx^i$ に δ を作用させると

$$\begin{aligned}
-\delta\omega &= \star d \star (V_1 dx^1 + V_2 dx^2 + V_3 dx^3) \\
&= \star d(V_1 dx^2 \wedge dx^3 + V_2 dx^3 \wedge dx^1 + V_3 dx^1 \wedge dx^2) \\
&= \star(\frac{\partial}{\partial x^1}V_1 + \frac{\partial}{\partial x^2}V_2 + \frac{\partial}{\partial x^3}V_3)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \mathrm{div}\ V
\end{aligned}$$

つまり発散は $-\delta$ に他ならない．

3. 回転(rotation):ベクトル場に対して外微分をほどこし，さらにHodge双対をとると回転 (rot) が現れる．より具体的に見ると

$$\begin{aligned}\star d\omega &= \star d(V_1 dx^1 + V_2 dx^2 + V_3 dx^3) \\ &= \star\left(\left(\frac{\partial V_3}{\partial x^2} - \frac{\partial V_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \cdots\right) \\ &= \left((\nabla \times \vec{V})_1 dx^1 + (\nabla \times \vec{V})_2 dx^2 + (\nabla \times \vec{V})_3 dx^3\right)\end{aligned}$$

つまり $\mathrm{rot} = \star d$ となる．

4. 微分形式で定義したLaplacianはベクトル解析に現れるラプラシアンと (符号を除いて) 一致する．つまり

$$(d+\delta)^2\omega = \pm \sum_{i_1<\cdots<i_p} \left(\Delta\omega_{i_1\cdots i_p}(x)\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

となる．ここで $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2$ である．

曲線直交座標におけるベクトル解析　微分形式を使うメリットの一つはそれが座標に依存しない形で (**一般座標変換**に対して不変に！) 定義されているという点である．例えば電磁気学などでは曲線直交座標，例えば

1. 極座標:(r, θ, φ)．計量は

$$dx^2 = (dr)^2 + r^2\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\right)$$

2. 円筒座標: (r, θ, z)．計量は

$$dx^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + dz^2$$

一般に曲線直交座標は計量が

$$ds^2 = (h_1(y))^2(dy^1)^2 + (h_2(y))^2(dy^2)^2 + (h_3(y))^2(dy^3)^2$$

という形になるものを指す ($h_i(x) > 0$ とする)．これから正規直交基底は

$$e_i = h_i(y)dy^i$$

とすればよいことがわかる．曲線直交座標系におけるベクトル解析ではこの $e_i(y)$ を用いて成分を定義する．つまりベクトル場は

$$\omega(y) = \sum_{i=1}^{3} V_i(y)dy^i = \sum_{i=1}^{3}(V_i/h_i)e^i$$

と書いたときの V_i/h_i をベクトルの第 i 成分と言う．このことに注意すると曲線直交座標系における grad, div, rot などは次のように書かれる．

1. grad:
$$df=\sum_i \frac{\partial f}{\partial y^i}dy^i=\sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial y^i}e^i$$
すなわち
$$(\text{grad } f)_i=\frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial y^i}$$

2. div: Hodge 双対の定義の際には e_i を用い外微分をとるときには dx^i を用いた表式に戻る必要があるのに注意して計算する.

$$\begin{aligned}
-\delta V &= \star d\star(V_1e_1+V_2e_2+V_3e_3)\\
&= \star d\,(V_1e_2\wedge e_3+V_2e_3\wedge e_1+V_3e_1\wedge e_2)\\
&= \star d\left(V_1h_2h_3dx^2\wedge dx^3+V_2h_3h_1dx^3\wedge dx^1+V_3h_1h_2dx^1\wedge dx^2\right)\\
&= \star\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(V_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial x^2}(V_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial x^3}(V_3h_1h_2)\right)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(V_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial x^2}(V_2h_3h_1)+\frac{\partial}{\partial x^3}(V_3h_1h_2)\right)\equiv \text{div}V
\end{aligned}$$

3. rot:

$$\begin{aligned}
\star dV &= \star d\,(V_1e_1+V_2e_2+V_3e_3)\\
&= \star d\left(h_1V_1dx^1+h_2V_2dx^2+h_3V_3dx^3\right)\\
&= \star\left(\left(\frac{\partial(h_3V_3)}{\partial x^2}-\frac{\partial(h_2V_2)}{\partial x^3}\right)dy^2\wedge dy^3+\text{cyclic perm.}\right)\\
&= \star\left(\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_3V_3)}{\partial x^2}-\frac{\partial(h_2V_2)}{\partial x^3}\right)e^2\wedge e^3+\text{cyclic perm.}\right)\\
&= \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_3V_3)}{\partial x^2}-\frac{\partial(h_2V_2)}{\partial x^3}\right)e^1+\text{cyclic perm.}
\end{aligned}$$

つまり
$$(\text{rot } V)_1=\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_3V_3)}{\partial x^2}-\frac{\partial(h_2V_2)}{\partial x^3}\right),\cdots$$
などとなる.

4. Laplacian: 簡単のためスカラー場に対するラプラシアンのみ計算すると

$$\begin{aligned}
-(d+\delta)^2f &= -\delta df=\star d\star df\\
&= \star d\star\left(\frac{\partial f}{\partial y^1}dy^1+\frac{\partial f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y^3}dy^3\right)\\
&= \star d\star\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial y^1}e^1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial y^2}e^2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial y^3}e^3\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \star d\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial y^1}e^2\wedge e^3+\frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial y^2}e^3\wedge e^1+\frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial y^3}e^1\wedge e^2\right)\\
&= \star d\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial y^1}dy^2\wedge dy^3+\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial y^2}dy^3\wedge dy^1+\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial y^3}dy^1\wedge y^2\right)\\
&= \star\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial y^1}\right)+\cdots\right)dy^1\wedge dy^2\wedge dy^3\\
&= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial y^1}\right)+\frac{\partial}{\partial y^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial y^3}\right)\right)
\end{aligned}
$$

これらの公式を通常のベクトル解析で導くときには複雑な幾何学的な考察が必要であったが微分形式を用いると形式的な計算だけで導くことができる．これは微分形式の大きなメリットである．

11 Maxwell 方程式と微分形式

Maxwell 方程式 (以下では簡単のため $c=1$ となる単位系で議論する)

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{E}=\rho\,, \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0\\
&\nabla\times\vec{B}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{J}\,, \qquad \nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0
\end{aligned}
$$

が時間 $(t=x^0)$ も含めた 4 次元空間で考えると簡単化することを見る．以下の議論では 4 次元 Minkowski 計量

$$
ds^2=-(dx^0)^2+(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2
$$

に対して規格化された多脚場を

$$
e^0=idx^0\,,\quad e^j=dx^j\,,\ (j=1,2,3)
$$

のように導入しそれを用いて Hodge 双対を定義することにする．

4 次元の微分形式で電磁気を議論するために場の強さの 2 形式を

$$
F=\sum_{\mu<\nu}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu=-\sum_{i=1}^{3}E_i(x)dx^0\wedge dx^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}B_idx^j\wedge dx^k
$$

と導入する．反対称行列 $F_{\mu\nu}$ はあからさまには

$$
F=\begin{pmatrix}0&-E_1&-E_2&-E_3\\E_1&0&B_3&-B_2\\E_2&-B_3&0&B_1\\E_3&B_2&-B_1&0\end{pmatrix}
$$

と書ける．またカレントの1形式を

$$j = -\rho(x)dx^0 + \sum_{k=1}^{3} J_k(x)dx^k$$

と定義する．これらの記号を使うと Maxwell 方程式は簡単な形

$$\delta F = j\,, \quad dF = 0$$

に書き換えられる．

このことは簡単な計算で示される．例えば

$$dF = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\epsilon_{ijk}\left((\vec{\nabla}\times\vec{E})_k + \frac{\partial B_k}{\partial x^0}\right)dx^0\wedge dx^i\wedge dx^j + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

となるので $dF = 0$ は Maxwell 方程式の2番目と4番目の式と同等になる．また Hodge 双対は計算すると

$$*F = i\sum_j B_j dx^0\wedge dx^j + \frac{i}{2}\sum_{j,k,l}\epsilon_{jkl}E_j dx^j\wedge dx^l$$

となるのでこれは

$$i\vec{E} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{B}$$

という入れ替えを引き起こす．このように**電場と磁場の双対性**は微分形式の言葉では Hodge 双対に他ならないことがわかる．$\delta F = \star d \star F$ なので $\delta F = -j$ が Maxwell 方程式の1番目と3番目の式に同等であることを示すのは難しくない．

電場と磁場はスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\vec{A}$ を用いて

$$\vec{B} = \nabla\times A\,, \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial x^0}$$

と書かれるが，微分形式の言葉で書き換えると

$$F = dA$$

という簡潔な形に再び書ける．ここでゲージポテンシャルの1形式 A は

$$A = -\phi(x)dx^0 + \sum_{j=1}^{3} A_j(x)dx^j$$

である．

一般に p 形式 $\omega(x)$ が $d\omega(x) = 0$ を満たすとき，少なくとも**局所的**には $p-1$ 形式 μ が存在して $\omega = d\mu$ という形に書ける．これは $d^2 = 0$ と矛盾し

ない．Maxwell 方程式は $dF = 0$ という式を含むので，局所的に $F = dA$ という形に書けるのである．

ゲージポテンシャルの 1 形式は関係式 $F = dA$ からユニークに決定されない．それは**ゲージ変換**

$$A' = A + d\chi$$

を行っても同じ F を定義するからである (つまり $dA' = dA + d(d\chi) = F$)．ここで χ は 0 形式である．

12　単体分割と微分形式の積分

12.1　低次元の積分定理と微分形式

1 形式の曲線上の積分　空間 M 上の p 形式は M の p 次元の部分空間の上で積分することができる[9]．この最も自明な例としては p がゼロの場合で 0 次元部分空間とは「点」であり 0 形式の点上の「積分」とは単に 0 形式を表す関数のその点における値に他ならない．つまり

$$\int_{[P]} f = f(P)$$

となる．

次に自明でない例として $p = 1$ の場合を考える．例えば 2 次元の $\mathbf{R}^2$ 上の曲線を考えその上で微分 1 形式を積分することを考えよう．積分を行う曲線を

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)$$

と 1 変数 t でパラメータ表示する．曲線上の積分の始点を P_0 とし終点を P_1 とする．このときパラメータ t を調整すると $P_0 = (x(0), y(0))$, $P_1 = (x(1), y(1))$ とおくことが可能である．微分形式 $A = A_x dx + A_y dy$ の曲線上の積分を

$$\int_{P_0}^{P_1} A = \int_0^1 dt \left[A_x(x(t)) \frac{dx}{dt} + A_y(x(t)) \frac{dy}{dt} \right]$$

この積分はパラメータ t に関する通常の 1 次元積分である．また t の代わりに別のパラメータ $\tilde{t}$ を用いても**積分の値が変わらない**ことは

$$dt \frac{dx}{dt} = d\tilde{t} \frac{dt}{d\tilde{t}} \frac{dx}{dt} = d\tilde{t} \frac{dx}{d\tilde{t}}$$

[9]空間 M やその部分空間は曲がった空間であってもよい．その場合は「空間」という言葉の代わりに「多様体」という用語を使う方がより正確である．「多様体」については微分幾何の参考書を参照．

などを用いると容易に確認できる．

次にこの1形式が $A = dF(F$ は0形式) という形に書ける場合を考える．この場合上の積分は

$$
\begin{aligned}
\int_{P_0}^{P_1} dF &= \int_0^1 dt \left[\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt}\right] \\
&= \int_0^1 dt \frac{dF(x(t))}{dt} = F(x(1)) - F(x(0)) \\
&= F(P_1) - F(P_0) = \int_{[P_1]-[P_0]} F
\end{aligned}
$$

つまり0形式の積分の端点における値の差となる．ここで最後の表式は0形式の「積分」の形に書き換えたものである．

2次元積分とGreenの定理　一つ次元が上の同様の結果としてGreenの定理がある．Greenの定理は

$$
\int_D dxdy \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = \int_{\partial D} (V_x dx + V_y dy)
$$

のように書かれる．ここで D は $\mathbf{R}^2$ 上の閉じた領域, ∂D は D の内部を左手に見る方向に積分の方向を与えた D の境界である．ここで $\omega = V_x dx + V_y dy$ と書くと簡潔に

$$
\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega
$$

のように書かれる．

12.2　単体分割と一般次元の空間の積分

曲がった空間上での積分を定義する標準的な方法は**単体分割**を用いるものである．

単体　$\mathbf{R}^{n+1}$ で $n+1$ 個の点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ を一般の位置，つまりどの3点も同一直線上にのらないようにとる．このとき n 単体を

$$
P = \sum_{i=0}^{n} t_i P_i\,, \quad (t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1)
$$

という点の集合として定義する．例えば $n=0$ の場合は一点 P_0, $n=1$ の場合は2点 P_0, P_1 を結ぶ線分，$n=2$ の場合は3点 P_0, P_1, P_2 を頂点とする3角形の内部である．$n+1$ 点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ で定義される n 単体を $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ と書く．

単体上の座標としては上で書いた $t_1, \cdots, t_n$ をとるのが自然である．このとき単体はパラメータ領域 $0 \le t_i \le 1$, $0 \le \sum_{i=1}^n t_i \le 1$ で書き表される．

鎖　単体の形式和

$$c = \sum_i a^i \Delta_i$$

(Δ_i は単体，a^i は整数の係数) を鎖 (chain) と呼ぶ．特に n 単体の和を n 鎖などと呼ぶ．鎖を使うとより一般的な図形を表現することができる．例えば 3 点 (P_1, P_2, P_3) を頂点とする 3 角形の周囲は 3 辺の和として

$$(P_0, P_1) + (P_1, P_2) + (P_2, P_0)$$

と書かれる．また $\mathbf{R}^2$ 上に 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 を取ると，これらを頂点とする 4 角形は 2 単体の和 (2 鎖) として

$$(P_1, P_2, P_3) - (P_2, P_3, P_4)$$

と書かれる．

ここで単体には**向き** (orientation) が定義されていることに注意する．例えば 1 単体 (P_0, P_1) は (P_1, P_0) の反対の向きを持つ．この状況を表すため単体の前に符号を付けることにする．例えば $(P_1, P_0) = -(P_0, P_1)$ である．一般には

$$(P_{\sigma(1)}, \cdots, P_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma (P_1, \cdots, P_n)$$

となる．

境界演算子　境界演算子 ∂ は n 鎖から $n-1$ 鎖への線形写像であり，単体に対して

$$\partial(P_0, \cdots, P_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (P_0, \cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots, P_n)$$

と定義さる．（i 番目の頂点が除かれている）一般の鎖 $c = \sum_l a_l \Delta_l$ (Δ_l は単体，a_l は整数の係数) に対しては線形性を用いて $\partial c = \sum_l a_l \partial \Delta_l$ と定義を拡張する．例えば

$$\begin{aligned} \partial(P_0 P_1) &= (P_1) - (P_0) \\ \partial(P_0 P_1 P_2) &= (P_1 P_2) - (P_0 P_2) + (P_0 P_1) \end{aligned}$$

などとなる．

問題：上で与えた 4 角形に対応する鎖 $(P_1, P_2, P_3) - (P_2, P_3, P_4)$ に対して境界演算子を作用し，4 角形の周囲の 1 単体の和 $(P_1 P_2) + (P_2 P_4) + (P_4 P_3) + (P_3 P_1)$ が現れることを確認せよ．

境界演算子の基本的な性質はそれを 2 回作用するとゼロになる

$$\partial^2 = 0$$

となる点である．これは外微分演算子とよく似ている．これは例えば

$$\begin{aligned}
&\partial(\partial(P_0 \cdots P_n)) \\
&\quad = \partial\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i (P_0 \cdots \cancel{P_i} \cdots P_n)\right) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j (P_0 \cdots \cancel{P_j} \cdots \cancel{P_i} \cdots P_n) + \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^{j-1}(P_0 \cdots \cancel{P_i} \cdots \cancel{P_j} \cdots P_n)\right) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

と証明される．

鎖体上の積分　p 形式

$$\omega(x) = \frac{1}{p!}\sum_{\mu_1 \cdots \mu_p} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_p}(x) dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$

は p 次元の空間 X 上で自然な積分を定義する．そのため X を互いに p 次元の共有部分空間を持たない部分空間に

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_L$$

のように分割され，各 X_α $(\alpha = 1, \cdots, L)$ は連続写像 $\varphi_\alpha(t)$ により単体 Δ_α から

$$x^\mu = \varphi_\alpha^\mu(t)\,, \quad x \in X_\alpha$$

のように得られるものとする．このとき ω の X 上の積分を

$$\begin{aligned}
\int_X \omega &= \sum_{\alpha=1}^{L} \int_{X_\alpha} \omega \\
\int_{X_\alpha} \omega &= \frac{1}{p!}\sum_{\mu_1 \cdots \mu_p} \int_{t_i \geq 0, \sum t_i \leq 1} d^p t\, \omega_{\mu_1 \cdots \mu_p}(\varphi_\alpha(t)) \frac{\partial \varphi_\alpha^{\mu_1}}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial \varphi_\alpha^{\mu_p}}{\partial t_p} \\
&= \int_{\Delta_\alpha} (\varphi_\alpha^* \omega)(t)
\end{aligned}$$

ここで $\varphi_\alpha^*\omega$ は ω の φ_α による引き戻しで，単体上 Δ_α 上の微分形式を定義している．単体上の積分はパラメータ t_i $(i = 1, \cdots, p)$ 上の通常の多次元積分である．

Stokes の定理　Green の定理の p 次元版の拡張を考える．まず p 単体 Δ 上の積分考える．ω を $(p-1)$ 形式とすると通常の部分積分により

$$\int_{\Delta_p} d\omega^{(p-1)} = \int_{\partial\Delta_p} \omega^{(p-1)}$$

例えば $p=1$ の場合はこの定理は通常の部分積分の公式に一致する

$$\int_0^1 dt \frac{df(t)}{dt} = f(1) - f(0)\,.$$

また $p=2$ の場合は Green の定理に他ならない．

一般の空間 X 上の積分も引き戻しにより単体上の積分に帰着してしまう．これは微分形式の外微分演算子 d が引き戻しで共変に振る舞うことの帰結である．このことから上の積分定理はそのまま多様体上の積分定理に書き換えられ，

$$\int_X d\omega^{(p-1)} = \int_{\partial X} \omega^{(p-1)}$$

という等式が成立する．これが (一般化された)**Stokes の定理**である．

微分形式の内積　p 形式の間の内積は空間全体 M の n 次元積分を用いて

$$(\omega, \mu) = \int_M \omega \wedge \star\mu$$

$(\omega, \mu \in \Omega^p(M))$ のように定義される．この内積は対称 $(\omega, \nu) = (\nu, \omega)$ である．

空間 M に境界がない $(\partial M = 0)$ の場合は Stokes の定理により $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$, $\nu \in \Omega^p(M)$ に対し，

$$(d\omega, \nu) = (\omega, \delta\nu)$$

が成立する．これは例えば

$$\begin{aligned}(d\omega, \nu) &= \int d\omega \wedge \star\nu = \int_M d(\omega \wedge \star\nu) + (-1)^p \int_M d\omega \wedge \star\nu \\ &= \int_{\partial M} \omega \wedge \star\nu + (-1)^{np-n+1} \int_M \omega \wedge \star(\star d \star \nu) = \int_M \omega \wedge \star\delta\nu = (\omega, \delta\nu)\end{aligned}$$

などとすると確かめられる．

電磁気学の作用　Maxwell 方程式は微分形式を用いて $dF = 0, \delta F = j$ と簡明に書かれたがこれを運動方程式として導く作用汎関数も簡単な形

$$S[A] = \frac{1}{2}(dA, dA) - (j, A)$$

になる．ここでゲージポテンシャルを用いて $F = dA$ と書いている．この形に書くことで $dF = 0$ は自動的に満足される．この作用を A について変分 ($A' = A + \epsilon A_1$ と書く) をとると

$$S[A'] - S[A] = \epsilon\left((dA, dA_1) - (j, A_1)\right) = \epsilon\left((\delta dA - j, A_1)\right)$$

となる．ここで $O(\epsilon^2)$ は無視した．この式より A に対する運動方程式 $\delta dA - j = 0$ が導かれる．作用原理が電場や磁場を表す F の変分ではなくゲージポテンシャル A で書かれることに注意する．

Homology と Cohomology　多様体 M の大局的な構造を見る目安として Homology と Cohomology がある．これらは外微分演算子 d と境界演算子 ∂ の共通する性質

$$d^2 = 0\,, \quad \partial^2 = 0$$

に基づくものである．

まずホモロジーとは空間 M 上の鎖体 X であって

$$\partial X = 0$$

を満たすが $X = \partial Y$ という形に書けない部分空間を指す．つまり $Z_p(M) = \{c | c \in p \text{ 鎖体}, \partial c = 0\}$，$B_p(M) = \{c | \text{ there exists } b \in p-1 \text{ 鎖体}, c = \partial b\}$ として

$$H_p(M) = Z_p(M)/B_p(M)$$

と書かれる．このような元は有限生成の群をなし非自明なトポロジーを持つ空間ではゼロでない．例えば[10]

$$\begin{aligned} &H_0(\mathbf{T}^2) = \mathbf{Z}\,, \; H_1(\mathbf{T}^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\,, \; H_2(\mathbf{T}^2) = \mathbf{Z}\,, \\ &H_0(\mathbf{S}^2) = \mathbf{Z}\,, \; H_1(\mathbf{S}^2) = 0\,, \; H_2(\mathbf{S}^2) = \mathbf{Z}\,. \end{aligned}$$

一方**コホモロジー**とは p-形式で $d\omega = 0$ を満たすもののうち $\omega = d\mu$ と書けるものを同一した線形空間を指す．つまり $Z^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) | d\omega = 0\}$，$B^p = \{\omega \in \Omega^p(M) | \text{there exists } \mu \in \Omega^{p-1}(M),\ \omega = d\mu\}$ と書くと

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$$

ホモロジーの元とコホモロジーの元の間には積分を通じて自然な内積が定義される．

$$c \in H_p(M)\,,\ \omega \in H^p(M)\ \rightarrow \int_c \omega$$

[10] $\mathbf{T}^2$ は 2 次元トーラス，$\mathbf{S}^2$ は 2 次元球面を指す．またより正確に言うとホモロジー群は鎖の係数として整数にするか実数にするかで異なる結果が得られるが，ここでは整数係数の場合を書いている．

ホモロジーやコホモロジーの元の取り方には不定性があるがこの内積には影響を与えないことに注意する

$$\int_{c+\partial b} \omega = \int_c \omega + \int_b d\omega = \int_c \omega \,, \quad \int_c (\omega + d\mu) = \int_c \omega + \int_{\partial c} \mu = \int_c \omega$$

ここで Stokes の定理と $d\omega = 0$, $\partial c = 0$ などを用いた．この内積を通じてホモロジー群とコホモロジー群は同型になる．